

Міністерство освіти України
Львівський державний університет ім. Ів. Франка

На правах рукопису
УДК 517.95

Бушмакін Віктор Миколайович

Деякі крайові задачі для диференціально- операторних рівнянь з кратним спектром

01.01.02 - Диференціальні рівняння

А в т о р е ф е р а т
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів - 1997

574.95

ЛННБ України ім.В.Стефаніка



00761045 (N)

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Державному університеті "Львівська політехніка".

- Науковий керівник : доктор фізико-математичних наук,
професор Каленюк Петро Іванович
- Офіційні опоненти : доктор фізико-математичних наук,
професор Радин Яків Валентинович,
доктор фізико-математичних наук
Лавренюк Сергій Павлович
- Провідна установа : Чернівецький державний університет
ім. Ю. Федьковича

Захист відбудеться "20" лютого 1997 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 04.04.01 при Львівському державному університеті ім. Ів. Франка (290001, м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд 377).

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Львівського державного університету ім. Ів. Франка (м. Львів, вул. Драгоманова, 5).

Автореферат розіслано "16" січня 1997 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради

Микитюк Я. В.

Актуальність теми. Для певного кола задач математичної фізики, які виникають із проблем теорії плазми, вологопереносу, періодичних хвильоводів та інших, застосування методу Фур'є приводить до нелокальної задачі на власні значення, що має кратний спектр, якому в системі власних та приєднаних функцій відповідає злічена множина приєднаних. Такі мішані та спектральні задачі розглядалися в роботах В. А. Львіна, М. І. Іонкіна, Є. І. Моїсєєва, А. Ель-Каді та інших авторів. В теоретичному плані спектральні задачі з кратним спектром привертають увагу тим, що до них не можуть бути застосовані класичні методи Бірґгофа-Тамаркіна, теорія спектральних операторів Данфорда.

Задачі вказаного типу вивчалися в ряді робіт П. І. Каленюка та його учнів. Труднощі, обумовлені наявністю зліченої множини приєднаних векторів для операторів в спектральних задачах, були подолані в результаті модернізації класичного методу власних функцій (метод Фур'є) на основі використання апарату узагальненого методу відокремлення змінних, розробленого П. І. Каленюком.

Абстрактний варіант узагальненого методу відокремлення змінних (відокремлення в тензорному добутку сепарабельних гільбертових просторів) був успішно реалізований П. І. Каленюком та Я. О. Баранецьким при розв'язанні багатьох важливих проблем, пов'язаних з дослідженням нелокальних граничних задач для диференціально-операторних рівнянь вищих порядків, коефіцієнти яких поліноміально залежать від деякого абстрактного постійного необмеженого оператора з кратним спектром. Такий підхід дав можливість будувати приєднані вектори відповідних спектральних задач в узагальнено відокремленому вигляді і отримувати розв'язання розв'язків неоднорідних рівнянь з однорідними граничними умовами в ряді за системою власних та приєднаних векторів.

Вищезгадані дослідження нелокальних граничних задач обмежувались випадком, коли кратності власних значень абстрактного оператора є рівномірно обмеженими. Отримані результати не переносились тривіальним чином на випадок необмеженості кратностей, оскільки методика дослідження суттєво опиралася на факт обмеженості останніх. Природньо виникла постановка задачі про вивчення випадку необмеженості кратностей власних значень з тим, щоб надати дослідженню з вказаної тематики завершеного вигляду. Одним із джерел виникнення задач з такою специфікою є некласичні граничні умови, зокрема нелокальні умови

типу Біцадзе-Самарського. Вказаний випадок становить предмет дослідження першого розділу дисертаційної роботи.

В другому розділі роботи вивчаються питання розв'язності абстрактної задачі Коші в гільбертовому просторі для лінійного однорідного диференціального рівняння першого порядку із сталим необмеженим оператором, що має кратний спектр. Розглядаються випадки як обмежених так і необмежених кратностей власних значень.

Якщо для лінійного рівняння з обмеженим оператором питання існування та єдиності розв'язку задачі Коші, неперервної залежності від початкових даних завжди вирішувалися позитивно, і тому основна увага приділялася дослідженню поведінки розв'язків на нескінченності, то для рівняння з необмеженим оператором ці питання стають центральними.

Початок теорії лінійних диференціальних рівнянь в банаховому просторі з необмеженими операторними коефіцієнтами закладені роботами Е. Хіллі та К. Іосіда, в яких були отримані перші теореми існування розв'язків задачі Коші з необмеженим оператором, сформульовані в термінах теорії півгруп операторів. К. Іосіда, В. Феллер пов'язали ці дослідження півгруп з багатьма задачами для рівняння дифузії. Паралельно з цим Е. Хіллі та Р. Філіцс починають будувати теорію абстрактної задачі Коші в банаховому просторі. На початку п'ятдесятих років П. Лакс, А. Мільграм, В. Е. Лянце застосовують півгрупові методи до дослідження різних класів параболічних рівнянь. Суттєвий крок вперед в загальній теорії був зроблений в роботах Т. Като, присвячених вивченню питань існування розв'язків задачі Коші із змінним необмеженим оператором. В подальшому різні аспекти теорії лінійних диференціальних рівнянь в банахових та гільбертових просторах досліджувались М. І. Вішиком, О. О. Ладиженською, М. З. Солоньяком, С. Я. Якубовим, О. І. Прозоровською, М. О. Красносельським, П. Е. Соболевським, С. Г. Крейном, Ю. Л. Далецьким, В. І. Горбачук, М. Л. Горбачуком, В. В. Городецьким та іншими.

Мета роботи. Використовуючи ідею методу узагальненого відокремлення змінних, отримати умови коректної розв'язності нелокальної граничної задачі з двома обмеженими операторами в граничних умовах, коефіцієнти диференціального рівняння якої залежать від абстрактного необмеженого оператора з кратним спектром в системі кореневих векторів якого міститься зліченна множина приєднаних для випадку, коли кратності власних значень не є рівномірно обмеженими.

Дослідити також питання, пов'язані з розв'язністю в гільбертовому просторі задачі Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння першого порядку з даним абстрактним необмеженим оператором як для випадку обмежених так і необмежених кратностей спектра. Виявити вплив нескінченних кратностей на характер результатів досліджуваних задач.

Наукова новизна роботи. Встановлено достатні умови коректної розв'язності нелокальної граничної задачі для диференціально-операторного рівняння парного порядку з коефіцієнтами, залежними від абстрактного необмеженого несамоспряженого оператора, граничні умови якої містять два оператори.

Особливістю такої задачі є те, що у відповідній спектральній задачі:

а) граничні умови по виділеній часовій змінній є регулярними, але не посилено регулярними;

б) система кореневих векторів містить зліченну множину приєднаних, які можуть бути побудовані на основі узагальненого методу розділення змінних;

в) довжини ланцюжків з власного та приєднаних векторів не є рівномірно обмеженими.

Отримано достатні умови рівномірної коректності задачі Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння першого порядку з необмеженим несамоспряженим постійним оператором. Встановлено формули, за якими можна визначити тип задачі, виходячи із її спектральних даних.

Вказано клас початкових даних, для яких можна будувати класичні розв'язки задачі Коші за допомогою оберненого перетворення Лапласа для випадку, коли спектральні властивості абстрактного оператора не гарантують її коректної постановки.

Виділено клас початкових значень (слідів) і відповідно клас коректності для узагальнених розв'язків задачі Коші, що являє собою певний простір Соболева, побудований за абстрактним оператором рівняння.

Методи досліджень. В дисертаційній роботі використовуються методи загальної теорії диференціальних рівнянь, теорії функцій комплексної змінної, функціонального аналізу.

Достовірність основних наукових положень і отриманих результатів забезпечується строгістю постановки задачі математичним обґрунтуванням результатів.

Наукова та практична цінність роботи. **АН України** має теоретичний характер і її результати сформульовані у вигляді

постановки задачі
ЛНБ ім. В. Стефанива

України

теорем. Отримані результати можуть знайти застосування в питаннях визначення розв'язності кола конкретних задач з початковими даними, мішаних задач математичної фізики, охопюваного рамками класу абстрактних задач, досліджених в дисертації.

Отримані в роботі формули для визначення типу задачі Коші мають як теоретичне так і практичне значення. З теоретичної точки зору вони дають можливість кількісно оцінити якісні зміни в поведінці розв'язків задачі Коші при переході від скінченних кратностей спектра до нескінченних. З практичного боку за цими формулами можна обчислювати типи конкретних задач і тим самим досліджувати поведінку розв'язків на нескінченності, а також їх гладкість відносно просторових змінних.

На основі результатів другого параграфу другого розділу можна будувати класичні розв'язки задачі Коші для початкових даних певної гладкості навіть якщо ця задача не є коректно поставленою, але задовольняє умови відповідної теореми.

Апробація роботи. Основні результати дисертації доповідалися і обговорювалися на: III Всесоюзній конференції "Новые подходы к решению дифференциальных уравнений" (1991 р., м. Дрогобич); Всеукраїнській науковій конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (1994 р., м. Дрогобич); школі-семінарі "Нелінійні граничні задачі математичної фізики та їх застосування" (1994 р., м. Тернопіль); Міжнародній математичній конференції, присвяченій пам'яті Ганса Гана (1994 р., м. Чернівці); Міжнародній математичній конференції "Нелінійні диференціальні рівняння" (1995 р., м. Київ); щорічних конференціях професорсько-викладацького складу Львівської політехніки (1992 - 1996 рр.); науковому семінарі відділу диференціальних рівнянь ІППММ НАН України (1993 р., м. Львів); науковому семінарі кафедри обчислювальної математики та програмування Львівської політехніки (1993 р., 1996 р.); Львівському міському науковому семінарі з диференціальних рівнянь (1996 р.).

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано 10 робіт, перелік яких наведено в кінці автореферату.

Особистий внесок дисертанта. Основні результати дисертації отримані автором самостійно, результати роботи [10] належать авторам в однаковій мірі.

Основні положення дисертації, що виносяться на захист:

- Отримання умов коректної розв'язності нелокальної граничної задачі для диференціально-операторного рівняння

вищого порядку з абстрактним необмеженим оператором, що має необмежені кратності спектра.

- Доведення теорем про існування та єдиність класичних та узагальнених розв'язків абстрактної задачі Коші при наявності необмежених кратностей спектра.

- Встановлення властивостей абстрактного оператора з кратним спектром, що можуть бути використані в теорії диференціально-операторних рівнянь.

Структура та об'єм дисертації. Дисертація складається з вступу, двох розділів і списку цитованої літератури. Робота викладена на 120 сторінках і включає список літератури, що містить 82 джерела.

Короткий зміст роботи.

В роботі прийняті наступні позначення і означення :

1. N, R, C - множини всіх натуральних, дійсних, комплексних чисел.
2. $[X, Y]$ - множина лінійних обмежених операторів, що діють з простору X в Y ; $[X] = [X, X]$.
3. H - комплексний сепарабельний гільбертів простір; $\| \bullet \|$ - норма в H .
4. $\sigma(A), \rho(A), R_\lambda(A)$ - спектр, резольвентна множина, резольвента лінійного оператора $A: H \rightarrow H$.
5. $L^2((0,1), H)$ - гільбертів простір вектор-функцій із $(0,1)$ в H з нормою $\|u(t)\|_2 = \| \|u(t)\| \|_{L^2(0,1)}$.
6. D_t^j - сильна похідна j -го порядку в просторі $L^2((0,1), H)$.
7. Оператор $A(A: H \rightarrow H)$ - позитивний, якщо A - замкнений, $\overline{D(A)} = H$, піввісь $(-\infty, 0] \subset \rho(A)$ і на ній виконується оцінка $\|R_\lambda(A)\|_{[H]} \leq C(A) (1 + |\lambda|)^{-1}$, $C(A) > 0$.
8. $H_{0,\beta}(A) = \{h \in D(A^\beta), \|h\|_{0,\beta}^2 = \|h\|^2 + \|A^\beta h\|^2\} (\beta \in R)$ для позитивного оператора A .
9. $W_n((0,1), A) = \{u(t) \in L^2((0,1)H_{0,n}(A)) : D_t^{2n}u(t) \in L^2((0,1), H)\}$, $\|u(t)\|_{W_n((0,1), A)}^2 = \|u(t)\|_2^2 + \|A^n u(t)\|_2^2 + \|D_t^{2n}u(t)\|_2^2$.
10. $C([\alpha, \beta], X)$ - простір неперервних за нормою простору X на проміжку $[\alpha, \beta] \subset R$ вектор-функцій.

$$11. C^m([\alpha, \beta], H, A) = \left\{ \begin{array}{l} u(t) \in C([\alpha, \beta], H) : A^{\frac{1}{2}} D_t^{m-s} u(t) \in \\ \in C([\alpha, \beta], H), s = \overline{0, m} \end{array} \right\}$$

$$\|u(t)\|_{C^m([\alpha, \beta], H, A)} = \max_x \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|A^{\frac{1}{2}} D_t^{m-s} u(t)\|.$$

$$12. C^m((0,1), H, A) = \{u(t) \in C^m([\alpha, \beta], H, A), [\alpha, \beta] \subset (0,1)\}, m \in N$$

13. $K(H, \sigma, v, V, M_0)$ - множина лінійних, замкнених, щільно визначених операторів $A: H \rightarrow H$, що задовольняють умови

$$а) \sigma = \sigma(A) = \{z_k \in C : |z_k| \leq |z_{k+1}|, k \in N\} - \text{чисто точковий};$$

б) $V = \{v_k^j \in H : k \in N, j = \overline{0, v_k}, v_k < \infty\}$ - система власних та приєднаних векторів оператора A , яка утворює базу Рісса в H :

$$Av_k^0 = z_k v_k^0, Av_k^j = z_k v_k^j + \xi_k^j v_k^{j-1}, \xi_k^j \in C, k \in N, j = \overline{1, v_k};$$

$$v = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k;$$

$$в) |\xi_k^j| \leq M_0 |\operatorname{Re} z_k|, M_0 > 0, k \in N, j = \overline{1, v_k}; M_0^* \equiv \inf\{M_0\}.$$

14. $\bar{K}(H, \sigma, v, V, M_0)$ - розширення класу $K(H, \sigma, v, V, M_0)$ в результаті заміни умови $v_k < \infty$ на $v_k \leq \infty$.

$$15. \sum_{+,1} = \{\{z_k\}_1^\infty \subset C : \operatorname{Re} z_k \geq 1, k \in N\}.$$

$$16. \sum_{\pm, \frac{\pi}{2}} = \{\{z_k\}_1^\infty \subset C : \exists \delta > 0 |\arg z_k| \leq \frac{\pi}{2} - \delta, k \in N\}.$$

У вступі подається короткий огляд праць по темі дисертації, обґрунтовується актуальність теми дослідження, визначається мета роботи, описується зміст дисертації, основні результати та їх наукова новизна.

Перший розділ. Дослідження нелокальної граничної задачі для диференціально-операторного рівняння.

Даний розділ присвячений дослідженню нелокальної граничної задачі з двома обмеженими операторами в граничних умовах для диференціально-операторного рівняння парного порядку з коефіцієнтами, що поліноміально залежать від необмеженого абстрактного оператора $A \in K(H, \sigma, v, V, M_0)$ для $v = \infty$.

Власні вектори цієї задачі не утворюють бази в розглядуваному просторі $L^2((0,1), H)$. Систему власних векторів можна доповнити до бази приєднаними векторами, яких виявляється нескінченно багато, причому вони можуть бути побудовані в узагальнено відокремленому вигляді. Другою особливістю задачі є те, що

довжини ланцюжків з власних та приєднаних векторів не є рівномірно обмеженими, що суттєво ускладнює дослідження задачі. Маючи базу з власних та приєднаних векторів, яка є базою Рісса, будемо розв'язок у вигляді біортогонального ряду.

В § 1.1 розглянуто деякі властивості абстрактного оператора з кратним спектром, власні вектори якого мають нескінченний дефект в системі кореневих векторів, а кратності v_k не є рівномірно обмеженими ($v \neq \infty$). Лема, що формулюється нижче, дозволяє будувати операційне числення для розглядуваного класу необмежених операторів.

Лема 1.1.1. Нехай оператор $A \in K(H, \sigma, v, V, M_0)$, $\sigma = \sigma(A) \in \sum_{+,1}$, $v = \infty$, $M_0 \in (0,1)$, тоді A є позитивним оператором. Для позитивного оператора A визначена деяка максимальна алгебра $U_{\max}(A)$ функцій від A , причому для довільної оператор-функції $\varphi(A) \in U_{\max}(A)$ має місце зображення

$$\varphi(A)v_k^j = \sum_{r=0}^j \frac{1}{r!} D_{z_k}^r \varphi(z_k) \eta_k^{j,r} v_k^{j-r},$$

де

$$\eta_k^{j,r} = \begin{cases} 1, & r = 0 \\ \xi_k^j \xi_k^{j-1} \dots \xi_k^{j-r+1}, & r = \overline{1, j}; j = \overline{0, v_k}, k \in N. \end{cases}$$

Оскільки алгебра $U_{\max}(A)$ містить степені A^β для довільних $\beta \in R$, то для досліджуваного оператора визначеними є простори $H_{0,\beta}(A)$, $L^2((0,1), H_{0,\beta}(A))$, $C^m((0,1), H, A)$ ($\beta \in R$, $m \in N$).

Доведена теорема, яка є аналогом теореми Ж.-Л. Ліонса про проміжкові похідні та сліди.

Теорема 1.1.2. Нехай виконуються всі умови леми 1.1.1, тоді мають місце наступні два включення:

- $D_t^j \in \left[W_n((0,1), A), L^2((0,1), H_{0, n-\frac{1}{2}}(A)) \right]$;
- $D_t^j \in \left[W_n((0,1), A), C([0,1], H_{0, n-\frac{1}{2}-\frac{1}{2j}}(A)) \right]$, $j = \overline{0, 2n-1}$.

Зауваження 1.1.2. З теореми про проміжкові похідні (пункт 1 теореми 1.1.2) випливає, що, якщо $u(t) \in W_n((0,1), A)$, то для довільних $\alpha_j \in C(j = \overline{0, 2n})$ векторнозначна функція

$$\varphi(t) = \sum_{j=0}^{2n} \alpha_j A^{n-\frac{1}{2}} D_t^j u(t)$$

є елементом гільбертового простору $L^2((0,1), H)$. Тому для $u(t) \in W_n((0,1), A)$ має сенс диференціально-операторне рівняння вигляду

$$P(D_t, A)u(t) = \sum_{j=0}^{2n} \alpha_j A^{n-\frac{j}{2}} D_t^j u(t) = f(t), f(t) \in L^2((0,1), H).$$

Зауваження 1.1.3. З теореми про сліди (пункт 2 теорем 1.1.2), випливає, що для $u(t) \in W_n((0,1), A)$ має зміст $(D_t^j u)(t_0)$ для довільного значення $t_0 \in [0,1]$, $j = \overline{0, 2n-1}$, а саме :

$$(D_t^j u)(t_0) = h_{0,j} \in H_{0,n-\frac{j}{2}-\frac{1}{4}}(A).$$

Таким чином для вектор-функцій $u(t) \in W_n((0,1), A)$ можна ставити граничні умови, в яких значення цих функцій та їх похідних потрібно вибирати із просторів слідів $H_{0,n-\frac{j}{2}-\frac{1}{4}}(A)$.

При дослідженні граничної задачі для однорідного диференціально-операторного рівняння з неоднорідними граничними умовами суттєвими є властивості, що доводяться в наступній лемі.

Лема 1.1.3. Нехай оператор $A \in K(H, \sigma, \nu, V, M_0)$, $\sigma = \sigma(A) \in \sum_{+,1} \cap \sum_{+, \frac{1}{2}}$, $\nu = \infty$, $M_0 \in (0,1)$, $\omega < 0$, $t_0 \in [0,1]$, $f \in H$, тоді

1. $A^{\frac{1}{2}} e^{i\omega t^{\frac{1}{2}}} \in [H, L^2((0,1), H)]$;
2. $A^{\frac{1}{2}} e^{i\omega t^{\frac{1}{2}}} f \in C^n((0,1), H, A)$, $\forall m \in N$.

В § 1.2 досліджується нелокальна гранична задача з умовами, що містять два оператори.

$$P(-D_t^2, A)u(t) = \sum_{j=0}^n \alpha_j A^{n-j} D_t^{2j} u(t) = f(t), t \in (0,1); \quad (1)$$

$$l_{2i+1+i} u(t) = B_0^{1-i} D_t^{2i+1} u(0) - (-B_1)^{1-i} D_t^{2i+1} u(1) = \varphi_{2i+1+i}; \quad (2)$$

$$s = \overline{0, n-1}, i = \overline{0, 1}, \alpha_j \in C(j = \overline{0, n}), a_n = 1,$$

$$B_\alpha = b_\alpha(A) \in U_{\max}(A) (\alpha = 0,1).$$

Означення 1.2.1. В припущенні, що $A \in K(H, \sigma, \nu, V, M_0)$, $\sigma = \sigma(A) \in \sum_{+,1}$, $\nu = +\infty$, $M_0 \in (0,1)$, $B_0, B_1, B = (B_0 - B_1)^{-1} \times \times (B_0 + B_1) \in U_{\max}(A) \cap [H]$, $f(t) \in L^2((0,1), H)$, $\varphi_j \in H_{0,n-\frac{j}{2}-\frac{1}{4}}(A)$,

розв'язком задачі (1), (2) будемо називати вектор-функцію $u(t) \in W_n((0,1), A)$, яка задовольняє рівності

$$\|P(-D_t^2, A)u(t) - f(t)\|_2 = 0, \quad \|l_j u(t) - \varphi_j\|_{0, m_j} = 0,$$

$$m_j = n - \frac{j-1}{2} - \frac{1}{4}, \quad j = \overline{1, 2n}.$$

Задача (1), (2) має такі особливості: 1) граничні умови по виділеній змінній t є регулярними, але не посилено регулярними за Бірнгофом; 2) оператор A породжує в системі кореневих векторів а) нескінченну кількість приєднаних, б) як завгодно великі за довжиною ланцюжки із власного та приєднаних векторів.

Нелокальна гранична задача (1), (2) розбивається на дві задачі:

$$P(-D_t^2, A)u(t) = f(t), \quad l_j u(t) = 0, \quad (3)$$

$$P(-D_t^2, A)u(t) = 0, \quad l_j u(t) = \varphi_j \quad (j = \overline{1, 2n}). \quad (4)$$

Доводиться теорема 1.2.1 про коректну розв'язність задачі (3). Загальний вигляд розв'язку однорідного рівняння встановлюється в теоремі 1.2.2, з якої зокрема випливає однозначна розв'язність задачі (4) для довільних векторів $\varphi_j \in H_{0, m_j}(A)$ ($j = \overline{1, 2n}$). На основі цієї ж теореми 1.2.2 та леми 1.1.3 описується гладкість розв'язку однорідного рівняння всередині інтервалу $(0,1)$ в термінах просторів $C^m((0,1), H, A)$, $m \in N$ (теорема 1.2.3), а також доводиться неперервна залежність розв'язку задачі (4) від граничних значень $\varphi_j \in H_{0, m_j}(A)$, $j = \overline{1, 2n}$ (теорема 1.2.4).

Наступна теорема підсумовує ці результати і є головною в § 1.2.

Теорема 1.2.5. Нехай $A \in K(H, \sigma, \nu, V, M_0)$,

$\sigma = \sigma(A) \in \sum_{+1} \cap \sum_{\pm \frac{\pi}{2}}$, $\nu = \infty$, $M_0 \in (0,1)$. Поліном $P(y, z)$

задовольняє нерівність $|P(y, z)| \geq C(P)(y^n + |z|^n)$ для $y > 0$,

$\operatorname{Re} z \geq 1$, $C(P) > 0$, рівняння $P(-\omega^2, 1) = 0$ має прості дійсні корені.

Оператори $B_0, B_1, B \in U_{\max}(A) \cap [H]$. Тоді для довільних $f(t) \in L^2((0,1), H)$, $\varphi_j \in H_{0, m_j}(A)$ ($j = \overline{1, 2n}$) існує єдиний розв'язок $u(t)$ задачі (1), (2) і виконується оцінка

$$\|u(t)\|_{W_n((0,1), A)}^2 \leq \tilde{C}(P) \left(\|f(t)\|_2^2 + \sum_{j=1}^{2n} \|\varphi_j\|_{0, m_j}^2 \right), \quad \tilde{C}(P) > 0.$$

Другий розділ. Дослідження задачі Коші з постійним необмеженим оператором.

В даному розділі вивчається абстрактна задача Коші

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) \quad (5)$$

$$u(0) = u_0, \quad t \geq 0 \quad (6)$$

в гільбертовому просторі H із сталим необмеженим оператором A , що належить до класу $K(H, \sigma, v, V, M_0)$, або $\tilde{K}(H, \sigma, v, V, M_0)$.

Класичний розв'язок рівняння (5) визначається як така вектор-функція $u(t)$ ($u(t) \in H$ для всіх $t \geq 0$), що

$$u(t) \in D(A), \quad t \geq 0; \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} - Au(t) \right\| = 0, \quad t \geq 0.$$

Задача Коші (5), (6) вважається поставленою коректно (рівномірно коректно), якщо:

- 1) для довільних $u_0 \in D(A)$ існує її єдиний класичний розв'язок;
- 2) цей розв'язок неперервно залежить від початкових даних в тому сенсі, що із $u_{0,n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty, u_{0,n} \in D(A)$) для відповідних класичних розв'язків $u_n(t)$ випливає $u_n(t) \rightarrow 0$ для кожного $t \geq 0$ ($u_n(t) \rightarrow 0$ рівномірно по t на кожному скінченному проміжку $[0, T]$).

Нехай $U_0(t)$ - оператор, який ставить у відповідність кожному елементу $u_0 \in D(A)$ значення розв'язку $u(t)$ задачі Коші (5), (6) в момент часу t .

Якщо задача Коші коректно поставлена, то оператор $U_0(t)$ визначений на $D(A)$, лінійний та обмежений. Оскільки $\overline{D(A)} = H$, то $U_0(t)$ продовжується за неперервністю до лінійного обмеженого оператора $U(t)$, визначеного на всьому просторі H . Сім'я операторів $U(t)$ ($t \geq 0$) утворює сильно неперервну при $t > 0$ півгрупу. Таким чином, класичний розв'язок коректно поставленої задачі Коші можна записати у вигляді $u(t) = U(t)u_0$ ($u_0 \in D(A)$), де $U(t)$ сильнонеперервна півгрупа обмежених операторів. Якщо u_0 не належить $D(A)$, то функція $U(t)u_0$ може бути недиференційовною і її значення можуть не належати $D(A)$. Функцію $U(t)u_0$ для $u_0 \in H$ будемо називати узагальненим розв'язком рівняння (5).

Півгрупа $U(t)$, що відповідає рівномірно коректній задачі Коші, володіє властивістю $U(t)u_0 \rightarrow u_0$ при $t \rightarrow +0$ для довільного $u_0 \in H$, тобто задовольняє C_0 -умову. Для неї виконується оцінка

$$\|U(t)\|_{|||} \leq M e^{\omega t} \quad (t \geq 0),$$

для якої точна нижня межа ω_0 чисел ω називається типом півгрупи, або типом задачі Коші.

В § 2.1 доводяться теореми про достатні умови рівномірної коректності задачі Коші (5), (6) для оператора $A \in \tilde{K}(H, \sigma, v, V, M_0)$. При цьому використовується теорема Хілле-Філіпса-Міадери, яка стверджує, що необхідною і достатньою умовою рівномірної коректності задачі Коші для рівняння (5) із замкненим оператором A є виконання нерівностей

$$\|R_\lambda^n(A)\|_{|||} \leq \frac{C(\beta, A)}{(\operatorname{Re} \lambda - \beta)^n}, \quad \operatorname{Re} \lambda > \beta, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

Точна нижня межа чисел β в оцінках (7) визначає тип ω_0 задачі Коші.

Теорема 2.1.1. Нехай $A \in \tilde{K}(H, \sigma, v, V, M_0)$, спектр $\sigma = \sigma(A)$ задовольняє умови $\operatorname{Re} z_1 < 0$, $\operatorname{Re} z_{k+1} < \operatorname{Re} z_k$ ($k \in \mathbb{N}$), $\operatorname{Re} z_k \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow \infty$, $M_0 \in (0, 1)$. Припустимо, що в проміжок $(\operatorname{Re} z_1 / (1 - M_0^*), \operatorname{Re} z_1]$ попадають l значень $\operatorname{Re} z_k$ ($k = \overline{1, l}$), тоді

- 1) задача Коші (5), (6) є рівномірно коректною;
- 2) тип ω_0 задачі визначається формулою

$$\omega_0 = \begin{cases} \operatorname{Re} z_1, & \text{якщо } v_k < \infty \quad (k = \overline{1, l}); \\ (1 - M_0^*) \operatorname{Re} z_k, & \text{якщо } \exists v_k = \infty \quad (k = \overline{1, l}), \end{cases}$$

$$\text{де } \operatorname{Re} z_{k_i} = \max_{k=1, l} \{\operatorname{Re} z_k : v_k = \infty\}.$$

В наступній теоремі розглядається випадок, коли $\operatorname{Re} z_1 > 0$.

Теорема 2.1.2. Нехай $A \in \tilde{K}(H, \sigma, v, V, M_0)$, спектр $\sigma = \sigma(A)$ задовольняє умови $\operatorname{Re} z_1 > 0$, $\operatorname{Re} z_{k+1} < \operatorname{Re} z_k$ ($k \in \mathbb{N}$), $\operatorname{Re} z_k \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow \infty$, $M_0 \in (0, 1)$. Припустимо, що в проміжок $(\operatorname{Re} z_1 / (1 + M_0^*), \operatorname{Re} z_1]$ попадають l значень $\operatorname{Re} z_k$ ($k = \overline{1, l}$); тоді

- 1) задача Коші (5), (6) є рівномірно коректною;
- 2) тип ω_0 задачі визначається формулою

$$\omega_0 = \begin{cases} \operatorname{Re} z_1, & \text{якщо } v_k < \infty \ (k = \overline{1, l}); \\ (1 + M_0^*) \operatorname{Re} z_k, & \text{якщо } \exists v_k = \infty \ (k = \overline{1, l}), \end{cases}$$

$$\text{де } \operatorname{Re} z_{k_1} = \max_{k=1, l} \{ \operatorname{Re} z_k : v_k = \infty \}.$$

У випадку $\operatorname{Re} z_1 = 0$ тип задачі Коші не залежить від величин кратностей v_k власних значень z_k оператора A .

Теорема 2.1.3. Нехай $A \in \tilde{K}(H, \sigma, v, V, M_0)$, спектр $\sigma = \sigma(A)$ задовольняє умови $\operatorname{Re} z_1 = 0$, $\operatorname{Re} z_{k+1} < \operatorname{Re} z_k$ ($k \in N$), $\operatorname{Re} z_k \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow \infty$, $M_0 \in (0, 1)$. Тоді задача Коші (5), (6) є рівномірно коректною і її тип $\omega_0 = 0$.

Якщо кратності v_k оператора є обмеженими в сукупності: $v_k \leq v < \infty$ ($k \in N$), тобто $A \in K(H, \sigma, v, V, M_0)$, то величина сталої M_0 не впливає на рівномірну коректність задачі.

Теорема 2.1.4. Нехай $A \in K(H, \sigma, v, V, M_0)$, спектр $\sigma = \sigma(A)$ задовольняє умови $\operatorname{Re} z_{k+1} < \operatorname{Re} z_k$ ($k \in N$), $\operatorname{Re} z_k \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow \infty$, $v < \infty$, $M_0 \in (0, \infty)$. Тоді задача Коші (5), (6) є рівномірно коректною і її тип $\omega_0 = \operatorname{Re} z_1$.

Зауваження 2.1.2. Теорема 2.1.1 та 2.1.2 відбивають наступний факт: перехід від скінченних кратностей v_k до нескінченних у випадку $\operatorname{Re} z_1 \neq 0$ може суттєво вплинути на якісну поведінку розв'язків задачі Коші. Припустимо, що параметри деякої задачі Коші знаходяться в рамках умов, наприклад, теореми 2.1.1 з $\operatorname{Re} z_1 = -100$ і $M_0^* = 0,95$.

а) Нехай заради простоти $v_k < \infty$ для всіх $k \in N$, тоді тип $\omega_0 = \operatorname{Re} z_1 = -100$ і для розв'язків задачі справджується оцінка

$$\|u(t)\| \leq M_1 e^{-100t} \|u_0\|, \quad t \in [0, \infty);$$

б) Тепер припустимо, що, наприклад, $v_1 = \infty$, в цьому випадку тип $\omega_0 = (1 - M_0^*) \operatorname{Re} z_1 = 0,05 \cdot (-100) = -5$, а отже, матимемо вже таку оцінку:

$$\|u(t)\| \leq M_2 e^{-5t} \|u_0\|, \quad t \in [0, \infty).$$

Таким чином, у випадку б) розв'язок прямує до нуля на нескінченності значно повільніше. Останнє впливає на гладкість розв'язку відносно оператора A : при кожному $t > 0$ вона буде меншою в порівнянні з випадком а).

В § 2.2 розглядається задача Коші за умови відсутності інформації про коректність її постановки і здійснюється побудова розв'язків на основі оберненого перетворення Лапласа.

Якщо задача Коші (5), (6) є коректною і оператор A має резольвенту $R_\lambda(A)$ при $\operatorname{Re} \lambda > \omega$, то її класичний розв'язок $u(t)$ може бути знайдений за допомогою перетворення Лапласа і матиме зображення

$$u(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{\lambda t} R_\lambda(A) u_0 d\lambda \quad (8)$$

для довільних $\alpha > \omega$, $t > 0$.

Якщо наперед невідомо, що задача Коші коректна, то можна пробувати будувати її класичні розв'язки за формулою (8). Ускладненням на цьому шляху є те, що інтеграл в правій частині формули (8) не буде, як правило, абсолютно збіжним, оскільки резольвента не може спадати швидше ніж $\frac{1}{|\lambda|}$. Знаючи однак поведінку на нескінченності норми резольвенти для даного оператора A , в багатьох випадках можна знаходити такі початкові елементи $u_0 \in D(A)$, для яких інтеграл в формулі (8) та його похідна по t існуватимуть в сенсі головного значення при всіх $t \geq 0$.

Наприклад (результат Ю. І. Любича), якщо резольвента оператора A існує при $\operatorname{Re} \lambda \geq \alpha$ і її норма задовольняє нерівність

$$\|R_\lambda(A)\|_{[M]} \leq M(1 + |\lambda|)^k \quad (9)$$

при деякому $k \geq -1$, то формула (8) визначає класичний розв'язок задачі Коші (5), (6) для довільних $u_0 \in D(A^{[k+1]})$ ($[k]$ - ціла частина числа k).

В даному параграфі припускається, що спектр $\sigma(A)$ належить до множини

$$\sum_\beta = \left\{ \{z_k\}_1^\infty : \sup \operatorname{Re} z_k = \beta, 0 \neq \beta < \infty; \exists \varepsilon_\beta |\operatorname{Re} z_k| \geq \varepsilon_\beta, k \in N \right\}.$$

З множиною \sum_β пов'язується довільне дійсне число α_β , утворене за наступним правилом:

$$\begin{cases} \alpha_\beta > 0, & \text{якщо } \beta < 0; \\ \alpha_\beta > 2\beta, & \text{якщо } \beta > 0. \end{cases} \quad (10)$$

На основі оцінки (9), яку вдасться довести для $k = 0$, встановлюються достатні умови існування класичних розв'язків задачі (5), (6).

Теорема 2.2. Нехай $A \in \tilde{K}(H, \sigma, \nu, V, M_0)$, $\sigma = \sigma(A) \in \Sigma_\beta$, число α_β вибране за правилом (10) і має місце один із наступних випадків:

- 1) $\nu_k \leq \nu < \infty$ для всіх $k \in N$, $M_0 \in (0, \infty)$.
- 2) $\nu = \infty$, в цьому випадку накладаються обмеження на характер росту кратностей ν_k в залежності від величини сталої M_0 , а саме:
 - а) $M_0 \in (0, 1)$, тоді $\nu_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$ без обмеження на швидкість росту, більш того, допускаються рівності $\nu_k = +\infty$ для окремих або всіх $k \in N$;
 - б) $M_0 = 1$, тоді $\nu_k \leq C_{2\sigma} \cdot |\operatorname{Re} z_k|$, $k \in N$;
 - в) $M_0 \in (1, \infty)$, тоді $\nu_k \leq \log_{M_0}(C_{2\sigma} |\operatorname{Re} z_k|)$, $k \in N$.

Тоді задача Коші (5), (6) має класичний розв'язок $u(t)$ для довільного початкового значення $u_0 \in D(A^3)$, який має зображення (8) з $\alpha = \alpha_\beta$.

§ 2.3 присвячений дослідженню коректної розв'язності в рамках узагальнених розв'язків задачі Коші

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= Au(t) \\ u(0) &= u_0 \in H_{0, \frac{1}{2}}(A) \end{aligned} \quad (11)$$

в гільбертовому просторі $L^2((0, T), H)$ ($0 < T < \infty$) для оператора $A \in K(H, \sigma, \nu, V, M_0)$ із спектром $\sigma(A) \in \Sigma_{\beta, 1}$

Узагальнені розв'язки задачі (11), (12) шукаються в просторі Соболева

$$W_1((0, T), A) = \{u(t) \in L^2((0, T), H_{0, \frac{1}{2}}(A)) : D_t u(t) \in L^2((0, T), H)\}$$

з нормою $\|u(t)\|_{W_1((0, T), A)}^2 = \|u(t)\|_2^2 + \|Au(t)\|_2^2 + \|D_t u(t)\|_2^2$ ($0 < T < \infty$).

Розглядуваний тут клас операторів A забезпечує для вказаного простору Соболева виконання теореми про сліди, аналогічній теоремі 1.1.2 (пункт 2), а саме якщо $u(t) \in W_1((0, T), A)$, то $u(t) \in C([0, T], H_{0, \frac{1}{2}}(A))$, так що початкова умова (12) є коректною.

Під розв'язком задачі (11), (12) розуміємо вектор-функцію $u(t) \in W_1((0, T), A)$, яка задовольняє рівності

$$\left\| \frac{du}{dt} + Au \right\|_2 = 0, \quad \|u(0) - u_0\|_{0, \frac{1}{2}} = 0.$$

Теорема 2.3.1. Нехай виконуються наступні умови:
 $A \in K(H, \sigma, \nu, V, M_0)$, $\sigma = \sigma(A) \in \sum_{+1} \cap \sum_{\pm \frac{1}{2}}$,

$$M_0 \in \begin{cases} (0, \infty), & \text{якщо } \nu < \infty; \\ (0, 1), & \text{якщо } \nu = \infty. \end{cases} \quad \text{Тоді для довільного } u_0 \in H_{0, \frac{1}{2}}(A)$$

існує єдиний розв'язок задачі Коші (11), (12) $u(t) = e^{-At} u_0 \in W_1((0, T), A)$ і має місце оцінка

$$\|u(t)\|_{W_1((0, T), A)}^2 \leq C(A) \|u_0\|_{0, \frac{1}{2}}^2, \quad C(A) > 0.$$

Наступна теорема описує гладкість розв'язку задачі Коші (11), (12) всередині проміжку $(0, T)$.

Теорема 2.3.2. Нехай виконуються умови теореми 2.3.1 і $u(t)$ - розв'язок задачі Коші (11), (12), тоді

1. $u(t) \in C^m((0, T), H, A)$ для довільного $m \in \mathbb{N}$;

2. $\sum_{r=0}^m \|A^r D_t^{m-r} u(t)\|_{C([\alpha, \beta], H)}^2 \leq C(\alpha, \beta, m, A) \|u_0\|^2,$

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall [\alpha, \beta] \subset (0, T).$$

Зауваження 2.3. Результати даного параграфа з певними обмеженнями узагальнені автором на випадок задачі Коші для диференціально-операторного рівняння n -го порядку

$$P(D_t, A)u(t) = \sum_{j=0}^n \alpha_j A^{n-j} D_t^j u(t) = 0,$$

$$u^{(j)}(0) = \varphi_j \in H_{0, n-j-\frac{1}{2}}(A), \quad \alpha_j \in C, \quad j = \overline{0, n}, \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Задача коректно розв'язана в просторі $L^2((0, T), H)$, класом коректності є підпростір

$$W_n((0, T), A) = \{u(t) \in L^2((0, T), H_{0, n}(A)) : D_t^n u(t) \in L^2((0, T), H)\}.$$

Висновки

1. На основі узагальненого методу відокремлення змінних отримано достатні умови коректної розв'язності нелокальної граничної задачі для диференціально-операторного рівняння парного порядку, коефіцієнти якого є степенями абстрактного необмеженого оператора з кратним спектром і необмеженими в сукупності кратностями спектра, а граничні умови містять два оператори, що є функціями від першого.
2. Встановлені достатні умови рівномірної коректності задачі Коші для однорідного диференціального рівняння першого порядку з абстрактним необмеженим оператором, що має кратний спектр. Розглянуті випадки рівномірної обмеженості та необмеженості кратностей спектра. Вказано формули для визначення типу задачі Коші, на основі яких зокрема проаналізовано вплив нескінченних кратностей на властивості отримуваних розв'язків.
3. Вищевказана задача Коші розглянута в ситуації, коли її спектральні параметри не гарантують коректну розв'язність. За умов певних обмежень на швидкість росту кратностей власних значень абстрактного оператора виділено клас початкових векторів, для яких існують класичні розв'язки задачі Коші. Останні будуються за допомогою формули оберненого перетворення Лапласа.
4. Отримано достатні умови коректної розв'язності абстрактної задачі Коші в просторах Соболева.
5. Доведено теореми про властивості оператора з кратним спектром при наявності необмежених кратностей, зокрема теорема про проміжкові похідні та сліди.

Основні результати дисертації опубліковані в роботах :

1. Бушмакин В. Н. Некоторые дифференциально-операторные уравнения с возрастанием кратности спектра // Мат. методы и физ.-мех. поля. - 1994. - Вып. 37. - с. 12 - 16.
2. Бушмакин В. М. Достатня умова розв'язності абстрактної задачі Коші // Вісн. Львів. політех. ін-ту. - 1993. - № 269. - с. 20 - 23.
3. Бушмакин В. М. Про розв'язність абстрактної задачі Коші з наростаючою кратністю спектра // Вісн. держ. ун-ту "Львівська політехніка". - 1995. - № 286. - с. 19 - 23.
4. Бушмакин В. М. Деякі дифференціально-операторні рівняння з наявністю необмеженості числа приєднаних векторів // Сборник научных трудов "Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения". - К.: Ин-т математики НАН Украины, 1994. - с. 41.
5. Бушмакин В. Н. О гладкости производных решений некоторых дифференциально-операторных уравнений с нарастающей кратностью спектра. Львов, 1993. - 9 с. - Укр. - Деп. в ГНТБ Украины 07.06.93, № 1117 - Ук 93.
6. Бушмакин В.Н. О разрешимости задачи Коши в гильбертовом пространстве с несамосопряжённым оператором при ограниченности кратности спектра. Львов, 1993. - 4с. - Укр. - Деп. в ГНТБ Украины 07.06.93, № 1119 - Ук 93.
7. Бушмакин В. Н. Достаточное условие разрешимости задачи Коши в гильбертовом пространстве с несамосопряжённым оператором при нарастании числа присоединённых векторов. Львов, 1993. - 6 с. - Укр. - Деп. в ГНТБ Украины 07.06.93, № 1118 - Ук 93.
8. Бушмакин В. Н. Некоторые дифференциально-операторные уравнения с возрастанием кратности спектра // Новые подходы к решению дифференциальных уравнений : Тез. докл. III Всесоюз. конф. - Дрогобыч, 1991. - с. 20.
9. Бушмакин Віктор. Про розв'язність абстрактної задачі Коші для одного класу несамоспрямлених операторів в гільбертовому просторі // Матеріали міжнародної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана. - Чернівці : Рута, 1994. - с. 20.
10. Baranetsky J. O., Bushmakin V. M. On sufficient conditions for solving the abstract Cauchy problem in Hilbert space with unbounded eigenvalue multiplicities // Intern. Conf. on Nonlinear Differential Equations, Aug. 21 -27, 1995, Kiev, Book of Abstr. - Kiev, 1995. - p. 8.

Bushmakin V. M. On some boundary problems for differential - operator equations with multiple spectrum.

Candidate of Science Thesis (Physics and Mathematics), speciality 01.01.02. - Differential equations. Lviv State University, Lviv, 1997.

The nonlocal boundary problem containing abstract unbounded operator with multiple spectrum in differential equations and two bounded operators in boundary conditions is investigated. Such problem attracts attention due to the countable set of associated vectors to be presented in system of eigenvectors and associated vectors of the corresponding eigenvalue problem. What is more length of chains of eigenvectors and associated vectors aren't uniformly bounded. Cauchy problem with this kind of abstract operator is considered too. The results connected with different sides of the solving of the problems in questions are obtained.

Бушмакин В. Н. Некоторые краевые задачи для дифференциально-операторных уравнений с кратным спектром.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, Львовский государственный университет им. Ив. Франко, Львов, 1997.

Исследуется нелокальная краевая задача, содержащая абстрактный неограниченный оператор с кратным спектром в дифференциальном уравнении и два ограниченных оператора в краевых условиях. Такая задача характерна тем, что содержит в системе корневых векторов соответствующей спектральной задачи счётное множество присоединённых. Более того, длины цепочек из собственного и присоединённых векторов не ограничены равномерно. Рассматривается также задача Коши с таким абстрактным оператором. Получены результаты относительно различных аспектов разрешимости рассматриваемых задач.

Ключові слова : дифференціально-операторне рівняння, нелокальні граничні умови, задача Коші, гільбертів простір, необмежений оператор, кратний спектр, база Рісса, коректна розв'язність, тип задачі Коші.

В. Бушмакин

Підписано до друку 09.01.97. Формат 60x84/16. Папір друк.№1.
Друк офсети. Умови друк.арк.1,5. Умови фарб.відб.1,5.
Обл.-вид.арк.1,7. Тираж 100. Замовлення 14.

Машинно-офсетна лабораторія Львівського держуніверситету
Ім. І.Франка. 290602 Львів, вул. Університетська,1.

AB 36.830