

УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
імені М.П.Драгоманова

На правах рукопису

ШАПОВАЛОВА Наталія Валентинівна

РЯДИ ПУАНКАРЕ НЕЗВІДНИХ ЗОБРАЖЕНЬ  
АЛГЕБРИ ЛІ  $sl(2, \mathbb{C})$

01.01.03 - математична фізика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

КИЇВ - 1996

45:51

АВ 36.920

ЛННБ України ім.В.Стефаніка

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі фізики та математики  
державного педагогічного університету ім. М.П.Драгоманова.



00761026 (М)

**Науковий керівник:** чл.-кор. НАН України,  
доктор фізико-математичних наук,  
професор ФУШИЧ В.І.

**Офіційні опоненти:** доктор фізико-математичних наук,  
професор КОШМАНЕНКО В.Д.  
кандидат фізико-математичних наук  
ЮРИК І.І.

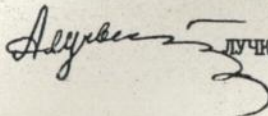
**Провідна організація:** Інститут теоретичної фізики  
НАН України, м.Київ.

Захист відбудеться "1" квітня 1997 р. о 15<sup>00</sup>  
годині на засіданні спеціалізованої ради Д 01.66.02  
при Інституті математики НАН України за адресою:  
252601, Київ - 4, МСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Інституту.

Автореферат розісланий "14" лютого 1997 р.

Вчений секретар  
спеціалізованої ради,  
доктор фіз.-мат. наук

  
ЛУЧКА А.Д.

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Теорія інваріантів і теорія зображень відіграють велику роль в розвитку алгебри, геометрії, теорії диференціальних рівнянь, фізики елементарних частин, ядерній спектроскопії, квантовій теорії поля, атомній фізиці, в теорії спеціальних функцій. Зображення груп і алгебр являють собою математичний апарат теорії симетрій, яка як метод дослідження все ширше застосовується в різних галузях знань.

Розглянемо довільну групу  $G$  і її скінченновимірне зображення  $\rho$  в лінійному просторі  $V$  над полем  $C$  ( $\dim \rho = n$ ). Виберемо в  $V$  довільний базис  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ . Нехай  $x_1, x_2, \dots, x_n$  - координати в  $V$  відносно цього базису. Тоді кожний елемент  $g \in G$  визначає перетворення координат  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Якщо зробити заміну змінних в довільному многочлені  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  від змінних  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , то отримуємо новий многочлен. Таким чином  $g$  індукує автоморфізм кільця всіх многочленів  $C[x_1, x_2, \dots, x_n]$  над полем  $C$ .

Многочлен  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , який не змінюється при всіх таких перетвореннях, тобто коли  $g$  пробігає всю групу  $G$ , називається інваріантом перетворення  $\rho$  групи  $G$ .  
Всі інваріанти утворюють алгебру, і одна із задач теорії інваріантів - описати цю алгебру.

Двома класичними задачами теорії зображень, тісно пов'язаними з інваріантними тензорами і інваріантами, є:  
1) задача про розклад тензорного добутку двох незвідних зображень в суму незвідних компонент;



2) задача про розклад на незвідні компоненти обмеження зображення групи  $G$  на підгрупу  $H$  (задача про обмеження).

Класична постановка основної задачі теорії інваріантів має такий вигляд: обчислити інваріанти в явному вигляді, а також дати повний опис кільця інваріантів, особливо тих, які мають безпосереднє застосування в математиці, фізиці, механіці, хімії, оптиці та електроніці, є актуальною і в наш час.

В процесі розв'язання таких задач було помічено наступне: у всіх задачах, які зводились до знаходження інваріантів, вдавалося виділити скінченну кількість базисних інваріантів, а також, що базисні інваріанти в загальному випадку не являються незалежними.

Таким чином, в теорії інваріантів виникли такі задачі:

- 1) показати, що алгебра інваріантів даного зображення заданої групи скінченновимірна (перша основна теорема теорії інваріантів) і 2) визначити систему базисних інваріантів; показати, що існує скінченний базис в сізігіях цієї алгебри інваріантів (друга основна теорема теорії інваріантів) і знайти його.

В 1880 році Д.Гільберт (D.Hilbert) довів, що для інваріантів  $n$ -арних форм степеня  $r$  відносно дії групи  $SL(n, \mathbb{C})$  існує скінченний базис і що друга основна теорема теорії інваріантів справедлива у всіх випадках, коли справедлива перша основна теорема теорії інваріантів. Але питання про те, як практично обчислювати інваріанти, зосталося нерозкритим.

Теорія зображень груп і алгебр розвивається за двома

напрямами: 1) розвиток чистої теорії; 2) розвиток прикладних аспектів.

До прикладних питань теорії зображень груп відносяться, по-перше, її обчислювальні методи, які включають наступні розділи теорії зображень: 1) формули і методи обчислень кратностей вагів скінченновимірних зображень напівпростих груп  $L_1$ ; 2) формули і методи обчислень кратностей незвідних зображень в тензорному добутку зображень груп; 3) формули і методи обчислень коефіцієнтів Клебша-Гордана для тензорних добутків зображень груп в різних базисах; 4) побудова базисів просторів зображень; 5) побудова власних функцій повних наборів комутуючих операторів, пов'язаних з зображеннями груп; 6) побудова розкладів функцій на однорідних просторах.

Дана дисертаційна робота присвячена:

- 1) знаходженню і обчисленню симетричних інваріантних тензорів зображень алгебри  $L_1 \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ;
- 2) обчисленню коефіцієнтів Клебша-Гордана і побудові діаграм розкладу зображень із схемою  $\begin{matrix} & & K(L) \\ & \circ & \\ & & \end{matrix}$  на незвідні компоненти;
- 3) знаходженню формули і методу обчислень і безпосередньому обчисленню кількості одновимірних інваріантних підпросторів в даному симетричному степені;
- 4) визначенню повної системи інваріантів для алгебри  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ;
- 5) знаходженню конкретного вигляду ряду Пуанкаре для відповідного зображення;
- 6) знаходженню мінімальної системи твірних в алгебрі інваріантів для конкретного значення  $d$ .

Мета роботи. Мета роботи полягає в застосуванні теорії зображень до розв'язання задач теорії інваріантних тензорів. По-перше, в знаходженні симетричних інваріантних тензорів зображень алгебри  $L_i \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  і обчисленні кількості одновимірних інваріантних підпросторів в даному симетричному степені, а також обчисленню коефіцієнтів Клебша-Гордана і побудові діаграм розкладу зображень із схемою  $\begin{matrix} & & K(L) \\ & & \circ \end{matrix}$  на незвідні компоненти; по-друге, у визначенні повної системи інваріантів для алгебри  $L_i \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  і знаходженні конкретного вигляду ряду Пуанкаре для незвідних зображень  $\begin{matrix} & & d \\ & & \circ \end{matrix}$  алгебри  $L_i \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ .

Методи дослідження. Основними методами для розв'язання задач, сформульованих в дисертації, є методи теорії однорідних просторів, теорії інваріантів і інваріантних тензорів, теорії зображень напівпростих груп і алгебр  $L_i$ , розроблені Е.Картаном, Г.Вейлем, Є.Б.Динкіним, а також методи, розроблені автором цієї роботи:

- 1) метод відображення двійкових наборів в нульові при обчисленні симетричних інваріантних тензорів зображень алгебри  $L_i \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ;
- 2) метод використання твірних многочленів при побудові рядів Пуанкаре для різних значень  $d$ .

Особливе місце в математичному апараті і методах розв'язання поставлених задач займає принцип виключення О.В.Мантурова, який дає можливість описувати тензори, інваріантні відносно заданого зображення.

Практичне і теоретичне значення роботи полягає у  
можливості застосування результатів і методів дослідження до  
розв'язування задач геометрії, теорії інваріантів, теорії  
зображень та інших галузей математики та її застосувань.  
Результати дисертації можуть також скласти основу спецкурсу.

Наукова новизна результатів. В дисертаційній роботі  
автором одержані такі нові основні результати, зокрема:

- 1) встановлено метод знаходження симетричних інваріантних тензорів зображень алгебри Лі  $sl(2, \mathbb{C})$ ;
- 2) за допомогою формули Клебша-Гордана побудована діаграма розкладу зображення із схемою  $\begin{matrix} & & \mathbb{K}(L) \\ & \circ & \\ & & \end{matrix}$ , тобто тензорного добутку зображень  $\begin{matrix} & & \mathbb{K} \\ & \circ & \end{matrix}$  в симетричному степені  $L$ , на незвідні компоненти;
- 3) одержані правила побудови наборів і їх відображення, знайдені і зведені в таблиці всі види двійкових і нульових наборів і доведені залежності між ними (теореми 1.2.2 - 1.2.4, лема 1.2.1);
- 4) виведена і доведена формула знаходження кількості одновимірних інваріантних підпросторів в даному симетричному степені (теорема 1.2.1);
- 5) обчислена кількість одновимірних інваріантних тензорів і побудовані таблиці коефіцієнтів Клебша-Гордана розкладу зображень із схемою  $\begin{matrix} & & \mathbb{K}(L) \\ & \circ & \\ & & \end{matrix}$  на незвідні компоненти;
- 6) описаний процес дії відображення  $\varphi_n: \mathbb{C}(Z) \rightarrow \mathbb{C}(Z)$  на різні види функції  $f(t)$  і доведені відповідні твердження 2.2.1 - 2.2.3;

- 7) доведені формули для знаходження базових многочленів, за допомогою яких визначається ряд Пуанкаре (теорема 2.2.4 - 2.2.6);
- 8) встановлені і доведені залежності між відображеннями  $\varphi_n$ , які дають можливість спростити обчислення поліномів Пуанкаре (теорема 2.2.7);
- 9) знайдені мінімальні системи твірних в алгебрі інваріантів для  $d = 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$ ;
- 10) знайдені у явному вигляді ряди Пуанкаре незвідних зображень  $\circ^d$  алгебри  $L_i \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  при  $d = 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$ .

Апробація одержаних результатів. Результати дисертації доповідались на семінарі "Прикладні питання диференціальної геометрії" МОН ім.Н.К.Крупської (1990-1991), на семінарі з функціонального аналізу в Університеті дружби народів ім.П.Лумумби (1991), на XV конференції КДП ім.О.М.Горького (1991), на конференції молодих вчених КДП ім.М.П.Драгоманова (1992), на звітно-наукових конференціях викладачів Українського державного педагогічного університету ім. М.П.Драгоманова (1993 - 1995), на семінарі відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України (1995 - 1996).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1 - 6].

Структура і об'єм роботи. Дисертація складається із вступу, двох глав, висновку, списку літератури із 121 назви, містить 150 сторінок друкованого тексту.

## ЗМІСТ РОБОТИ

Дисертація складається із вступу, двох розділів і висновку.

Вступ складається з двох параграфів.

У § 1 вступу дається короткий історичний нарис теорії інваріантів та теорії зображень, їх розвитку та взаємозв'язку; дається огляд результатів, які пов'язані із темою дисертації; обгрунтовується актуальність теми; описуються задачі теоретичних досліджень та питання і напрямки прикладної теорії зображень і теорії інваріантів.

§ 2 вступу підрозділяється на чотири пункти. В п.0.2.1 наведені основні відомі поняття з теорії зображень груп  $L_i$ ; описаний спосіб побудови діаграм Динкіна систем простих коренів для простих і напівпростих алгебр  $L_i$  подана формула Клебша-Гордана для напівпростої алгебри  $L_i A_1$ . В п.0.2.2 описаний принцип включення О.В.Мантурова, який дозволяє будувати тензори, інваріантні відносно заданого зображення відповідної алгебри  $L_i$ . В п.0.2.3 розглядається короткий огляд результатів, отриманих за допомогою принципу включення. В п.0.2.4 сформульовані задачі, розв'язані в дисертаційній роботі, обгрунтована їх актуальність, описаний математичний апарат і зміст дисертаційної роботи, викладені основні результати, отримані в роботі. Огляд літератури поданий по розділах.

## Розділ 1. Обчислення симетричних інваріантних тензорів зображень алгебри Лі $sl(2, \mathbb{C})$

Розділ 1 складається із чотирьох параграфів.

У § 1.1 описується постановка задачі, наводяться необхідні відомості з теорії алгебр Лі, формулюється означення ряду Пуанкаре, подаються формули розкладу зображення  $\circ^{K(L)}$  на незвідні компоненти та кількості вагових векторів, будується діаграма розкладу; записуються кількість інваріантів при  $K = 1, 2, 3, 4$  та ряди Пуанкаре  $P_d(t)$  при  $d = 1, 2, 3, 4$ .

В § 1.2 введено означення двійкового і нульового наборів, встановлено відображення двійкових наборів в нульові та описані правила цього відображення, поставлені питання, які потрібно розв'язати, введено відповідні позначення.

В § 1.3 виводиться формула для обчислення кількості одновимірних інваріантних підпросторів в даному симетричному степені і доводяться такі теореми.

Теорема 1.2.1. Кількість одновимірних інваріантних підпросторів в даному симетричному степені  $m$  (де  $m = L$ ) і фіксованому значенні  $K$  можна знайти за формулою:

$$v_m = S_0 - S_2, \quad (1.10)$$

де  $S_0$  - кількість нульових наборів, в які не відображається жоден двійковий набір, а  $S_2$  - кількість нульових наборів, в які відображаються два двійкових набори.

**Теорема 1.2.2.** Якщо  $L$  - парне, то для знаходження  $S_0$  - кількості нульових наборів, в які не відображається жоден двійковий набір, досить знайти кількість нульових наборів таких видів:

$$1) \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{t-1} \alpha_t \alpha_{t+1} \dots \alpha_L, \text{ де} \quad (1.11)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_t = K,$$

$$\alpha_{t+1} = \alpha_{t+2} = \dots = \alpha_L = -K, \quad (t = L/2),$$

причому цей набір завжди єдиний при довільних значеннях  $K$ ;

$$2) \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{t-1} \alpha_t \alpha_{t+1} \dots \alpha_L, \text{ де} \quad (1.12)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{t-1} = K,$$

$$\alpha_t = K-4, K-6, \dots, -K+2, \quad (t = 2, \dots, L/2).$$

**Лема 1.2.1.** Якщо  $L$  - непарне і  $K=2$ , то  $S_0$  - кількість нульових наборів, в які не відображається жоден двійковий набір, буде дорівнювати кількості нульових наборів такого виду:

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{t-1} \alpha_t \alpha_{t+1} \dots \alpha_L,$$

$$\text{де } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{t-1} = K, \quad (1.13)$$

$$\alpha_t = K-4, K-6, \dots, -K+2, \quad (t = 2, \dots, (L-1)/2).$$

**Теорема 1.2.3.** Якщо  $L$  - непарне і  $K \neq 2$ , то для знаходження  $S_0$  - кількості нульових наборів, в які не відображається жоден двійковий набір, досить знайти кількість нульових наборів таких видів:

$$1) \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{t-1} \alpha_t \alpha_{t+1} \dots \alpha_L,$$

$$\text{де } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_t = K, \quad (1.14)$$

$$\alpha_{t+1} = 0, \quad \alpha_{t+2} = \dots = \alpha_L = -K, \quad (t = (L-1)/2),$$

причому цей набір завжди єдиний;

$$2) \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{l-1} \alpha_l \alpha_{l+1} \dots \alpha_L,$$

$$\text{де } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_l = K, \quad (1.15)$$

$$\alpha_{l+1} = -2, -4, \dots, -K+2, \quad (l = (L-1)/2);$$

$$3) \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{l-1} \alpha_l \alpha_{l+1} \dots \alpha_L,$$

$$\text{де } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{l-1} = K, \quad (1.16)$$

$$\alpha_l = K-4, K-6, \dots, -K+2, \quad (l = 2, \dots, (L-1)/2).$$

Кількість нульових наборів описаних видів дає нам значення  $S_0$ , коли  $L$  набуває непарні значення.

**Теорема 1.2.4.** При будь-яких значеннях  $K$  і  $L$  для

знаходження  $S_2$  - кількості нульових наборів, в які відображаються два двійкових набори, досить знайти кількість нульових наборів такого виду:

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{l-1} \alpha_l \alpha_{l+1} \dots \alpha_L,$$

$$\text{де } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_l, \quad \alpha_l = K-2, K-4, \dots, 2, \quad (1.17)$$

$$\alpha_l - \alpha_{l+1} = 2, \quad (l = 1, \dots, L-2).$$

У § 1.4 подані результати обчислень кількості одновимірних інваріантних підпросторів в розкладі зображення із схемою  $o^{K(L)}$ . Відмічено, що коли  $K$  і  $L$  приймають одночасно непарні значення, кількість інваріантів дорівнює 0. При  $L = 5$  і довільному значенні  $K$  результати записані у вигляді ряду Пуанкаре. Наступні результати обчислень подані у вигляді таблиць.

Розділ 2. Дослідження формул для обчислення поліномів  
Пуанкаре незвідних зображень алгебри  $Li\ sl(2, C)$

Розділ 2 складається з трьох параграфів.

В § 2.1 формулюються означення поліноміальних функцій, однорідної функції степеня  $d$ , однорідних елементів степеня  $d$ , інваріанта групи  $G$ . Подано огляд літератури.

Рядом Пуанкаре зображення  $\circ^d$  називається вираз виду:

$$P_d(t) = \sum_{e=0}^{\infty} m(d, e) t^e, \quad (2.10)$$

де  $t$  - змінна,  $m(d, e)$  - розмірність простору  $S_e^G$  всіх однорідних інваріантних поліноміальних функцій на  $R_d$ , які мають степінь  $e$ , а  $R_d$  - простір всіх однорідних поліномів степеня  $d$ , тобто простір зображення  $\circ^d$ .

Даються означення повної та мінімальної систем інваріантів алгебри  $K_d$  - алгебри інваріантів бінарних форм степеня  $d$ .

Ставиться задача визначення повної системи інваріантів для алгебри  $K_d$ , розв'язання якої пов'язане із знаходженням конкретного вигляду ряду Пуанкаре для відповідного зображення  $\rho_d$ .

Відмітимо, що обчисленню поліномів Пуанкаре однорідних просторів присвячений ряд робіт, зокрема Спрінгера Т., О.В.Мантурова, А.Т.Фоменко, Доан Куїна.

В нашій роботі за групу  $G$  вибрано групу  $SL(2, C)$  - спеціальну лінійну групу матриць  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ ,  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ . Група  $SL(2, C)$  діє в просторі всіх однорідних поліномів степеня 2 від двох змінних  $x$  і  $y$ . А довільне зображення  $\Phi$  групи

$SL(n, \mathbb{C})$  еквівалентне деякому зображенню  $\circ^d$ , тобто зображенню, що діє в просторі поліномів степеня  $d$  від двох змінних.

§ 2 складається з двох пунктів.

В п.1 § 2 вписані загальні формули обчислення рядів Пуанкаре  $P_d(t)$  для повної системи інваріантів, знайдені Спрінгером. Але на практиці користуватись цими формулами важко. Обчислення виходять дуже громіздкими вже при  $d = 5$ . І вони не дають можливості побачити конкретний вид ряду Пуанкаре  $P_d(t)$ .

В п.2 § 2 розглянуто більш докладно, як діє відображення  $\varphi_n: \mathbb{C}(z) \rightarrow \mathbb{C}(z)$  на функцію  $f(t)$ , і доведені такі твердження.

Твердження 2.2.1. Нехай функція  $f(t)$  має вигляд  $f(t) = t^m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Тоді відображення  $\varphi_n$  на функцію  $f(t)$  діє таким чином:

$$\varphi_n(t^m) = \begin{cases} t^{m/n} & , \text{якщо } m \text{ ділиться на } n, \\ 0 & , \text{якщо } m \text{ не ділиться на } n. \end{cases} \quad (2.17)$$

Твердження 2.2.2. Нехай функція  $f(t)$  має вигляд  $f(t) = (1 - t^m)^{-1}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Тоді, якщо  $\frac{m}{n} = \frac{r}{k}$ , де  $r, k \in \mathbb{N}$ , то відображення  $\varphi_n$  на функцію  $f(t)$  діє таким чином:

$$\varphi_n \left[ (1 - t^m)^{-1} \right] = (1 - t^r)^{-1} \varphi_n \left[ \sum_{i=0}^{k-1} t^{im} \right]. \quad (2.18)$$

Твердження 2.2.3. Нехай  $f(t)/Q(t)$  - дробово-раціональна функція і нехай існує раціональна функція  $P(t)$ , така, що  $Q(t)P(t) = R(t^{nk})$  - поліном від  $t^{nk}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Тоді

$$\varphi_n \left[ \frac{f(t)}{Q(t)} \right] = \frac{\varphi_n(f(t)P(t))}{R(t^k)}. \quad (2.19)$$

Виписані формули для обчислення ряду Пуанкаре з врахуванням доведених тверджень.

$$P_d(t) = \sum_{0 \leq j < d/2} \varphi_{d-2j} \left[ (1-t^2) \gamma_{dj}(t) \right], \quad (2.20)$$

$$\gamma_{dj}(t) = (-1)^j t^{j(j+1)} \left[ (j, t^2)!(d-j, t^2)! \right]^{-1}, \quad (2.21)$$

$$(d, t)! = (1-t)(1-t^2) \dots (1-t^d), \quad (2.22)$$

$$(d, t^2)! = (1-t^2)(1-t^4) \dots (1-t^{2d}), \quad (2.23)$$

$$(0, t^2)! = 1, \quad (2.24)$$

$$\varphi_n(t^m) = \begin{cases} t^{m/n}, & \text{якщо } m \text{ ділиться на } n, \\ 0, & \text{якщо } m \text{ не ділиться на } n. \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\varphi_1(t^m) = t^m, \quad (2.26)$$

$$\varphi_n(1) = 1. \quad (2.27)$$

$$\varphi_n \left[ (1-t^m)^{-1} \right] = (1-t^m)^{-1} \varphi_n \left[ \sum_{i=0}^{n-1} t^{im} \right]. \quad (2.28)$$

Якщо  $\frac{m}{n} = \frac{r}{k}$ , де  $r, k \in \mathbb{N}$ , то

$$\varphi_n \left[ (1-t^m)^{-1} \right] = (1-t^r)^{-1} \varphi_n \left[ \sum_{i=0}^{k-1} t^{im} \right]. \quad (2.29)$$

Якщо  $\frac{m}{n} = r$ , де  $r \in \mathbb{N}$ , то

$$\varphi_n \left[ (1-t^m)^{-1} \right] = (1-t^r)^{-1}. \quad (2.30)$$

$$\varphi_1 \left[ (1-t^m)^{-1} \right] = (1-t^m)^{-1}. \quad (2.31)$$

Використовуючи ці формули, можна обчислити ряд Пуанкаре практично для будь-якого  $d$ . Але через їх громіздкість для обчислення автором проведений подальший процес їх спрощення і доведені теореми 2.2.4 - 2.2.6, які дають можливість знайти базові многочлени, за допомогою яких визначається ряд Пуанкаре.

**Теорема 2.2.4.** Якщо  $j = 0$ , то справедлива формула

$$\varphi_d \left[ (1 - t^2) \gamma_{d0}(t) \right] = \frac{\prod_{m=2}^{d-1} \sum_{i=0}^{d-1} t^{2im}}{\prod_{m=1}^{d-1} (1 - t^{2m})} \quad (2.32)$$

**Теорема 2.2.5.** Якщо  $1 \leq j \leq d/2 - 1$ , а  $d$  - непарне, то справедлива формула

$$\begin{aligned} \varphi_{d-2j} \left[ (1-t^2) \gamma_{dj}(t) \right] &= \quad (2.33) \\ (-1)^j \varphi_{d-2j} \left[ t^{j(j+1)} \left( \prod_{m=1}^j \sum_{i=0}^{d-2j-1} t^{2im} \right) \left( \prod_{m=2}^{d-j} \sum_{i=0}^{d-2j-1} t^{2im} \right) \right] \\ &= \frac{\prod_{m=1}^j (1 - t^{2m}) \prod_{\substack{m=2 \\ m \neq d-2j}}^{d-j} (1 - t^{2m})}{\prod_{m=1}^j (1 - t^{2m}) \prod_{\substack{m=2 \\ m \neq d-2j}}^{d-j} (1 - t^{2m})} \end{aligned}$$

**Теорема 2.2.6.** Якщо  $d - 2j = 1$ , то справедлива формула

$$\varphi_1 \left[ (1-t^2) \gamma_{dj}(t) \right] = \frac{(-1)^{(d-1)/2} t^{(d^2-1)/4}}{\prod_{m=1}^{(d-1)/2} (1 - t^{2m}) \prod_{m=2}^{(d+1)/2} (1 - t^{2m})} \quad (2.34)$$

Надалі введені відповідні позначення.

У формулі (2.32), тобто у виразі для  $\varphi_d$ , будемо використовувати позначення

$$T_0^d = \prod_{m=2}^{d-1} \sum_{i=0}^{d-1} t^{2im}, \quad (2.35)$$

$$\varphi_d ( T_0^d ) = Q_0^d. \quad (2.36)$$

Позначимо через  $D$  значення  $d$  при  $j = 0$ ,  $d = D$ , тобто  $d_j = d_0 = D$ .

У формулі (2.33), тобто у виразі для  $\varphi_{d-2j}$  при

$1 \leq j \leq d/2 - 1$ , позначимо

$$T_j = t^{j(j+1)} \left[ \prod_{m=1}^j \sum_{i=0}^{d-2j-1} t^{2im} \right] \left[ \prod_{\substack{m=2 \\ m \neq d-2j}}^{d-j} \sum_{i=0}^{d-2j-1} t^{2im} \right], \quad (2.37)$$

$$\varphi_{d-2j}(T_j) = Q_j. \quad (2.38)$$

Знайдені і доведені залежності між відображеннями  $\varphi_n$ , які дають можливість спростити обчислення поліномів Пуанкаре: теорема 2.2.7.

**Теорема 2.2.7.** У позначеннях (2.35) - (2.38)

справедливі такі формули:

$$T_1 = T_0 \cdot M_1, \quad T_2 = T_1 \cdot M_2, \quad \dots, \quad T_j = T_{j-1} \cdot M_j, \quad (2.39)$$

$$M_j = \left[ \sum_{i=0}^{d-2j-1} t^{2ji} \right] \left[ \sum_{i=0}^{d-2j-1} t^{2(d-j)i} \right] t^{2j}, \quad (2.40)$$

де  $j = (d - D)/2$ .

В § 3 наведені результати обчислень, які проводились за допомогою ЕОМ. Поліноми Пуанкаре записані у вигляді:

$$P_d = A_d / B_d. \quad (2.43)$$

де чисельники  $A_d = \sum \alpha_t t^t$  подані у вигляді таблиць. Нижче подані знаменники рядів Пуанкаре.

В дисертаційній роботі за допомогою ЕОМ обчислені у явному вигляді ряди Пуанкаре зображень  $\circ$  алгебри  $Li\ zl(2, C)$  при  $d = 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$ .

Таким чином, за допомогою ряду Пуанкаре ми знайшли мінімальну систему твірних в алгебрі інваріантів для конкретного значення  $d$ , яку описує знаменник полінома Пуанкаре, а також знайшли степені функціонально незалежних твірних алгебри інваріантів зображень  $\circ$  при  $d = 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$ .

### Основні результати дисертації та висновки:

- 1) встановлено метод знаходження симетричних інваріантних тензорів зображень алгебри  $L_i \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ;
- 2) за допомогою формули Клебша-Гордана побудована діаграма розкладу тензорного добутку зображень  $\circ^K$  в симетричному степені  $L$  на незвідні компоненти;
- 3) одержані правила побудови наборів  $i$  їх відображення, знайдені і зведені в таблиці всі види двійкових і нульових наборів  $i$  доведені залежності між ними;
- 4) виведена і доведена формула знаходження кількості одновимірних інваріантних підпросторів в даному симетричному степені (теорема 1.2.1);
- 5) обчислена кількість одновимірних інваріантних тензорів і побудовані таблиці коефіцієнтів Клебша-Гордана розкладу зображень із схемою  $\circ^{K(L)}$  на незвідні компоненти;
- 6) описаний процес дії відображення  $\varphi_n: \mathbb{C}(z) \rightarrow \mathbb{C}(z)$  на різні види функції  $f(t)$  і доведені відповідні твердження 2.2.1 - 2.2.3;
- 7) доведені формули для знаходження базових многочленів, за допомогою яких визначається ряд Пуанкаре;
- 8) встановлені і доведені залежності між відображеннями  $\varphi_n$ , що дають можливість спростити обчислення поліномів Пуанкаре;
- 9) знайдені мінімальні системи твірних в алгебрі інваріантів для  $d = 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$ ;
- 10) знайдені у явному вигляді ряди Пуанкаре незвідних зображень  $\circ^d$  алгебри  $L_i \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  при  $d = 9 - 15$ .

Основні результати дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Шаповалова Н.В. Про обчислення кількості симетричних інваріантних тензорів в розкладі тензорного добутку зображень алгебри  $L_1 \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  // Доп. НАН України. - 1996. - № 7. - С.32-35.
2. Шаповалова Н.В. Поліноми Пуанкаре незвідних зображень алгебри  $L_1 \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  // Доп. НАН України. - 1996. - № 8. - С.19-23.
3. Шаповалова Н.В. Дослідження формул для обчислення поліномів Пуанкаре незвідних представлень алгебри  $L_1 \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  // Проблеми розвитку психолого-педагогічної науки у науково-технічній творчості молоді. Ч.2. - Переяслав-Хмельницький, 1992. - С.179-180.
4. Шаповалова Н.В. О новом способе вычисления одномерных инвариантных подпространств в разложении представления со схемой  $\begin{matrix} & & K(L) \\ & & \circ \end{matrix}$ . - Киев: КІПІ, 1993. - 8с. - Библиогр.: 1назв. - Рус.-Деп. в ГНТБ України 11.05.1993, № 879-Ук.93.
5. Шаповалова Н.В. Інваріанти представлень напівпрямих алгебр  $L_1$  // Наук. зап.: Матеріали звітної наукової конференції викладачів УДПУ ім.М.П.Драгоманова за 1992 рік. - К.: УДПУ, 1993. - С. 362-363.
6. Шаповалова Н.В. Розклад тензорного добутку незвідних представлень алгебри  $L_1$  на незвідні представлення // Наук. зап.: Матеріали звітної наукової конференції викладачів УДПУ ім.М.П.Драгоманова за 1993 рік. - К.: УДПУ, 1994. - С. 479-480.

Шаповалова Н.В. Ряды Пуанкаре неприводимых представлений алгебры Ли  $sl(2, \mathbb{C})$ . (Рукопись.) Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 - математическая физика. Украинский государственный педагогический университет им.М.Ф.Драгоманова. Киев, 1996.

Защищается диссертация, в которой предложен метод нахождения симметрических инвариантных тензоров представлений алгебры Ли  $sl(2, \mathbb{C})$  и выведена формула нахождения количества одномерных инвариантных подпространств. Получены формулы для нахождения полной системы инвариантов для алгебры Ли  $sl(2, \mathbb{C})$  и минимальной системы образующих в алгебре инвариантов.

Shapovalova N.V. Poincaré Polynomials of Irreducible Representations of the Lie Algebra  $sl(2, \mathbb{C})$ . (Manuscript). Thesis for the degree of candidate of physical and mathematical sciences, speciality 01.01.03 mathematical physics. Ukrainian Statepedagogical University. Kyiv, 1996.

In this thesis a method is proposed of finding symmetrical invariant tensors of representations of the Lie algebra  $sl(2, \mathbb{C})$  and a formula for the number of one-dimensional invariant subspaces is deduced. Formulas are derived for a complete system of invariants of the Lie algebra  $sl(2, \mathbb{C})$  and for a minimal system of generators in the algebra of invariants.

**Ключові слова:** симетрія, група Лі, алгебра Лі, інваріант, інваріантність, зображення, тензор, ряд Пуанкаре.

*A. Ulas*

---

Підп. до друку 25.12.96. Формат 60·84/16. Папір друк. Офс. друк.  
Ум. друк. арк. 1,16. Ум. фарбо-відб. 1,16. Обл.-вид. арк. 0,9.  
Тираж 100 пр. Зам. **311** . Безкоштовно.

---

Віддруковано в УДПУ ім.М.П.Драгоманова  
252030 Київ 30, вул. Пирогова 9.





AB 36.920

**AB 36.920**