Dem.

Міністерство освіти України
Львівський державний університет ім. Ів.Франка

на правах рукопису

Загороднюк Андрій Васильович

УМОВИ НЕПЕРЕРВНОСТІ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ ТА СТРУКТУРА ЯДРА ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ НА БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

(01-01-01 - математичний аналіз)

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів - 1996

Дисертацією є рукопис

Робота виконана у відділі нелін... туту прикладних проблем механік... і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України.

Науковий керівник –	доктор фізико-математичних наук, професор А.М.Плічко
Офіційні опоненти –	доктор фізико-математичних наук О.В.Лопушанський
	доктор фізико-математичних наук, професор Ю.І.Петунін
Провідна установа –	Харківський державний університет

Захист відбудеться 20 лютого 1997 року о 15.00 на засіданні спеціалізованої вченої ради Д.04.04.01. при Львівському державному університеті ім. Ів.Франка за адресою: 290001, м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 377.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці ЛДУ (м. Львів, вул. Драгоманова, 5)

Автореферат розіслано 20 січня 1997 року.

Вчений секретар спеціалізованої
вченої ради Д.04.04.01 Я.В.Микитюк

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Теорія поліноміальних відображень на банахових просторах є однією з ділянок нелінійного функціонального аналізу, яка зараз бурхливо розвивається. Дослідження у цій галузі розпочались у 20-х, початок 30-х років у роботах М.Фреше, С.Мазура, А.Майкла, В.Орліча, С.Банаха та інших математиків. З цього часу розв'язано ряд важливих проблем теорії поліноміальних операторів які відкривають нові можливості для наступних досліджень у цій теорії та її застосування у інших областях математики; оформились нові напрямки такі як теорія аналітичних відображень, теорія просторів аналітичних та поліноміальних відображень на банаховому просторі. Цей розвиток добре відображений в монографіях. Вагомий вклад до нього внесли С.Дінін, А.Пелчинський, П.Мазе, Р.Арон, П.Енфло.

Важливим напрямком у теорії поліноміальних операторів є встановлення умов неперервності поліноміальних відображень та відображень, які є оберненими до поліноміальних. Вона цікава з точки зору її застосування у теорії нелінійних диференціальних рівнянь. Так Ж.Бохнак та Ж.Сісяк встановили, що неперервність поліноміальних операторів, які діють між локально-опуклими просторами еквівалентна їх обмеженості. У своїх роботах Ю.Петунін та В.Савкін встановили деякі умови неперервності обернених відображень до аналітичних (і отже, поліноміальних) операторів.

Іншим цікавим напрямком досліджень є вивчення структури ядра поліноміальних функціоналів. Аналог теореми Гільберта про нулі у кільці аналітичних функціоналів на локально-опуклих комплексних просторах доведено у роботах П.Мазе. Властивостями ядра поліноміальних функціоналів на дійсних банахових просторах займався Г.Ауербах.

Мета роботи полягає в дослідженні топологічних та геометричних властивостей поліноміальних операторів на банахових просторах та застосуванні отриманих результатів для вивчення деяких інших класів нелінійних відображень на банахових просторах, а також, коли це можливо, на F-просторах.

Методи дослідження. При доведенні теорем про берівське відображення та борелівський графік для поліноміальних операторів використовувались топологічні властивості повних метричних груп та берівських відображень, що діють між ними. Доведення теорем про обмеженість поліноміальних функціоналів на банахових просторах використовують властивості базисів Маркушевича на цих просторах. При доведенні теорем про структуру ядра поліноміальних функціоналів використані властивості лінійних та полілінійних функціоналів та метод математичної індукції. Застосовуються також, деякі методи алгебраїчної геометрії та алгебри числових поліномів.

Наукова новизна. У дисертаційній роботі вперше доведено аналоги теорем про берівське відображення та борелівський графік для поліноміальних операторів. Ці результати природно узагальнені і на випадок (F)-просторів. Також отримано аналогічні результати для інших нелінійних відображень, які в тому чи іншому сенсі близькі до поліноміальних. Так, зокрема, введено поняття ізотропного оператора, і показано, що для ізотропних операторів справедливі вказані теореми. Отримані результати стосовно обмеженості поліноміальних операторів на необмежених множинах, введено поняття суттєвого ядра полінома. У дисертації вивчаються геометричні властивості множини нулів ідеалів, породжених поліноміальними функціоналами на банахових просторах. Зокрема доведено, що ядро всякого поліноміального функціоналу на комплексному банаховому просторі нескінченної розмірності містить нескінченновимірний афінний підпростір. Доведено теорему про лінійчасту структуру ядра поліноміального функціоналу на комплексному лінійному просторі, якщо розмірність простору є достатньо великою відносно степеня полінома. Доведено аналог теореми Гільберта про нулі ідеалів породжених скінченним числом поліномів на комплексному банаховому просторі та отримано деякі результати стосовно будови ядра поліноміальних функціоналів на дійсному банаховому просторі.

Значна частина результатів була отримана при розв'язанні задач поставлених Банахом, Мазуром, Орлічом та Ауербахом у відомій "Шотландській книзі".

Наукова та практична цінність. Одержані результати можуть бути використані в теорії нелінійних функціональних рівнянь, у геометрії банахових просторів, а також у суміжних галузях нелінійного функціонального аналізу.

Основні положення дисертації, що виносяться на захист:

– теореми про борелівський графік та берівське відображення для поліноміальних операторів на банахових просторах; узагальнення цих результатів на деякі інші нелінійні відображення;

– про існування афінного підпростору у ядрі комплексного поліноміального функціоналу;

– аналог теореми Гільберта про нулі ідеалів поліноміальних функціоналів на комплексних банахових просторах;

Особистий внесок дисертанта. Всі наведені в дисертації основні результати отримані самостійно.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідались на міжнародній математичній конференції 24-та Зимова Школа з Абстрактного Аналізу (Бенешева Гура, Чехія, 1996), на Весняній Школі з Функціанального Аналізу '96 (Пасекі, Чехія, 1996), на Всеукраїнській науковій конференції присвяченій 70-річчю від дня народження професора П.С.Казімірського (Львів, 1995), на конференціїї "Підстригачівські читання" (Львів, 1996) на семінарах відділу нелінійного математичного аналізу Інституту прикладних проблем механіки й математики НАН України ім Я.С.Підстригача.

Публікації. Основний зміст дисертації доволі повно відображенний в наукових працях [1-3].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з вступу та трьох розділів, розбитих на 10 параграфів і списку літератури, який налічує 57 найменнувань; обсяг роботи 92 сторінки машинописного тексту.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовується актуальність теми дисертації, дано огляд найбільш близьких до цієї теми результатів, а також перераховано основні результати, які виносяться на захист.

У першому параграфі першого розділу вводяться основні означення, що використовуються, а також необхідні ідомі факти, сформульовані без доведення.

Нехай X і Y – лінійні простори над полем $\mathbb{K}$ дійсних або комплексних чисел. Називатимемо оператор $\bar{P}_k(x_1, \cdots, x_k)$ який діє з декартового степеня X^k в Y k-лінійним, якщо він лінійний по кожній компоненті. k-лінійний оператор $\bar{P}_k$ називається симетричним, якщо $\bar{P}_k(x_1, \cdots, x_k) = \bar{P}_k(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(k)})$ при будь-якій перестановці σ. Звуження P_k k-лінійного оператора $\bar{P}_k$ на діагональ $\Delta = \{(x_1, \cdots, x_k) \in X^k : x_1 = \cdots = x_k\}$, яку природно ототожнюють з X, називається однорідним поліноміальним оператором степеня k (коротше k-мономом). Скінченну суму k-мономів $0 \leq k \leq n$ $P(x) = P_0(x) + P_1(x) + \cdots + P_n(x)$, $P_n \neq 0$ називають поліноміальним оператором степеня n (коротше поліномом степеня n).

Теорема 1.1. *Нехай P – k-моном з X в Y. Тоді відповідне симетричне k-лінійне відображення $\bar{P}$ задається формулою:*

$$\bar{P}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{k!}\triangle^n_{x_1,\cdots,x_n}P(x),$$

де x – довільна точка X, а

$$\triangle^1_{x_1}P(x) = P(x + x_1) - P(x),$$

$$\triangle^2_{x_1,x_2}P(x) = P(x + x_1 + x_2) - P(x + x_1) - P(x + x_2) + P(x)$$

і нарешті:

$$\triangle^{j+1}_{x_1,\cdots,x_{j+1}}P(x) = \triangle^1_{x_{j+1}}[\triangle^j_{x_1,\cdots,x_j}P(x)].$$

Це співвідношення отримало назву поляризаціиної формули.

Наступним результатом такого типу є результат, який дає можливість знайти однорідну k-ту компоненту P_k поліьома P знаючи сам поліном.

Лема 1.3. *Нехай $F(t) = \sum_{k=0}^n t^k y_k$, де $t \in \mathbb{K}$ і $y_0, y_1, \ldots, y_n \in Y$. Тоді існує матриця (a_{kj}) $k, j = 0, 1, \ldots, n$) елементи a_{ij} якої належать раціональному підкільцю $\mathbb{K}$ і не залежать від $y_0, y_1, \ldots y_n$, така, що*

$$y_k = \sum_{j=0}^n a_{kj}F(j).$$

Теорема 1.2. *Нехай P – поліноміальний оператор степеня n. Тоді k-та однорідна компонента P знаходиться за формулою:*

$$P_k(x) = \sum_{j=0}^n a_{kj}P(jx),$$

де матриця (a_{kj}) залежить лише від степеня n.

Більшість результатів, які доведені у §2 першого розділу були сформульовані у роботах Мазура та Орліча для поліноміальних функціоналів на банахових просторах. Проте їх доведення, наскільки нам відомо не друкувались. У дисертації пропонуються доведення цих результатів для поліноміальних функціоналів на довільних лінійних просторах.

Означення 1.1. Поліноміальний функціонал $p \in \mathbb{K}[X]$ ділить поліноміальний функціонал $q \in \mathbb{K}[X]$ (позначаємо $p|q$) якщо існує поліноміальний функціонал $r \in \mathbb{K}[X]$ такий, що $q = pr$. У цьому випадку кажуть, що p є дільником q. Якщо поліноміальний функціонал p є дільником q_1 і q_2 то p називається спільним дільником поліноміальних функціоналів q_1 і q_2.

Означення 1.2. Два поліноми взаємно прості, якщо всякий їхній спільний дільник належить полю скалярів $\mathbb{K}$.

Означення 1.3. Поліном $p \in \mathbb{K}[X]$ називається незвідним, якщо його не можна подати у вигляді добутка двох поліномів з $\mathbb{K}[X]$ ненульового степеня.

Лема 1.5. *Нехай $r, q, p \in \mathbb{K}[X]$ і r – незвідний поліном. Тоді, якщо $r|pq$ то $r|p$ або $r|q$.*

Наслідок 1.1. *Розклад полінома $p \in \mathbb{K}[X]$ на незвідні співмножники єдиний з точністю до перестановки та мультиплікативної константи. Іншими словами кільце $\mathbb{K}[X]$ – факторіальне.*

Теорема 1.3. *Нехай $p \in \mathbb{K}[X]$ – незвідний поліноміальний функціонал. Тоді знайдеться скінченновимірний підпростір $WS \subset X$ такий, що звуження $p|_W$ полінома p на W – незвідний поліном.*

Теорема 1.4. *Нехай P і Q – поліноміальні оператори з X в Y. Тоді якщо для будь-якого лінійного функціоналу $l \in Y'$ $l(Q)|l(P)$ (де Y' – алгебраїчно спряжений простір до Y) то існує функціонал $r \in \mathbb{K}[X]$ такий, що $P = rQ$.*

Як добре відомо, при деяких додаткових умовах, лінійний оператор заданий на топологічному лінійному просторі (далі ТЛП) стає неперервним. Аналогічні умови мають місце і для поліноміальних операторів. Зокрема виконується наступна

Теорема 2.1. *Нехай X – топологічний лінійний простір, Y - локально опуклий, $P: X \to Y$ – k-моном, $\Gamma(Y)$ - множина півнорм на Y. Тоді еквівалентні наступні твердження:*
1. Для кожного $q \in \Gamma(Y)$ існує непорожня відкрита множина U в X така, що $q \circ P$ – обмежена множина в U.
2. Для кожного $q \in \Gamma(Y)$ існує окіл нуля U в X такий, що $q \circ P$ обмежена в U.
3. P – неперервне в нулі.
4. P – неперервне в кожній точці простору X.

Таким чином, якщо X – локально обмежений простір, а Y – локально опуклий, то з обмеженості монома випливає його неперервність.

У першому параграфі другого розділу встановлено аналогічну теорему для випадку коли X і Y – псевдонормовані лінійні простори.

Нагадаймо, що простір X називається псевдонормованим, якщо існує функція $x \mapsto |x|$ з X в $\mathbb{R}^+$ така, що
1. Якщо $|\lambda| \le 1$ то $|\lambda x| \le |x|$ для будь-якого $x \in X$.
2. $|x + y| \le |x| + |y|$ для будь-яких $x, y \in X$.
3. $|x| = 0$ тоді й тільки тоді коли $x = 0$.
4. Якщо $\lambda_n \to 0$ то $|\lambda_n x| \to 0$ для будь-якого $x \in X$.
5. Якщо $|x_n| \to 0$ то $|\lambda x_n| \to 0$ для будь-якого числа λ.
Як добре відомо, на лінійному метричному просторі X з метрикою ρ існує псевдонорма $|\cdot|$, для якої $\rho(x, y) = |x - y|$.

Лінійний оператор, який діє у псевдонормованих просторах неперервний тоді й тільки тоді, коли він обмежений.

Теорема 2.2. *Моном P степеня n, який діє з одного псевдонормованого простору X в інший буде неперервним в нулі тоді й тільки тоді коли він обмежений в нулі.*

Лема 2.2. *Якщо P – n-лінійний моном, $P : X \to Y$; X, Y - довільні псевдонормовані простори, неперервний в нулі, то відповідна симетрична n-лінійна форма теж неперервна в нулі.*

З теореми 2.2 та леми 2.2 випливає

Наслідок 2.1. *З обмеженості в нулі n-монома, який діє в псевдонормованих п; осторах випливає його неперервність в кожній точці.*

Теорема 2.3. *Нехай X, Y - псевдонормовані простори і $P : X \to Y$ - поліном, $P = P_n + \ldots + P_0$, де P_i - i-мономи. Тоді з обмеженості P в нулі випливає неперервність всіх P_i, $i = 1 \cdots n$ (і отже P) в кожній точці.*

Наслідок 2.2. *Нехай X, Y псевдонормовані простори, $P : X \to Y$ - поліноміальний оператор. Тоді еквівалентні наступні твердження:*
1). P – неперервний в нулі.
2). P – обмежений в нулі.
3). P – неперервний в кожній точці.
4). P – обмежений в кожній точці.

У другому параграфі розділу 2 доведені теоремі про борелівській графік та берівське відображення.

Очевидно, що для кожного розривного лінійного оператора T на нормованому просторі X з необмеженості послідовності (Tx_i) випливає необмеженість послідовності $(T(x + x_i))$ для будь-якого елемента $x \in X$. Для поліноміального функціоналу другого степеня згаданий факт вже не має місця. Можливо у зв'язку з цими фактами з'явилась

Проблема 56 (Мазур, Орліч, "Шотландська книга"). Нехай f – розривний поліноміальний функціонал степеня n на банаховому просторі X. "Степеня n " тут означає, що для будь-яких елементів x, y існують такі числа $a_0, \cdots, a_n$, що $f(x + ty) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ для всіх раціональних t. Чи існують такі точки $x_i \in X$, що $x_i \to 0$ і $f(x + x_i) \to \infty$ або хоч би $\overline{\lim}_i |f(x + x_i)| = \infty$ для всіх $x \in X$?

Теорема 2.4. *Нехай $P : X \to Y$ – поліноміальний оператор, X, Y – псевдонормовані простори або X – локально обмежений, а Y – локально опуклий ТЛП. Якщо оператор P – розривний, то існує така послідовність $z_i \in X, z_i \to 0$, при $i \to \infty$, що множина $\{P(x_0 + z_i\}_{i=1}^{\infty}$ необмежена для будь-якого елемента $x_0 \in X$.*

Теорема 2.5. *На кожному нормованому просторі X лінійної розмірності ω_1 існує розривний поліноміальний функціонал p другого степеня, для якого нема послідовності $x_i \to 0$ з $p(x + x_i) \to \infty$ при $i \to \infty$ для будь-якого елемента $x \in X$.*

Мотивуючись проблемою 56 і теоремою 2.4 введемо наступне

Означення 2.1 Нехай X, Y – (для простоти) метричні групи; не обов'язково комутативні, але групову операцію позначатимемо символом $+$. Казатимемо, що відображення $F : X \to Y$ – ізотропне, якщо воно або скрізь неперервне, або існує така послідовність $x_i \in X$, $x_i \to 0$, що для деякого числа $c > 0$

$$\sup_i \operatorname{dist}(F(x + x_i), F(x)) \geq c$$

для будь-якого $x \in X$.

Найбільше з чисел c, для яких виконується ця нерівність, називатимемо константою ізотропності; вона може дорівнювати й ∞. Будемо вважати, що скрізь неперервне відображення має нульову константу ізотропності.

Наслідок 2.3. (З теореми 2.4.) *Кожне поліноміальне відображення між нормованими просторами ізотропне (з константою ізотропності рівною 0 або ∞).*

Теорема 2.6. *Нехай X, Y – лінійні простори, як у теоремі 2.4 і $B_n : X^n \to Y$ – симетричне n-лінійне відображення. Якщо воно розривне, то існує така послідовність $\bar{z}_i = (z_i, \ldots, z_n) \in X^n$ $z_i \to \infty$ при $i \to \infty$, що $\{B_n(\bar{x}_0 + \bar{z}_i)\}_{i=1}^{\infty}$ – необмежена множина для будь-якого елемента $\bar{x}_0 = (x_0^1, \cdots, x_0^n) \in X^n$.*

Наслідок 2.4. *Кожне n-лінійне симетричне відображення між псевдонормованими просторами ізотропне (з константою ізотропності рівною 0 або ∞).*

Відзначимо деякі властивості ізотропних відображень.

Твердження 2.1. *Нехай F_n, $n = 1, \cdots, \infty$ – послідовність ізотропних відображень з метричної групи X в метричну групу Y, яка збігається рівномірно на обмежених множинах до відображення $F : X \to Y$, причому для констант ізотропності c_n $c := \inf_n c_n > 0$. Тоді відображення F теж ізотропне і його константа ізотропності не менша від c.*

Наслідок 2.5. *Рівномірна на обмежених множинах границя поліноміальних відображень буде ізотропним відображенням з нескінченною або нульовою константою ізотропності.*

Наступне просте твердження дає змогу будувати й інші приклади ізотропних відображень.

Твердження 2.2. *Нехай $X, Y, Z,$ – банахові простори, $F : X \to Y$ – ізотропне з константою $c > 0$, а $G : Y \to Z$ – відображення для якого існує така стала $a > 0$, що $||Gy|| \geq a||y||$ при будь-якому $y \in Y$. Тоді композиція $G \circ F$ буде ізотропною з константою ізотропності не меншою від ac.*

Нагадаймо деякі означення теорії метричних просторів. Підмножина M метричного простору X називається **залишковою**, якщо її доповнення $X \setminus M$ буде першої категорії, тобто зліченним об'єднанням ніде не щільних множин. Множина $M \subset X$ називається досконалою, якщо вона замкнена і не містить ізольованих точок. Відображення F з метричного простору X в метричний простір Y **задовольняє умову Бера**, якщо в кожній непорожній досконалій множині $M \subset X$ існує така залишкова відносно M множина $N \subset M$, що звуження $F|_N$ неперервне. І, нарешті, відображення $F : X \to Y$ називається **берівським**, якщо воно належить найменшому класові відображень, який включає всі неперервні відображення і замкнений відносно операції взяття поточкової границі послідовності відображень.

Твердження 2.3. *Якщо ізотропне відображення F повної метричної групи X в метричну групу Y розривне в нулі, то воно розривне на кожній залишковій множині $M \subset X$.*

Наслідок 2.6. *Нехай ізотропне відображення з повної метричної групи X в матричну групу Y задовольняє умову Бера (чи, принаймні, неперервне на деякій залишковій множині). Тоді F - неперервне.*

Оскільки кожне берівське відображення задовольняє умову Бера, то звідси маємо

Наслідок 2.7. *Берівське ізотропне відображення з повної метричної групи X в метричну групу Y буде неперервним.*

Наслідок 2.8. (Подібний результат є у одній праці Гайди). *Поліноміальний оператор з (F)-простору X в псевдонормований простір Y, який задовольняє умову Бера (або, принаймні, неперервний на деякій залишковій множині) буде неперервним.*

Наслідок 2.9. *Нехай F - таке неперервне взаємно однозначне відображення з сепарабельної повної метричної групи X на повну метричну групу Y, що F^{-1} буде ізотропним. Тоді F^{-1} - неперервне.*

Теорема 2.7. *Ізотропне відображення з довільної повної метричної групи X в сепарабельну повну метричну групу Y, яке має борелівський графік, буде неперервним.*

Зауваження 2.2. Як добре відомо, для лінійних операторів без припущення сепарабельності простору Y теорема про борелівський графік може не виконуватись. Ми не знаємо, чи справедлива теорема про замкнений графік для поліноміальних операторів у довільних банахових просторах. Наступне твердження показує, що вона справедлива для полілінійних операторів.

Твердження 2.4. Нехай $B : X^n \to Y$ - n-лінійний оператор, X, Y - банахові простори, який має замкнений графік. Тоді він буде неперервним.

З наслідку 2.9 зокрема випливає, що якщо X та Y сепарабельні банахові простори і $P : X \to Y$ - взаємнооднозначний непенрервний поліноміальний оператор такий, що $P^{-1} : Y \to X$ - також поліноміальний оператор, то P^{-1} - неперервний. У §3 другого розділу доведено це твердження без припущення сепарабельності.

Означення 2.3. Нехай X, Y - лінійні простори і $P : X \to Y$ поліноміальний бієктивний оператор. Називатимемо P біполіномом, якщо P^{-1} - поліноміальний оператор.

Лема 2.3. *Нехай $P : X \to Y$ - біполіном. Тоді його лінійний член P_1 у розкладі $P = \sum_0^m P_i$, $n = \deg P$ є бієктивним оператором.*

Лема 2.4. *Нехай F - нелінійний неперервно диференційовний за Фреше оператор, $F : X \to Y$, $F = A + Q$, де A - лінійний бієктивний обмежений оператор. Тоді, якщо для деякого x_0 норма лінійного оператора $Q'(x_0)$: $\|Q'(x_0)\| < \|A^{-1}\|^{-1}$ то для деякого околу B точки x_0 множина $V = \{y \in Y : y = F(x), x \in B\}$ - утворює окіл точки $y_0 = F(x_0)$ і існує відображення $\Phi : V \to B$, неперервно диференційовне за Фреше і обернене до F в V.*

Теорема 2.8. *Нехай $P : X \to Y$ - неперервний біполіноміальний оператор. Тоді P^{-1} також неперервний.*

У четвертому параграфі другого розділу застосовані отримані результати для знаходження умов аналітичності G-аналітичних операторів.

Нехай X, Y - банахові простори, $U \subset X$ - деяка скінченновідкрита множина в X, тобто для будь-якого скінченновимірного простору $Z \subset X$ множина $Z \cap U$ є відкритою в Z.

Означення 2.3. Оператор $F : X \to Y$ називається G-аналітичним, якщо для кожного $x \in X$ існує набір однорідних поліноміальних операторів $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ $F_n : X \to Y$, $\deg F_n = n$ такий, що $F(x + h) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(h)$ для кожного $h \in X$ такого, що $x + h \in U$. Іншими словами F є G-аналітичний оператор, якщо для кожного напрямку $h \in X$ оператор від числової змінної t $F(x + th)$ буде аналітичним для кожного $x \in X$.

Неперервне G-аналітичне відображення називається аналітичним.

Теорема 2.9. *Якщо $F : X \to Y$ є G-аналітичне відображення, де $G \subset X$, X, Y комплексні банахові простори, і F неперервне на залишковій підмножині D тоді F - аналітичне відображення.*

Таким чином для G-аналітичних операторів маємо:

Наслідок 2.11. *Нехай F - таке неперервне взаємнооднозначне відображення з сепарабельного комплексного банахового простору X в комплексний банахів простір Y, що F^{-1} G-аналітичне. Тоді F^{-1} неперервне.*

Нехай $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ - G-аналітичний функціонал, заданий на відкритій множині U банахового простору X із значеннями в числовому полі $\mathbb{K}$. Тоді ряд $\sum_n f_n(x)$ збігається абсолютно для кожного $x \in U$. Де f_n - n-мономи.

Поставимо у відповідність функціоналу f оператор $F : X \to l_1(\mathbb{K})$, де $l_1(\mathbb{K})$ простір послідовностей $(a_n)_1^\infty \subset \mathbb{K}$ з нормою $||(a_n)||_1 = \sum_1^\infty |a_n|$;

$$F(x) := (f_0(x), f_1(x), \cdots, f_n(x), \cdots).$$

Легко бачити, що права послідовність належить $l_1(\mathbb{K})$. Таке відображення називатимемо асоційованим з f.

Теорема 2.10 *відображення $F : X \to l_1(\mathbb{K})$ ізотропне з константою ізотропності 0 або ∞.*

Наслідок 2.12. *Нехай X – банахів простір, $f : X \to \mathbb{K}$ G-аналітичний функціонал. Якщо графік асоційованого з f відображення F є борелівським, то відображення f є неперервним.*

У третьому розділі вивчаються геометричні властивості поліноміальних функціоналів.

У першому параграфі третього розділу розглядаються питання пов'язані з обмеженністю поліноміальних функціоналів на необмежених множинах, які приводять нас до поняття "суттєвого ядра" полінома. Точніше ми розглядаємо наступні два питання з відомої "Шотландської книги".

Проблема 75 (Мазур). Нехай поліноміальний функціонал p, заданий на банаховому просторі X, обмежений на деякому ϵ-околі деякої множини $M \subset X$. Чи для всякого числа a знайдеться δ-окіл множини aM на якому поліном p також буде обмеженим?

Проблема 55 (Мазур). Нехай поліноміальний функціонал p, заданий на банаховому просторі X, обмежений в деякому ϵ-околі деякої множини $M \subset X$. Чи існує поліноміальний функціонал q і лінійний оператор T в просторі X такі, що $p = qT$ і множина $\{T(M)\}$ – обмежена?

У проблемі 55 (формально) не вимагається неперервності q. Проблему 55 з вимогою неперервності q називатимемо проблемою 55'.

Для лінійних функціоналів відповідь на проблему 75, звичайно, позитивна. Легко бачити, що з позитивної відповіді на проблему 55' для даних p і q випливає позитивна відповідь для них на проблему 75; символічно записуватимемо це так: пр.55'→пр.75. Справді, внаслідок лінійності оператора T і неперервності (отже обмеженості) полінома q, множина $p(aM) = q(aT(M))$ буде обмеженою. Г.Ауербахом доведено, що для скінченновимірних просторів відповідь на проблему 55', а отже і на проблему 75 позитивна. У дисертаційній роботі показано, що для нескінченновимірного банахового простору відповідь на проблему 75 (отже й на проблему 55') негативна, що пр.55$\not\to$ пр.55' і що пр.75$\not\to$ пр.55', Зобразимо ці співвідношення у вигляді схеми

$$\text{пр.55} \overset{\not\to}{\leftarrow} \text{пр.55}' \overset{\to}{\not\leftarrow} \text{пр.75}.$$

Відповіді на проблему 55 ми не знаємо. Наступне питання є її варіантом.

Питання. Нехай p – поліноміальний функціонал на сепарабельному банаховому просторі X, обмежений на деякому околі деякої (необмеженої) множини M. Чи існує тоді (взагалі кажучи, розривний) поліноміальний функціонал q і неперервний лінійний оператор T у просторі X такі, що $p = qT$ і множина $\{T(M)\}$ обмежена?

Простий приклад полінома $p(x, y) = xy$, $x, y \in \mathbb{R}$ показує, що множина $\{x : p(x) = p(0)\}$ може не бути лінійним многовидом і на кожному ϵ-околі цієї множини поліном може бути необмеженим. Проблема 55 можливо є спробою дати якийсь аналог ядра лінійного відображення для полінома. Мотивуючись проблемами 55 та 75 ми введемо поняття "суттєвого ядра" поліноміального функціонала.

Твердження 3.2. *Нехай p – неперервний поліноміальний функціонал на банаховому просторі X. Тоді існує "максимальний" підпростір $X_0 \subset X$ в деякому (а отже і в усякому) ϵ-околі якого p обмежений. "Максимальний" тут означає, що p необмежений на довільному ϵ-околі довільного підпростору $X_0 \subset X_1 \subset X$, $X_1 \neq X_0$. Більше того, p необмежений на довільному ϵ-околі довільної прямої, що перетинається з X_0 тільки по нулю. Цей підпростір замкнений і єдиний. Крім того для будь-яких $x \in X$ і $y \in X_0$ маємо $p(x + y) = p(x)$, отже для будь-якого $y \in Y$ $p(y) = p(0)$.*

Означення 3.1. Лінійний підпростір X_0 з твердження 3.2 називатимемо суттєвим ядром полінома p.

Наступне твердження, звичайно, добре відоме.

Лема 3.2. *Нехай X і Y – сепарабельні нескінченновимірні банахові простори і $X_0 \subset X$ – замкнений підпростір. Тоді існує такий лінійний обмежений оператор $T : X \to Y$, що $kerT = X_0$.*

Наслідок 3.4. *Нехай X_0 – суттєве ядро неперервного полінома p заданого на сепарабельному банаховому просторі X. Тоді існує лінійний неперервний оператор $T : X \to X$ і поліном q (не обов'язково неперервний) для яких $p = qT$ і $X_0 = \ker T$ (тобто відповідь на проблему 55 для $M = X_0$ позитивна.)*

Зауваження 3.1. Якщо суттєве ядро X_0 з наслідку 3.4 має в X замкнене доповнення, то поліном q можна вибрати неперервним, тобто відповідь на проблему 55' у цьому випадку позитивна. При цьому припускати сепарабельність X не потрібно. Справді, за оператор T можна взяти проектор на Z паралельно X_0.

Зауваження 3.2. Для несепарабельного банахового простору і його замкненого підпростору X_0 може не існувати лінійного обмеженого оператора $T : X \to X$ з $\ker T = X_0$ при тому, що існує квадратичний функціонал p на X з $X_0 = \ker p$.

У другому параграфі третього розділу доведено, що при деяких додаткових умовах на розмірність простору, ядро комплексного поліноміального функціоналу має лінійчасту структуру.

Твердження 3.4. *Нехай X – нескінченновимірний лінійний простір над полем комплексних чисел і $p : X \to \mathbf{C}$ – моном степеня $n > 0$. Тоді існує нескінченновимірний підпростір $X_0 \subset \ker p$.*

Наслідок 3.6. *Якщо p – поліноміальний функціонал на комплексному нескінченновимірному лінійному просторі, то існує нескінченновимірний лінійний підпростір $X_0 \subset \ker p$.*

Наслідок 3.7. *Якщо p – поліноміальний функціонал на комплексному нескінченновимірному лінійному просторі і $p(x_0) = 0$, то існує нескінченновимірний афінний підпростір $X_0 \subset \ker p$ з $x_0 \in X_0$.*

Справді, досить застосувати наслідок 3.6 до полінома $p_{x_0} = p(x + x_0)$.

Наведемо аналог твердження 3.3 для скінченновимірного простору.

Позначимо через $\Phi(d_1, \cdots, d_s, n) : \mathbf{Z}_+^{s+1} \to \mathbf{Z}_+$ функцію від аргументів $d_1, \cdots, d_s, n \in \mathbf{Z}_+$, де $\mathbf{Z}_+$ – множина цілих невід'ємних чисел, яка задовольняє наступні умови:

а). $\Phi(d_1, \cdots, d_s, 0) := 0 \ \forall d_1, \cdots, d_s \in \mathbf{Z}_+$

б). При $n > 0$ і фіксованих $d_1, \cdots, d_n$ значення $\Phi(d_1, \cdots, d_s, n)$ дорівнює максимальному з тих m, що для будь-якого набору мономів $p_1, \cdots, p_s : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ степенів $d_1, \cdots, d_s$ відповідно, їх спільне ядро $V = \bigcap_{i=1}^{s} \ker p_i$ містить лінійний підпростір $W \subset \mathbf{C}^n$ розмірності m.

Покладемо $\Psi(d_1, \cdots, d_s, m) := \min\{n : \Phi(d_1, \cdots, d_s, n) \geq m\}$. Функція Ψ відіграє роль оберненої функції до Φ, симетрична відносно аргументів $d_1, \cdots, d_s$, при фіксованих $d_1, \cdots, d_s$ – монотонно неспадна як функція від m. Вона (формально) задана або на відрізку цілих чисел $[0, m]$, або на $\mathbf{Z}_+$. Власне ми показуємо, що вона задана на $\mathbf{Z}_+$.

Теорема 3.1. *Для будь-якого фіксованого $d_0 > 0$ $\Phi(d_0, n) \to \infty$ при $n \to \infty$.*

Наслідок 3.7. *$\Psi(d\ m)$ – монотонно зростаюча послідовність при $m \to \infty$ для кожного $d > 0$.*

Наслідок 3.8. *Для фіксованих $d_1, \cdots, d_s$ $\Phi(d_1, \cdots, d_s, n) \to \infty$ при $n \to \infty$.*

Наслідок 3.9. *Через кожну точку ядра полінома $p : X \to \mathbf{C}$ при достатньо великій розмірності простору X проходить афінний підпростір достатньо великої розмірності, який повністю лежить у ядрі цього полінома.*

Наслідок 3.10. *Нехай X – нескінченновимірний комплексний лінійний простір і $p : X \to \mathbf{C}$ – поліном. Тоді для будь-якого $m > 0$ існує таке натуральне n, що для кожного підпростору $V \subset X$, $\dim V = n$, множина $\ker p \cap V$ містить афінний підпростір розмірності m. При цьому достатньо, щоб $n = \Psi(d_1, \cdots, d_k, m)$, де $k = \deg p$, $d_i = i$, якщо моном степеня i у розкладі $p = p_0 + p_1 + \cdots + p_k$ відмінний від нуля і $d_i = 0$ у супротивному випадку.*

Наслідок 3.11. *Нехай $m > 0$. Через кожну точку графіка комплексного полінома p заданого на n-вимірному лінійному просторі X*

при достатньо великих n проходить афінний підпростір розмірності m, який повністю лежить у цьому графіку.

Справді, графік полінома $p : X \to \mathbb{C}$ можна розглядати, як ядро полінома $p(x) - y$, $x \in X$, $y \in \mathbb{C}$. Застосуємо до нього наслідок 3.9.

Нехай X комплексний банахів простір; $\mathbb{C}[X]$ – кільце поліноміальних функціоналів на X; $\mathbb{C}_0[X]$ – деяке підкільце кільця $\mathbb{C}[X]$ яке задовольняє наступні умови:

1. З того, що $p(x) \in \mathbb{C}_0[X]$ випливає, що $p_{x_0;\lambda} = p(\lambda x + x_0) \in \mathbb{C}_0[X]$ для будь-якого $x_0 \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$.
2. Якщо $p \in \mathbb{C}_0[X]$, $p = p_1p_2$; $p_1 \neq 0$, $p_2 \neq 0$ то $p_1 \in \mathbb{C}_0[X]$ і $p_2 \in \mathbb{C}_0[X]$.

Тобто кільце $\mathbb{C}_0[X]$ є факторіальне і замкнене відносно зсувів (трансляцій). Домовимось називати такі кільця поліномів FT-**кільцями**.

Очевидно, що $\mathbb{C}[X]$ є FT-кільцем. Типовим прикладом FT-кільця є кільце обмежених поліноміальних функціоналів на X. Ми позначатимемо його $\mathbb{C}_b[X]$. Інший приклад TF-кільця дають поліноми, які складаються з скінченних сум скінченних добутків лінійних неперервних функціоналів на X. Якщо Y є підпростором X, то під $\mathbb{C}_0[Y]$ будемо розуміти звуження поліномів з $\mathbb{C}_0[X]$ на Y.

Нехай $p_\gamma(x) \subset \mathbb{C}_0[X]$ – деяка сім'я поліномів, де γ належить деякій множині індексів Γ. Нагадаймо, що ідеалом $(p_\gamma(x))$ в $\mathbb{C}_0[X]$ називається множина $J = \{p \in \mathbb{C}_0[X] : p = \sum_{\gamma \in \Gamma} q_\gamma(x)p_\gamma(x), \quad q_\gamma \in \mathbb{C}_0[X]\}$ причому у сумі $\sum_{\gamma \in \Gamma} q_\gamma(x)p_\gamma(x)$ лише скінченне число поліномів, відмінних від тотожнього нуля. Лінійно незалежна підмножина p_{γ_β} множини $p_\gamma(x)$ така, що $(p_\gamma) = (p_{\gamma_\beta})$ називається базисом ідеалу J. Множину нулів ідеалу $J \subset \mathbb{C}_0[X]$ позначатимемо $V(J) = \{x \in X : p(x) = 0 \ \ \forall p \in J\}$. Нехай G – деяка підмножина простору X. Через $I(G)$ позначатимемо множину всіх поліномів з $\mathbb{C}_0[X]$ які дорівнюють нулю на множині G, тобто $I(G) = \{p \in \mathbb{C}_0[X] : p(x) = 0 \ \forall x \in G\}$.

Легко бачити, що $I(G)$ – ідеал в $\mathbb{C}_0[X]$. Основним завданням, яке розв'язується у параграфі **3** розділу **3** є встановлення умов при яких для ідеалу $J \in \mathbb{C}_0[X]$ виконується рівність:

$$I(V(J)) = J,$$

тобто при яких умовах ідеал в $\mathbb{C}_0[X]$ однозначно визначається множиною своїх нулів.

У скінченновимірному випадку відповідь на це запитання дає теорема Гільберта про нулі (Nullstelensatz), яка стверджує, що для цього необхідно і достатньо, щоб ідеал J збігався зі своїм радикалом (нижче ми дамо означення радикалу). Відзначимо, що для нескінченновимірного випадку цієї умови не достатньо (наведено приклад).

Теорема 3.2. *Нехай X – комплексний банахів простір і $p_1(x), \cdots, p_n(x) \in \mathbb{C}_0[X]$, де $\mathbb{C}_0[X]$ – FT-кільце. Тоді існує елемент $h \in X$, за-*

мкнений доповняльний підпростір Z до h в X і поліноміальні функціонали $g_1, \cdots, g_{n-1} \in \mathbb{C}_0[X]$ такі, що :

1. $g_k(z+th) = g_k(z)\ \forall z \in Z,\ t \in \mathbb{C}\ k = 1 \ldots n-1$.

2. g_k належать ідеалові $(p_1, \cdots, p_n)$ у кільці $\mathbb{C}_0[X]$.

3. Множина нулів ідеалу $(g_1, \cdots, g_{n-1})$ у кільці $\mathbb{C}_0[Z]$ є проекцією нулів ідеалу $(p_1, \cdots, p_n)$ у $\mathbb{C}_0[X]$ на підпростір Z вздовж h.

4. Якщо $g_k \equiv 0\ k = 1, \ldots, n-1$ то $p_1, \cdots, p_n$ мають спільний дільник.

Наслідок 3.12. *Нехай $J = (p_1, \cdots, p_n)$ – ідеал поліномів з $\mathbb{C}_0[X]$. Тоді існують елементи $h_1, \cdots, h_m \in X$ і замкнений підпростір $W \subset X$ корозмірності $m \leq n-1$ і поліном $f \in \mathbb{C}_0[X]$ такий, що:*

1. $f \in J$.

2. f не залежить від $h_1, \cdots, h_n$ тобто для будь-якого $w \in W$ $f(w + t_1h_1 + \cdots + t_mh_M) = f(w)$, де $t_1, \cdots, t_n$ – довільні елементи $\mathbb{C}$.

3. Ядро f є проекцією множини $V(J)$ на W вздовж підпростору $H_m = lin(h_1, \cdots, h_m)$.

Нагадаймо деякі означення з теорії ідеалів.

Означення 3.2. Ідеал rad J називається радикалом ідеалу J, якщо з того, що $p^k \in J$ для деякого натурального k випливає, що $p \in$ rad J. Якщо $J =$ rad J то J називають радикальним ідеалом.

Означення 3.3. Ідеал J називається простим, якщо $\mathbb{C}_0[X]/J$ – цілісне кільце (область цілісності), тобто у кільці $\mathbb{C}_0[X]/J$ немає дільників нуля. Ідеал називається максимальним, якщо $\mathbb{C}_0[X]/J$ – поле.

Відомо, що для простого ідеалу J з $p \in J$, $p = p_1p_2$ випливає $p_1 \in J$ або $p_2 \in J$. Також відомо, що всякий ідеал міститься у деякому максимальному.

Означення 3.4. Множину $M \subset X$ називатимемо $\mathbb{C}_0[X]$-алгебраїчною множиною (або просто алгебраїчною множиною, якщо зрозуміло про яке кільце поліномів йдеться), якщо існує ідеал $J \subset \mathbb{C}_0[X]$ такий, що $M = V(J)$. Алгебраїчна множина називається незвідною, якщо її не можна подати у вигляді $M = M_1 \cup M_2$ де M_1 і M_2 алгебраїчні множини, які не збігаються з M.

Наступна теорема встановлює взаємно однозначну відповідність між алгебраїчними множинами які є нулями деякого ідеалу породженого скінченним числом поліномів та радикальними ідеалами породженими скінченним числом поліномів, а також між незвідними алгебраїчними множинами, що є нулями деякого ідеалу, породженого скінченним числом поліномів та простими ідеалами, породженими скінченним числом поліномів.

Теорема 3.3. (Теорема Гільберта про нулі для ідеалів породжених скінченним числом поліномів) *Нехай J – ідеал у FT-кільці $\mathbb{C}_0[X]$, $J = (p_1, \cdots, p_n)$. Тоді:*

1. Якщо $V(J) = \emptyset$ то $J = (1)$.

2. $I(V(J)) = \mathrm{rad}\, J$.

Наслідок 3.13. *Нехай $p_1, \cdots, p_n$ неперервні поліноми на X. Припустимо, що існує послідовність елементів $(x_i)_{i=1}^{\infty}$, $||x_i|| = 1$ така, що $p_k(x_i) \to 0$ при $i \to \infty$ $1 \leq k \leq n$. Тоді поліноми $p_1, \cdots, p_n$ мають спільний нуль.*

Основним об'єктом алгебраїчної геометрії є топологічна структура ядра $\ker p = \{x : p(x) = 0\}$ многочлена від кількох змінних. Ми не знаємо публікацій про топологічну структуру ядра обмеженого полінома на дійсному банаховому просторі. Наступний результат (§4, розділ 3) стосується згаданої тематики. Казатимемо, що множина M розрізає простір X, якщо доповнення $X \setminus M$ – незв'язне.

Теорема 3.4. *Ядро обмеженого полінома p, заданого на дійсному банаховому просторі X розрізає цей простір тоді й тільки тоді, коли існує незвідний співмножник q полінома p і елементи x_0, y_0 з X, для яких $q(x_0) > 0$, а $q(y_0) < 0$.*

Для многочленів від скінченної кількості змінних цей результат був відомий Ауербахові (проблема 148 з "Шотландської книги") і мабуть десь публікувався. Для поліномів на банаховому просторі він новий.

ВИСНОВКИ

У Дисертаційній роботі отримано нові результати, які стосуються умов неперервності поліноміальних операторів на (F)-просторах такі, як теореми про борелівський графік, обернений оператор та берівське відображення. Узагальнено ці результати на ширший клас нелінійних операторів на банахових та (F)-просторах. Доведено, що ядро комплексного поліноміального функціоналу містить афінний підпростір, якщо розмірність простору достатньо велика відносно степеня полінома. Доведено аналог теореми Гільберта про нулі для поліноміальних функціоналів на комплексних банахових просторах, розглянуто деякі властивості ядра полінома на дійсному банаховому просторі.

Дисертація містить нові обгрунтовані теоретичні результати, які є певним внеском у теорію поліноміальних операторів.

Основні результати дисертації надруковані у наступних роботах:

1. **Загороднюк А.В.**, *Про два твердження "Шотландської книги", які стосуються кільця обмежених поліноміальних функціоналів на банахових просторах*, Укр. мат. журнал, -1996.- том 48, N 10 С.1330 – 1337.

2. **Загороднюк А.В.**, *Неперервність та обмеженість поліноміальних операторів на лінійних псевдонормованих просторах,* Доповіді НАН України.-1996.- N 12 С. 12 - 14.

3. **Загороднюк А.В.**, *Про два твердження "Шотландської книги", які стосуються кільця обмежених поліноміальних функціоналів на банахових просторах,* Всеукраїнська наукова конференція "Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях" присвячена 70-річчю від дня народження професора П.С.Казімірського 5-7 жовтня 1995 р.- С.74.

Загороднюк А.В. Условия непрерывности полиномиальных операторов и структура ядра полиномиальных функционалов на банаховых пространствах. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01.- математический анализ. Львовский государственный университет, Львов, 1996.

Доказаны теоремы о борелевском графике и бэровском отображении для полиномиальных операторов на банаховом пространстве. Установлено, что ядро комплексного полиномиального функционала содержит афинное подпространство если размерность пространства достаточно велика по сравнению со степенью полинома. Доказано аналог теоремы Гильберта о нулях для полиномиальных функционалов на комплексном банаховом пространстве.

Zagorodnyuk A.V. Some conditions of continuity of polynomial operators and structure of kernel of polynomial functionals on Banach spaces. Thesis for a degree of candidate of Science (Ph.D.) in Physics and Mathematics, speciality 01.01.01. - Mathematical Analysis. L'viv State University, L'viv, 1996.

Some theorem on Borel graph and Bair mapping for polynomial operatops on Banach spaces are proved. Also are proved "Nullstelensatz" for polynomial functionals in complex Banach spaces. Polynomial functional from an infinite-dimensional complex space vanishes on some infinite-dimensional affin subspace. Are proved analogous result for complex plynomial functionals on finit-dimensional spaces too.

Ключові слова: поліноміальний оператор, аналітичне відображення, борелівський графік, ізотропне відображення.

Підписано до друку 09.01.87. Формат 60х84/16. Папір друк. №1. Друк. офсетн. Умовн.фарбо-відб. 1,5. Обл.вид.арк. 1,6. Тираж 100. Зам. 10.

Машинно-офсетна лабораторія Львівського університету
ім. Івана Франка. 290602 Львів, вул. Університетська.

Aв 36.723