

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка

Рамський Андрій Олександрович

**ОСЕСИМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ
ДЛЯ БАГАТОШАРОВИХ ПЛИТ
З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ**

01.02.04 - механіка деформівного твердого тіла



Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеню
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1996

39.3
Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на

ЛННБ України ім.В.Стефаніка



00760869 (-)

Науковий керівник

- доктор технічних наук, професор
Рудницький В'ячеслав Броніславович

Офіційні опоненти

- доктор технічних наук, професор
Бабич Степан Юрійович
кандидат фізико-математичних наук
Гаращук Іван Миколайович

Провідна організація

- Інститут гідромеханіки
НАН України, м.Київ

Захист дисертації відбудеться "28" січня 1998 року о 10 год. 00 хв.
на засіданні спеціалізованої ради Д 01.03.03 з механіки при Інституті Ме-
ханіки ім. С.П. Тимошенка НАН України за адресою: 252057, Київ, вул.
Нестерова, 3.

З дисертацією можна ознайомитися в науковій бібліотеці Інституту Механіки
НАН України.

Автореферат розісланий "21" грудня 1996 р.

Вчений секретар

спеціалізованої ради

доктор технічних наук

І.С.Чернишенко

Дисертаційна робота присвячена дослідженню напружено-деформованого стану багатошарової плити, що складається з початково напружених шарів.

Актуальність теми. Задачі механіки шаруватих конструкцій належать до однієї з найбільш важливих областей механіки деформівного твердого тіла. Їх розв'язок пов'язаний із запитамі машинобудування, судно - та авіабудування, а також багатьох інших галузей промисловості, що вимагають, з одного боку, виконання жорстких умов надійності і мійності, з іншого - низької матеріалосмності.

Початок в дослідженні багатошарових плит був покладений в рамках плоскої задачі в роботах В.В.Власова та І.Г.Альперіна. Альперін розглянув суттєво багатошарове середовище; розв'язок будувався за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Проте практично при зростанні параметру інтегрування функціональна система рівнянь розв'язку ставала майже виродженою.

В 1942 р. Г.С.Шапіро розв'язав задачу для n -шарової плити методом інтегрального перетворення Ханкеля. Проте числовий розв'язок цієї задачі був отриманий лише для випадку $n=1$. У наступні роки було розглянуто ряд конкретних задач для дво-, три- шарової плити у роботах Акума, Бурмістра, Буфлера, Грінвуда, Нельсона, Парія, Полоза, Р.М.Раппопорт, Снеддона, Фокса, Царднера, Шифмана. Пізніше у роботах Буфлера, В.С.Нікішина і Г.С.Шапіро, В.І.Петришина і А.К.Приварникова, Р.М.Раппопорт розглянуто n -шарові плити; числовий розв'язок отримано в основному для випадків $n=2,3$, а в роботі В.С.Нікішина і Г.С.Шапіро для випадку $n=21$.

В останні роки подальший розвиток отримали дослідження, пов'язані з контактною взаємодією попередньо напружених тіл. Вивчення таких питань досить важливе з теоретичної і практичної точок зору, оскільки початкові напруження практично завжди наявні в елементах конструкцій і механізмів. Відзначимо, що хоча при дослідженні задач контактної взаємодії пружних тіл з початковими напруженнями останні можна врахувати в рамках нелінійної теорії пружності, при

достатньо значній величині початкових напружень досліджувані задачі можна розв'язувати в лінеаризованому варіанті.

На даний момент склалися два підходи при розв'язку задач для тіл з початковими напруженнями. Один з них пов'язаний з розв'язком задач для тіл з конкретною формою пружного потенціалу. В рамках такого підходу свої дослідження проводили В.М.Александров, Н.Х.Арутюнян, С.Р.Брудний, І.В.Воротинцева, Б.І.Сметанін, Л.М.Філіппова та ряд зарубіжних вчених (перші роботи у цьому напрямі з'явилися у 1978 р.). Ними, зокрема, отриманий ряд результатів, пов'язаних з контактними задачами для півпростору і шару з початковими напруженнями. Другий підхід, що розвивався паралельно з першим, пов'язаний з дослідженнями контактних задач для пружних тіл з початковими напруженнями з довільною структурою пружного потенціалу в загальному випадку для стисливих і нестисливих матеріалів для теорії скінчених (великих) і декількох варіантів теорій малих початкових деформацій. Ці дослідження проводяться в рамках лінеаризованої теорії пружності тіл з початковими напруженнями. Такий підхід вперше запропонований в роботах О.М.Гузя (1980 р.). Надалі метод отримав розвиток також у роботах С.Ю.Бабича, П.П.Григоренка та В.Б.Рудницького. Детальний огляд задач контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями приведено у роботах С.Ю.Бабича, О.М.Гузя, В.Б.Рудницького. Автори розглядали задачі про тиск жорстких та пружних штампів різної конфігурації на попередньо напружений шар.

По складу задач, які розділяються на статичні, динамічні та на задачі, у яких досліджуються питання стійкості, можна сказати наступне. Питання початкових напружень в шаруватих конструкціях в динамічних задачах дістало своє відображення в задачах для одного шару - в роботах Гузя О.М., Жука О.П., Махорта П.Г.; двошарові середовища досить повно дослідив Ле Мінь Хань. Щодо багатшарових плит, то у випадку періодичної структури такі задачі розв'язані у роботах Ситенка М.П. Питання поверхневої нестійкості для шаруватих півобмежених тіл регулярної структури, а також для скінченного числа шарів спряжених із структурно-однорідним півпростором в тримірній лінеаризованій по-

становці в рамках моделі кусково-однорідних середовищ розглянуті в роботах О.М.Гузя, В.М.Чехова.

Проте, незважаючи на те, що кількість публікацій, присвячених задачам для тіл з початковими напруженнями постійно зростає, кількість задач, у яких розглядаються кількшарові плити з початковими напруженнями зовсім незначна, а про статичні задачі, у яких розглядаються суттєво багатошарові плити з початковими напруженнями автору взагалі невідома.

Таким чином, залишилась практично недослідженою просторова осесиметрична статична задача про багатошарову плиту з початковими напруженнями шарів.

Мета роботи. Дана дисертаційна робота присвячена систематичному вивченню осесиметричної просторової статичної задачі для багатошарової плити з початковими напруженнями у шарах плити в рамках лінеаризованої теорії пружності тіл з початковими напруженнями, включаючи:

- постановку осесиметричної просторової статичної задачі для попередньо напруженої багатошарової плити і розвиток методу її розв'язку;
- розробку методу для чисельного інтегрування системи рівнянь досліджуваної задачі, включаючи чисельний розв'язок функціональної системи рівнянь задачі, а також створення алгоритму і пакету програм для його реалізації на EOM;
- отримання числових результатів для різних значень параметрів досліджуваної системи і вигляду пружного потенціалу;
- чисельний аналіз впливу кількості шарів та початкових напружень на величину і характер напружено-деформованого стану плити, а також виявлення нових механічних ефектів, що виникають в процесі навантаження плити.

Наукова новизна та значущість результатів роботи. В дисертаційній роботі розроблено метод розв'язку просторової статичної осесиметричної задачі для багатошарової плити з початковими напруженнями; доведено існування і єдиність розв'язку функціональної системи задачі для випадку, коли плита складається із шарів, що відповідають рівним кореням характеристичного рівняння; побудовані матриці функціональних систем рівнянь для довільної конструкції плити та

довільного способу задання граничних умов; побудовано і реалізовано на ЕОМ алгоритм чисельного розв'язку задачі у вигляді пакету програм; вперше досліджено вплив початкових напружень, геометричних, типорозмірних параметрів та вигляду пружного потенціалу на характер і величину напружено-деформованого стану багатошарової плити.

Достовірність результатів забезпечується використанням строгих і обґрунтованих тримірних постановок задач, отриманням конкретних результатів з контрольованою точністю, співпадінням з розв'язками більш простих задач, отриманих іншими авторами з використанням реальних експериментів у випадку наявності початкових напружень, а також із граничним випадком відсутності початкових напружень.

Теоретичне значення та практична цінність. Отримані в дисертаційній роботі розв'язки задачі реалізовані у вигляді програм на ЕОМ, які дозволяють дослідити напружено-деформований стан плити і можуть бути використані в інженерній практиці при розрахунках конструкцій, що мають початкові напруження. А подальший розвиток моделі може допомогти описувати більш тонкі ефекти, наприклад, у випадку плити з поверхнею шарів ненульової кривини.

Реалізація та впровадження результатів, одержаних в дисертації. Наукові дослідження виконувались в рамках робіт, передбачених програмами та планами НДР Національної академії наук України, а також проектів, що фінансуються Державним комітетом по науці і техніці України. Результати, отримані в дисертаційній роботі, увійшли до звіту держбюджетної дослідної теми №8Б-94, держреєстраційний номер 0194V035009, та до звіту, по темі "Теоретичні основи розрахунку напружено-деформованого стану контактуючих тіл з різними властивостями". Вони можуть бути застосовані в практиці проектування конструкцій конструкторських бюро країни.

Апробація роботи. Результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на наукових семінарах на засіданні школи-семінару "Нелінійні граничні задачі математичної фізики та їх застосування" (м. Чернівці, 1995), на Всеукраїнській науковій конференції "Розробка та застосування математичних методів в

науково-технічних дослідженнях” (м. Львів, 1995), на третьому міжнародному симпозиумі “Некласичні проблеми теорії тонкостінних елементів конструкцій та фізико-хімічної механіки композиційних матеріалів (пам’яті проф. Б.Л.Пелеха)” (м. Івано-Франківськ, 1995) та на конференції “Моделювання і дослідження стійкості систем” (м. Київ, 1996).

Публікації. Основні результати роботи відображені в [1-6].

В праці, яка була написана у співавторстві з науковим керівником, професору, доктору технічних наук В.Б.Рудницькому належить ідея проведення досліджень, а також постановка задач, дисертанту - розробка методу їх розв’язання, проведення досліджень на ПК, аналіз експериментальних та чисельних результатів. Разом із співавтором також обговорювалися та аналізувалися отримані результати.

Структура роботи. Дисертаційна робота викладена на 135 сторінках, включаючи 39 малюнків. Бібліографічний список нараховує 115 найменувань робіт.

ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ.

У вступі приведено огляд робіт, присвячених дослідженням багатошарових середовищ, а також задач для тіл з початковими напруженнями; зформульована ціль дослідження; обґрунтована актуальність, новизна і практична значимість отриманих результатів; коротко викладений зміст роботи по главах.

В першій главі на основі результатів, отриманих в роботах О.М.Гузя, наведено основні рівняння і співвідношення лінеаризованої теорії пружності тіл з початковими напруженнями, записані в декартових координатах y_i початкового деформованого стану, які в натуральному стані (нульові початкові напруження) співпадають з лагранжевими координатами x_i . Координати x_i і y_i зв’язані співвідношеннями $y_i = \lambda_i x_i$ ($i = \overline{1,3}$), в яких коефіцієнти видовжень вздовж осей λ_i визначають переміщення початкового стану:

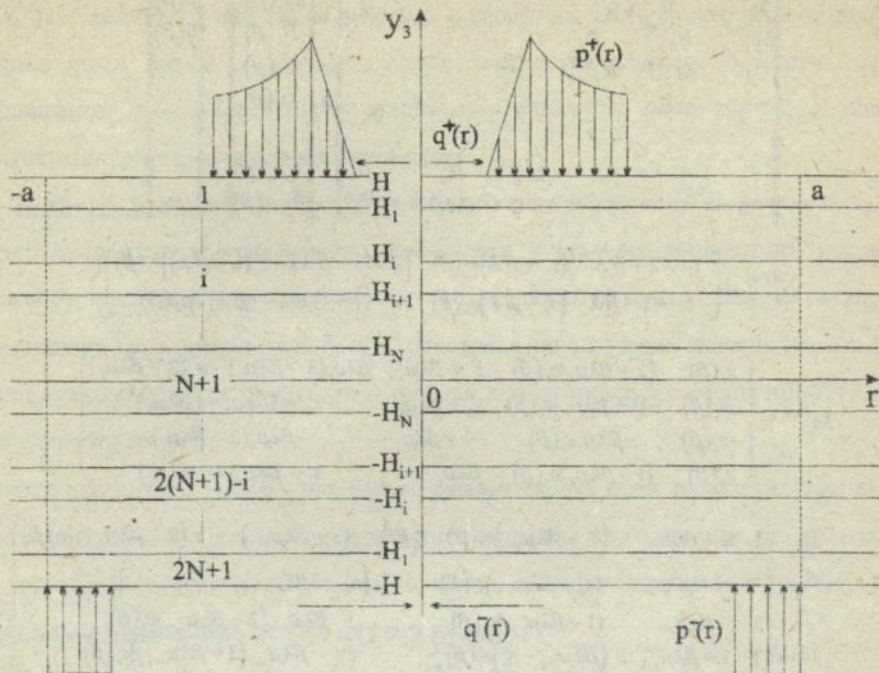
$$u_m^0 = \delta_{im} (\lambda_i - 1) \lambda_i^{-1} y_i, \quad \lambda_i = \text{const} \quad (i = \overline{1,3})$$

Основні співвідношення і рівняння розглянуто для стисливих і нестисливих тіл у випадку пружних потенціалів довільної структури для теорії скінчених (великих) початкових деформацій і декількох варіантів теорії малих початкових деформацій при однорідних початкових напруженнях

$$S_{11}^0 = S_{22}^0 \neq S_{33}^0, \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$$

Наведено основні співвідношення для рівних і нерівних коренів визначального рівняння. В кругових циліндричних координатах отримано загальні розв'язки лінеаризованих рівнянь у випадку однорідних початкових напружень і потенціалів довільної структури. Для гармонійного потенціалу, потенціалів Бартенєва-Хазановича і Трелоара наведено значення величин, використовуваних в дослідженнях.

В другій главі в рамках лінеаризованої теорії пружності у випадку однорідного початкового напруженого стану розглянуто постановку просторової осесиметричної статичної задачі для $2N+1$ - шарової конструктивно-симетричної плити з початковими напруженнями шарів при довільному навантаженні її граничних поверхонь (міжшаровий контакт - ідеальний). З такої задачі можна виділити дві наступні задачі: 1) задачу для багатошарової плити з початковими напруженнями, навантаженої на верхній і нижній граничних площинах симетрично відносно середньої площини $y_3 = 0$; 2) задачу для багатошарової плити без початкових напружень, навантаженої на верхній та нижній граничних площинах антисиметрично відносно площини $y_3 = 0$. Оскільки розв'язок задачі 2) дано в роботі В.С.Нікішина та Г.С.Шаніро "Пространственные задачи теории упругости для многослойных сред", надалі розв'язується задача 1) (мал. 1). Для конструктивно-симетричної $2N+1$ - шарової плити із симетричним граничним навантаженням розв'язок такої задачі зводиться до розв'язку задачі для $N+1$ - верхньої половини шарів плити, що лежать на абсолютно гладкому жорсткому півпросторі (поверхня якого описується рівнянням $y_3 = 0$).



Мал.1

З граничних умов:

$$\tilde{Q}_{33}^{(1)}|_{y_3=H} = p(r); \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)}|_{y_3=H} = q(r); \quad \tilde{Q}_{3r}^{(N+i)}|_{y_3=0} = 0; \quad u_3^{(N+1)}|_{y_3=0} = 0$$

та умов спряження шарів:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{33}^{(i)}|_{y_3=H_i} &= \tilde{Q}_{33}^{(i+1)}|_{y_3=H_i}; & \tilde{Q}_{3r}^{(i)}|_{y_3=H_i} &= \tilde{Q}_{3r}^{(i+1)}|_{y_3=H_i}, \\ u_r^{(i)}|_{y_3=H_i} &= u_r^{(i+1)}|_{y_3=H_i}; & u_3^{(i)}|_{y_3=H_i} &= u_3^{(i+1)}|_{y_3=H_i}, \quad i = \overline{1, N} \end{aligned}$$

через підстановку у визначальні рівняння, що у випадку рівних коренів відповідного характеристичного рівняння $n_1 = n_2$ мають вигляд:

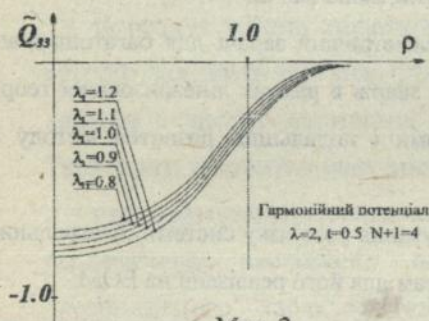
$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial}{\partial r}(\varphi_1 + \varphi_2) + z_1 \frac{\partial^2}{\partial r \partial z_1} \varphi_2; & u_3 &= \frac{m_1}{\sqrt{n_1}} \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z_1^2} + s_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1} \right]; \\ \tilde{Q}_{3r} &= \frac{c_{44}(1+m_1)}{\sqrt{n_1}} \left[\frac{\partial^2}{\partial r \partial z_1}(\varphi_1 + s_0 \varphi_2) + z_1 \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial r \partial z_1^2} \right]; \\ \tilde{Q}_{3r} &= c_{44}(1+m_1) \left[\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}(\varphi_1 + s \varphi_2) + z_1 \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial z_1^3} \right] \end{aligned}$$

шляхом інтегрального перетворення Ханкеля отримано систему $4N+2$ функціональних рівнянь:

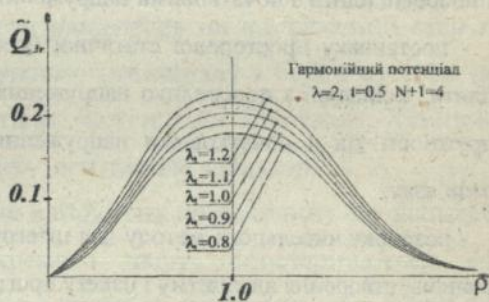
жити на абсолютно гладкому жорсткому півпросторі. Побудовано функціональні матриці такої задачі у випадках, коли плита складається з шарів, яким відповідають рівні корені характеристичного рівняння; різні корені; а також функціональну матрицю комбінованої плити.

В третій главі аналізується вплив початкових напружень на величину і характер напружено-деформованого стану плити у випадку конкретного вигляду пружного потенціалу: для стисливих тіл - гармонійний потенціал, для нестисливих - потенціали Бартенева-Хазановича і Трелоара, а також різних значень параметрів досліджуваної системи. Результати отримані в ході числового експерименту і подані у вигляді графіків.

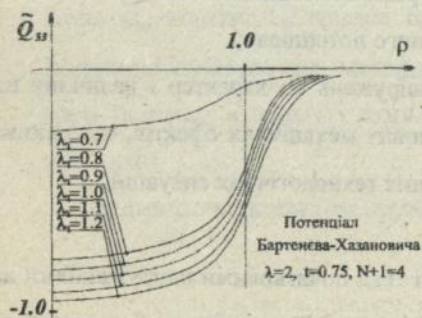
В якості часткового випадку розглянуто варіант задачі, коли характеристики кожного шару однакові, що може трактуватися як задача про один шар, що лежить на жорсткій основі. Відмічені наявні механічні ефекти і хороше співпадіння з результатами, отриманими раніше іншими авторами.



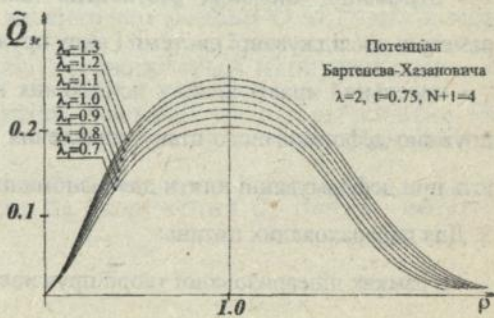
Мал. 2



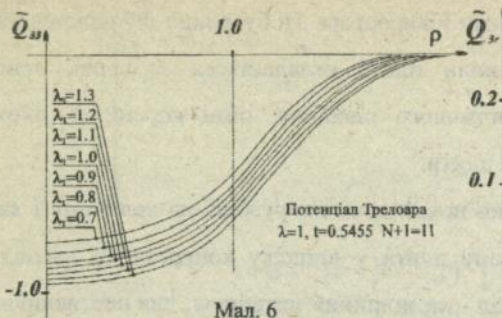
Мал. 3



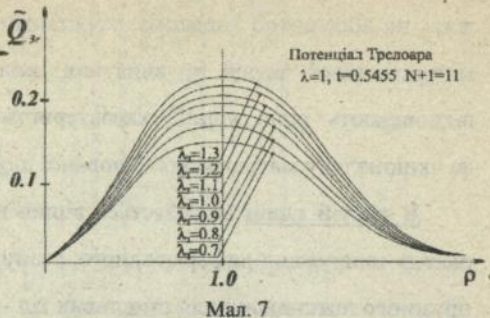
Мал. 4



Мал. 5



Мал. 6



Мал. 7

Величини λ_1 характеризують початкове видовження ($\lambda_1 < 1$ - стиск, $\lambda_1 > 1$ - розтяг);

$\lambda = H/a$ - відношення товщини плити до радіусу завантаженого кругу.

В закінченні подані в загальному вигляді основні результати дисертаційної роботи та висновки, що зроблені на основі отриманих результатів.

1. Таким чином, досліджена просторова статична осесиметрична задача для багатошарової плити з початковими напруженнями, включаючи:

- постановку просторової статичної осесиметричної задачі для багатошарової плити, складеної з попередньо напружених шарів в рамках лінеаризованої теорії пружності тіл з початковими напруженнями і подальший розвиток методу її розв'язку;

- розробку чисельного методу для інтегрування розв'язку системи інтегральних рівнянь, створення алгоритму і пакету програм для його реалізації на ЕОМ;

- отримання числових результатів для різних випадків співвідношення параметрів досліджуваної системи і виду пружного потенціалу;

- чисельний аналіз впливу початкових напружень на характер і величину напружено-деформованого стану, виявлення нових механічних ефектів, що виникають при деформуванні плити для різноманітних технологічних ситуацій.

2. Для перерахованих питань:

- в рамках лінеаризованої теорії пружності тіл з початковими напруженнями дано постановку просторової осесиметричної статичної задачі для багатошарової плити з початковими напруженнями.

- запропоновано метод розв'язку вказаної задачі, суть якого полягає в приведенні її з допомогою інтегрального перетворення Ханкеля до системи функціональних рівнянь, розв'язок якої шукається модифікованим методом Гауса послідовного виключення невідомих.

- розроблено алгоритм чисельної реалізації і створено пакет програм на мові FORTRAN для отримання числових результатів.

- для конкретних значень параметрів системи і виду пружного потенціалу побудовані залежності розподілу напружень у плиті від величини початкових напружень.

3. В результаті аналізу числових результатів встановлено:

- наявність початкових напружень у плиті приводить до суттєвої зміни величин і характеру розподілу напружень Q_{33} , Q_{3r} у плиті. Це виявляється у зменшенні напружень у випадку стиску і збільшенні - у випадку розтягу пружних шарів плити.

- результат впливу початкових напружень на напружений стан плити суттєво залежить від виду пружного потенціалу і більш суттєво проявляється в високоеластичних тілах (потенціали Бартенева-Хазановича і Трелоара), якісний вплив носить ідентичний характер.

- при прямуванні початкових напружень до величин, що відповідають по-верхневій нестійкості окремого шару, спостерігаються ефекти "резонансного" характеру, що виявляються в різкому зменшенні напружень Q_{33} плити. Ці явища були виявлені раніше О.М.Гузєм в механіці крихкого руйнування матеріалів з початковими напруженнями і отримані пізніше в задачах контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями.

- вплив початкових напружень на напруження Q_{3r} плити - несуттєвий.

Основний зміст дисертаційної роботи достатньо повно викладено в публікаціях:

1. Рамский А.А. Пространственные задачи для многослойных сред с начальными напряжениями.// Тез. докл. на межд. семинаре "Триболог-10М"- "SLAVYAN-TRIBO-1", Рыбинск-Москва, 1993.
2. Рамський А.О. Задача про тиск двох співвісних циліндричних жорстких штампів на систему двох трансверсально-ізотропних шарів з початковими напруженнями. Випадок рівних коренів характеристичного рівняння.// Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. праць.-К.: -1995. Вип.8, с. 167-172.
3. Рамський А.О., Рудницький В.Б. Моделювання задачі навантаження системи $(N+1)$ - шару з початковими напруженнями.// Розробка та застосування мат. методів в н-т дослідженнях: Всеукр. наук. конф. Зб. наук. праць. Львів, 1995.
4. Рамський А.О., Рудницький В.Б. Побудова асимптотичного розв'язку просторової задачі теорії пружності для багатошарової плити з початковими напруженнями.// Нелинейные краевые задачи мат. физики и их приложения. Сб. науч. трудов./ К.: Ин-т математики НАН Украины, 1995.- С. 228-232.
5. Рамський А.О., Рудницький В.Б. Розв'язок просторової задачі теорії пружності для багатошарової плити з початковими напруженнями.// Некласичні проблеми теорії тонкостінних елементів конструкцій та фізико-хімічної механіки композиційних матеріалів (пам'яті проф. Б.Л.Пелеха): Третій міжнародний симпозіум.-Івано-Франківськ, 1995.
6. Блажівський А.М., Рамський А.О., Рудницький В.Б. Задача для комбінованої плити, складеної з попередньо напружених шарів різної природи коренів характеристичного рівняння.// Тези доп. на конф.- Моделювання і дослідження стійкості систем: К., 1996.

Ramsky A.A. The spatial problems of the elastic theory for the multilayer plates with initial stresses.

Dissertation for the Candidate of Physical and Mathematical Sciences Degree in Speciality 01.02.04 - mechanics of a deformable solid, S.P.Timoshenko Institute of mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 1996.

Six papers containing the investigation of the multilayer plates with initial stresses. The initial stresses and geometrical parameters of the plate, elastic potential type influence on a value of stressed-strained state of the plate have been studied.

Рамский А.А. Пространственные задачи теории упругости для многослойных плит с начальными напряжениями.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 - механика деформируемого твердого тела, Институт механики им. С.П.Тимошенко Национальной академии наук Украины, Киев, 1996.

Защищаются 6 научных работ, которые содержат исследования многослойных плит с начальными напряжениями. Изучено влияние начальных напряжений, геометрических параметров плиты, вида упругого потенциала на величину напряженно-деформируемого состояния многослойной плиты.

Ключові слова: початкові напруження, лінеаризована теорія пружності, зовнішнє навантаження, граничні умови, багатошарова плита, попередньо напружені шари, функціональна матриця системи рівнянь.

AB 36.607