

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

МОГИЛЬОВА Вікторія Віталіївна

УДК 512.552.1

**СПАДКОВІ ТА НАПІВСПАДКОВІ  
НАПІВДИСТРИБУТИВНІ КІЛЬЦЯ**

*01.01.06 — алгебра і теорія чисел*

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**  
дисертації на одбуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 1997

511  
512

AB 36.831

Дисертацією в рукописі  
Роботу виконано на кафедрі  
університету імені Тараса Шевченка

ЛНБ України ім.В.Стефаніка



00761032 (J)

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук,  
професор Кириченко Володимир Васильович

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук,  
провідний науковий співробітник  
Сергейчук Володимир Васильович

кандидат фізико-математичних наук,  
доцент Пляхотник Володимир Васильович

Провідна установа:

Харківський державний університет

Захист відбудеться 24 лютого 1997 року о 14-й годині на  
всіданні спеціалізованої ради Д 01.01.01. при Київському  
університеті ім. Тараса Шевченка за адресою: 252127, м. Київ,  
проспект акад. Глушкова, 6, Київський університет імені Тараса  
Шевченка, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитися в науковій бібліотеці  
університету за адресою: м. Київ, бул. Володимирська, 58.

\*Автореферат розісланий 23 січня 1997 року.

Вчений секретар  
спеціалізованої ради

Овсієнко С.А.

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ.

**Актуальність теми.** Дисертація присвячена дослідженню будови спадкових та напівспадкових нетерових напівдосконалих кілець за допомогою вивчення структури їх сагайдаків.

Теорії спадкових та напівспадкових кілець присвячено багато робіт різних авторів, зокрема, Капланського, Ауслендера, Харади, Длаба, Рингеля, Ю.А. Дрозда, А.В. Ройтера, Фуллера, А.А. Туганбеєва, Міхлера, Смолла, В.В. Кириченка та багатьох інших.

Основи цієї теорії відображено в багатьох монографіях з теорії кілець. Дуже важливими є результати статті Міхлера [1], в якій отримано повний опис напівдосконалих напівпервинних нетерових спадкових кілець.

Зуважимо, що аналогічний опис спадкових порядків над повним локальним дедекіндовим кільцем було отримано Ю.А. Дроздом, В.В. Кириченком і А.В. Ройтером [2].

Як випливає з результатів цих робіт вказанні кільця є напівлэнціговими, отже і напівдосконалими напівдистрибутивними кільцями, які ми коротко будемо називати SPSP-кільцями.

---

[1] Michler G. Structure of semi-perfect hereditary noetherian ring // J.Algebra. - 13, №13. - p.327-344.

[2] Дрозд Ю.А., Кириченко В.В., Ройтер А.В. О наследственных и бассовых порядках. - Изв. АН СССР. Серия матем., т.31 (1967) с.1415-1436.

Нумерація теорем і наслідків в авторефераті співпадає з нумерацією прийнятю в дисертації.

**Мета роботи.** Вивчити будову спадкових і напівспадкових SPSPD-кілець з нетеровою діагоналлю та нетерових кускових SPSPD-областей. Одержати характеристизацію окремих класів напівдосконалих кілець за допомогою їх сагайдаків.

**Методи дослідження.** Основу досліджень складають методи теорії сагайдаків напівдосконалих кілець.

**Наукова новизна.**

- доведено, що сагайдак  $Q(A)$  слабопервинного напівдосконого нетерового кільця  $A$ , яке відрізняється від артінового кільця, сильно зв'язний;

- доведено, що первинний сагайдак  $PQ(A)$  слабопервинного напівдосконого нетерового кільця  $A$  з нільпотентим первинним радикалом, відмінним від нуля, сильно зв'язний.

- доведено, що для кожного простого сагайдака  $\Gamma$  існує артінове кільце  $B$  таке, що  $PQ(B)=\Gamma$ .

- доведено, що для кожного простого сагайдака  $\Gamma$  існує нетерове (но не артінове) напівдосконале кільце  $A$  таке, що  $PQ(A)=\Gamma$ .

**Теоретична та практична цінність дисертації** полягає в тому, що одержані результати є основою для подальшого розвитку структурної теорії напівдосконалих напівдистрибутивних кілець.

**Апробація роботи.** Результати дисертації доповідались на III Міжнародній конференції з алгебри (Красноярськ, 1993р.), Міжнародній науковій конференції з алгебри та аналізу,

прив'язаний 100-річчя від дня народження Н.Г.Чеботарьова (Казань, 1994р.) і Всеукраїнській конференції молодих вчених (Київ, 1994р.).

**Публікації.** По темі дисертації опубліковано 5 наукових робіт, список яких наведено в кінці автореферату.

**Об'єм та структура дисертації.** Робота складається зі вступу, трьох глав ( глава I містить 4 параграфи, глава II - 3 параграфи, глава III - 3 параграфи) та списку літератури із 37 найменувань. Загальний обсяг роботи - 90 сторінки.

### ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність проблематики дисертації, наводиться короткий огляд робіт за темою дисертації, характеризується зміст роботи.

Главі I "Попередні відомості" носить допоміжний характер. В ній приведені відомості про напівдосконалі кільця, напівдистрибутивні кільця та сагайдаки. Доводиться ряд лем, тверджень та теорем.

Нехай  $A$  - нетерове справе напівдосконале кільце,  $R$  - його радикал Джекобсона,  $P_1, \dots, P_s$  - усі попарно неізоморфні нерозкладні проєктивні модулі. Нехай проєктивне накриття  $P(P_i R)$  модуля  $P_i R$  має вигляд

$$P(P_i R) = \bigoplus_{j=1}^s P_i^{t_{ij}}, \quad 1, j=1, \dots, s.$$

Зіставимо модулям  $P_1, \dots, P_s$  точки  $1, \dots, s$  і з'єднаємо точку  $i$  з точкою  $j$   $t_{ij}$ -стрілками. Отриманий граф називається

сагайдаком нетерового справа напівдосконалого кільця  $A$  і позначається  $Q(A)$ .

Нехай  $I$  - первинний радикал кільця  $A$ . Розглянемо факторкільце  $\bar{A} = A/I = \bar{A}_1 \times \dots \times \bar{A}_t$ , де кільця  $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_t$  нерозкладні і  $\bar{1} = \bar{1}_1 + \dots + \bar{1}_t$  - відповідний розклад  $\bar{1} \in \bar{A}$  в пряму суму попарно ортогональних ідемпотентів. Позначемо  $W = I/I^2$  і віставимо ідемпотентам  $f_1, \dots, f_t$  точки  $1, \dots, t$ , з'єднуючи точку  $i$  в точках  $j$  стрілкою тоді і тільки тоді, коли  $\bar{1}_i W \bar{1}_j \neq 0$ . Отриманий скінченний орієнтований граф називається *первинним сагайдаком* кільця  $A$  і позначається  $PQ(A)$ .

Глава II " Спадкові напівдосконалі напівдистрибутивні кільця містить три параграфи.

§5 присвячений вивченню слабопервинних напівдосконалих кілець та їх сагайдаків

Кільце  $A$  називається *слабопервинним*, якщо добуток будь-яких його двосторонніх ідеалів, що не лежать в радикалі Джекобсона  $R$  кільця  $A$ , не нульовий.

**Теорема 5.9.** Сагайдак  $Q(A)$  слабопервинного напівдосконалого нетерового кільця  $A$ , яке відрізняється від простого срітнівого кільця, сильно зв'язний.

**Теорема 5.10.** Первинний сагайдак  $PQ(A)$  слабопервинного напівдосконалого кільця  $A$  з кільцествала первинним радикалом, відрізняє від нуля, сильно зв'язний.

§6 зводить опис нетерових справа напівпервинних SPSP-кільць к випадку тіл і дискретно нормованих кілець.

Кільце  $A$  називається *напівпервинним*, якщо в ньому немає ненульових нільпотентних ідеалів.

Нагадаємо, що напівмаксимальний кілець називається напівдосконале напівпервинне нетерове справа кілець  $A$ , в якого для довільного локального ідемпотента  $e \in A$  кілець  $eAe$  є дискретно нормованим кілець.

**Теорема 6.8.** Будь-яке напівмаксимальне кілець ізоморфно прямому добутку первинних кілець вигляду

$$I_n = \begin{pmatrix} \mathfrak{D} & \alpha_{12} \pi \mathfrak{D} & \dots & \alpha_{1n} \pi \mathfrak{D} \\ \pi \alpha_{21} \mathfrak{D} & \mathfrak{D} & \dots & \alpha_{2n} \pi \mathfrak{D} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi \alpha_{n1} \mathfrak{D} & \pi \alpha_{n2} \mathfrak{D} & \dots & \mathfrak{D} \end{pmatrix}, \quad (*)$$

де  $n \geq 1$ ;  $\mathfrak{D}$  - дискретно нормоване кілець в простий елемент  $\pi$ ;  $\alpha_{ij}$  - цілі раціональні числа, причому  $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$  для всіх  $i, j, k$  ( $\alpha_{ii} = 0$  для будь-якого  $i$ ). Таке кілець нетерове в двох сторін.

**Теорема 6.9.** Наступні умови рівносильні для напівдосконалого напівпервинного нетерового справа кілець  $A$ :

- (а) кілець  $A$  - напівдистрибутивне;
- (б) кілець  $A$  є прямим добутком напівпростого артінового кілець і напівмаксимального кілець.

В §7 розглянуто спадкові справа напівдосконалі напівдистрибутивні кілець.

Кілець  $A$  називається *спадковим справа*, якщо кожний правий ідеал є проєктивним ідеалом.

**Теорема 7.9.** Первинний випадок спадкового справа

SPSD-кілця  $A$  є діаграмою скінченної частково упорядкованої множини, причому в одній його вершини в іншу іде не більше одного шляху, а всі вершини, що відповідають кілцям вигляду  $H_n(O)$  є джерелами. Навпаки, якщо є сагайдак  $\Gamma$ , що задовольняє вказані умови, то існує спадкове справа SPSPD-кілце  $A$  таке, що  $PQ(A)=\Gamma$ .

**Наслідок 7.13.** Двосторонній пірсовський розклад нерозкладного спадкового справа введеного SPSPD-кілця  $A$  має вигляд

$$A = \left( \begin{array}{ccc|c} H_{n_1}(O_1) & & 0 & M_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & H_{n_k}(O_k) & M_k \\ \hline & & 0 & B \end{array} \right),$$

де  $B$  - артінове напівдистрибутивне кілце,  $M_i$  є  $(H_{n_i}(O_i)-B)$ -модуль. Кілця  $O_1, \dots, O_k$  - це дискретно нормовані кілця в загальному тілі часток  $D$ .

Двосторонній пірсовський розклад кілця  $B$  має вигляд:

$$B = \begin{pmatrix} D & B_{12} & \dots & B_{1l} \\ 0 & D & \dots & B_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D \end{pmatrix},$$

де  $D$  - загальне тіло часток кілця  $O_1, \dots, O_k$ , а  $B_{ij}$  - або дорівнює нулю, або є одновимірний правий і лівий простір над тілом  $D$ .

Відзначимо, що ці два пірсовські розклади будуться за розкладом однієї кілця  $A$  в суму попарно ортогональних ідемпотентів:  $1 = f_1 + \dots + f_k + f_{k+1} + \dots + f_{k+l}$ , які відповідають

вершини первинного сагайдака  $PQ(A)$ .

Для довільного локального ідемпотента  $e \in I_i$  ( $i=1, \dots, k$ ) пірсовська компонента  $eAf_j$  ( $j=k+1, \dots, k+t$ ) або дорівнює нулю, або є одновимірним правим і лівим простором над тілом  $D$ .

Глава III " Напіvspадкові напіvspосконалі напіvspистрибутивні кільця."

В §8 описані напіvspадкові напіvspосконалі напіvspистрибутивні кільця.

Кільце  $A$  називається напіvspадковою справою, якщо кожний скінченнопороджений правий ідеал є проєктивним ідеалом.

Нехай  $A$  - напіvspосконале кільце,  $I$  - його первинний радикал. Факторкільце  $\bar{A}=A/I$ , будемо називати діагональною кільцею.

Напіvspосконале кільце  $A$  будемо називати кільцем з нетеровою діагональною, якщо його діагональ нетерова справа.

Теорема 8.5. Первинний сагайдак напіvspадкового SPSP-кільця  $A$  з нетеровою діагональною є діаграмою скінченної частково упорядкованої множини, причому в одній його вершини в іншу іде не більше одного шляху. Навпаки, якщо є сагайдак  $\Gamma$ , що задовольняє вказані умови, то існує напіvspадкове SPSP-кільце  $A$  з нетеровою діагональною таке, що  $PQ(A)=\Gamma$ .

Наслідок 8.10. Двосторонній пірсовський розклад напіvspадкового приведеного SPSP-кільця  $A$  з нетеровою діагональною відносно розкладу  $i=i_1+\dots+i_t$  має вигляд:



більше однієї стрілки. Навпаки, якщо є скінченний граф, який задовільняє ці умови, то існує SPSPD-кільце, сагайдаком якого є цей граф.

**Теорема 9.9.** Нерозкладна кускова артімова напівдистрибутивна область еквівалентна в сенсі Моріта кільцю  $B$ , яке має наступний двосторонній піровський розклад:

$$B = \begin{bmatrix} D & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ 0 & D & \dots & B_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & D \end{bmatrix},$$

де  $D$  - тіло,  $B_{ij}$  - або дорівнює нулю, або  $n$ -вимірний правий і лівий простір над тілом  $D$ , причому, якщо  $B_{ij}$  і  $B_{jk}$  відмінні від нуля, то  $B_{jk}$  відмінний від нуля. Сагайдак  $Q(B)$  є діаграмою зв'язної скінченної частково упорядкованої множини. Навпаки, будь-яке кільце такого вигляду є артімовою кусковою напівдистрибутивною областю.

§ 10 присвячений простим сагайдакам напівдосконалого кільця.

Простим сагайдаком будемо називати скінченний орієнтований граф без кратних стрілок і кратних петель.

**Теорема 10.1.** Для кожного простого сагайдака існує артімове кільце  $B$  таке, що  $PQ(B) = \Gamma$ .

**Теорема 10.2.** Для кожного простого сагайдака  $\Gamma$  існує нетерове (но не артімове) напівдосконале кільце  $A$  таке, що  $PQ(A) = \Gamma$ .

Работы автора за темой диссертации.

1. Кириченко В.В., Могилева В.В., О колчанах слабопервичных колец // Третья междунар. конф. по алгебре, тез. сообщ. - Красноярск, - 1993г. - с.147.
2. Кириченко В.В., Могилева В.В., Пирус Е.М., Хибина М.А. Полусовершенные кусочные области // Междунар. научная конф. по алгебре и анализу, посвященная 100-летию со дня рождения Н.Г.Чеботарева, тез. сообщ. - Казань, - 1994г. - с.49.
3. Могилева В.В. Наследственные справа полусовершенные полудистрибутивные кольца // Праці Всеукр. конф. молодих вчених. Зб. стат. - Київ, - 1994. - ч.2 - с. 226-229.
4. Могильова В.В. Про напівспадкові напівдистрибутивні кільця // Київ, - Вісник Київського ун-ту - 1995. - №1 - с.115-125.
5. Кириченко В.В., Могилева В.В., Пирус Е.М., Хибина М.А. Полусовершенные слабопервичные кольца и кусочные области // Алгебраические исследования: Ин-т математики, - 1995 - с. 33-65.

Ключові слова : кільце, модуль, сагайдак, первинний сагайдак, сильно зв'язаний сагайдак, напівдистрибутивне кільце, кусочна область.

Могилева В.В. Наследственные и полунаследственные полудистрибутивные кольца. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 - алгебра и теория чисел. Киевский университет имени Тараса Шевченко, Киев, 1997.

В диссертации исследовано строение слабопервичных полусовершенных колец, полупервичных полудистрибутивных колец, наследственных справа полусовершенных полудистрибутивных колец, полунаследственных полусовершенных полудистрибутивных колец и нетеровых кусочных полусовершенных полудистрибутивных областей. Доказано, что колчан  $Q(A)$  слабопервичного полусовершенного нетерова кольца  $A$ , отличного от артинового кольца, сильно связан и первичный колчан  $PQ(A)$  слабопервичного полусовершенного нетерова кольца  $A$  с нильпотентным первичным радикалом, отличным от нуля, сильно связан. Так же доказано, что для каждого простого колчана  $\Gamma$  существует артиновое кольцо  $B$ , такое, что его колчан  $Q(B)=\Gamma$  и, что для каждого простого колчана  $\Gamma$  существует нетерово (но не артиново) полусовершенное кольцо  $A$ , такое, что его колчан  $Q(A)=\Gamma$ .

Mogileva V.V. Hereditary and semi-hereditary semi-distributive rings. Manuscript. Thesis of the dissertation of the degree of kandidata of sciences in physics and mathematics, speciality 01.01.06 - algegra and number theory. Kyiv Taras Shevchenko University, Kyiv, 1997.

The structure of weakly prime semi-perfect rings, semi-prime semi-distributive rings, right hereditary semi-perfect semi-distributive rings, semi-hereditary semi-perfect semi-distributive rings and Noetherian piece-wise semi-perfect semi-distributive domains are investigated in the dissertation. It is proved that a quiver  $Q(A)$  of a weakly prime semi-perfect Noetherian rings  $A$  differet from Artinian rings is strongly connected. It is proved that a prime quiver  $PQ(A)$  weakly prime semi-perfect Noetherian rings  $A$  with nilpotent prime radical different from zero is strongly connected too. For every simple quiver  $\Gamma$  the existence of an Artinian ring  $B$ , such that it's quiver  $Q(B)=\Gamma$ , is proved. For every simple quiver  $\Gamma$  the existence of a Noetherian (non-Artinian) ring  $A$ , such that it's quiver  $Q(A)=\Gamma$ , is proved too

Могильова Вікторія Віталіївна  
Спадкові та напівопадкові напівдистрибутивні кільця

Автореферат  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

Папір друкарський « . Тираж 100 пр.  
Замовлення « 3 . Безкоштовно.

---

Надруковано в інституті математики АН України  
252601, Київ-4, вул. Терещенківська, 3

441429

AB 36.831