КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

КАМІНСЬКИЙ АНДРІЙ БОРИСОВИЧ

НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИЙ АНАЛІЗ У ПРОСТОРАХ З ПУАССОНІВСЬКОЮ МІРОЮ

01.01.01 - Математичний аналіз

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1997

Дисертацією є рукопис

Робота виконана на кафедрі ма... імені Тараса Шевченка

Науковий керівник:
кандидат фізико-математичних наук, доцент УС Г. Ф.

Офіційні опоненти:
Доктор фізико-математичних наук, професор БУЛДИГІН В. В.
Кандидат фізико-математичних наук, доцент ТИЩЕНКО С. В.

Провідна установа:
Інститут математики НАН України, м.Київ.

Захист відбудеться "27" січня 1997 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої ради К 01.01.21 при Київському університеті імені Тараса Шевченка за адресою: 252127, м.Київ-127, пр.Глушкова,6, корпус механіко-математичного факультету, ауд.42.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці університету за адресою: м.Київ, вул.Володимирська, 58.

Автореферат розіслано "23" грудня 1996 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради КУРЧЕНКО О. О.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Робота присвячена дослідженню нескінченновимірного аналізу у просторах з пуассонівською мірою, основаному на властивості хаотичного представлення (CRP). Вперше розклад у простори однорідних хаосів був запропонований Н.Вінером для гауссівського випадку та пізніше досліджувався Р.Камероном, В.Мартіном та К.Іто, в чиїх роботах встановлена CRP для процесів з незалежними приростами. І.Сігалом було з'ясовано зв'язок вказаного розкладу з простором Фока, після чого багато результатів нескінченновимірного аналізу було одержано в рамках квантової теорії поля. Дещо пізніше П.Мейєром досліджувався зв'язок між кратними стохастичними інтегралами за нормальними мартингалами та простором Фока. Важливим для розвитку пуассонівського аналізу виявилося визначення у 1975 р. Ю.М.Кабановим та А.В.Скороходом розширеного стохастичного інтегралу та стохастичної похідної на основі хаотичного розкладу.

З середини 80-х років, зважаючи на досягнення гауссівського аналізу, посилюється інтерес до пуассонівського. Виходять роботи Й.Іто та І.Кубо, в яких будується теорія пуассонівського білого шуму; роботи А.Дермуна, П.Крі, Л.Ву, присвячені упередженому численню для пуассонівських мір. В роботах К.Біштелера, Ж.Жакода, Р.Басса та ін. досліджується числення Маллявена для процесів із стрибками. В рамках квантового стохастичного числення пуассонівські процеси розглядаються К.Партхасаратхі, Р.Хадсоном, А.Фріджеріо та ін. При цьому з'ясувалася багатоваріантність напрямків розвитку пуассонівського аналізу. Напрямок, що розвивається в дисертації, основано на CRP. В цьому напрямку відмітимо недавні роботи Д.Нуалара, А.Дермуна, П.Крі, Ж.Леона, В.Переса-Абрю, К.Тадора, тощо. Інший напрямок запропоновано Е.Карленом та Е.Парду. Він грунтується на аналогові теореми Гірсанова для пуассонівського процесу та використовує оператори (диференціювання) які відрізняються від досліджуваних в дисертації. З 1991 р. Ю.М.Березанським разом з учнями розробляється спектральний підхід до побудови аналізу (у тому числі і пуассонівського) білого шуму. Напрямок, що грунтується на трактуванні пуассонівського процесу як послідовності випадкових величин з експоненційним розподілом, розвинуто Н.Прівo. Останнім часом рядом вчених (С.Альбеверіо, Ю.Л.Далецький, Ю.Г.Кондратьєв та ін.) запропоновано біортогональний підхід до аналізу негауссівського білого шуму, який у випадку стандартного пуассонівського процесу вивчався Г.Ф.Усом.

На розвиток пуассонівського аналізу суттєво впливає ряд розділів сучасної математики. По-перше, це розв'язання стохастичних диференціальних рівнянь за пуассонівською мірою з розширеними інтегралами різних типів. Цими питаннями займаються такі математики як Ж.Леон, В.Перес-Абрю, А.Дермун та ін. По-друге, це дослідження рівнянь типу Віка–Скорохода, яке розвивається Б.Оксендалом, Ф.Бенсом, Л.Штрайтом, Д.Нуаларом. Окрім цього важливий вплив на пуассонівський аналіз справляють задачі статистичної фізики. Зокрема, задачі представлення розподілу класичної системи частинок функціональними інтегралами за пуассонівською мірою (О.Л.Ребенко, Р.Гелерат та ін.) та побудова розширеного (упередженого) квантового стохастичного числення.

Нарешті відмітимо, що методика хаотичного розкладу останнім часом застосовується для аналізу функціоналів від певних типів нормальних мартингалів (зокрема, мартингалів Азема). В цьому аспекті відмітимо роботи Ж.Азема, М.Йора, Ф.Проттера, М.Емері, Ф.Руссо та ін.

Враховуючи вищезазначене бачимо, що дослідження в напрямку, який розвивається в дисертації, є актуальними, як з теоретичної точки зору, так і з точки зору застосувань.

Мета роботи. Метою дисертаційної роботи є:

- дослідження нескінченновимірного пуассонівського аналізу, основаного на властивості хаотичного представлення;
- застосування цього аналізу до квантового стохастичного числення та до розв'язання стохастичних диференціальних рівнянь упередженого типу;
- встановлення взаємозв'язку між певними типами розширених стохастичних інтегралів за пуассонівською мірою.

Методика досліджень.
У роботі використовуються методи нескінченновимірного аналізу, теорії узагальнених функцій, теорії випадкових процесів, квантового стохастичного числення.

Наукова новизна роботи.

- доведено варіант формули інтегрування частинами у просторі з мірою Пуассона;

- на основі встановлення унітарної еквівалентності між розширеним стохастичним інтегралом Кабанова–Скорохода та оператором народження, а також між стохастичною похідною та оператором знищення, доведено ізометрію для розширених стохастичних інтегралів та дано пряме ймовірнісне обгрунтування вигляду ряду об'єктів пуассонівського аналізу в просторі Фока;
- побудовано та досліджено оснащення функціональної та фоківської реалізацій простору з мірою Пуассона певними типами просторів основних та узагальнених функцій;
- побудовано розширений стохастичний інтеграл типу Огави для пуассонівської міри та досліджено його властивості;
- розв'язано лінійні стохастичні диференціальні рівняння упередженого типу з інтегралами Кабанова–Скорохода та типу Огави;
- у пуассонівському випадку досліджено ряд об'єктів квантового стохастичного числення як у просторі Фока, так і в $L_2(\Omega)$; узагальнено конструкції квантових стохастичних інтегралів на процеси, які не є узгодженими у просторі Фока;
- показано, що у випадку стандартного пуассонівського процесу розширений стохастичний інтеграл, визначений як границя ріманових сум, співпадає з інтегралом типу Огави; наведена апроксимативна схема для інтегралу Кабанова–Скорохода.

Теоретична та практична цінність.

Дисертація має теоретичний характер. Її результати дають основу для подальшого розвитку нескінченновимірного аналізу у випадку, коли вихідна міра (процес) має властивість хаотичного представлення. Крім того, вони можуть знайти застосування в розділах функціонального аналізу, сучасної математичної фізики та стохастичного аналізу, пов'язаних з квантовим стохастичним численням, теорією стохастичних рівнянь упередженого типу на пуассонівському просторі та деякими моделями фінансової математики

Апробація роботи.

Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на:

- Четвертому Світовому Конгресі Товариства Бернуллі (Австрія, Відень, 26-31 серпня 1996 р.);
- Першій та Другій Всеукраїнських конференціях "Сучасні фізико-математичні дослідження молодих науковців вузів України" (Київ, 1994, 1995);
- XIV, XV, XVI, XVII конференціях молодих вчених МДУ (Москва, МДУ 1992, 1993, 1994, 1995);
- семінарі "Оператори математичної фізики" відділу функціонального аналізу Інституту математики НАН України (керівник семінару — академік НАНУ Ю.М.Березанський);
- семінарі "Ймовірнісні аспекти нескінченновимірного аналізу" відділів теорії ймовірностей і математичної статистики та функціонального аналізу Інституту математики НАН України (керівник семінару — академік НАНУ В.С.Королюк);
- семінарі "Ймовірнісні міри в нескінченновимірних просторах" Інституту математики НАН України (керівник семінару — академік НАНУ Ю.Л.Далецький);
- семінарі "Випадкові процеси з незалежними приростами" кафедри вищої математики N 1 Національного технічного університету (КПІ) (керівник семінару — професор В.В.Булдигін).
- семінарі "Диференціальні рівняння та міри в нескінченновимірних просторах" кафедри функціонального аналізу та теорії функцій механіко-математичного факультету МДУ ім. М.В.Ломоносова (керівник семінару — професор О.Г.Смолянов).

<u>Публікації.</u> Основні результати дисертації опубліковані в 8 роботах, список яких наведено в кінці автореферата.

<u>Структура та обсяг роботи.</u> Робота складається із вступу, трьох розділів, які включають 12 параграфів, та списку літератури з 108 найменувань. Загальний обсяг дисертації 129 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовується актуальність теми дисертаційної роботи, формулюється її мета, обговорюються основні напрями розвитку пуассонівського аналізу, наводиться стислий огляд робіт по даній тематиці, коротко викладається зміст розділів дисертації.

Об'єктом досліджень у першому розділі є функціональні простори пуассонівського аналізу. У §1.1 наводяться основні відомості про структуру простору $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, де $\mathcal{F}$ — породжена випадковими величинами $\{\nu(A), A \in \mathcal{B}(Y)\}$, ν — пуассонівська випадкова міра із неатомічною σ-скінченною структурною мірою Π, $Y = \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$.

Метою §1.2 є реалізація та дослідження властивостей простору $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ як гільбертового простору інтегровних з квадратом функціоналів на просторі, спряженому до певного ядерного лінійного топологічного функціонального простору. При цьому суттєво, що функціональна реалізація вводиться із збереженням CRP. В роботі не припускается наявності у структурної міри Π жодних властивостей гладкості. Тому застосування стандартного в аналізі білого шуму ланцюжку просторів типу Соболєва–Шварца ускладнено, і в якості оснащуючих просторів використовуються простори типу Кете. Для побудови останніх в $H = L_2(Y, d\Pi)$ обирається базис $\{\beta_k, k \geq 0\}$, деяка майже всюди скінченна вага $\mu(y) \geq 1$, така що $\int_Y \mu(y)^{-1} d\Pi(y) < \infty$ та направлена певним чином множина ваг $T \ni \tau = (\tau_k)_{k=0}^{\infty}$.

За вагою $\tau \in T$ будується гільбертів простір

$$E_\tau = \left\{ f \in H_+ \mid \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^2 \tau_k < \infty, \text{ де } f_k = (f, \beta_k \mu^{-1/2})_{H_+} \right\}$$

де $H_+ := L_2(Y, \mu(y) d\Pi(y)) \subseteq M := L_1(Y, d\Pi) \cap H$, та оснащення

$$\operatorname*{indlim}_{\tau \in T} E_{-\tau} = E' \supset H \supset E = \operatorname*{prlim}_{\tau \in T} E_\tau$$

із ваговою шкалою просторів E_τ.

За характеристичним функціоналом

$$C(\varphi) = \exp\left\{ \int_Y (e^{i\varphi(y)} - 1) d\Pi(y) \right\}, \quad \varphi \in E, \tag{1.1}$$

застосувавши теорему Бохнера–Мінлоса–Сазонова, вводиться зліченноадитивна міра π на $(E', \mathcal{B}(E'))$, носій якої лежить в E'_χ, де $\sum_{k=0}^{\infty} \chi_k^{-1} < \infty$. В результаті маємо простір $(L_2)_\pi := L_2(E', \mathcal{B}, \pi)$.

Принциповою особливістю пуассонівського аналізу, що випливає з (1.1), є необхідність розглядати функціонали від добутку основних функцій, тобто простір основних функцій має бути алгеброю (або задовольняє ряду спеціальних умов[1]). Однак для довільної ν важко вказати конкретне ядерне оснащення, яке одночасно є алгеброю. Пропонується для побудови оснащення використовувати один клас функцій — E, а для вивчення функціоналів інший — банахову алгебру $\mathcal{A} := L_1(Y, d\Pi) \cap L_\infty(Y, d\Pi)$.

У заключній частині параграфу побудована та досліджена така схема оснащення $(L_2)_\pi$:

$$
\begin{array}{c}
\mathbf{P}'(E', \mathcal{A}) \\
\cup \\
A'_e(E') \supset \overset{\bullet}{A}{}'_{\mathrm{fin}}(E') \supset A'_T(E') \supset (L_2)_\pi \supset A_T(E') \supset \overset{\bullet}{A}_{\mathrm{fin}}(E') \supset A_e(E') \\
\cup \\
\mathbf{P}(E', \mathcal{A})
\end{array}
\qquad (1.2)
$$

де $\mathbf{P}(E', \mathcal{A}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n(E', \mathcal{A})$ — множина поліномів на E', коефіцієнти яких будуються за функціями з $\mathcal{A}$;

$$A_T(E') = \operatorname*{prlim}_{\tau \in T} A_\tau(E'), \text{ де}$$

$$A_\tau(E') = \left\{ \Phi \in (L_2)_\pi \,\middle|\, \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^\infty_{+,c}}^{\infty} |\Phi_\alpha|^2 \tau_1^{n_1} \ldots \tau_k^{n_k} < \infty \right\};$$

$$\overset{\bullet}{A}_{\mathrm{fin}}(E') = \left\{ \sum_{k=0}^{N} C_n(x; f_1, \ldots, f_n), \quad f_1, \ldots, f_n \in E, N \in \mathbb{N} \right\};$$

$A_e(E')$ позначає множину функціоналів вигляду

$$\Psi(x) = \sum_{\substack{r(\alpha) \le l \\ |\alpha| \le n}} \Psi_\alpha C_\alpha(x), \qquad (x \in E')$$

де $C_\alpha(x)$ — поліноміальні функціонали Шарльє, l – найбільший номер базисного вектора $\beta_1, \beta_2, \ldots$, від якого залежить $\Psi(x)$, а n - "степінь" полінома $\Psi(x)$. Показано, що $A_e(E')$ та $\overset{\circ}{A}_{\mathrm{fin}}(E')$ — ядерні. Наведено деякі

[1]Див. умови [A1–A3] у Ito Y., Kubo I. Calculus on Gaussian and Poisson White Noises // Nagoya Math. J.–1988.–111.–p. 41–84.

умови ядерності $A_T(E')$. Наприклад, нехай T направлена певним чином множина, тоді має місце

Теорема 1.1 *Для ядерності $A_T(E')$ достатньо виконання наступної умови*

$$\forall \tau \in T \quad \exists \rho \in T: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau_k}{\rho_k} < 1.$$

Показано що, на відміну від гауссівського випадку, $A_T(E')$ при $T = [1, \infty)^{\infty}$ не обов'язково складається з циліндричних функцій.

В §1.3, виходячи з унітарних ізоморфізмів

$$\begin{array}{ccc} & L_2(\Omega) & \\ U \swarrow & & \searrow V \\ (L_2)_\pi & \xrightarrow{W} & \mathcal{F}(H) \end{array} \qquad (1.3)$$

вивчається структура фоківського простору, що відповідає пуассонівській мірі ν. Зокрема, за допомогою формули інтегрування частинами, доведеної у §2.2, дано пряме ймовірнісне обгрунтування вигляду ряду об'єктів пуассонівського аналізу у $\mathcal{F}(H)$.

Теорема 1.2 *Нехай $h \in \mathcal{A}$, тоді на Dom N (N — оператор числа частинок) мають місце рівності*

1. $V(\mathrm{I}_1(h)\mathbf{1})V^{-1} = a_+(h) + a_-(h) + d\Gamma(h\mathbf{1})$;
2. $V(\nu(A)\mathbf{1})V^{-1} = a_+(1_A) + a_-(1_A) + d\Gamma(1_A\mathbf{1}) + \Pi(A)\mathbf{1}$.

На основі наведених рівностей отримано вигляд у $\mathcal{F}(H)$ мір Z_j, $j = \overline{1,d}$, $Z_j(B) = \int\limits_B \int\limits_{\mathbb{R}} y d\nu$, $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^{d-1})$ та кратних стохастичних інтегралів (к.с.і.) за цими мірами.

В термінах операторів народження, знищення та консервації дано опис поліномів у просторі Фока; досліджено образ оснащення (1.2) у $\mathcal{F}(H)$ при ізоморфізмі W.

Другий розділ присвячено вивченню операторів диференціювання та розширених стохастичних інтегралів певних типів у просторах з мірою Пуассона, а також їх застосуванням до розв'язання стохастичних диференціальних рівнянь упередженого типу та до квантового стохастичного числення. Методика дослідження при цьому базується на властивості хаотичного представлення та унітарній еквівалентності між розширеним стохастичним інтегралом Кабанова–Скорохода та оператором народження, та між стохастичною похідною і оператором знищення.

У §2.1 описано основні напрямки сучасного гауссівського аналізу та наведено основні підходи до визначення операторів диференціювання з акцентуванням уваги на їх еквівалентність. Необхідність подібного розгляду полягає в тому, що сучасний пуассонівський аналіз розвивається в значній мірі за аналогією гауссівського. При цьому часто обирається за основу той чи інший підхід у гауссівському випадку і далі проводяться відповідні побудови для пуассонівського. Але, якщо у гауссівському випадку більшість підходів є, по суті, еквівалентними, то їх аналоги у пуассонівському випадку приводять до різних конструкцій.

У §2.2 досліджується CRP-підхід до диференціювання та інтегрування у просторі з мірою Пуассона. Порівняно цей підхід з іншими підходами до визначення операторів диференціювання у пуассонівських просторах та показана їх нееквівалентність. Для похідної D_h у напрямку $h \in H$, визначенної на основі CRP, та розширеного стохастичного інтегралу (Кабанова–Скорохода) δ доведена формула інтегрування частинами.

Теорема 2.1 *Нехай $h(y) \in \mathcal{A}$, $F \in \mathrm{Dom}\, L$, де L — оператор Маллявена, тоді*

$$\delta(h(y)F) = F\delta(h(y)) - D_{h(y)}F - d\Gamma(h(y)\mathbf{1})F, \tag{2.1}$$

де $d\Gamma(h(y)\mathbf{1})$ оператор в $L_2(\Omega)$, визначений на $\mathrm{Dom}\ L$ дією

$$d\Gamma(h(y)\mathbf{1})\mathbf{I}_n(f_n(y_1,\ldots,y_n)) = \mathbf{I}_n\left(\sum_{j=1}^{n} f_n(y_1,\ldots,y_j,\ldots,y_n)h(y_j)\right)\ (n \geq 1),$$

$$d\Gamma(h(y)\mathbf{1})\lceil\mathbf{C} = 0.$$

Наслідок 2.1 *Нехай $F \in L_2(\Omega)$ $\mathcal{F}_A$-вимірний ($A \in \mathcal{B}(Y)$), $h \in H$ така, що $\mathrm{supp}\, h \cap A = \emptyset$, тоді $D_hF = 0$, та $\delta(hF) = FI_1(h)$.*

Введемо гільбертів простір $\mathrm{D}_{2,1} \subset L_2(\Omega)$ як $\mathrm{Dom}\ L^{1/2} \subset L_2(\Omega)$ із скалярним добутком

$$(F,G)_{\mathrm{D}_{2,1}} := (F,G)_{L_2(\Omega)} + (DF,DG)_{L_2(Y\times\Omega)}$$

де D — стохастична похідна, визначена на основі CRP. Встановлений наступною теоремою зв'язок з операторами у просторі Фока дозволяє застосувати розроблений там апарат для дослідження операторів у $L_2(\Omega)$.

Теорема 2.2 *При ізоморфізмі V (1.3) оператор Маллявена L та стохастична похідна D_h, $h \in H$, унітарно еквівалентні операторам числа частинок N та знищення $a_-(h)$ відповідно, а інтеграл Кабанова-Скорохода $\delta(h(y)F) = V^{-1}a_+(h)VF$, де $h \in H$, $F \in \mathbf{D}_{2,1}$, $a_+(h)$ — оператор народження в $\mathcal{F}(H)$.*

Лема 2.1 *Нехай $F, G \in \mathbf{D}_{2,1}$, $h, k \in H$ тоді*

$$(\delta(hF), \delta(kG))_{L_2(\Omega)} = (h, k)_H (F, G)_{L_2(\Omega)} + (D_k F, D_h G)_{L_2(\Omega)}.$$

Для процесів з $L_2(Y \times \Omega)$, які мають похідну $Du(y, \omega)$, введемо гільбертову норму

$$\|u(y, w)\|_{2,1} := \left(\|u(y, w)\|^2_{L_2(Y\times\Omega)} + \|Du(y, w)(z)\|^2_{L_2(Y\times Y\times\Omega)}\right)^{1/2}$$

Позначимо $\mathbf{L}_{2,1}$ гільбертів простір процесів $u(y, \omega) \in L_2(Y \times \Omega)$, які задовольняють умовам:

1. $u(y, \omega) \in \mathbf{D}_{2,1}$ для майже всіх $y \in Y$;
2. Існує вимірна модифікація $(Du(y, \omega))(z)$;
3. $\|u\|_{2,1} < \infty$.

Показано, що $\mathbf{L}_{2,1}$ — щільний в $L_2(Y)$ та справедлива наступна

Теорема 2.3 *Нехай $u, v \in \mathbf{L}_{2,1}$, тоді*

$$(\delta(u), \delta(v))_{L_2(\Omega)} = (u, v)_{2,1}.$$

Звідси випливає ізометрія для розширених стохастичних інтегралів за пуассонівською мірою, яка у випадку узгодженості процеса перетворюється в класичну ізометрію Іто.

Нехай $\nu(t, y)$ пуассонівська міра задана на σ-алгебрі $\mathcal{B}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$. Грунтуючись на роботах Ж.Леона, К.Тадора та ін. для стандартного пуассонівського процесу, у §2.3 розв'язується рівняння

$$X(t) = G + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \alpha(s, y) X(s) d\Pi(s, y) + \delta\left(\mathbf{1}_{[0,t]}(s)\beta(s, y)X(s)\right) \quad (t \geq 0) \quad (2.2)$$

де $\alpha(s, y) \in L_1(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d, d\Pi) \cap L_2(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d, d\Pi)$, $\beta(s, y) \in L_2(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d, d\Pi)$, G — випадкова величина з $L_2(\Omega)$ без додаткових умов узгодженості.

Означення 2.1 *Розв'язком (2.2) називається вимірний процес $X(s)$ такий що:*

1) $\alpha(s,y)X(s) \in L_1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, d\Pi)$ з ймовірністю 1;

2) $\mathbf{1}_{[0,t]}(s)\beta(s,y)X(s) \in Dom\,\delta$ для майже всіх $t \geq 0$;

3) для майже всіх $t \geq 0$ виконується рівність (2.2) в сенсі рівностей ядер к.с.і. у просторах хаотичного розкладу Вінера–Іто ;

Розв'язок знайдено методом порівняння ядер к.с.і. при хаотичному розкладі обох частин (2.2). При цьому розв'язок будується за допомогою добутку Віка $\diamond$.

Теорема 2.4 *Нехай $\alpha(s,y) \in L_1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, d\Pi) \cap L_2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, d\Pi)$, $\beta(s,y) \in L_2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, d\Pi)$, G задовольняє умові*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! 2^{2n} \|g_n\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, d\Pi)^{\otimes n}} < \infty,$$

тоді розв'язком рівняння (2.2) буде процес

$$\lambda(t) = A(t) G \diamond \exp\left\{\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \ln(1+\beta(s,y))\,d\nu(s,y) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \beta(s,y)\,d\Pi(s,y)\right\} \tag{2.3}$$

де $A(t) = \exp\left\{\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \alpha(s,y)\,d\Pi(s,y)\right\}$.

В параграфі також наведено наслідки з цієї теореми для рівнянь упередженого типу за складним пуассонівським процесом. Розглянута можливість застосування рівняння (2.2) до деяких моделей фінансової математики. Зокрема, пропонується узагальнення моделі Блека–Шоулса на випадок стрибкоподібних змін у ціні акцій та залежності вихідної їх вартості від майбутніх подій.

§2.4 присвячено побудові для пуассонівської випадкової міри розширеного стохастичного інтегралу типу Огави та дослідженню його властивостей. Нехай $u(y,\omega) \in L_2(Y \times \Omega)$ та $\{\beta_k,\ k \geq 0\}$ деякий ортонормований базис в H. Розкладемо $u(y,\omega)$ за змінною $y \in Y$ за базисом $\{\beta_k,\ k \geq 0\}$

$$u(y,\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} (u(y,\omega), \beta_k(y))_H \beta_k(y).$$

Означення 2.2 *Розширеним стохастичним інтегралом типу Огави від $u(y,\omega)$ відносно пуассонівської міри ν називається випадкова величина (збіжність розуміється за ймовірністю)*

$$\overset{\circ}{\delta}(u(y,\omega)) = \sum_{k=0}^{\infty} (u(y,\omega), \beta_k(y))_H \mathrm{I}_1(\beta_k(y)).$$

Для опису $\overset{\circ}{\delta}$ введемо оператор P: $Pu(y,\omega) = \Sigma_{n=0}^{\infty} \mathrm{I}_n(f_n(y_1,\ldots,y_n|y_1))$,

$$\mathrm{Dom}\, P = \{u(y,\omega) \in L_2(Y \times \Omega)|$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_Y \ldots \int_Y f_n^2(y_1, y_2, \ldots, y_n|y_1) d\Pi(y_1) \ldots d\Pi(y_n) < \infty,$$

$\exists$ діагональ f_n, яка є вимірною$\}$.

Теорема 2.5 *Нехай $u(y,\omega) \in L_2(Y \times \Omega)$ та задовольняє умовам:*

1. $\|(Du(y,\omega))(z)\|_{L_2(Y\times Y\times\Omega)} < \infty$;
2. *Ядро $(Du(y,\omega))(z)$ має скінченний слід для майже всіх $\omega \in \Omega$;*
3. $u(y,\omega)) \in Dom\, LP$, *де L – оператор Маллявена;*

тоді інтеграл $\overset{\circ}{\delta}$ існує, не залежить від базису, та має місце рівність

$$\overset{\circ}{\delta}(u) = \delta(u) + Tr\, Du + LPu.$$

Далі в параграфі наводиться розв'язок лінійного стохастичного диференціального рівняння з інтегралом $\overset{\circ}{\delta}$.

У §2.5 вивчається дія образів операторів диференціювання та розширеного інтеграла δ у функціональній реалізації $(L_2)_x$. Детально розглядається випадок, коли елементи базису $\{\beta_k,\ k \geq 0\}$ належать $\mathcal{A}$. В цьому випадку визначено всі можливі мономи

$$(< x, \beta_1 > - < \beta_1 >)^{n_1} \ldots (< x, \beta_k > - < \beta_k >)^{n_k} \in \mathrm{P}(E', \mathcal{A}).$$

На множині мономів визначено оператори частинного диференціювання $\frac{\partial}{\partial(<x,\beta_i> - <\beta_i>)}$ та множення на моном $< x, \beta_i > - < \beta_i >$. Для цього введено оператор Віківського впорядкування $\mathcal{W}$ на $\mathrm{Dom}\, \mathcal{W} = \mathrm{P}(E', \mathcal{A})$:

$$\mathcal{W}((< x, \beta_{i_1} > - < \beta_{i_1} >)^{n_1} \ldots (< x, \beta_{i_k} > - < \beta_{i_k} >)^{n_k}) =$$
$$= C_n(x; \beta_{i_1}^{\otimes n_1}, \ldots, \beta_{i_k}^{\otimes n_k}).$$

Теорема 2.6 *Мають місце наступні рівності на $A_0(E')$:*

$$\mathcal{W} \frac{\partial}{\partial(< x, \beta_i > - < \beta_i >)} \mathcal{W}^{-1} = U D_{\beta_i} U^{-1};$$

$$\mathcal{W}(< x, \beta_i > - < \beta_i >)\mathcal{W}^{-1} = U D_{\beta_i}^{*} U^{-1};$$

$$\mathcal{W} \frac{\partial}{\partial(< x, \beta_i > - < \beta_i >)} \mathcal{W}^{-1} = \mathcal{W}^{-1} a_{-}(\beta_i) \mathcal{W};$$

$$\mathcal{W}(< x, \beta_i > - < \beta_i >)\mathcal{W}^{-1} = \mathcal{W}^{-1} a_{+}(\beta_i) \mathcal{W};$$

де β_i – довільний базисний вектор.

Звідси випливає, наприклад, що образ $\mathcal{W}$ у $\mathcal{F}(H)$ діє на $\mathring{\mathcal{F}}_{\rm fin}(\mathcal{A})$ наступним чином

$$WWW^{-1}(a_+(\beta_{i_1})+a_-(\beta_{i_1})+d\Gamma(\beta_{i_1}))^{n_1}\dots$$
$$\dots(a_+(\beta_{i_k})+a_-(\beta_{i_k})+d\Gamma(\beta_{i_k}))^{n_k}\omega_0=a_+(\beta_{i_1})^{n_1}\dots a_+(\beta_{i_k})^{n_k}\omega_0,$$

ω_0 — вакуумний вектор.

В §2.6, по-перше, на основі формули інтегрування частинами (2.1) обгрунтовано ймовірнісний підхід до визначення пуассонівської міри у численні Хадсона–Партхасаратхі; по-друге, досліджено вигляд ряду конструкцій квантового стохастичного числення для пуассонівського випадку як у просторі Фока, так і у $L_2(\Omega)$; по-третє, використовуючи розширене стохастичне числення з §2 2, узагальнено конструкції квантових стохастичних інтегралів на процеси, які не є узгодженими у просторі Фока.

Нехай $\mathcal{L}$ позначає лінійну оболонку експоненціальних векторів, породжених елементами з $\mathcal{A}$. $\forall h\in H$ детермінований процес $\{\mathbf{1}_{[0,t]}(s)h(s,y),$ $t\geq 0\}$ називатимемо h–мартингалом.

Теорема 2.7 *1. Нехай $h\in\mathcal{A}$, $g\in H$, тоді для h– та g–мартингалів має місце рівність на $\mathcal{L}$:*

$$\int_0^T a_+(\mathbf{1}_{[0,t]}(s)h(s,y))da_-(\mathbf{1}_{[0,t]}(s)g(s,y))=d\Gamma(Mh(t,y)\mathbf{1}_{[0,T]}(t)K_{+,-}(g;T)),$$

де $Mh(t,y)\mathbf{1}_{[0,T]}(t)$ – оператор множення на $h(t,y)\mathbf{1}_{[0,T]}(t)$, а $K_{+,-}(g;T)$ – інтегральний оператор вигляду

$$K_{+,-}(g;T)u=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\mathbf{1}_{(t,T]}(s)g(s,y)u(s,y)d\Pi(s,y).$$

2. Нехай $h\in H$, $g\in\mathcal{A}$, тоді для h– та g–мартингалів має місце рівність на $\mathcal{L}$:

$$\int_0^T a_-(\mathbf{1}_{[0,t]}(s)h(s,y))da_+(\mathbf{1}_{[0,t]}(s)g(s,y))=d\Gamma(Mg(t,y)\mathbf{1}_{[0,T]}(t)K_{-,+}(h;T)),$$

де $K_{-,+}(h;T)$ — інтегральний оператор вигляду

$$K_{-,+}(h;T)u=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\mathbf{1}_{[0,t]}(s)h(s,y)u(s,y)d\Pi(s,y).$$

Отримано формули для обчислення квантових стохастичних інтегралів від елементів алгебри, яка породжена процесами народження та знищення. Наприклад, для h-, k- та g-мартингалів має місце співвідношення

$$\left(\int_0^T a_+^n(\mathbf{1}_{[0,t]}(s)h(s,y))a_-^m(\mathbf{1}_{[0,t]}(s)k(s,y))da_-(\mathbf{1}_{[0,t]}(s)g(s,y))e(u),e(v)\right) =$$

$$= \int_0^T\int_{\mathbf{R}^{d-1}} H_v^n(t)K_u^m(t)g(s,y)u(s,y)d\Pi(s,y)\exp(u,v)_H,$$

$$H_v(t) = \int_0^t\int_{\mathbf{R}^{d-1}} h(s,y)v(s,y)d\Pi(s,y),\ K_u(t) = \int_0^t\int_{\mathbf{R}^{d-1}} k(s,y)u(s,y)d\Pi(s,y).$$

Теорема 2.7 дозволяє дати ймовірнісну інтерпретацію одного з варіантів квантової формули Іто[2].

Наслідок 2.2 *Нехай $F \in \ \mathrm{Dom}\ \delta D$, образом квантової формули Іто у просторі $L_2(\Omega)$ будуть наступні співвідношення:*

$$\delta(h(t,y)\mathbf{1}_{[0,T]}(t)(DF,g\mathbf{1}_{[0,T]}(t))_H) =$$
$$= d\Gamma(Mh(t,y)\mathbf{1}_{[0,T]}(t)K_{+,-}(g;T)) + d\Gamma(Mh(t,y)\mathbf{1}_{[0,T]}(t)K_{-,+}(g;T));$$
$$(D\delta(h(t,y)\mathbf{1}_{[0,T]}(t)F),g(t,y)\mathbf{1}_{[0,T]}(t)) = d\Gamma(Mg(t,y)\mathbf{1}_{[0,T]}(t)K_{+,-}(h;T))+$$
$$+d\Gamma(Mg(t,y)\mathbf{1}_{[0,T]}(t)K_{-,+}(h;T)) + \int_0^T\int_{\mathbf{R}^{d-1}} h(t,y)g(t,y)d\Pi(t,y)\mathbf{1}.$$

Детально розібрано випадок $H = L_2(\mathbf{R},dt)$ та $\mathbf{1}_{[0,t]}$-мартингалу, який характеризується можливістю реалізувати $\mathcal{F}(H)$ зі збереженням CRP двома функціональними просторами

$$\begin{array}{ccccc}
 & & U_G & & \\
L_2(\Omega,\mathcal{F}_\Gamma,P) & & \rightarrow & & L_2(S'(\mathbf{R}),\gamma) \\
 & V_G \searrow & & \swarrow W_G & \\
 & & \mathcal{F}(L_2(\mathbf{R},dt)) & & \\
 & V_\mathcal{P} \nearrow & & \nwarrow W_\mathcal{P} & \\
L_2(\Omega,\mathcal{F}_\Pi,P) & & \rightarrow & & L_2(S'(\mathbf{R}),\pi) \\
 & & U_\mathcal{P} & &
\end{array}$$

[2]Див. Prop. 25.25 у Parthasarathy K.R. An introduction to quantum stochastic calculus. Birkhauser, 1992.

де γ — гауссівська, а π — пуассонівська міра.

Теорема 2.8 *При реалізації $\mathcal{F}(L_2(\mathbf{R}, dt))$ як $L_2(S'(\mathbf{R}), \gamma)$ на множині поліномів $\mathcal{P}(S')$ мають місце наступні представлення*

$$\left(W_G^{-1}\int\limits_0^T a_+(\mathbf{1}_{[0,t]}(s))da_-(\mathbf{1}_{[0,t]}(s))W_G u\right)(x) =$$

$$= -\frac{1}{2}\, Tr_{L_2(\mathbf{R})}(K_{+,-}(T)u''(x)) + (K_{+,-}(T)u'(x), x)_{L_2(\mathbf{R})},$$

$$\left(W_G^{-1}\int\limits_0^T a_-(\mathbf{1}_{[0,t]}(s))da_+(\mathbf{1}_{[0,t]}(s))W_G u\right)(x) =$$

$$= -\frac{1}{2}\, Tr_{L_2(\mathbf{R})}(K_{-,+}(T)u''(x)) + (K_{-,+}(T)u'(x), x)_{L_2(\mathbf{R})}.$$

Далі в параграфі за допомогою розширеного стохастичного числення у $L_2(\Omega)$ запропонована наступна конструкція визначення квантових стохастичних інтегралів від процесів, що не є узгодженими з фільтрацією у просторі Фока. Нехай $\{L(t),\ t \geq 0\}$ квантовий процес у $\mathcal{F}(L_2(Y, d\Pi))$ з областю визначення, яка включає $\mathcal{L}$. Позначимо $\widetilde{L(t)} := V^{-1}L(t)$ — образ цього процесу в $L_2(\Omega)$, $g \in L_2(Y, d\Pi)$.

Означення 2.3 *Розширеним квантовим стохастичним інтегралом від процесу $\{L(t), t \geq 0\}$ за процесом народження для g-мартингалу називається процес $\{A^*_{g,L}(t), t \geq 0\}$ такий що:*

1. $Dom\ A^*_{g,L}(t) \subseteq V\ Dom\ \delta(\widetilde{L(s)}\mathbf{1}_{[0,t]}(s)),\ t \geq 0.$
2. $\forall \overline{f} \in\ Dom\ A^*_{g,L}(t)\ \forall t \geq 0$

$$A^*_{g,L}(t)\overline{f} = V\delta((\widetilde{L(s)}V^{-1}\overline{f})g(s,y)\mathbf{1}_{[0,t]}(s)). \tag{2.4}$$

Означення 2.4 *Розширеним квантовим стохастичним інтегралом від процесу $\{L(t), t \geq 0\}$ за процесом знищення називається процес $\{A_{g,L}(t), t \geq 0\}$ такий що:*

1. *$Dom\ A_{g,L}(t) \subseteq V\ Dom\ (\widetilde{L(s)}D)$ $t \geq 0$ та існує інтеграл (2.5) в сенсі Бохнера.*
2. *$\forall \overline{f} \in Dom\ A_{g,L}(t)$, $A_{g,L}(t)$ визначається дією*

$$A_{g,L}(t)\overline{f} = \int\limits_{\mathbf{R}^d} (\widetilde{L(s)}((DV^{-1}\overline{f})(s,y)))g(s,y)\mathbf{1}_{[0,t]}(s)d\Pi(s,y). \tag{2.5}$$

Показано, що у випадку узгодженого $L(s)$ інтеграли визначені у (2.4) та (2.5), обігаються з класичними інтегралами Хадсона–Партхасаратхі.

Третій розділ дисертації присвячено конструкціям пуассонівського аналізу у випадку мір, породжених складними пуассонівськими процесами.

У §3.1 показується, як вкладаються в загальні конструкції розділів 1–2 складні пуассонівські процеси. Порівняно методики дослідження функціоналів з $L_2(\Omega)$ за допомогою к.с.і. за мірою ν та к.с.і. за мірою Z ($Z(B) = \int\limits_B \int\limits_{\mathbf{R}} y d\nu(t,y)$).

У §3.2 вивчається простір квадратично-інтегровних функціоналів від суто дискретних пуассонівських мір. Застосована методика представлення $L_2(\Omega)$ у вигляді нескінченного тензорного добутку. Показано що прямим наслідком формули інтегрування частинами (2.1) є наступне представлення для оператора множення на пуассонівську величину x_k:

$$x_k \cdot = a_+(x_k) \cdot + a_-(x_k) \cdot + N(x_k) \cdot + \lambda_k \mathbf{1} \cdot,$$

де $a_+(x_k) = ((x_k - \lambda_k) - x_k \Delta_{\text{л}}(x_k))$, $a_-(x_k) = \lambda_k \Delta_{\text{пр}}(x_k)$, $\Delta_{\text{л}}$ та $\Delta_{\text{пр}}$ — лівий та правий зсуви.

В параграфі 3.3 розглядається випадок, коли $Y = \mathbf{R}^2$, $\Pi(t,y) = m_1(t) \otimes H(y)$, де supp $H(y) = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ($a_i \neq 0$, $\forall i = \overline{1,n}$). Спочатку досліджується випадок стандартного пуассонівського процесу (supp $H(y) = \{a\}$). Для цього випадку введено розширений стохастичний інтеграл як границю інтегральних сум та доведена наступна

Теорема 3.1 *Нехай $u(t,\omega) \in L_2([0,1] \times \Omega)$ та задовольняє умовам:*

1) $u(t,\omega) \in \operatorname{Dom} \overset{\circ}{\delta}$;

2) $\forall k \geq 0$ ядра в розкладі Вінера–Іто процесу $u(t,\omega)$ $f_k \in C([0,1]^{k+1})$; тоді визначено стохастичний інтеграл (в сенсі збіжності в $L_2(\Omega)$)

$$\overset{r}{\delta}(u) = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{u}(t_k)(N(t_{k+1}) - N(t_k)), \qquad \overline{u}(t_k) = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} u(s,\omega) ds,$$

причому

$$\overset{r}{\delta}(u) = \overset{\circ}{\delta}(u).$$

Розглянута схема наближення інтегралу $\delta(u)$ рімановими сумами на $[0,1]$.

ВИСНОВКИ

Таким чином, в дисертаційній роботі отримані такі результати:

- доведено варіант формули інтегрування частинами у просторі з мірою Пуассона, заснований на властивості хаотичного представлення;
- побудовано та досліджено оснащення функціональної та фоківської реалізацій простору з мірою Пуассона певними типами просторів основних та узагальнених функцій;
- на основі встановлення унітарної еквівалентності між розширеним стохастичним інтегралом Кабанова–Скорохода та оператором народження, а також між стохастичною похідною та оператором знищення, доведено ізометрію для розширених стохастичних інтегралів та дано пряме ймовірнісне обгрунтування вигляду ряду об'єктів пуассонівського аналізу в просторі Фока;
- побудовано розширений стохастичний інтеграл типу Огави за пуассонівською мірою, встановлено його зв'язок з інтегралом Кабанова–Скорохода та розв'язано лінійні стохастичні диференціальні рівняння упередженого типу з цими інтегралами;
- досліджено ряд об'єктів квантового стохастичного числення у пуассонівському випадку та узагальнено конструкції квантових стохастичних інтегралів на неузгоджені процеси;
- показано, що у випадку стандартного пуассонівського процесу розширений стохастичний інтеграл, визначений як границя ріманових сум, співпадає з інтегралом типу Огави.

Основні результати дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Каминский А.В., Ус Г.Ф. Об одном классе операторов вторичного квантования // Укр. мат. журн.- 1995.- 47, N 5 - с. 629-634.

2. Каминский А.Б. Представление исчисления Маллявена в пространстве Фока // Теор. и приклад. аспекты математических исследований: Сб. науч. трудов.-М.: Изд-во МГУ, 1994.-с.91-96.

3. Каминский А.Б. Анализ белого шума для сложных пуассоновских процессов // Сучасні фізико-математичні дослідження молодих науковців вузів України: Зб. наук. пр. - К.: Київ. ун-т ім. Тараса Шевченка, 1995. - с.46-55.

4. Камінський А.Б. Квантові стохастичні інтеграли та їх оображення у просторі L_2 // Збірник праць студентів та аспірантів Київського університету імені Тараса Шевченка (природничі науки). - К.: Київ. ун-т ім. Тараса Шевченка, 1994. - с.13-22.

5. Камінський А.Б. Фоківський підхід до числення Маллявена // Праці Всеукраїнської конференції молодих вчених (математика). Ч.1. - К.: Київ. ун-т ім. Тараса Шевченка, 1994. - с.79-86.

6. Kaminsky A.B. An integration by parts formula for the Poisson random measures and applications. - Kyiv,1996. - 20 p. (Preprint / Ukrainian National Science Academy. Institute of mathematics; 96.9).

7. Kaminsky A.B. Extended stochastic calculus for the Poisson random measures. - Kyiv, 1996. -18p. (Preprint / Ukrainian National Science Academy. Institute of mathematics; 96.15).

8. Kaminsky A.B. Solutions some anticipating stochastic equations driven by Poisson noise and its applications // Book of abstracts of 4-th World Congress of the Bernoulli Society, Vienna, Austria, 1996. - p.262.

Каминский А.В. "Бесконечномерный анализ в пространствах с пуассоновской мерой".

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ. Киевский университет имени Тараса Шевченко, Киев, 1996.

Защищается диссертация, посвященная изучению бесконечномерного пуассоновского анализа, основанного на свойстве хаотического представления. Доказаны вариант формулы интегрирования по частям и изометрия для расширенных стохастических интегралов в пространстве с мерой Пуассона. Построены и исследованы ряд оснащений функциональной и фоковской реализаций пуассоновского пространства. Построен расширенный стохастический интеграл типа Огавы для пуассоновской меры и исследованы его свойства. В работе также приведены приложения рассматриваемой теории к решению стохастических дифференциальных уравнений упреждающего типа и к квантовому стохастическому исчислению Хадсона–Партхасаратхи.

Kaminsky A.B. "Infinite-dimensional analysis in the spaces with Poisson measure"

Doctor of Philosophy thesis, speciality 01.01.01 - mathematical analysis. Kyiv Taras Shevchenko University, Kyiv, 1996.

The thesis to be defended is devoted to investigation of infinite-dimensional Poisson analysis, which is based on the Chaotic Representation Property. The variant of the integration by parts formula and the isometry for the extended stochastic integrals on the Poisson space are proved. In the thesis a number of riggings of functional and Fock realization of Poisson space are constructed and investigated. For the Poisson measure the extended stochastic integral of Ogawa type is constructed and some its properties are studied. The applications of the considered theory to the quantum stochastic calculus of Hudson–Parthasarathy and anticipating stochastic calculus are regarded.

Ключові слова: міра Пуассона, простір Фока, основні та узагальнені функції нескінченної кількості змінних, властивість хаотичного представлення, розширені стохастичні інтеграли, добуток Віка, стохастичні інтегральні рівняння упередженого типу, квантове стохастичне числення.

Користуючись нагодою, хочу висловити щиру подяку науковому керівникові Усу Георгію Федоровичу за постійну увагу та підтримку при написанні дисертаційної роботи.

Підписано до друку 13.12.96.
Формат 60х84 1/16. Офс.папір. Офс.друк.
Умов.друк.арк. 1,2. Обл.-вид.арк. 0,95.
Тираж 100 прим. Зам. №181.

Поліграфічна дільниця Інституту економіки НАН України.
252011, Київ-11, вул. Панаса Мирного, 26.

Підписано до друку 13.12.96.
Форматт 60x84/16. Офс.пап. Офс.друк.
Умов.друк.арк. 1,2. Облік.-вид.арк.0,95.
Тираж 100 прим. Зам. №181.

Поліграфічна дільниця Інституту економіки НАН України.
252011, Київ-11, вул. Панаса Мирного, 26.