

ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І.ФРАНКА

*На правах рукопису*

ЩЕРБИНА НАТАЛІЯ МИКОЛАЇВНА

УДК 539.3

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ  
ШАРУВАТИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК**

Спеціальність 01.05.02 - математичне моделювання  
і обчислювальні методи в наукових дослідженнях

**АВТОРЕФЕРАТ**  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

Львів - 1997

19.6

AB 36.533

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті прикладних фізики ім. Я.С.Підстригача Національної академії наук України

ЛННБ України ім.В.Стефаника



00760737 (U)

**Науковий керівник:**

кандидат фізико-математичних наук, ст. наук співр.  
Марчук Михайло Володимирович.

**Науковий консультант:**

кандидат фізико-математичних наук, ст. наук співр.  
Максимук Олександр Васильович.

**Офіційні опоненти:**

доктор фізико-математичних наук, професор,  
зав. кафедрою інформаційних систем  
Шинкаренко Георгій Андрійович,  
Львівський державний університет ім. І.Франка;  
доктор фізико-математичних наук, професор  
Осадчук Василь Антонович,  
державний університет "Львівська політехніка".

**Провідна установа:**

Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова  
Національної академії наук України, м. Київ (відділ № 150).

Захист відбудеться 14 лютого 1997 р. о 15<sup>30</sup> год. на засіданні спеціалізованої вченої ради К 04.04.05 при Львівському державному університеті ім. І.Франка за адресою: 290602, м. Львів, вул. Університетська, 1, ЛДУ, ауд. 261.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Львівського державного університету ім. І.Франка за адресою: м. Львів, вул. Драгоманова, 5.

Автореферат розісланий 31 грудня 1996р.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради  
кандидат фізико-математичних наук,  
доцент

Б.А.Остудін

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність проблеми.** У різних галузях сучасної практики застосовуються тонкостінні шаруваті елементи конструкцій оболонкового типу з композитних матеріалів. Тому побудова математичних моделей, які водночас є достатньо простими і адекватно описують важливі властивості механічної поведінки таких об'єктів, а також розробка ефективних чисельних методів для їх реалізації є актуальними науковими проблемами. При цьому виникає потреба у розв'язуванні нетрадиційних контактних задач - визначення міжшарових контактних напружень на границях розділу шарів - із застосуванням нових моделей, які враховують дискретну будову шаруватої структури і характер контактної взаємодії шарів.

**Стан проблеми.** Контактні задачі для тонкостінних елементів конструкцій є специфічними щодо постановки та методів розв'язування. Результати досліджень у цьому напрямку знайшли відображення та детальний аналіз у багатьох наукових працях, а також систематизовані та узагальнені в монографіях Александрова В.М. і Мхитаряна С.М., Григолюка Е.І. і Толкачова В.М., Грилицького Д.В. і Кізіми Я.М., Панасюка В.В. і Теплового М.Й., Пелеха Б.Л. і Сухорольського М.А., Моссаковського В.І., Гудрамовича В.С. і Макеєва Є.М. та інших. У цих працях розглянуто різні сторони проблеми контактної взаємодії та подано багатоаспектну класифікацію контактних задач за типом середовища, математичним апаратом, розмірністю, геометричною формою тіл, умовами контактної взаємодії. На основі досліджень встановлено, що результати розв'язування контактних задач у значній мірі залежать від прийнятих математичних моделей, які базуються на відповідних припущеннях і теоріях.

Дослідження задач для багатошарових оболонок використовує декілька підходів (пакетний, дискретний тощо). При пакетному підході гіпотеза приймається для всього пакету шарів у цілому. Такий підхід є коректним для шарів одного порядку жорсткості, для ізотропних або слабкоанізотропних шарів розглядуваної структури. При дискретному підході до побудови рівнянь стану багатошарових оболонок гіпотези приймаються для кожного шару окремо. Перевага дискретного підходу порівняно з пакетним полягає у можливості врахувати ефекти контактної взаємодії шарів. Поєднання дискретного підходу до опису стану шаруватої структури з узагальненою теорією оболонок дозволяє побудувати математичні моделі придатні для комплексного вивчення механічної поведінки шаруватих оболонок у взаємозв'язку з характером контактної взаємодії шарів, умов навантаження, властивостей матеріалу.

Питання про способи ефективної конкретної реалізації цих моделей контактних задач залишається і далі актуальним. Досягнення у розв'язанні важливих аспектів проблеми дослідження шаруватих структур пов'язані з іменами Болотіна В.В., Василенка А.Т., Васильєва В.В., Григолоука Е.І., Григоренка Я.М., Новічкова Ю.М., Пєлєха Б.Л., Хорошуна Л.П., Челіги В.Є. та інших. При цьому, як свідчать наукові дослідження, врахування особливостей поведінки оболонок із нових композитних матеріалів є можливим на базі узагальнених теоретичних моделей.

Аргументований огляд і аналіз деяких аспектів щодо загальних підходів і методів розв'язування досліджуваного у дисертації класу задач подано в працях Александрова О.Я., Амбарцумяна С.А., Василенка А.Т., Васильєва В.В., Григоренка Я.М., Дудченка А.А., Корольова В.І., Лурьє С.А., Молчанова І.М., Немировського Ю.В., Образцова І.Ф., Осадчука В.А., Рассказова А.О., Рікардса Р.Б., Савули Я.Г., Хорошуна Л.П. та інших.

**Мета роботи і основні завдання наукового дослідження.** Метою роботи є побудова математичних моделей нових контактних задач для шаруватих циліндричних оболонок, зокрема з врахуванням зсувної жорсткості, обтисливості, дискретної шаруватої структури, особл. лостей контактної взаємодії шарів. Ця мета включає також розробку і реалізацію ефективних чисельних методів розв'язування досліджуваних задач.

Для досягнення поставленої мети у дисертаційній роботі розв'язувались такі завдання:

- дослідження мішаних граничних задач для шаруватих циліндричних оболонок замкненого і відкритого профілів під дією зовнішніх навантажень;
- розробка чисельного методу розв'язування контактних задач для шаруватих циліндричних оболонок на основі дискретної розрахункової моделі;
- теоретичне дослідження збіжності методу;
- реалізація запропонованого методу до дослідження контактної жорсткості, контактних напружень багат шарової циліндричної оболонки з ідеальним контактом шарів;
- розробка методики дослідження напружено-деформованого стану у шаруватій циліндричній оболонці з неідеальною взаємодією шарів.

**Загальна методика досліджень.** Об'єктом дослідження у дисертації є шаруваті циліндричні оболонки. В основу дослідження контактної взаємодії шаруватих циліндричних оболонок покладено уточнені рівняння теорії оболонок типу Тимошенка з врахуванням податливості матеріалу шарів нормальним і зсувним деформаціям. Використовується методика зведення до інтегральних рівнянь Вольтерра задач про контактну взаємодію оболонок зі

штампами. Основним апаратом при їх розв'язуванні є метод інтегрального перетворення Лапласа. У випадку багатошарових оболонок використовується методика, яка дозволяє одержати наближений розв'язок в аналітичній формі, що потрібно для побудови інтегрального рівняння відносно контактної тиску. Застосування запропонованої методики пов'язане з необхідністю розв'язування двоточкових крайових задач.

Теоретичний аналіз у роботі поєднується з розробкою практично придатних методик для розрахунку шаруватих оболонок, у тому числі з врахуванням механічних властивостей міжфазної границі.

#### **Наукова новизна результатів:**

- запропоновано і реалізовано чисельний метод, заснований на розвиненні експоненти від матричної функції у збіжний матричний ряд, до розв'язування контактних задач для шаруватих циліндричних оболонок;
- доведена теорема про збіжність методу і отримана оцінка точності розв'язку;
- на основі побудованих математичних моделей досліджено контактну жорсткість шаруватих циліндричних оболонок, контактні напруження у залежності від числа шарів, фізико-механічних властивостей матеріалів, геометричних характеристик шарів, а також способу їх взаємодії;
- запропоновано методику визначення контактних напружень при крученні шаруваті циліндричної оболонки (ідеальний контакт, наявність клейових прошарків);
- обґрунтовано аналітичний спосіб визначення міжшарових напружень у двохшаровій циліндричній оболонці з концентраторами напружень у вигляді кільцевих розшарувань.

**Практична значимість роботи** полягає у побудові та реалізації моделей та способів розрахунку шаруватих циліндричних оболонок із врахуванням умов контактної взаємодії шарів і навантаження. Отримані в дисертації розв'язки контактних задач і зроблені на їх основі висновки можуть бути застосовані до оцінки контактної жорсткості та міцності шаруватих оболонок, які широко використовуються в інженерній практиці.

**Реалізація і впровадження результатів роботи.** Теоретичні і практичні результати, отримані автором, використовувались в науково-дослідній роботі "Розробка методів досліджень напружено-деформованого стану шаруватих неоднорідних структур на базі моделей вищого порядку з урахуванням

структурної пошкодженості і зношення матеріалу” та у завданні “Розробка методів розрахунку та оптимального проектування конструкцій космічної техніки із композиційних і шаруватих матеріалів” Національної космічної програми України, виконуваних в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України.

**Вірогідність результатів** забезпечується коректністю постановки досліджуваних задач, математичним обґрунтуванням методів їх розв’язування та узгодженістю отриманих розв’язків з відомими для тестових задач.

**Анотація роботи.** Основні результати досліджень, викладені у дисертаційній роботі, доповідалися на I Всесоюзній конференції з багатошарових зварних конструкцій і труб (ІЕЗ ім. Є.О.Патона, Київ, 1980), I Всесоюзній науково-технічній конференції “Міцність, жорсткість і технологічність виробів із композиційних матеріалів” (Кам’янець-Подільський, 1982), V, VI, VII Всесоюзних конференціях із механіки полімерних і композитних матеріалів (Рига, 1983, 1986, 1989), VIII Всесоюзній конференції “Числові методи розв’язування задач теорії пружності і пластичності” (Ужгород, 1983), II Всесоюзному науково-технічному семінарі “Некласичні проблеми механіки композитних матеріалів і конструкцій із них” (Львів, 1984), IV Міжнародній конференції з механіки неоднорідних структур (Тернопіль, 1995), III Міжнародному симпозіумі “Некласичні проблеми теорії тонкостінних елементів конструкцій та фізико-хімічної механіки композиційних матеріалів” (Івано-Франківськ, 1995).

Дисертаційна робота в цілому доповідалась та обговорювалась на наукових семінарах Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, кафедри прикладної математики Львівського державного університету ім. І.Франка.

**Публікації.** Основний зміст дисертації відображено в 12 статтях і тезах доповідей конференцій.

**Структура і обсяг дисертації.** Дисертаційна робота включає вступ, чотири розділи, висновки. Вона містить 144 сторінки машинописного тексту, 27 рисунків, 6 таблиць і бібліографічний список, що складається з 174 літературних джерел.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У вступі коротко характеризується стан проблеми, яка складає предмет дослідження, обґрунтовується актуальність теми дисертації. Сформульовано мету та основні завдання наукового дослідження. Подана анотація дисертації по розділах.

У першому розділі подано всі необхідні співвідношення теорії шаруватих оболонок для розв'язування контактних задач. Останні отримані способом зведення тривимірної задачі до двовимірної з використанням апроксимації шуканих функцій поліномами Лежандра при виконанні граничних умов на поверхнях оболонки (зовнішніх, міжшарових). Сформульовано постановки контактних задач для багат шарових оболонок під дією зовнішніх факторів (різного типу навантажень або штампів) та побудовано відповідні математичні моделі.

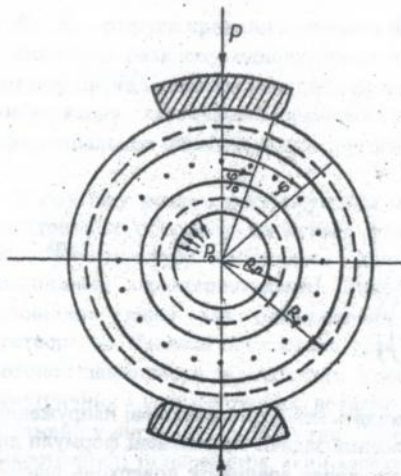


Рис. 1

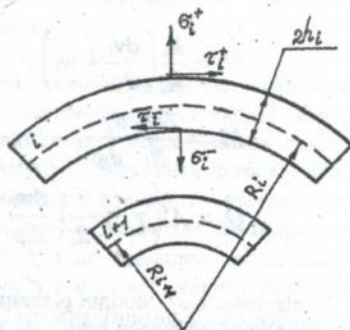


Рис. 2

У рамках дискретної моделі опису напружено-деформованого стану шаруватих оболонок контактна задача полягає у визначенні деформативних параметрів, які характеризують контактну жорсткість, контактних  $\sigma_i^{\pm}$  і  $\tau_i^{\pm}$

напружень на поверхнях розділу шарів, а при дії штампів - також контактного тиску  $q$  і величини області контакту (рис.1, рис.2).

За певних граничних умов та експлуатаційних навантажень циліндричних оболонок двовимірною контактна задача зводиться до одновимірної. У випадку, коли функції не залежать від осьової координати, вихідні рівняння для  $i$ -го шару ( $i = 1, \dots, n$ ) циліндричної оболонки у загальноприйнятих позначеннях мають наступний вигляд:

- рівняння рівноваги

$$\begin{aligned} \frac{dN_i}{d\varphi} + Q_i &= -R_i(\tau_i^+ - \tau_i^-), \\ \frac{dM_i}{d\varphi} - R_i Q_i &= -h_i R_i(\tau_i^+ + \tau_i^-), \\ \frac{dQ_i}{d\varphi} - N_i &= -R_i(\sigma_i^+ - \sigma_i^-); \end{aligned} \quad (1)$$

- співвідношення пружності

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{B_i}{R_i} \left( \frac{dv_i}{d\varphi} + w_i \right), \\ M_i &= \frac{D_i h_i}{R_i} \frac{d\gamma_i}{d\varphi}, \\ Q_i &= A_i \left( \gamma_i + \frac{1}{R_i} \left( \frac{dw_i}{d\varphi} - v_i \right) \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Зазначимо, що у вихідні рівняння входять невідомі міжшарові напруження. Це ускладнює побудову розв'язку контактної задачі. Узагальнені формули для нормальних і тангенціальних переміщень точок зовнішніх поверхонь шарів і умови контактної взаємодії шарів подано у першому розділі дисертації.

Крім вказаних співвідношень, розв'язок рівнянь (1) для кожного шару повинен задовольняти крайові умови. Зокрема, при дії на  $n$ -шарову оболонку симетричного навантаження, що ілюструє рис.1, задаються умови

$$\frac{dw_i}{d\varphi} = 0, v_i = 0, \gamma_i = 0 \text{ при } \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3)$$

У припущенні, що штамп прилягає до поверхні шаруватої оболонки в усіх точках, прогин в області контакту записується у вигляді

$$w_1(+h_1) = f(\varphi), \quad (4)$$

де  $\theta \leq \varphi \leq \varphi_0$ ,  $2\varphi_0$  - величина області контакту,  $f(\varphi)$  - задана функція, яка описує переміщення штампa та форму його основи.

У випадку циліндричної оболонки зручно користуватись наступною умовою контактної взаємодії (у силу зроблених припущень зміна кривини оболонки в області контакту є відомою):

$$\frac{1}{R^2} \left( \frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w \right) = \kappa, \quad \kappa = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0}, \quad (5)$$

де  $R_1$ ,  $R_0$  - радіуси кривини верхнього шару оболонки і штампa відповідно.

Побудова розв'язку одновимірних контактних задач з урахуванням умов контакту шарів і умов на зовнішніх поверхнях шаруватого пакету зводиться до розв'язування двоточкової крайової задачі для системи  $3n$  звичайних диференціальних рівнянь (кожне другого порядку).

У другому розділі досліджуються мішані граничні задачі для шаруватих циліндричних оболонок на основі феноменологічної розрахункової моделі (шарувата структура замінюється квазіоднорідною з усередненими фізико-механічними характеристиками). Використовується методика розв'язування відповідних задач для одношарових оболонок. Методом інтегрального перетворення Лапласа побудовано розв'язки деяких задач для циліндричних оболонок замкненого і відкритого профілів при дії зовнішніх навантажень (симетричних і несиметричних, локалізованих, у т.ч. зосереджених). Розв'язки зображено у вигляді інтегралів типу згортки. Проаналізовано вплив параметра тонкостінності та параметра, який характеризує податливість матеріалу на зсув на деформативність оболонок замкненого і відкритого профілів. На основі знайдених розв'язків досліджено, зокрема, контактну жорсткість композитної оболонки під дією рівномірно розподіленого сталого внутрішнього тиску та симетричного місцевого навантаження у залежності від структурних параметрів, які визначаються через пружні характеристики складових матеріалів (сполучника і арматури) та коефіцієнт армування, що характеризує структуру матеріалу. Встановлено, що регулюванням цих параметрів можна підвищити контактну жорсткість композитної оболонки.

При контактній взаємодії оболонки зі штампом на основі знайденого аналітичного виразу для прогину оболонки та умови контакту (5) для визначення контактної тиску  $q(\varphi)$  побудовано інтегральне рівняння Вольєрра другого роду типу згортки. Розв'язок інтегрального рівняння ефективно будується за допомогою інтегрального перетворення Лапласа.

Наприклад, у випадку симетричної контактної задачі (рис.1) інтегральне рівняння має вигляд

$$\bar{q}(\varphi) = \left(1 + \frac{r^2}{s^2}\right) \left( \int_0^{\varphi_0} \sin(\varphi - t) \bar{q}(t) dt + C_1 \cos \varphi \right) - \frac{r^2 - 1}{s^2} C_1 - \frac{1}{s^2} (C_2 + R\kappa)$$

де  $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ ,  $2\varphi_0$  - величина області контакту,  $s^2 = \frac{6}{5} \frac{E}{G'(1-\nu^2)}$ ,

$r^2 = 3 \left(\frac{R}{h}\right)^2 + 1$ ,  $\bar{q}$  - безрозмірна величина контактної тиску.

Отриманий розв'язок придатний для циліндричної оболонки замкненого і відкритого профілів (сталі інтегрування  $C_1$ ,  $C_2$  визначаються з відповідних граничних умов). З умови рівноваги штампа отримано трансцендентне рівняння відносно величини області контакту. Досліджено контактну жорсткість замкненої циліндричної оболонки при контактній взаємодії з системою трьох штампів у залежності від пружних та геометричних характеристик. Одержано розрахункові формули для прогину, контактної тиску, величини області контакту. На основі результатів обчислень побудовано графіки, які ілюструють знайдені залежності.

У третьому розділі запропоновано і досліджено чисельний метод розв'язування мішаних граничних задач для багатошарових оболонок при дискретному розгляді шарів. У випадку взаємодії шаруватої оболонки зі штампами основна складність розв'язування контактної задачі полягає у побудові інтегрального рівняння для визначення контактної тиску, оскільки для цього необхідно мати аналітичний розв'язок ключової системи рівнянь. Запропонована методика дозволяє без принципових труднощів розв'язувати такі задачі.

Досліджувані задачі контактної взаємодії шаруватих циліндричних оболонок з врахуванням умов на поверхнях розділу шарів зводяться до розв'язування двоточкової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами. У векторно-матричній формі ця система набуває вигляду

$$\frac{d}{d\varphi} Z(\varphi) = AZ(\varphi) + F(\varphi), \quad \varphi \in [\theta, \varphi_2], \quad (6)$$

де  $A - p \times p$  матриця, елементи якої визначаються через пружні і геометричні характеристики шарів. Розмірність матриці  $A$  визначається числом шарів шаруватої структури і порядком ключової системи рівнянь,  $Z(\varphi) = (Z_1, \dots, Z_p)^T$  - вектор шуканих величин. На  $Z(\varphi)$  накладається  $p$  крайових умов при  $\varphi = \theta$  та  $\varphi = \varphi_2$ .

До розв'язування двоточкової крайової задачі використовується метод, оснований на ідеї зведення до набору  $(p+1)$ -ої задачі Коші та розкладу матричної функції  $\exp(A\varphi)$  у матричний ряд:

$$\exp(A\varphi) = E + A \frac{\varphi}{1!} + A^2 \frac{\varphi^2}{2!} + \dots + A^m \frac{\varphi^m}{m!} + \dots \quad (7)$$

У результаті одержуємо загальний розв'язок крайової задачі

$$Z(\varphi) = Z^{(0)}(\varphi) + \sum_{k=1}^p C_k Z^{(k)}(\varphi), \quad (8)$$

де  $Z^{(0)}(\varphi)$ ,  $Z^{(k)}(\varphi)$  ( $k = 1, \dots, p$ )- розв'язки задач Коші:

$$Z^{(0)}(\varphi) = \int_0^\varphi G(\varphi - \tau) F(\tau) d\tau, \quad Z^{(k)}(\varphi) = G(\varphi) \tilde{C}^{(k)}(\varphi),$$

$$\text{де } G(\varphi) = \exp(A\varphi) = \begin{pmatrix} g_{11}(\varphi) & \dots & g_{1p}(\varphi) \\ \cdot & \dots & \cdot \\ g_{p1}(\varphi) & \dots & g_{pp}(\varphi) \end{pmatrix},$$

$$g_{ii}(\varphi) = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} a_{ii}^{(l)} \frac{\varphi^l}{l!}, \quad g_{ij}(\varphi) = \sum_{l=1}^{\infty} a_{ij}^{(l)} \frac{\varphi^l}{l!} \quad (i \neq j),$$

$a_{ij}^{(l)}$  -  $(i, j)$ -й елемент матриці  $A^l$  ( $i, j = 1, \dots, p$ ).

Вектор сталих  $\tilde{C}^{(k)} = (\tilde{C}_1^{(k)}, \dots, \tilde{C}_p^{(k)})$  вибирається так, щоб задовольнити початкові умови в точці  $\varphi = \theta$ :

$$Z_i^{(k)}(\theta) = \begin{cases} 1, & i = k; \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Звідси одразу одержується розв'язок  $k$ -ої задачі Коші  $Z^{(k)}(\varphi) = (g_{1k}, \dots, g_{pk})^T$ . Тоді розв'язок крайової задачі покомпонентно можна переписати у вигляді

$$Z_i(\varphi) = Z_i^{(0)}(\varphi) + \sum_{k=1}^p C_k g_{ik}(\varphi) \quad (i = 1, \dots, p). \quad (9)$$

Константи  $C = (C_1, \dots, C_p)^T$  визначаються з системи лінійних алгебраїчних рівнянь  $DC = B$ . Матриця  $D$  і вектор  $B$  одержуються при задоволенні крайових умов. При практичній реалізації методу обмежуються  $m$  першими членами ряду (7).

Позначимо відповідні величини при скінченному фіксованому  $m$  тими ж символами, але з відміткою \*.

Теорема. Нехай  $m$  вибрано таким, що  $\eta = \frac{\varphi}{m+2} \|A\| < 1$ ,  $\eta_1 = \frac{pa\varphi_2}{m+2} < 1$ , де  $\varphi_2 \geq \varphi \geq 0$ ,  $a = \max_{i,j} |a_{ij}|$ , матриці  $D$  та  $D^*$  - невивроджені.

Тоді справедливою є наступна оцінка:

$$\begin{aligned} \|Z(\varphi) - Z_*(\varphi)\| &\leq \frac{(\|A\|\varphi)^{m+1}}{(m+1)!} \frac{1}{1-\eta} \left( \|C\| + \frac{\omega\varphi}{m+2} \right) + \\ &+ \|\exp(A\varphi)\| \|C\| \|C - C_*\| \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{де } \|C - C_*\| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{1-\eta_1} \frac{(pa\varphi_2)^{m+1}}{(m+1)!} \left( \alpha + \beta\omega_1 \frac{\varphi_2}{m+2} \right),$$

$$\alpha = \|D^{-1}\| \|B\| \beta, \quad \beta = \|D_*^{-1}\|, \quad \sup_{0 \leq \tau \leq \varphi} \|F(\tau)\| \leq \omega, \quad \sup_{0 \leq \tau \leq \varphi_2} \|F(\tau)\| \leq \omega_1.$$

З отриманих оцінок випливає, що  $\|Z(\varphi) - Z^*(\varphi)\|$  прямує до нуля при  $m \rightarrow \infty$  для кожного фіксованого  $\varphi$  не повільніше, ніж  $\frac{K^m}{m!}$  ( $K$  - деяка константа).

Проведене порівняння наближеного розв'язку при різних значеннях параметра методу  $m$  з аналітичним для тестових задач свідчить про реалізованість методу та досягну при цьому точність.

У дисертації чисельно реалізовано нову математичну модель для дослідження контактної жорсткості та міжшарових напружень  $n$ -шарової оболонки при заданих навантаженнях  $\sigma_i^+$  та  $\sigma_n^-$  (рис.1). Ключову систему  $2n+1$  диференціальних рівнянь, отриману з (1), (2) з врахуванням умов ідеального контакту шарів (виключивши при цьому з рівнянь невідомі міжшарові напруження), можна зобразити у формі (6). Розв'язок крайової задачі (6), (3), до якої зводиться контактна задача, за допомогою описаного методу можна одразу записати в аналітичній формі

$$Z_i(\varphi) = Z_i^{(0)}(\varphi) + \sum_{k=1}^{4n+2} C_k g_{ik}(\varphi). \quad (11)$$

Сталі  $C_k$  визначаються з системи  $4n+2$  лінійних алгебраїчних рівнянь, одержаної внаслідок задоволення крайових умов.

Виходячи з побудованного розв'язку (11), для прогину  $n$ -шарової оболонки отримується розрахункова формула

$$\frac{w}{R} = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\varphi} g_{2n+1, 4n+2}(\varphi - \tau) (\bar{\sigma}_i^+(\tau) - \bar{\sigma}_n^-(\tau)) d\tau + \sum_{k=2n+1}^{4n+2} C_k g_{2n+1, k}(\varphi), \quad (12)$$

де  $\Omega = \sum_{i=1}^n \frac{A_i R}{R_i^2}$ . Зазначимо, що ця формула придатна для будь-якого симетричного навантаження. Реалізація умови контакту (5) з врахуванням (12) дає інтегральне рівняння Вольєрра другого роду типу згортки для визначення контактної тиску. Його розв'язок знайдено методом інтегрального перетворення Лапласа.

Для дослідження контактних напружень, які виникають при контактній взаємодії шарів  $n$ -шарової оболонки, виведена формула

$$\sigma^{(i,i+1)} = \sigma^{(i-1,i)} + \frac{A'_i}{R_i} \frac{d\gamma_i}{d\varphi} + \frac{A'_i}{R_i^2} \frac{d^2 w}{d\varphi^2} - \frac{B_i}{R_i^2} w - \left( \frac{A'_i}{R_i^2} + \frac{B_i}{R_i^2} \right) \frac{dv_i}{d\varphi},$$

де  $\sigma^{(0,i)} = \sigma_i^+$ ,  $\sigma^{(n,n+1)} = \sigma_n^-$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ).

Проаналізовані результати розрахунку контактної жорсткості та контактних напружень шаруватої оболонки. Запропонована методика дозволяє дослідити контактні напруження під штапом і між шарами в залежності від числа шарів, їх визначальних (пружних і геометричних) характеристик та способу з'єднання (ідеальний міжфазний контакт, наявність клейових прошарків тощо). Зручність методу полягає у тому, що при переході до нової задачі потрібно лише сформулювати відповідну цій задачі матрицю  $A$ .

У четвертому розділі досліджуються контактні напруження у шаруватих циліндричних оболонках при наявності неідеального контакту на границях розділу шарів. Поширено застосування запропонованого чисельного методу до побудови розв'язку осесиметричної контактної задачі для багатошарової оболонки з врахуванням мікроструктури контактуючих поверхонь оболонки і штапа. Всі вихідні співвідношення та рівняння, що складають математичну модель контактної задачі у випадку ідеального контакту шаруватої оболонки зі штапом, залишаються без зміни, крім умови типу (4). Замість неї приймається наступна умова контакту [6]:

$$w_i(x) = \beta - \varepsilon f(x) + kq(x), \quad \sigma_i^+(x) = \begin{cases} q(x), & |x| < a, \\ 0, & a \leq |x| \leq l, \end{cases} \quad (13)$$

де  $\beta, \varepsilon, k$  - деякі константи, що залежать від конкретної задачі.

На основі (9) та (13) для визначення контактної тиску отримано інтегральне рівняння Вольтерра другого роду.

Цей метод ефективно використовується для побудови наближеного розв'язку контактної задачі для  $n$ -шарової оболонки з клейовим з'єднанням шарів [10]. Наявність клейових прошарків враховує наступна модель контактної взаємодії шарів:

$$\begin{aligned} \sigma_i^- &= \sigma_{i+1}^+ = \sigma^{(i,i+1)}, \quad \tau_i^- = \tau_{i+1}^+ = \tau^{(i,i+1)}, \\ v_i - h_i \gamma_i &= v_{i+1} + h_{i+1} \gamma_{i+1} + K_\tau \tau^{(i,i+1)}, \\ w_i &= w_{i+1} + K_\sigma \sigma^{(i,i+1)} \quad (i = 1, \dots, n-1). \end{aligned} \quad (14)$$

Константи  $K_\sigma$ ,  $K_\tau$  визначаються через пружні характеристики та товщину клейового прошарку. Математичну модель даної контактної задачі складають система диференціальних рівнянь (1), співвідношення (2), умови (14) і (3). Використанням (14) та (2) контактна задача зводиться до двоточкової крайової задачі, розв'язок якої ефективно будується описаним чисельним методом.

На конкретних задачах проілюстровано також застосування методу до розрахунку контактних напружень при крученні шаруватих циліндричних оболонок з клейовими прошарками та при ідеальній взаємодії шарів. У випадку ідеального контакту в умовах (14) відсутні доданки  $K_\tau \tau^{(j+1)}$  та  $K_\sigma \sigma^{(j+1)}$ . Для визначення міжшарових напружень отримано аналітичні вирази. На основі аналізу результатів обчислень, здійснених для двошарової оболонки з клейовим прошарком, зроблено висновок, що при постійній загальній товщині оболонки зміною товщин складових шарів, модулів зсуву клею та пружності матеріалу шарів можна регулювати розподіл дотичних контактних напружень.

Побудовано математичну модель для визначення контактних напружень у шаруватій композитній циліндричній оболонці при наявності кільцевих розшарувань. В основу покладено узагальнену класичну модель деформування шаруватих структур з врахуванням дії дотичних напружень на лицевих поверхнях кожного шару (дискретний підхід), що дозволяє врахувати обтисливість шарів по товщині, та модель контактної взаємодії шарів, яка враховує властивість міжфазної границі (наявність області розшарування). Знайдено аналітичний розв'язок осесиметричної задачі для скінченної двошарової циліндричної оболонки під дією розтягуючих сил, прикладених до кожного шару, та рівномірно розподіленого сталого внутрішнього тиску при наявності в оболонці кільцевих розшарувань. Досліджено розподіл міжфазних напружень у залежності від топографії (вельчини та місцеположення) розшарування [5].

## ВИСНОВКИ

1. Побудовано математичні моделі для нових задач контактної взаємодії шаруватих циліндричних оболонок. В основу досліджень покладено дискретний підхід до опису стану шаруватої структури, який дозволяє врахувати особливості контактної взаємодії шарів при використанні рівнянь узагальненої теорії оболонок типу Тимошенка.
2. Розроблено методику визначення контактних напружень під штампом та між шарами і контактної жорсткості багатшарової циліндричної оболонки з ідеальною та неідеальною (наявність тонких клейових прошарків, зон

неповного зчеплення тощо) взаємодією шарів. Контактні задачі зведені до інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду відносно контактної тиску. Розв'язки деяких задач одержано в явному вигляді.

3. Запропоновано чисельний метод розв'язування мішаних граничних задач для шаруватих циліндричних оболонок. Доведено теорему про збіжність та отримано оцінку точності розв'язку. Проведено порівняння знайдених розв'язків з відомими розв'язками тестових задач.
4. На основі побудованих математичних моделей і запропонованого методу досліджено контактні напруження при крученні шаруваті циліндричної оболонки з врахуванням узагальнених умов контакту шарів.
5. Здійснено аналіз розподілу контактних напружень у залежності від фізико-механічних та геометричних параметрів шарів, умов контакту та навантаження. Встановлено механічні ефекти, характерні для досліджуваного класу задач. Розв'язки деяких задач наведені у вигляді, придатному для інженерних розрахунків.

#### СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ АВТОРОМ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Щербина Н.Н. К решению несимметричных контактных задач для армированных колец // Базальтоволокнистые композиционные материалы и конструкции. - К.: Наук. думка, 1980. - С. 167-170.
2. Пелех Б.Л., Щербина Н.Н. Контактная жесткость слоистых цилиндрических оболочек. 1. Аналитическое решение задачи // Механика композитных материалов. - 1983. - №4. - С. 663-668.
3. Пелех Б.Л., Щербина Н.Н. Плоские контактные задачи для многослойных труб // Многослойные сварные конструкции и трубы: Материалы I Всесоюз. конф. - К.: Наук. думка, 1984. - С. 291-296.
4. Пелех Б.Л., Максимук А.В., Щербина Н.Н. Контактная жесткость слоистых цилиндрических оболочек. 2. Матричный метод решения контактных задач для многослойных цилиндрических оболочек // Механика композитных материалов. - 1986. - №2. - С. 276-280.
5. Мачуга О.С., Щербина Н.Н. Моделирование и оптимизация структурной поврежденности цилиндрических оболочек с расслоениями. 1. Моделирование и расчет напряженно-деформированного состояния. // Механика композитных материалов. - 1990. - №6. - С. 1079-1086.

6. Щербина Н.М. Методи розв'язування контактних задач для пружних анізотропних шаруватих циліндричних оболонок. - Препр. НАН України, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача, №7-94, 1994. - 56 с.
7. Щербина Н.Н. Оценка точности решения смешанных граничных задач матричным методом // Материалы 10-й конф. молодых ученых Ин-та прикл. пробл. механики и математики АН УССР. - Ч.2. - С. 229-233. - Деп. в ВИНТИ 10.11.84. №7197-84 Деп.
8. Щербина Н.Н. Плоские контактные задачи для круговых анизотропных и слоистых цилиндрических оболочек // Неклассические проблемы теории пластин и оболочек. - Ивано-Франковск, 1980. - С. 53.
9. Щербина Н.Н., Максимук А.В., Билецкий С.М. О расчете контактной жесткости многослойных трубопроводов // Контактные задачи механики композитов: Тез. докл. науч.-техн. семинара. - Львов, 1983. - С. 33-35.
10. Максимук А.В., Щербина Н.Н. О деформативности многослойных цилиндрических оболочек в случае несовершенного контакта слоев // Неклассические проблемы механики композитных материалов и конструкций из них: Тез. докл. II Всесоюз. научн.-техн. семинара. - К.: Наук. думка, 1984. - С. 35-36.
11. Щербина Н.Н., Марчук М.В. К численному решению задачи весовой оптимизации слоистой композитной цилиндрической оболочки с учетом структурной неоднородности по толщине // Теоретические и прикладные проблемы вычислительной математики и математической физики: Материалы X Всесоюз. школы: Рига, 1985. - С. 24-25.
12. Щербина Н.М. Розрахунок контактних напружень у шаруватій циліндричній оболонці з послабленим міжфазним контактом // Матеріали IV Міжнародної конференції з механіки неоднорідних структур. - Тернопіль, 1995. - С. 31.

**Особистий внесок претендента.** Всі результати, що складають основний зміст дисертаційної роботи, отримані автором самостійно. В публікаціях, які написані в співавторстві, дисертантові належать: у працях [2, 9, 10] - виведення основних співвідношень, побудова розв'язку та числові результати, в працях [3, 11] - формулювання задачі та отримання основних результатів, у праці [4] - теоретичне обґрунтування чисельного методу щодо його реалізації при розв'язуванні контактних задач для шаруватих оболонок, дослідження збіжності методу, в праці [5] - побудова розв'язку задачі, алгоритм і програмна реалізація.

Shcherbina N.N. **Mathematical modelling of the contact interaction of laminated cylindrical shells.** - Manuscript.

Thesis for a master's degree of physical and mathematical sciences on speciality 01.05.02 - mathematical modelling and computational methods in scientific research. - Ivan Franko Lviv State University, Lviv, 1997.

Within the framework of discrete and continual calculational models new classes of the contact problems for laminated cylindrical shells under the influence of surface loadings or patterns have been investigated. They have been studied in terms of a generalized shell theory taking into account interlayer contact conditions. Calculational and analytical solutions for formulated problems are constructed and proved based on the ideas of proposed calculational method and Laplas integral transformation.

Щербина Н.Н. **Математическое моделирование контактного взаимодействия слоистых цилиндрических оболочек.** - Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.02 - математическое моделирование и вычислительные методы в научных исследованиях. - Львовский государственный университет имени Ивана Франко, Львов, 1997.

В рамках дискретной и феноменологической расчетных моделей исследованы новые классы контактных задач для слоистых цилиндрических оболочек при воздействии поверхностных нагрузок или штампов. Они исследованы на основе обобщенной теории оболочек с учетом условий межслойного контакта. Построены и обоснованы численные и аналитические решения сформулированных задач, базирующиеся на идеях предложенного численного метода и интегрального преобразования Лапласа.

**Ключові слова:** контактна задача, шаруваті циліндричні оболонки, міжшарові контактні напруження, чисельний метод, оцінка збіжності, інтегральні рівняння, інтегральне перетворення Лапласа.

Підписано до друку 24.12.96. Формат паперу Сх84 1/16.  
Папір друкарський. Друк офсетний. Безкоштовно.  
Друкарських листів 1. Зам. 360. Тираж 100.

---

ПТЦ "Агрософт" м. Львів, вул. 700-річчя Львова, 63а.

439233

**AB 36.533**