НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

ТЮРИН Василий Михайлович

К ОБРАТИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

01.01.02 - дифференциальные уравнения

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Киев - 1996

Диссертация есть рукопись

Работа выполнена в Липецком государственном техническом университете

Официальные оппоненты : доктор физ.-мат. наук, профессор
БАСКАКОВ Анатолий Григорьевич

доктор физ.-мат. наук, профессор
СЛЮСАРЧУК Василий Ефимович

доктор физ.-мат. наук
БОЙЧУК Александр Андреевич

Ведущая организация: Владимирский государственный педагогический университет

Защита диссертации состоится "3" 06 1997 г.
в 15 часов на заседании специализированного совета Д 016.50.02 при Институте математики НАН Украины по адресу: 252601, Киев-4, ГСП, ул. Терещенковская,3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Автореферат разослан "24" 04 ~~1996~~ 1997 г.

Ученый секретарь
специализированного совета
доктор физ.-мат. наук ЛУЧКА А.Ю.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ. В диссертации изучается ряд задач, связанных с обратимостью линейных дифференциальных и функционально-дифференциальных операторов в некоторых функциональных пространствах, элементами которых являются векторные функции, определенные на всей оси R или на всем пространстве R^n, со значениями в банаховом пространстве. Важность этих задач обусловлена тем, что к ним приводят многие исследования по теории устойчивости, теории усреднения, спектральной теории, ветвлению решений, управлению, качественной теории дифференциальных уравнений и т.д. При этом возникает необходимость вывести обратимость дифференциальных операторов, например, в пространстве ограниченных на оси функций, из более простых свойств дифференциальных операторов таких как равномерная инъективность, корректность, слабая регулярность, условие Фавара, коэрцитивность и т.п. (работы Баскакова А.Г., Жикова В.В., Курбатова В.Г., Мухамадиева Э.И., Слюсарчука В.Е., Шубина М.А., Амерно Л., Копделя В., Фавара Ж., Зайдмана С. и других математиков).

С точки зрения обратимости линейный функционально-дифференциальный оператор часто удобнее рассматривать в различных функциональных пространствах. При таком подходе ставится задача об эквивалентности свойств обратимости функционально-дифференциальных операторов в рассматриваемых пространствах. Это напрямую связано с проблемой выбора области определения для дифференциального оператора. От удачного выбора ее во многом зависит успех изучения дифференциального оператора. Исследованиями обратимости линейных функционально-дифференциальных операторов в функциональных пространствах и поведением решений соответствующих однородных уравнений занимались Перрон О., Крейн М.Г., Кучер Д.Л., Майзель А.Д., Беллман Р., Хартман Ф., Массера Х., Шеффер Х., Жиков В.В. и другие.

Актуальной представляется и задача об эквивалентности коэрцитивных оценок для линейных дифференциальных операторов с частными производными в различных функциональных пространствах, чему посвящена обширная часть работы. Сюда же примыкают задачи о дифференциальных Φ_+ - операторах в пространствах функций, определенных на всем $\mathbb{R}^n$.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ состоит в изучении эквивалентности свойств обратимости, равномерной инъективности, коэрцитивности линейных дифференциальных и функционально-дифференциальных операторов в некоторых пространствах вектор-функций, заданных на $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^n$); получить условия обратимости и равномерной инъективности линейных дифференциальных и функционально-дифференциальных операторов в определенных функциональных пространствах.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ. В работе широко используются методы функционального анализа, теории линейных операторов в банаховом пространстве, обобщенных функций, качественной теории дифференциальных уравнений математической физики.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА. Все приведенные основные результаты диссертации являются новыми. Их новизна заключается также в выборе объекта исследования и методах исследования, и может быть кратко охарактеризована следующим образом.

В банаховом пространстве установлен ряд теорем об эквивалентности свойств обратимости и равномерной инъективности для широкого круга функционально-дифференциальных операторов в некоторых функциональных пространствах.

Получены критерии обратимости функционально-дифференциальных операторов в функциональных пространствах.

Приведены необходимые условия равномерной инъективности, обратимости и коэрцитивности функционально-дифференциальных операторов и дифференциальных операторов с частными производными.

Разработана техника локальных равномерных неравенств для изучения функционально-дифференциальных операторов и операторов с частными производными.

Рассмотрены различные коэрцитивные оценки дифференциальных операторов с частными производными и их эквивалентность в определенных функциональных пространствах.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ. Работа является теоретической. Полученные результаты и методы позволяют решать многие вопросы обратимости, равномерной инъективности и коэрцитивности обширного класса функционально-дифференциальных операторов и дифференциальных операторов с частными производными. Они могут быть использованы при изучении различных прикладных задач. В диссертации даны ответы на некоторые поставленные ранее вопросы в теории обратимости линейных дифференциальных операторов.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ. Результаты диссертации докладывались на семинарах в Куйбышевском госуниверситете, Воронежском госуниверситете, Пермском политехническом институте, Липецком техническом университете; на Всесоюзной конференции по теории и приложениям функционально-дифференциальных уравнений (Душанбе,1987), на XVI школе по теории операторов (Ульяновск, 1990), на международной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения" (Саранск, 1994); на школах в Воронеже: "Понтрягинские чтения IV-VII"(1993 - 1996), "Современные проблемы механики и математической физики" (1994), XXVI Зимняя математическая школа (1994); на конференции "Современные методы нелинейного анализа" (Воронеж,1995); на научно-практических конференциях (Липецк, 1994,1995); на Украинских конференциях "Моделирование и исследование устойчивости систем" (Киев, 1995,1996); на Всеукраинской конференции "Дифференциально-функциональные уравнения и их приложения" (Черновцы, 1996); в институте математики АН Украины на семинарах акад. Ю.А. Митропольского и проф. М.Л. Горбачука (1996).

ПУБЛИКАЦИИ. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-22]. Из [5,11] включены те результаты, которые принадлежат автору.

СТРУКТУРА И ОБЪЕМ РАБОТЫ. Диссертация изложена на 358 страницах и состоит из введения, четырех глав, содержащих 25 параграфов, списка литературы из 192 наименований. В автореферате сохраняется нумерация утверждений, принятая в диссертации.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обсуждается актуальность темы и краткая характеристика работы, делается обзор литературы, примыкающей к содержанию диссертации, коротко излагаются ее содержание и основные результаты.

В первой главе изучаются равномерная инъективность и обратимость обыкновенных линейных дифференциальных и функционально-дифференциальных операторов с позиции эквивалентности их в различных функциональных пространствах.

В § 1.1 описываются линейные дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами и так называемые dr - операторы. Пусть X - банахово пространство. Основными функциональными пространствами, в которых будут рассматриваться функционально-дифференциальныe операторы, являются $C = C(R, X)$ - пространство непрерывных ограниченных функций $u : R \to X$ с sup - нормой; пространство Лебега всех сильно измеримых (по Бохнеру) функций $u : R \to X$ $(1 \leq p \leq \infty)$; $M^p = M^p(R, X)$ - пространство Степанова сильно измеримых функций $u : R \to X$ с нормой

$$\|u\|_{M^p} = \sup_{t \in R}\left(\int_t^{t+1}\|u(s)\|^p ds\right)^{1/p} < \infty \qquad (p \geq 1).$$

$F = F(R, X)$ - одно из пространств C, M^p, L^p. $L = L(R, X)$ - локально выпуклое топологическое векторное пространство всех сильно измеримых функций $u : R \to X$, интегрируемых (по Бохнеру) на каждом компактном интервале, с топологией сходимости в среднем.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L} = d/dt - A(t)$, где $A(t)$ $(t \in R)$ - линейный, вообще говоря, неограниченный оператор, определенный в банаховом пространстве X. Будем предполагать, что для любого $u(t_0) \in X$ уравнение $\mathcal{L} u = 0$ имеет единственное решение $u(t)$ $(t \geq t_0)$. Разрешающий (эволюционный) оператор $\mathcal{U}(t, t_0): X \to X$ $(t \geq t_0)$

ограничен, сильно непрерывен по переменным $t \geq t_0$ и удовлетворяет экспоненциальной оценке. Решение $u(t)$ неоднородного уравнения $\mathcal{L}u = f$ ($f \in L$) дается формулой

$$u(t) = \mathcal{U}(t.t_0)\,u(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathcal{U}(t.s)\,f(s)ds \qquad (1)$$

для всех $t \geq t_0$. Если функция $u(t)$ удовлетворяет равенству (1) при любых $t \geq t_0$ из R, то функция $u(t)$ является решением уравнения $\mathcal{L}u = f$ на всей оси R. Перечисленные условия на дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ назовем J - условиями. Зададим теперь в F область дифференциального оператора $\mathcal{L}$ равенством

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}, F) = \{ u \mid u \in F,\ \mathcal{L}u = f \in F \}.$$

Линейный оператор $\mathcal{L}$ (абстрактный), действующий в пространстве F с некоторой областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{L}, F) \subseteq F$, называется dr - оператором, если: 1. Область определения $\mathcal{D}(\mathcal{L}, F)$ инвариантна относительно оператора умножения на гладкую финитную функцию $\varphi : R \to R$. 2. Для коммутатора $\mathcal{L}\varphi - \varphi\mathcal{L}$ имеет место некоторая локальная оценка через производную $\dot{\varphi}$. 3. Носитель supp ($\mathcal{L}\varphi u - \varphi\mathcal{L}u$) расположен в окрестности носителя supp φ.

Приводятся примеры dr - операторов. Таковыми будут дифференциальные операторы $\mathcal{L}$, удовлетворяющие J - условиям, многие дифференциально-разностные и функционально-дифференциальные операторы.

Одним из центральных понятий диссертации является определение равномерной инъективности оператора. Линейный оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, F) \to F$ называется равномерно инъективным, если выполняется неравенство

$$\|u\|_F \le k\,\|\mathcal{L}u\|_F \qquad (u \in \mathcal{D}(\mathcal{L},F))$$

с некоторой постоянной $k = k(\mathcal{L}, F) > 0$.

Равномерная инъективность оператора тесно связана с существованием непрерывного левого обратного оператора, нижней нормой оператора, минимумом оператора, корректного оператора. Термин "равномерная инъективность" представляется более удобным и универсальным при изучении функционально-дифференциальных операторов.

Основное содержание § 1.2 составляют утверждения о dr - операторах. Пусть $\mathcal{L}_2 : \mathcal{D}(\mathcal{L}_2, M^p) \to M^p$, $\mathcal{L}_3 : \mathcal{D}(\mathcal{L}_3, L^p) \to L^p$- два dr - оператора, которые связаны между собой следующим образом ($1 \le p < \infty$). Оператор умножения на функцию φ отображает $\mathcal{D}(\mathcal{L}, M^p)$ в $\mathcal{D}(\mathcal{L}, L^p)$. Далее, $\mathcal{D}(\mathcal{L}, L^p) \subset \mathcal{D}(\mathcal{L}, M^p)$ и имеет место равенство

$$\mathcal{L}_2 u = \mathcal{L}_3 u, \quad u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_2, M^p) \cap \mathcal{D}(\mathcal{L}_3, L^p).$$

Все это кратко назовем ap - условием. Кроме того, требуется выполнение определенного свойства локальности для операторов $\mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_3$, связанного с расположением носителя $\mathrm{supp}(\mathcal{L}_j \varphi u - \varphi \mathcal{L}_j u)$ ($j = 1,2$).

Т Е О Р Е М А 1.2.1. dr - операторы $\mathcal{L}_2 : \mathcal{D}(\mathcal{L}_2, M^p) \to M^p$ и $\mathcal{L}_3 : \mathcal{D}(\mathcal{L}_3, L^p) \to L^p$, удовлетворяющие приведенным выше требованиям, равномерно инъективны одновременно.

Эта теорема имеет принципиальное значение, поскольку многие результаты получены с ее помощью. На основе ее получена также важная теорема об одновременной обратимости dr - операторов.

Т Е О Р Е М А 1.2.2.Если dr - операторы $\mathcal{L}_2 : \mathcal{D}(\mathcal{L}_2, M^p) \to M^p$, $\mathcal{L}_3 : \mathcal{D}(\mathcal{L}_3, L^p) \to L^p$ связаны между собой ap - условием, обладают свойством локальности, оператор $\mathcal{L}_2 : \mathcal{D}(\mathcal{L}_2, M^p) \to M^p$ локально замкнут и имеет место импликация

$$u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_2, M^p),\ u \in L^p,\ \mathcal{L}_2 u \in L^p \quad \Rightarrow \quad u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_3, L^p),$$

то они непрерывно обратимы одновременно.

СЛЕДСТВИЕ 1.2.1. Спектры dr - операторов $\mathcal{L}_2 : \mathcal{D}(\mathcal{L}_2, M^p) \to M^p$ и $\mathcal{L}_3 : \mathcal{D}(\mathcal{L}_3, L^p) \to L^p$, удовлетворяющих условиям теоремы 1.2.2,совпадают.

Реализация теорем 1.2.1, 1.2.2 на конкретных dr - операторах дает следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1.2.3. Пусть для дифференциального оператора $\mathcal{L} = d/dt - A(t)$ выполнены J - условия. Тогда операторы $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, M^p) \to M^p$ и $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, L^p) \to L^p$ равномерно инъективны одновременно.

ТЕОРЕМА 1.2.4. Дифференциальные операторы $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, M^p) \to M^p$ и $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, L^p) \to L^p$, где $\mathcal{L} = d/dt - A(t)$ удовлетворяет J - условиям, непрерывно обратимы одновременно.

Аналогичные предложения (теоремы 1.2.5, 1.2.6) получены для дифференциально-разностных операторов вида $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + R$, где дифференциальный оператор $\mathcal{L}_0$ подчиняется J - условию, а разностный оператор R действует по формуле

$$R\,u = \sum_{j=1}^{\infty} A_j(t)u(t+h_j) \qquad (u \in F),$$

причем, $A_j(t) \in C(R, Hom(X,X))$, $\quad |h| \le M, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \|A_j\|_C < \infty.$

В теоремах 1.3.1, 1.3.2 параграфа 1.3 установлено, что при определенных условиях из равномерной инъективности линейного оператора $\mathcal{L}_2 : \mathcal{D}(\mathcal{L}_2, M^p) \to M^p$ вытекает равномерная инъективность операторов $\mathcal{L}_1 : \mathcal{D}(\mathcal{L}_1, C) \to C$ и $\mathcal{L}_1 : \mathcal{D}(\mathcal{L}_1, L^\infty) \to L^\infty$. Остальная часть параграфа посвящена функционально-дифференциальным операторам $\mathcal{L} = d/dt - \mathcal{A}$. Пространства M^p ($1 \le p < \infty$), L^p ($1 \le p \le \infty$) инвариантны относительно линейного функционального оператора $\mathcal{A} : L \to L$, сужения которого на M^p, L^p являются dr - операторами. Равенство

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}, M^p) = \{ u \mid u \in M^p, \ \mathcal{L} u \in M^p \}$$

задает область определения функционально-дифференциального оператора $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, M^p) \to M^p$. Аналогично определяется линейное многообразие $\mathcal{D}(\mathcal{L}, L^p)$, на котором определен оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, L^p) \to L^p$.

ТЕОРЕМА 1.3.3. Пусть dr - операторы $\mathcal{A} : L^\infty \to L^\infty$, $\mathcal{A} : M^p \to M^p$, $\mathcal{A} : L^p \to L^p$ ($1 \le p \le \infty$) ограничены и выполняется для них свойство локальности. Тогда равномерная инъективность одного из операторов $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, L^\infty) \to L^\infty$, $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, M^p) \to M^p$, $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, L^p) \to L^p$ влечет равномерную инъективность двух других.

Наложим на оператор $\mathcal{A} : L \to L$ дополнительные условия. Будем считать, что пространство C инвариантно относительно $\mathcal{A}$ и сужение $\mathcal{A} : C \to C$ есть dr - оператор. Кроме того, оператор $\mathcal{A}$ переводит непрерывную функцию $u \in M^p$ в непрерывную. Функционально-дифференциальный оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, C) \to C$ имеет область определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}, C) = \{ u \mid u \in C, \ \mathcal{L} u \in C \}.$$

ТЕОРЕМА 1.3.4. Если dr - операторы $\mathcal{A} : F \to F$ ограничены и для них имеет место свойство локальности, то операторы $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, C) \to C$, $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, L^\infty) \to L^\infty$, $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, M^p) \to M^p$, $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, L^p) \to L^p$ ($1 \le p < \infty$) равномерно инъективны одновременно.

ТЕОРЕМА 1.3.6. Пусть оператор $\mathcal{A} : L \to L$ непрерывен и для него выполняются условия теоремы 1.3.4. Тогда свойства непрерывной обратимости для операторов $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, C) \to C$, $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, L^\infty) \to L^\infty$, $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, M^p) \to M^p$, $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, L^p) \to L^p$ ($1 \le p < \infty$)

эквивалентны.

Пусть W^1 (F) - пространство Соболева, которое состоит из функций $f \in F$, имеющих производную $\dot{f} = df/dt \in F$, $W^1(C) = C^1$. Показано (теорема 1.3.5 и следствие 1.3.2), что операторы $\mathcal{L} : C^1 \to C$, $\mathcal{L} : W^1(L^\infty) \to L^\infty$, $\mathcal{L} : W^1(M^p) \to M^p$, $\mathcal{L} : W^1(L^p) \to L^p$ $(1 \le p < \infty)$ равномерно инъективны (обратимы) одновременно. В следствиях установлено также, что равномерная инъективность (обратимость) оператора $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, M^p) \to M^p$ $(1 \le p < \infty)$ или оператора $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, L^p) \to L^p$ $(1 \le p \le \infty)$ при одном p влечет их равномерную инъективность (обратимость) при всех p, а спектры операторов $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, C) \to C$, $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, L^\infty) \to L^\infty$, $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, M^p) \to M^p$, $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, L^p) \to L^p$ совпадают.

В § 1.4 изучается линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L} = d/dt - A(t)$, удовлетворяющий J - условиям. На него удается распространить основные утверждения предыдущего параграфа. Напомним, что A(t) есть, вообще говоря, неограниченный оператор в X. Схема исследования оператора $\mathcal{L}$ состоит в следующем. Сначала получается результат для разностного оператора $R\,x(n) = x(n+1) - B(n)\,x(n)$, B(n) - ограниченный оператор в X, $n \in \mathbb{Z}$.

Т Е О Р Е М А 1.4.1 Оператор $R : \ell_\infty \to \ell_\infty$ равномерно инъективен тогда и только тогда, когда равномерно инъективен оператор $R : \ell_p \to \ell_p$.

Здесь ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ - стандартное нормированное пространство последовательностей $x : \mathbb{Z} \to X$.

Затем по оператору $\mathcal{L}$ строится специальный разностный оператор $R\,x(n) = x(n+1) - \mathcal{U}(n+1,n)\,x(n)$, обратимость которого в пространствах ℓ_∞, ℓ_p тесно связана с обратимостью оператора $\mathcal{L}$

в пространствах C, L^p (теорема 1.4.2). После этого установлена

ТЕОРЕМА 1.4.3. Оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, L^\infty) \to L^\infty$ равномерно инъективен, если и только если равномерно инъективен оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, C) \to C$.

Пусть E, G $\subset$ L - нормированные пространства. Назовем оператор $\mathcal{L}$ равномерно инъективным относительно пары (E,G), если справедлива оценка

$$\|u\|_E \le k \, \|\mathcal{L}u\|_G$$

с некоторой константой $k = k(E,G) > 0$ для любых $u \in E$, $u \in F$.

ТЕОРЕМА 1.4.4. Оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, C) \to C$ равномерно инъективен тогда и только тогда, когда оператор $\mathcal{L}$ равномерно инъективен относительно пары (C, M^p).

ТЕОРЕМА 1.4.5. Для операторов $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, C) \to C$, $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, L^\infty) \to L^\infty$, $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, L^p) \to L^p$, $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, M^p) \to M^p$ $(p \ge 1)$ свойства равномерной инъективности эквивалентны.

И последняя в этом ряду

ТЕОРЕМА 1.4.6. Операторы $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, C) \to C$, $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, L^\infty) \to L^\infty$, $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, M^p) \to M^p$, $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, L^p) \to L^p$ $(1 \le p < \infty)$ обратимы одновременно.

Приведены различные следствия об обратимости и инъективности оператора $\mathcal{L}$ в пространстве L^p, о спектре дифференциальных операторов, о равномерной инъективности разностного оператора R в пространствах ℓ_p.

Приложения некоторых полученных теорем демонстрируются на оценке одного интеграла и доказательстве простейших теорем вложения в R.

Хорошо известно какую важную роль играют сопряженные операторы в анализе и теории линейных операторов. Нахождение сопряженного оператора к дифференциальному оператору, вообще говоря, - не простая задача. Однако некоторые вопросы можно решить с помощью двойственных (формально сопряженных) операторов. С рассмотрением таких операторов и связан §1.5.

Пусть оператор $\mathcal{L} = d/dt - A(t)$ удовлетворяет J - условиям, причем, область определения оператора $A(t)$ ($t \in \mathbf{R}$) плотна в X. Оператор $\mathcal{L}^* = d/dt + A^*(t)$, где $A^*(t)$ - сопряженный оператор к $A(t)$, называется двойственным оператором к $\mathcal{L}$. Предположения относительно $\mathcal{L}^*$ аналогичны предположениям относительно $\mathcal{L}$, при этом условие разрешимости однородного уравнения $\mathcal{L}^* u^* = 0$ ($u^* : \mathbf{R} \to X^*$) осуществляется влево. Решения уравнений $\mathcal{L} u = f$ и $\mathcal{L}^* u^* = f^*$ для $f \in L$, $f^* \in L^* = L(\mathbf{R}, X^*)$ связаны формулой Грина. Символом $F^* = F(\mathbf{R}, X^*)$ обозначается одно из пространств $C^* = C(\mathbf{R}, X^*)$, $M^{p*} = M^p(\mathbf{R}, X^*)$, $L^{p*} = L^p(\mathbf{R}, X^*)$. Область определения оператора $\mathcal{L}^*$ в пространстве F^* есть многообразие

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}^*, F^*) = \{ u^* \mid u^* \in F^*, \ \mathcal{L}^* u^* = f^* \in F^* \}.$$

ТЕОРЕМА 1.5.1. Пусть операторы $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, C) \to C$, $\mathcal{L}^* : \mathcal{D}(\mathcal{L}^*, C^*) \to C^*$ равномерно инъективны. Тогда оба они непрерывно обратимы.

В теореме 1.5.2 приводится условие обратимости оператора $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, C) \to C$, связанное с обратимостью двойственного оператора $\mathcal{L}^* : \mathcal{D}(\mathcal{L}^*, C^*) \to C^*$.

Теорема 1.5.3 утверждает, что операторы $\mathcal{L}^* : \mathcal{D}(\mathcal{L}^*, C^*) \to C^*$, $\mathcal{L}^* : \mathcal{D}(\mathcal{L}^*, L^{\infty *}) \to L^{\infty *}$, $\mathcal{L}^* : \mathcal{D}(\mathcal{L}^*, M^{p*}) \to M^{p*}$, $\mathcal{L}^* : \mathcal{D}(\mathcal{L}^*, L^{p*}) \to L^{p*}$ ($1 \le p < \infty$) равномерно инъективны (обратимы) одновременно.

Следуя Массера Х. и Шефферу Х, скажем, что пара банаховых пространств E, G ($E, G \subset L$) называется допустимой для оператора $\mathcal{L}$, если при любом $f \in G$ уравнение $\mathcal{L} u = f$ имеет хотя бы одно решение $u \in E$.

Если пространство X рефлексивно или сепарабельно, а операторы A(t) имеют общую плотную в X область определения, то удается доказать интересное предложение о допустимости пары (L^p, L^p).

ТЕОРЕМА 1.5.4. Пара (L^p, L^p) $(1 < p < \infty)$ допустима для оператора $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда равномерно инъективен оператор $\mathcal{L}^* : \mathcal{D}(\mathcal{L}^*, C^*) \to C^*$.

Рассмотрим функционально-дифференциальный оператор $\mathcal{L}_r : \mathcal{D}(\mathcal{L}_r, F) \to F$, где $\mathcal{L}_r u = du/dt - A(t)u - \mathcal{A} u$. Оператор $\mathcal{L} = d/dt - A(t)$ и пространство X удовлетворяют предположениям теоремы 1.5.4. Для оператора $\mathcal{A} : L \to L$ считаем выполненными условия теоремы 1.3.6. Пусть $\mathcal{A}^* : L^* \to L^*$ есть линейный оператор, имеющий такие же свойства как и $\mathcal{A} : L \to L$. Определим оператор $\mathcal{L}_r^* : \mathcal{D}(\mathcal{L}_r^*, F^*) \to F^*$ равенством

$$\mathcal{L}_r^* u^* = -du^*/dt - A^*(t)u^*(t) - \mathcal{A}^* u^*,$$

$$u^*(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_r^*, F^*) = \mathcal{D}(\mathcal{L}^*, F^*).$$

Операторы $\mathcal{L}_r : \mathcal{D}(\mathcal{L}_r, F) \to F$ и $\mathcal{L}_r^* : \mathcal{D}(\mathcal{L}_r^*, F^*) \to F^*$ связаны формулой Грина.

ТЕОРЕМА 1.5.5. Если операторы $\mathcal{L}_r : \mathcal{D}(\mathcal{L}_r, C) \to C$ и $\mathcal{L}_r^* : \mathcal{D}(\mathcal{L}_r^*, C^*) \to C^*$ равномерно инъективны, то оба они непрерывно обратимы.

Одним из примеров оператора $\mathcal{L}_r$ может служить дифференциально-разностный оператор

$$\mathcal{L}_* = du/dt - A(t)u(t) - \sum_{j=1}^{\infty} A_j(t)u(t-h_j).$$

Для него отдельно формулируется теорема 1.5.6, аналогичная теореме 1.5.5.

Наряду с пространствами F в приложениях важную роль играет нормированное пространство BC, алгебраически совпадающее с C и имеющее боголюбовскую норму

$$\|f\|_{BC} = \sup_{0<t-\tau\le 1} \left\| \int_{\tau}^{t} f(s)ds \right\| .$$

Линейный оператор $\mathcal{A} : C \to C$ (для него выполнены условия теоремы 1.3.6) можно рассматривать как линейный оператор $\mathcal{A} : BC \to BC$. Тогда можно определить функционально-дифференциальный оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, BC) \to BC$, действующий по формуле $\mathcal{L}\, u = du/dt - \mathcal{A}u$ и имеющий область определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}, BC) = \{ u \mid u \in BC,\ \mathcal{L}u \in BC \}.$$

Операторы $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, C) \to C$ и $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, BC) \to BC$, очевидно, алгебраически совпадают, а их свойства равномерной инъективности эквивалентны.

Т Е О Р Е М А 1.6.1.Для того чтобы оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, C) \to C$ был равномерно инъективен, необходимо и достаточно, чтобы оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, BC) \to BC$ был также равномерно инъективен.

Отсюда сразу следует

Т Е О Р Е М А 1.6.2.Свойства непрерывной обратимости для операторов $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, C) \to C$ и $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, BC) \to BC$ эквивалентны.

Аналогичные предложения (теоремы 1.6.3 и 1.6.4) доказаны для пространства C и винеровского пространства

$$\mathcal{W} = M(R,X) \cap C(R,X),$$

$$M(R,X) = \{ f \in L^{\infty}(R,X) \mid \sum_{j=-\infty}^{\infty} \operatorname{ess\,sup}_{j\le t\le j+1} \|f(t)\| < \infty \} .$$

В последней части § 1.6 в качестве приложений рассмотрены теоремы 1.6.5 и 1.6.6 и следствия для функционально-дифференциальных операторов, зависящих от малого параметра.

Вторая глава содержит главным образом исследования, связанные с признаками обратимости и равномерной инъективности функционально - дифференциальных и дифференциальных операторов. Результаты § 2.1 получены на основе техники периодической аппроксимации и локальных равномерных неравенств.

Последовательность операторов $\mathcal{A}_j : L \to L$ называется сильно локально сходящейся к оператору $\mathcal{A} : L \to L$, если при любой функции $u \in L^\infty$ последовательность $\mathcal{A}_j u$ локально сходится к $\mathcal{A} u$ в L^∞.

Оператор $\mathcal{A} : L \to L$ назовем сильно T - периодическим, если найдется число T>0 такое, что $\mathcal{A} S_T = S_T \mathcal{A}$, где S_h - оператор сдвига функций из L ($h \in \mathbb{R}$). Число T назовем периодом оператора $\mathcal{A}$.

Будем говорить о сильной двойной периодической аппроксимации оператора $\mathcal{A} : L \to L$ сильно T_j - периодическими операторами $\mathcal{A}_j : L \to L$ (последовательностью сильно T_j - периодических операторов $\mathcal{A}_j : L \to L$), если для любой функции $u \in L^\infty$ выполняется равенство

$$\lim_{j\to\infty} \operatorname{ess\,sup}_{|t|\le T_j} \left\|(\mathcal{A}u)(t)-(\mathcal{A}_j u)(t)\right\| = 0$$

равномерно относительно $u \in B(0,1) \subset L^\infty$ (B (0,1) - шар радиуса 1 с центром в x = 0).

Если последовательность операторов $\mathcal{A}_j : L \to L$ сильно локально сходится к оператору $\mathcal{A} : L \to L$ при $j \to \infty$, то говорят о сильной локальной сходимости функционально-дифференциальных операторов $\mathcal{L}_j = d/dt - \mathcal{A}_j$ ($\mathcal{L}_j : \mathcal{D}(\mathcal{L}_j, F) \to F$) к оператору $\mathcal{L} = d/dt - \mathcal{A}$ ($\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, F) \to F$). Аналогично определяется сильная двойная периодическая аппроксимация оператора $\mathcal{L}$ = d/dt - $\mathcal{A}$ операторами $\mathcal{L}_j : \mathcal{D}(\mathcal{L}_j, F) \to F$.

Семейство операторов $\mathcal{L}_j : \mathcal{D}(\mathcal{L}_j, F) \to F$ называется равностепенно инъективным, если постоянную k ($\mathcal{L}_j$, F) можно выбрать не зависящей от j.

Рассматриваемые операторы $\mathcal{A} : F \to F$, $\mathcal{A}_j : F \to F$ являются dr - операторами, удовлетворяющими условиям теоремы 1.3.6.

Т Е О Р Е М А 2.1.1. Для равномерной инъективности оператора $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, F) \to F$ достаточно, чтобы существовала последовательность равностепенно инъективных операторов $\mathcal{L}_j : \mathcal{D}(\mathcal{L}_j, F) \to F$, сильно локально сходящаяся к $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, F) \to F$. Если оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, F) \to F$ равномерно инъективен, то при сильной двойной периодической аппроксимации оператора $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, F) \to F$ операторами $\mathcal{L}_j : \mathcal{D}(\mathcal{L}_j, F) \to F$ ($j \to \infty$) необходимо, чтобы последнее семейство операторов было равностепенно инъективным.

Последовательность операторов $\mathcal{L}_j : \mathcal{D}(\mathcal{L}_j, F) \to F$ называется локальной аппроксимацией оператора $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, F) \to F$, если последовательность $\mathcal{A}_j u$ локально сходится ($j \to \infty$) к $\mathcal{A} u$ в L^∞ равномерно относительно u из любого шара B (0,r) $\subset L^\infty$.

Ниже предполагается, что операторы $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, F) \to F$, $\mathcal{L}_j : \mathcal{D}(\mathcal{L}_j, F) \to F$ имеют двойственные операторы $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{L}_j^*$. При сильной двойной периодической аппроксимации оператора $\mathcal{L}$ операторами $\mathcal{L}_j$ операторы $\mathcal{L}_j^*$ осуществляют сильную двойную периодическую аппроксимацию оператора $\mathcal{L}^*$.

Т Е О Р Е М А 2.1.2. Если при локальной аппроксимации оператора $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, F) \to F$ операторы $\mathcal{L}_j : \mathcal{D}(\mathcal{L}_j, F) \to F$ непрерывно обратимы и $\sup_j \|L_j^{-1}\|_F < \infty$, то оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, F) \to$

F непрерывно обратим. Если оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, F) \to F$ непрерывно обратим и пространство X рефлексивно или сепарабельно, то при сильной двойной периодической аппроксимации операторы $\mathcal{L}_j : \mathcal{D}(\mathcal{L}_j, F) \to F$ для достаточно больших $j \geq j_0$ непрерывно обратимы и $\sup\limits_{j \geq j_0} \|L_j^{-1}\|_F < \infty$.

В случае, когда оператор $\mathcal{A}$ является оператором умножения на функцию A(t), ограничения на пространство X не требуются.

ТЕОРЕМА 2.1.3. Для того, чтобы оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, F) \to F$ был непрерывно обратим, достаточно, чтобы при локальной аппроксимации его операторы $\mathcal{L}_j : \mathcal{D}(\mathcal{L}_j, F) \to F$ были непрерывно обратимы и $\sup\limits_{j} \|L_j^{-1}\|_F < \infty$. Если оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, F) \to F$ непрерывно обратим, то при двойной периодической аппроксимации операторы $\mathcal{L}_j : \mathcal{D}(\mathcal{L}_j, F) \to F$ непрерывно обратимы и $\sup\limits_{j} \|L_j^{-1}\|_F < \infty$.

С помощью техники периодической аппроксимации получен аналог теоремы Фавара - Мухамадиева (теорема 2.1.4) для разностного оператора. В теореме 2.1.5 установлена обратимость оператора $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, C) \to C$ при условии допустимости функциональных пар (C,C), (M^p, M^p), (L^p, L^p) ($1 \leq p < \infty$). Рассмотрены следствия и ряд лемм.

Предметом рассмотрения в § 2.2 служит функционально-дифференциальный оператор $\mathcal{L} = d/dt - \mathcal{A}$, где оператор $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям теоремы 1.3.6. Дополнительно считаем, что пространство $\dot{C}$ почти периодических функций инвариантно относительно $\mathcal{A}$. Если $\varphi : R \to R$ - гладкая функция, ограниченная вместе с производной, то

$$\|\varphi \mathcal{A} u - \mathcal{A} \varphi u\|_C \leq k_0' \|\dot{\varphi}\|_C \|u\|_C .$$

где $u \in C$, k_0' не зависит от u, φ.

ТЕОРЕМА 2.2.1. Если оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, \dot{C}) \to \dot{C}$ равномерно инъективен, то справедлива локальная оценка

$$\sup_{|t|\le T}\|u(t)\| \le k_{01}\sup_{|t|\le 2T}\|\mathcal{L}u(t)\| + \frac{2k_{01}}{T}(1+k_0')\|\mathcal{L}u\|_C ,$$

$u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}, \dot{C})$, $T > 0$, $k_{01} = k(\mathcal{L}, \dot{C})$.

ТЕОРЕМА 2.2.2. Для равномерной инъективности оператора $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, C) \to C$ необходимо и достаточно, чтобы оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, \dot{C}) \to \dot{C}$ был равномерно инъективен.

Пусть существует скалярная почти периодическая функция $\theta(t)$ такая, что для любого ее ε - почти периода τ и любой функции $u \in C$ выполняется неравенство

$$\|\mathcal{A}s_\tau u - \mathcal{A}s_\tau u\|_C \le \varepsilon\|u\|_C .$$

ТЕОРЕМА 2.2.3. Оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, C) \to C$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, \dot{C}) \to \dot{C}$.

Далее оператор $\mathcal{A}$ считается оператором умножения на почти периодическую операторную функцию $A(t)$.

ТЕОРЕМА 2.2.4. Пусть пара $(\dot{C}, \dot{C})$ допустима для оператора $\mathcal{L}$ и множество

$$X_{0\dot{C}} = \{ u(0) \mid u \in \mathring{C}, \mathcal{L}u = 0 \}$$

замкнуто в X. Тогда оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, C) \to C$ обратим.

ТЕОРЕМА 2.2.5. Допустимость пары $(C, \dot{C})$ для оператора $\mathcal{L}$ при условии замкнутости многообразия

$$X_{0C} = \{ u(0) \mid u \in C, \mathcal{L}u = 0 \}$$

влечет обратимость оператора $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, C) \to C$.

В теоремах 2.2.6 - 2.2.8 рассмотрена обратимость дифференциальных операторов при условии допустимости пар ($\dot{C}$, $\dot{C}$) и (C, $\dot{C}$) при некоторых предположениях.

Отдельным параграфом рассмотрены дифференциальные операторы $\mathcal{L}$ с постоянными и периодическими коэффициентами. Обратимость оператора $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, C) \to C$ в случае допустимости пары (C,C) для сепарабельного X решена Жиковым В.В. В развитие этой проблемы для произвольного X получена

Т Е О Р Е М А 2.3.1. Пусть пара банаховых функциональных пространств (E,G) допустима для оператора $\mathcal{L}$. Если выполнено одно из условий:1) $G \supseteq L^p$ и $E \subseteq C$ ($1 < p \leq \infty$); 2) $G \supseteq L^1$ и $E \subseteq L^p$ ($1 \leq p < \infty$); 3) $G \supseteq \dot{C}$ и $E \subseteq C$; 4) оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, F) \to F$ равномерно инъективен, то оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, C) \to C$ обратим.

Обозначим через $\mathcal{P}$ линейное многообразие тригонометрических полиномов в $\dot{C}$. Далее, пусть Δ - модуль (аддитивная подгруппа) действительных чисел R, $\dot{C}_{\Delta}$ - подпространство в $\dot{C}$, состоящее из функций, для которых модуль, порожденный спектром показателей Фурье функции, принадлежит Δ. Коэффициент A(t) в операторе $\mathcal{L}$ = d/dt - A(t) будем считать непрерывной периодической операторной функцией.

Т Е О Р Е М А 2.3.2. Пусть пара (C, $\mathcal{P}$) допустима для оператора $\mathcal{L}$. Если многообразие $X_{o\mathring{c}}$ замкнуто в X , то оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, C) \to C$ обратим.

Т Е О Р Е М А 2.3.3. Если Δ - плотный модуль, пара (C, $\dot{C}_{\Delta}$) допустима для оператора $\mathcal{L}$ и множество $X_{o\mathring{c}}$ замкнуто в X, то оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, C) \to C$ обратим.

Как следствие указано, что оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, C) \to C$ (A=const) обратим при условии допустимости одной из пар (C, $\mathcal{P}$),

$(C, \dot{C}_s)$.

В параграфе 2.4 изучаются дифференциальные операторы $\mathcal{L}$ с замкнутой областью значений. Операторный коэффициент $A(t)$ является устойчивой по Пуассону функцией.

Т Е О Р Е М А 2.4.1. Пусть область значений $\mathrm{Im}_F \mathcal{L}$ оператора $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, F) \to F$ замкнута и многообразие X_{0F} также замкнуто в X. Тогда оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, F) \to F$ равномерно инъективен.

Из этой теоремы выведены два следствия об обратимости оператора $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, F) \to F$.

Оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, F) \to F$ называется Φ_+ - оператором, если его область значений $\mathrm{Im}_F \mathcal{L}$ замкнута, а ядро $\mathrm{Ker}_F \mathcal{L}$ конечномерно.

Оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, F) \to F$ называется Φ_- - оператором, если его область значений $\mathrm{Im}_F \mathcal{L}$ замкнута, и ядро $\mathrm{Ker}_{F^*} \mathcal{L}^*$ двойственного оператора $\mathcal{L}^* : \mathcal{D}(\mathcal{L}^*, F^*) \to F^*$ конечномерно.

Оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, F) \to F$ называется Φ - оператором, если он одновременно есть Φ_+ и Φ_- - оператор.

Основные утверждения о вышеназванных операторах таковы.

Т Е О Р Е М А 2.4.3. Если один из операторов $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, C) \to C$, $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, L^\infty) \to L^\infty$, $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, M^p) \to M^p$, $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, L^p) \to L^p$ $(1 \le p < \infty)$ является Φ_+ - оператором, то три других тоже есть Φ_+ - операторы.

Т Е О Р Е М А 2.4.4. В рефлексивном или сепарабельном пространстве X Φ - операторы $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, C) \to C$, $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, M^p) \to M^p$ и $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, L^\infty) \to L^\infty$ обратимы. Если пространство X рефлексивно, то Φ - оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, L^p) \to L^p$ $(1 < p < \infty)$ обратим.

Доказан аналог теоремы 2.4.1 для разностного оператора, приведены некоторые другие предложения об Φ_+ - операторах.

Полученные выше результаты в § 2.5 применяются к исследованию дифференциальных операторов, коэффициенты которых содержат малый параметр $\varepsilon > 0$ (теоремы 2.5.1 - 2.5.3).

В третьей главе представлены функционально-дифференциальные операторы $\mathcal{L} = B(t)\, d/dt - \mathcal{A}$ с коэффициентом при производной. Пусть F_0 - одно из пространств C, L^∞, $\mathcal{A} : F_0 \to F_0$ - линейный ограниченный оператор, $\mathcal{A}^* : F_0^* \to F_0^*$ (F_0^* - одно из пространств C^*, $L^{\infty *}$ соответственно) - также линейный ограниченный оператор, $B(t)$, $dB/dt \in C(R, Hom(X,X))$. Операторы $\mathcal{L} : W^1(F_0) \to F_0$ и $\mathcal{L}^* : W^1(F_0^*) \to F_0^*$ связаны формулой Грина ($\mathcal{L}^* u^* = -d(B^* u^*)/dt - \mathcal{A}^* u^*$) и соотношением

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{d\mathcal{A}u(t)}{dt}, u^*(t)\right) - \left(\frac{du(t)}{dt}, \mathcal{A}^* u^*(t)\right)\right)dt\right| \le a\|u\|_{W^1(F_0)}\|u^*\|_{L^{1*}}$$

где $u \in W^1(F_0)$, $u^* \in W^1(L^{1*})$, $a > 0$ не зависит от u, u^*.

Т Е О Р Е М А 3.1.1. Если оператор $\mathcal{L} : W^1(F_0) \to F_0$ обратим, то операторы $B(t) : X \to X$ имеют ограниченные обратные $B^{-1}(t) : X \to X$, причем, $\sup\|B^{-1}(t)\| < \infty$ ($t \in R$).

Далее, с помощью этой теоремы в параграфе 3.1 получен такой же результат (теорема 3.1.2) для дифференциально-разностного оператора

$$\mathcal{L} = B(t)d/dt - A(t) - \sum_{j=1}^{\infty} A_j(t) S_{h_j},$$

а в теореме 3.1.3 показано, что в конечномерном пространстве X из равномерной инъективности оператора $\mathcal{L} = B(t)\, d/dt - A(t)$ с совместно устойчивыми по Пуассону коэффициентами в пространстве F вытекает его обратимость.

Для оператора $\mathcal{L} = B\, d/dt - A$ с постоянными коэффициентами доказана

Т Е О Р Е М А 3.1.4. Пусть оператор $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}, C^1) \to C$ имеет непрерывный обратный. Тогда, если выполнено одно из условий: 1) оператор A ограничен на $\mathcal{D}_0$; 2) оператор B замкнут и $\mathcal{D}_0$ плотно в X, то оператор B имеет непрерывный обратный $B^{-1}: X \to \mathcal{D}_0$ ($\mathcal{D}_0 \subseteq X$ - общая область определения операторов A, B).

Ниже функциональный оператор $\mathcal{A}: L \to L$ удовлетворяет требованиям теоремы 1.3.6 и некоторому дополнительному условию равномерной непрерывности. Центральное место в § 3.2 занимает

Т Е О Р Е М А 3.2.1. Пусть коэффициент B(t) является равномерно непрерывной функцией на R, область значений Im B не зависит от t и для оператора $\mathcal{A}$ выполнены вышеприведенные условия. Тогда свойства равномерной инъективности операторов $\mathcal{L}: C^1 \to C$, $\mathcal{L}: W^1(M^p) \to M^p$, $\mathcal{L}: W^1(L^p) \to L^p$ $(p \ge 1)$, $\mathcal{L}: W^1(L^\infty) \to L^\infty$ эквивалентны.

С Л Е Д С Т В И Е 3.2.2. Пусть коэффициенты B(t), $A_j(t)$ (j = 1,...,n) дифференциально-разностного оператора

$$\mathcal{L} = B(t)d/dt - \sum_{j=1}^{n} A_j(t)S_{h_j}$$

являются равномерно непрерывными операторными функциями на R класса C и область значений Im B не зависит от $t \in R$. Тогда операторы $\mathcal{L}: C^1 \to C$, $\mathcal{L}: W^1(L^\infty) \to L^\infty$, $\mathcal{L}: W^1(M^p) \to M^p$, $\mathcal{L}: W^1(L^p) \to L^p$ $(1 \le p < \infty)$ равномерно инъективны одновременно.

С помощью теоремы 3.2.1 получаются

Т Е О Р Е М А 3.2.2. Если оператор $\mathcal{L} = B(t)\, d/dt - \mathcal{A}$ таков, что для него выполняются условия теорем 3.1.1 и 3.2.1, то функционально - дифференциальные операторы $\mathcal{L}: C^1 \to C$, $\mathcal{L}: W^1(L^\infty) \to L^\infty$, $\mathcal{L}: W^1(M^p) \to M^p$, $\mathcal{L}: W^1(L^p) \to L^p$ непрерывно обратимы одновременно $(1 \le p < \infty)$.

Т Е О Р Е М А 3.2.3. Пусть оператор $\mathcal{L} = B(t)\, d/dt - \mathcal{A}$ удовлетворяет условиям теорем 3.1.1, 3.2.1, пространство X рефлексивно или сепарабельно. Если операторы $\mathcal{L} : C^1 \to C$ и $\mathcal{L}$: $C^{1*} \to C^*$ равномерно инъективны, то оба они обратимы.

На основе локальных равномерных неравенств в § 3.3 обсуждаются условия обратимости и равномерной инъективности оператора $\mathcal{L} = B(t)\, d/dt - A(t)$ в пространстве C через предельные операторы $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{B}(t) d/dt - \tilde{A}(t)$, где

$$\tilde{A}(t) = \lim_{j \to \infty} A(t + h_j), \qquad \tilde{B}(t) = \lim_{n \to \infty} B(t + h_n)$$

равномерно на каждом компактном интервале оси $\mathbb{R}$.

Будем говорить, что оператор $\mathcal{L} : C^1 \to C$ обладает свойством Φ_l, если каждая ограниченная последовательность функций $u_j(t)$ в C^1, для которой последовательность $\mathcal{L} u_j$ локально сходится в C, обладает локально сходящейся подпоследовательностью в C^1.

Т Е О Р Е М А 3.3.1. Два нижеследующих условия эквивалентны: 1) оператор $\mathcal{L} : C^1 \to C$ равномерно инъективен; 2) каждый оператор $\tilde{\mathcal{L}} : C^1 \to C$ обладает свойством Φ_l и уравнение $\tilde{\mathcal{L}} u = 0$ не имеет ненулевых решений в C^1.

Положим $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} - R(t)$, $R(t) \in C(\mathbb{R}, Hom(X,X))$, $\dot{B}(t) \in C(\mathbb{R}, Hom(X,X))$.

Т Е О Р Е М А 3.3.2. Если оператор $\mathcal{L} : C^1 \to C$ обратим, а значения оператора R(t) есть компактные операторы, то оператор $\mathcal{L}_1 : C^1 \to C$ обладает свойством Φ_l.

Получено несколько следствий, одно из которых является теоремой Фавара - Мухамадиева.

Метод замораживания применен в § 3.4 для исследования равномерной инъективности и обратимости дифференциального оператора $\mathcal{L} = B(t)\, d/dt - A(t)$, коэффициенты которого B(t), A(t) принадлежат пространству $C(\mathbb{R}, Hom(X,X))$. Положим $\mathcal{L}_{t_0} = B(t_0)\, d/dt - A(t_0)$ $(t_0 \in \mathbb{R})$.

Т Е О Р Е М А 3.4.1. Пусть семейство операторов $\mathcal{L}_{t_0} : C^1 \to C$ равностепенно инъективно, коэффициенты A(t) и B(t) удовлетворяют условию Липшица

$$\|A(t_2) - A(t_1)\| \le \delta|t_2 - t_1|, \qquad \|B(t_2) - B(t_1)\| \le \delta|t_2 - t_1|.$$

Если δ есть достаточно малая величина, то оператор $\mathcal{L} : C^1 \to C$ равномерно инъективен.

Т Е О Р Е М А 3.4.2. Пусть операторы $\mathcal{L}_{t_0} : C^1 \to C$ равномерно обратимы, коэффициенты A(t), B(t) удовлетворяют условию теоремы 3.4.1, функция B(t) дифференцируема и $\dot{B}(t) \in C(R, Hom(X,X))$. Тогда, если постоянная Липшица δ для коэффициентов A(t), B(t) достаточно мала, то оператор $\mathcal{L} : C^1 \to C$ обратим.

В теореме 3.4.3 обратимость оператора $\mathcal{L} : C^1 \to C$ выводится из обратимости операторов $\mathcal{L}_{t_0} : C^1 \to C$ на основе меры осцилляции $\omega_p(T, \mathcal{L})$ коэффициентов A(t) и B(t).

Частичная (sB - частичная) равномерная инъективность оператора $\mathcal{L}$ = d/dt - A(t), о которой идет речь в § 3.5 , определяется неравенством

$$\|Bu\|_F \le k\|B\mathcal{L}u\|_F \qquad (\|Bu\|_F \le k\|\mathcal{L}u\|_F).$$

Получено несколько теорем о соотношениях частичной (sB - частичной) равномерной инъективности оператора $\mathcal{L}$ в пространствах C, L^p, M^p (теоремы 3.5.1. - 3.5.4). В теореме 3.5.4 даны условия частичной равномерной инъективности для оператора $\mathcal{L}$ = d/dt - A с постоянным A.

Перейдем к изложению результатов четвертой главы, посвященной линейным дифференциальным операторам с частными производными. В этой главе C=C(R^n,X) есть пространство непрерывных ограниченных функций $u : R^n \to X$ с sup - нормой; M^p = M^p (R^n,X) - пространство Степанова сильно измеримых функций u :

$R^n \to X$, у которых

$$\|u\|_{M^p} = \sup_{x\in R^n}\left(\int_{K(x)}\|u(x)\|^p dx\right)^{1/p} < \infty \qquad (1\le p<\infty),$$

где $K(x)$ - единичный куб в R^n с центром в точке $x \in R^n$; $L^p = L^p(R^n,X)$ - пространство Лебега сильно измеримых функций $u : R^n \to X$ с обычной нормой; $F = F(R^n,X)$ - одно из пространств C, M^p, L^p.

Обозначим через $C^l = C^l(R^n, X)$ банахово пространство функций $u : R^n \to X$, ограниченных и непрерывных вместе со своими производными $D^\alpha u$ до порядка l включительно, при этом

$$\|u\|_{C^l} = \sum_{|\alpha|\le l}\|D^\alpha u\|_C, \quad D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1+\cdots+\alpha_n,$$

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ - мультииндекс, $l \in Z_+$, $C^0 = C$. Примем также следующие обозначения: $W^l(L^p)$ - пространство Соболева функций $u \in L^p$, у которых обобщенные производные $D^\alpha u$ ($|\alpha| \le l$) принадлежат L^p, при этом

$$\|u\|_{W^l(L^p)} = \sum_{|\alpha|\le l}\|D^\alpha u\|_{L^p},$$

$W^l(M^p)$ - пространство Степанова - Соболева функций $u \in M^p$, обобщенные производные $D^\alpha u$ ($|\alpha| \le l$) которых принадлежат M^p. Норма элемента $u \in W^l(M^p)$ определяется по формуле

$$\|u\|_{W^l(M^p)} = \sum_{|\alpha|\le l}\|D^\alpha u\|_{M^p}.$$

Считая, что $W^l(C) = C^l$, будем пользоваться также записью $W^l(F)$, обозначающей одно из пространств C^l, $W^l(M^p)$, $W^l(L^p)$.

В дифференциальном операторе

$$P = \sum_{|\alpha|\le m} A_\alpha(x)D^\alpha \qquad (m \in N)$$

коэффициенты $A_\alpha(x) \in C(R^n, \mathrm{Hom}(X,X))$. Очевидно, определен линейный оператор $P : W^m(F) \to F$, действующий по формуле

$$Pu = \sum_{|\alpha| \le m} A_\alpha(x) D^\alpha u(x).$$

Оператор $P : W^m(F) \to F$ назовем равномерно инъективным относительно пары нормированных пространств (G,H) $(G \supseteq W^m(F)$, $H \subseteq F)$, если существует такая постоянная $k = k(P, G, H) > 0$, что выполняется неравенство

$$\|u\|_G \le \|Pu\|_H \qquad (u \in W^m(F)).$$

Т Е О Р Е М А 4.1.2. Равномерная инъективность оператора $P : W^m(M^p) \to M^p$ относительно пары $(W^l(M^p), M^p)$ эквивалентна равномерной инъективности оператора $P : W^m(L^p) \to L^p$ относительно пары $(W^l(L^p), L^p)$, $l = m, m-1$.

Т Е О Р Е М А 4.1.3. Операторы $P : W^m(M^p) \to M^p$ и $P : W^m(L^p) \to L^p$ обратимы одновременно.

Кроме этих двух важных теорем в § 4.1 рассмотрены оценки равномерно инъективных операторов и примеры.

Пусть на некотором линейном многообразии $W^{m+<>}(F) \subseteq W^m(F)$ определена полунорма $<u>$. Введение в $W^{m+<>}(F)$ нормы

$$\|u\|_{W^{m+<>}(F)} = <u> + \|u\|_{W^m(F)}$$

превращает $W^{m+<>}(F)$ в линейное нормированное пространство. Ниже применяются обозначения:

$$<u>^0_{\gamma,m} = \sum_{|\alpha| \le m} \sup_{x,y \in R^n} \frac{\|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\|}{|x-y|^\gamma} \qquad (0 < \gamma < 1),$$

$$<u>_{\gamma,m} = \sum_{|\alpha| = m} \sup_{x,y \in R^n} \frac{\|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\|}{|x-y|^\gamma},$$

$$<u>_{\gamma,mJ} = \sum_{|\alpha|=m} \sup_{x,y\in R^n} \left(\int\limits_{K(x)} \int\limits_{K(y)} \frac{\|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\|^p}{|x-y|^{\gamma p+n}} dxdy \right)^{1/p},$$

$$<u>_{\gamma,mJ'} = \sum_{|\alpha|\le m} \left(\int\limits_{R^n} \int\limits_{R^n} \frac{\|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\|^p}{|x-y|^{\gamma p+n}} dxdy \right)^{1/p},$$

$$<u>^0_{\gamma,mJ} = \sum_{|\alpha|\le m} \sup_{x,y\in R^n} \left(\int\limits_{K(x)} \int\limits_{K(y)} \frac{\|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\|^p}{|x-y|^{\gamma p+n}} dxdy \right)^{1/p}.$$

$$<u>^+_{\gamma,Jm} = c_1 <u>_{\gamma,m} + c_2 <u>_{\gamma,mJ} \qquad (c_1 > 0,\ c_2 \ge 0),$$

$$<u>^s_{\gamma,mJ'} = <u>_{\gamma,m} + <u>_{\gamma,mJ'} + \|u\|_{W^m(L^s)} \qquad (1 \le s < p),$$

$$<u>^{0+}_{\gamma,mJ} = c_1 <u>^0_{\gamma,m} + c_2 <u>^0_{\gamma,mJ} \qquad (c_1 > 0,\ c_2 \ge 0).$$

Оператор $P : W^m(F) \to F$ назовем ε - коэрцитивным оператором относительно данной полунормы $<\bullet>$ ((ε , $<\bullet>$) - коэрцитивным), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая постоянная $k_F(\varepsilon) > 0$, что имеет место неравенство

$$\|u\|_{W^m(F)} \le \varepsilon <u> + k_F(\varepsilon)\|Pu\|_F$$

для всех $u \in W^{m+<>}(F)$.

В теореме 4.2.1 параграфа 4.2 доказано одно неравенство для оператора $P:C^m \to C$, ε - коэрцитивного относительно полунормы $<\bullet>^0_{\gamma,m}$, а главный результат этого параграфа связан с полунормой $<\bullet>^+_{\gamma,mJ}$.

$\to L^p$ есть E - операторы (теоремы 4.6.1 - 4.6.3).

Дифференциальный оператор P называется равномерно эллиптическим в R^n, если существует такая постоянная $\kappa > 0$, что

$$\kappa\|h\||\xi|^m \le \left\|\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x)\xi^\alpha h\right\|$$

для любых $x, \xi \in R^n$, $h \in X$.

Перечислим основные утверждения § 4.7, в котором обсуждается равномерная эллиптичность дифференциальных операторов.

ТЕОРЕМА 4.7.1. Если оператор $P : W^m(F) \to F$ есть E - оператор, то оператор P равномерно эллиптичен.

ТЕОРЕМА 4.7.2. Пусть старшие коэффициенты $A_\alpha(|\alpha|=m)$ оператора P постоянны, а остальные коэффициенты A_α равномерно непрерывны по Гельдеру в равномерной топологии на всем пространстве R^n. Тогда из оценки Шаудера для оператора $P : C^{m+\gamma} \to C^\gamma$ следует равномерная эллиптичность оператора P.

ТЕОРЕМА 4.7.3. Пусть пространство X конечномерно, оператор $P : W^m(F) \to F$ равномерно инъективен, его коэффициенты A_α - почти периодические функции (A_α = const при $|\alpha| = m$), которые равномерно непрерывны по Гельдеру. Тогда оператор $P : C^{m+\gamma} \to C^\gamma$ имеет ограниченный обратный.

В теореме 4.7.4 дано необходимое и достаточное условие обратимости оператора $P: C^{m+\gamma} \to C^\gamma$ с постоянными коэффициентами. В параграфе имеются другие утверждения и примеры.

Равномерная инъективность оператора $P : C^m \to C$ относительно пар (C^j, C) (j = 0 ,..., m-1) выводится в § 4.8 из равномерной инъективности операторов $P : W^m(L^p) \to L^p$, $P : W^m(M^p) \to M^p$ (теоремы 4.8.1 - 4.8.3). Приведем точную формулировку первой теоремы.

Т Е О Р Е М А 4.2.2. Если коэффициенты $A_\alpha(x)$ оператора P равномерно непрерывны на всем пространстве R^n, то операторы $P: C^m \to C$ и $P: W^m(M^p) \to M^p$ $(\varepsilon, <\bullet>^{+}_{\gamma,mJ})$ - коэрцитивны одновременно.

Пусть $C^{m+\gamma} = W^{m+<>\gamma,m}(C)$, $W^{m+\gamma}(M^p) = W^{m+<>\gamma,m}(M^p)$, $W^{m+\gamma}(L^p) = W^{m+<>\gamma,m}(L^p)$.

С Л Е Д С Т В И Е 4.2.1. Операторы $P: C^m \to C$ и $P: W^m(M^p) \to M^p$ $(\varepsilon, <\bullet>_{\gamma,m})$ - коэрцитивны одновременно.

С Л Е Д С Т В И Е 4.2.2. Пространства $W^{m+\gamma}(L^p)$, $W^{m+\gamma}(M^p)$ непрерывно вложены в $C^{m+\gamma}$.

С Л Е Д С Т В И Е 4.2.3. Если оператор $P: W^m(L^p) \to L^p$ равномерно инъективен, то оператор $P: C^m \to C$ ε - коэрцитивен относительно полунормы $<\bullet>_{\gamma,m}$.

В параграфе 4.3 продолжается изучение ε - коэрцитивных операторов $P: W^m(F) \to F$.

Т Е О Р Е М А 4.3.1. Пусть коэффициенты $A_\alpha(x)$ оператора P равномерно непрерывны на всем пространстве R^n. Тогда из $(\varepsilon, <\bullet>^{+}_{\gamma,mJ})$ - коэрцитивности оператора $P: C^m \to C$ вытекает $(\varepsilon, <\bullet>^{+}_{\gamma,mJ})$ - коэрцитивность оператора $P: W^m(L^p) \to L^p$.

Т Е О Р Е М А 4.3.2. $(\varepsilon, <\bullet>^{0+}_{\gamma,mJ})$ - коэрцитивность оператора $P: W^m(L^p) \to L^p$ влечет $(\varepsilon, <\bullet>^{0+}_{\gamma,mJ})$ - коэрцитивность оператора $P: W^m(M^p) \to M^p$.

Обозначим

$$\tilde{P} = \sum_{|\alpha| \le m} \tilde{A}_\alpha(x) D^\alpha, \qquad \text{где} \qquad \tilde{A}_\alpha(x) = \lim_{j \to \infty} A(x + h_j)$$

равномерно на каждом компактном множестве $\Omega \subset R^n$.

Т Е О Р Е М А 4.3.3. Если любое однородное уравнение $\tilde{P}u = 0$ не имеет ненулевых решений в $C^{m+\gamma}$, то оператор $P: C^m \to C$ является $(\varepsilon, <\bullet>_{\gamma,m})$ - коэрцитивным.

Оператор $P : W^m(F) \to F$ называется коэрцитивным E - оператором, если существуют такие постоянные $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, что

$$\|u\|_{W^m(F)} \le c_1\|u\|_F + c_2\|Pu\|_F.$$

Результаты относительно дифференциальных E-операторов содержатся в параграфе 4.4. Это теорема 4.4.1, определяющая E - оператор через эквивалентное неравенство; теорема 4.4.2, согласно которой операторы $P : W^m(M^p) \to M^p$ и $P : W^m(L^p) \to L^p$ являются E - операторами одновременно; теорема 4.4.3, дающая пример E - оператора $P : W^2(M^2) \to M^2$, теорема 4.4.4, устанавливающая оценку нормы функции u в C^m при условии, что оператор $P : W^m(M^p) \to M^p$ есть коэрцитивный E - оператор.

Три теоремы получены в § 4.5 о коэрцитивности оператора $P : W^m(F) \to F$ относительно полунормы

$$<u>^F_{m+1} = \sum_{|\alpha|=m+1} \|D^\alpha u\|_F.$$

ТЕОРЕМА 4.5.1. Оператор $P : W^m(L^p) \to L^p$ коэрцитивен относительно полунормы $<u>^{L^p}_{m+1}$ тогда и только тогда, когда оператор $P : W^m(M^p) \to M^p$ коэрцитивен относительно полунормы $<u>^{M^p}_{m+1}$.

ТЕОРЕМА 4.5.2. Для коэрцитивности оператора $P : C^m \to C$ относительно полунормы $<u>^C_{m+1}$ достаточно, а при постоянных коэффициентах A_α оператора P и необходимо, чтобы оператор $P : W^m(M^p) \to M^p$ был коэрцитивен относительно полунормы $<u>^{M^p}_{m+1}$.

ТЕОРЕМА 4.5.3. Пусть коэффициенты A_α оператора P постоянны. Тогда свойства коэрцитивности операторов $P : C^m \to C$, $P : W^m(M^p) \to M^p$, $P : W^m(L^p) \to L^p$ относительно соответствующих полунорм $<u>^C_{m+1}$, $<u>^{M^p}_{m+1}$, $<u>^{L^p}_{m+1}$ эквивалентны.

В § 4.6 изучается неравенство Шаудера для оператора $P : C^{m+\gamma} \to C^\gamma$ при условии, что операторы $P : W^m(M^p) \to M^p$, $P : W^m(L^p)$

Т Е О Р Е М А 4.8.1. Пусть $l \in \{ m, m\text{-}1 \}$, $\nu \in \{ 1, 2,\dots, l \}$, оператор $P : W^m (L^p) \to L^p$ равномерно инъективен относительно пары $(W^l (L^p), L^p)$, $\nu p > n$. Тогда оператор $P : C^m \to C$ равномерно инъективен относительно пары $(C^{l-\nu}, C)$.

В последнем § 4.9 изучаются Φ_+ - операторы $P : W^m(F) \to F$ в R^n . Напомним, что оператор $P : W^m(F) \to F$ называется Φ_+ - оператором, если его область значений замкнута и ядро конечномерно. Ниже используются обозначения:

$$\|u\|_{L^p(0,R)} = \left(\int_{B(0,R)} \|u(x)\|^p dx \right)^{1/p} \qquad (u \in L^p),$$

$$\|u\|_{W^p(L^p(0,R))} = \sum_{|\alpha| \le l} \|D^\alpha u\|_{(L^p(0,R)} \qquad (u \in L^p, l \in N).$$

Т Е О Р Е М А 4.9.1. Для того, чтобы оператор $P : W^m (L^p) \to L^p$ был Φ_+ - оператором, необходимо, а при конечномерном X и достаточно, чтобы существовали такие постоянные $k>0$ и $R>0$, что

$$\|u\|_{W^m(L^p)} \le k\|Pu\|_{L^p} + k\|u\|_{L^p(0,R)}.$$

Т Е О Р Е М А 4.9.2. Пусть пространство X конечномерно. Оператор $P : W^m (L^p) \to L^p$ является Φ_+ - оператором тогда и только тогда, когда существуют такие постоянные k' и R', что

$$\|u\|_{W^m(L^p)} \le k'\|Pu\|_{L^p} + k'\|u\|_{W^{m-1}(L^p(0,R'))}.$$

Т Е О Р Е М А 4.9.3. Пусть X - произвольное банахово пространство. Для того, чтобы оператор $P : W^m (L^p) \to L^p$ был Φ_+ - оператором, необходимо, чтобы оператор P был равномерно эллиптическим.

Представим оператор P в виде

$$P = P_m + P_{\nu+1, m-1} + P_{0,\nu}$$

где $\quad P_m = \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x) D^\alpha, \qquad P_{0,\nu} = \sum_{0 \le |\alpha| \le \nu} A_\alpha(x) D^\alpha,$

$$P_{\nu+1,m-1} = \sum_{\nu+1\le|\alpha|\le m-1} A_\alpha(x)D^\alpha.$$

Коэффициенты A_α предполагаются гладкими функциями класса C^m, m - четное, A_α = const при $|\alpha| = m$, коэффициенты A_α $(\nu+1\le|\alpha|\le m-1)$ имеют компактные носители, $(u, v)_0$ - скалярное произведение элементов $u, v \in L^2$.

Т Е О Р Е М А 4.9.4. Пусть оператор P равномерно эллиптичен и существует ν, при котором для оператора $P_{0,\nu}$ имеет место неравенство

$$a_0\|u\|^2_{W^l(L^2)} \le \|P_{0,\nu}u\|^2_{L^2} + 2\,\mathrm{Re}(P_m u, P_{0,\nu}u)_0,$$

где $a_0 > 0$ не зависит от $u \in W^m(L^2)$, $l \in Z_+$, $0 \le l \le \nu$.

Тогда оператор $P : W^m(L^2) \to L^2$ является Φ_+ - оператором.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В СЛЕДУЮЩИХ РАБОТАХ:

1. Тюрин В.М. О регулярности линейных дифференциальных операторов с почти периодическими коэффициентами // Функциональный анализ. - Ульяновск: изд-во Госпединститута, 1973. - Вып.1. - С. 130-140.

2. Тюрин В.М. Допустимость некоторых функциональных пространств и дихотомия решений для уравнений с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. - 1975. - Т.II, № 8. - С.1526-1528.

3. Тюрин В.М. 0 регулярности линейных дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами // Труды семинара по дифференциальным уравнениям. - Куйбышев: КГУ, 1975. -

Вып. 1. - С. 146-150.

4.Тюрин В.М. 0 возмущении регулярного дифференциального оператора с почти периодическими коэффициентами // Дифреренциальные уравнения и их приложения. - Куйбышев: КПтИ, 1575. - Вып.2. - С. 133-136.

5. Жиков В.В., Тюрин В.М. Об обратимости оператора d/dt + A(t) в пространстве ограниченных функций // Мат. заметки. -1976. - 19, № 1. - С. 99-104.

6. Тюрин В.М. Об обратимости линейных разностных операторов с почти периодическими коэффициентами в пространстве ограниченных последовательностей // Труды семинара по дифференциальным уравнениям. - Куйбышев: КГУ, 1977. - Вып.3. - С. 115-118.

7. Тюрин В.М. Об обратимости линейных дифференциальных операторов с почти периодическими коэффициентами в некоторых функциональных пространствах // Приближенные методы исследования дифференциальных уравнений и их приложения. - Куйбышев: КГУ, 1978. - Вып. 4. - С. 102-106.

8. Тюрин В.М. Об обратимости оператора d/dt - A(t) в некоторых функциональных пространствах // Мат. заметки. - 1979. - 25, №4. - С. 585-590.

9. Тюрин В.М. К дихотомии решений линейных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами // Изв. АН Аз ССР. Серия физ.-техн. и мат.наук. - 1980. - №6. - С. 44-47.

10. Тюрин В.М. К обратимости линейных дифференциальных операторов с коэффициентами при производной // Тез.докл. Всессюз. конф. по теории и прил. функционально-дифференц. уравнений, 28-30 сент. 1987 г., Ч II. - Душанбе, 1987. - С. 120.

11. Зубко Ю.И.,Тюрин В.М. 0 свойстве обратимости линейных

дифференциально-разностных операторов в некоторых пространствах функций на оси // Дифференц. уравнения. - 1989. - 25, №10. - С. 1683-1687.

12. Тюрин В.М. О Р - корректности линейных дифференциальных операторов // Тез. докл. XVI школы по теории операторов. - Ульяновск, 1990. - С. 95.

13. Тюрин В.М. Об обратимости линейных дифференциальных операторов в некоторых функциональных пространствах // Сиб.мат. журн. - 1991. - 32, №3. - С. 160-165.

14. Тюрин В.М. О к - инъективности линейных дифференциальных операторов с частными производными в некоторых функциональных пространствах. - Липецк, 1992. - 37 с. - Рукопись представлена Липецк.политехн.ин-том.- Деп. в ВИНИТИ 25.06.92, № 2084 - В92.

15. Тюрин В.М. О В - корректности линейных дифференциальных операторов в некоторых функциональных пространствах. - Липецк, 1992. - 10 с. - Рукопись представлена Липецк. политехн.ин-том.-Деп. в ВИНИТИ 25.06.92, № 2685-В92.

16. Тюрин В.М. О некоторых свойствах линейных дифференциальных операторов // "Понтрягинские чтения - IV": Тез. докл. школы.- Воронеж: ВГУ, 1993. - С.187.

17. Тюрин В.М. О некоторых коэрцитивных неравенствах для дифференциальных операторов с частными производными // Современные проблемы механики и мат.физики: Тез. докл. - Воронеж: ВГУ, 1994. - С. 96.

18. Тюрин В.М. О равномерной инъективности дифференциальных операторов с частными производными второго порядка // XXVI Воронежская зимняя матем. школа: Сб. науч. тр. - Воронеж: ВГУ, 1994. - С. 92.

19 Тюрин В.М. О линейных дифференциальных Ф. -

операторах в R^n // "Понтрягинские чтения - V": Тез. докл. школы. - Воронеж: ВГУ, 1994. - С. 136.

20. Тюрин В.М. О некоторых свойствах ε - коэрцитивных линейных дифференциальных операторов в частных производных в R^n // Тез. докл. Международ. конф. "Дифференциальные уравнения и их приложения". - Саранск, 1994. - С. 102.

21. Тюрин В.М. Коэрцитивность и неравенство Шаудера в R^n для линейных операторов P // Современные методы теории функций и смежные проблемы прикладной математики и механики: Тез. докл. школы. - Воронеж: ВГУ, 1995 - С. 232.

22. Тюрин В.М. Об эквивалентности некоторых коэрцитивных неравенств для линейных дифференциальных операторов с частными производными // Тез. докл. Украинской конференции "Моделирование и исследование устойчивости систем." - Киев, 1995. - С. 108.

Основные результаты и положения

1. В банаховом пространстве разработана техника локальных равномерных неравенств для изучения обратимости линейных функционально-дифференциальных операторов в пространстве функций, заданных на оси или на всем конечномерном пространстве.

2. Установлен ряд теорем об эквивалентности свойств обратимости и инъективности для широкого круга функционально-дифференциальных операторов (в том числе с неограниченными коэффициентами, с коэффициентами при производной, с частными производными) в пространствах непрерывных ограниченных на оси функций, Лебега, Степанова, Соболева и других.

3. На основе техники периодической аппроксимации и

локальных неравенств получены критерии обратимости функционально-дифференциальных операторов. Несколько результатов связано с обратимостью дифференциальных операторов в условиях допустимости функциональных пар.

4. С точки зрения эквивалентности изучена глобальная коэрцитивность линейных дифференциальных операторов с частными производными относительно некоторых полунорм в различных функциональных пространствах.

5. Исследованы некоторые классы линейных дифференциальных Ф₊ - операторов, а также эллиптичность коэрцитивных дифференциальных операторов

Тюрін В.М. "До оборотності лінійних диференціальних та функціонально-диференціальних операторів".

Дисертація на здобуття вченого ступеня доктора фізико - математичних наук за спеціальністю 01.01.02 - диференціальні рівняння. Інститут математики НАН України, Київ, 1996.

У банаховому просторі вивчаються проблеми, пов'язані з оборотністю лінійних функціонально - диференціальних операторів у деяких просторах функцій, визначених на усій осі або на усьому n - мірному просторі. Для широкого кола досліджуваних операторів, включаючи з частинними похідними, встановлені умови оборотності та еквівалентність оборотності, ін'єктивності, коерцитивності у численних функціональних просторах. Досліджені деякі класи диференціальних операторів із замкненою областю значень та еліптичність коерцитивних операторів. Розглянуті приклади та застосування.

Tyurin V.M. "On Invertibility of Linear Differential and Functional - Differential Operators".

Thesis for a D.Sc. degree in Mathematics (01.01.02 - Differential Equations). Institute of Mathematics of National Academy of Science of Ukraine, Kiev, 1996.

In the Banach space a number of problems are studied which pertain to the invertibility of linear functional - differential operators in some spaces of functions defined for the entire axis or for the entire n - dimentional space. For a wide range of operators in question there has been found a property equivalence for invertibility, injectiveness, and coerciveness in various functional spaces. Several classes of differential operators with a closed range of values and the ellipticity of coercive operators have been examined. Numerous examples and applications have been dealt with.

Ключові слова: лінійний диференціальний оператор, оборотність, ін'єктивність, коерцитивність.

В Тюрін

Подп. в печ. I8.II.96. Формат 60х84/16. Бумага пит. Офс. пучать.
Усл. печ. л. 2,32. Усл. кр.-отт. 2,32. Уч.-изд. л. I,9. Тираж
IOO экз. Зак. 220 . Бесплатно.

Отпечатано в Институте математики НАН Украины
252601 Киев 4, ГСП, ул. Терещенковская, 3