НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

Волчков Валерий Владимирович

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОМПЕЙЮ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

01/01/01.- математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Донецк - 1997

Диссертация является рукописью.

Работа выполнена на кафедре математического анализа и теории функций Донецкого государственного университета.

Научный консультант - доктор физико-математических наук, профессор Тригуб Р.М.

Официальные оппоненты: - доктор физико-математических наук, профессор Гришин А.Ф.

- доктор физико-математических наук, профессор Котляр Б.Д.

- доктор физико-математических наук, профессор Белый В.И.

Ведущая организация - Институт математики НАН Украины

Защита состоится "26" марта 1997 года в 15 часов на заседании специализированного Совета Д.06.01.01 при Институте прикладной математики и механики НАН Украины по адресу: 340114, Донецк, ул. Р.Люксембург, 74.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института.

Автореферат разослан "11" февраля 1997г.

Ученый секретарь
специализированного Совета А. Марков Марковский А.И.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Различные варианты проблемы Помпейю, связанные с изучением функции по ее интегральным средним, занимают важное место в анализе и приложениях, Глубокие связи данного направления с периодичностью в среднем, теорией гармонических функций, рядами экспонент, теорией приближений функций, с оценками плотности упаковок в комбинаторной геометрии, а также с различными вопросами комплексного анализа, теории дифференциальных уравнений, интегральной геометрии и теории графов были предметом исследований многих математиков (см. обзоры I)-3) с обширной библиографией). Полученные результаты, первые из которых относятся к началу века и в ряду которых - работы Радона, Помпейю, Дельсарта, Литтльвуда, Кахана, Йона, Рудина, Зальцмана, Беренстейна, Аграновского, Айзенберга, Котляра, Тригуба, Заставного оказались весьма важными во многих направлениях современной математики и конкретных приложениях, связанных с созданием компьютерной аксиальной топографии, акустикой, обработкой сигналов и т.д.

Целью работы является:

I. Изучение различных классов функций с данными интегральными средними (в частности, функций с нулевыми интегралами по всем шарам фиксированного радиуса).

1) Zalcman L. A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by Solutions of Partial Differen tial Equations. Kluwer Academic. 1992. p.177-186.

2) Беренстейн К.А., Струппа Д. Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техн. Соврем.пробл.матем.Фундамент. направления. ВИНИТИ, I989, т.54, с.5-III.

3) Netuka I., Vesely J. Mean value property and harmonic functions // Matematicky ustav UK, preprint.

2. Исследование некоторых "локальных" вариантов классической проблемы Помпейю.
3. Решение (в общем случае) проблемы Л.Зальцмана об аналитичности функции, имеющей нулевые интегралы по конформно-инвариантному семейству окружностей.
4. Получение теорем единственности для кратных тригонометрических рядов с пропусками.

Методы исследования. В диссертации используются методы гармонического анализа, теории функций комплексного переменного, а также отдельные результаты теории специальных функций.

Научная новизна. Основные результаты работы состоят в следующем:

I. Изучены различные классы функций, имеющих нулевые интегралы по всем шарам фиксированного радиуса. Для таких функций получено описание в виде ряда по специальным функциям и доказана теорема единственности. Эти результаты позволили получить полное решение задачи о существовании ненулевой функции с нулевыми интегралами по всем шарам двух фиксированных радиусов.

2. Получены точные характеристики роста функций, удовлетворяющих уравнению средних значений по всем шарам фиксированного радиуса, обеспечивающие гармоничность этих функций. Эти результаты существенно уточняют известные теоремы Л.Флатто и Д.Дельсарта.

3. Найдено точное значение радиуса шара, на котором некоторые компакты являются множествами Помпейю. Получено писание множеств Помпейю.

4. Получено решение проблемы Л.Зальцмана об аналитичности функции с нулевыми интегралами по конформно-инвариантному семейству без каких-либо предположений о росте функции.

5. Получены теоремы единственности для кратных тригонометрических рядов с пропусками.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер. Разработанные в ней методы исследования и полученные результаты могут быть использованы при решении различных задач, связанных с интегральными средними и их приложениями в различных областях анализа, обработки сигналов, акустики.

Апробация работы. Результаты диссертации трижды поддержаны Международным научным фондом (ISF), организованным Д.Соросом. В частности, в 1994 году, авторский коллектив в составе одного автора выиграл гранты U 9D000 , U 9D200 в рамках конкурса Long-Term Research Grants Program среди научных коллективов, проводимого ISF.

Результаты диссертации докладывались на семинарах С.Б.Стечкина,и С.А.Теляковского (МИАН, Москва, 1989), Ю.А.Брудного (Ярославль, 1991), В.П.Моторного (Днепропетровск, 1991), В.И.Белого (Донецк, 1991), И.Вейта (Хайфа, Израиль, 1993), Р.М.Тригуба (Донецк, 1988-1996), Зимних школах по теории приближений функций (Саратов, 1990, 1992), Всесоюзной конференции по теории приближений функций (Днепропетровск, 1990), международной конференции по теории аппроксимации и задачам вычислительной математики (Днепропетровск, 1993), международной конференции по теории приближения функций (Калуга, 1996). В целом работа докладывалась в цикле лекций в Бар-Иланском университете (Израиль, 1993) по приглашению профессора Л.Зальцмана, на различных семинарах в Донецке (ИПММ НАН Украины, ДонГУ), Киеве (Институт математики НАН Украины), Харькове (ХГУ), Днепропетровске (Днепропетровский госуниверситет).

Отдельным результатам диссертации посвящены некоторые разделы обзора [3].

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [I-20], список которых приводится в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация изложена на 204 страницах и состоит из введения, пяти глав и списка литературы, включающего 165 наименований работ отечественных и зарубежных авторов.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность темы, приводится обзор работ, связанных с изучаемой тематикой и формулируются основные результаты диссертации.

В главе I изучаются различные классы функций, имеющих нулевые интегралы по всем шарам одного фиксированного радиуса. Для таких классов получено описание в виде ряда по специальным функциям (задача, поставленная В.В.Прохоровым) и доказаны некоторые точные теоремы единственности, существенно усиливающие соответствующие результаты Ф.Йона. Получен также окончательный вариант локальной теоремы о (двух радиусах (см. теорему I.9.2 ниже).

Пусть $B_R=\{x\in R^n : |x|<R\}$, где $|\cdot|$ - евклидова норма в R^n. При $r<R$ обозначим $V_r(B_R)$ - множество функций $f\in L_{loc}(B_R)$, имеющих нулевые интегралы по всем замкнутым шарам радиуса r, лежащим в B_R. Для целого неотрицательного s положим $V_r^s(B_R)=V_r(B_R)\cap C^s(B_R)$.

В §§ I.I - I.4 главы I изучаются некоторые свойства классов V_r^s, которые используются в дальнейшем.

В § I.5 решена задача В.В.Производова об описании класса V_r. Пусть $\{Y_l^{(k)}(z)\}$, $1 \le l \le a_k$ - ортонормированный базис в пространстве сферических гармоник степени k, рассматриваемом как подпространство L^2 на единичной сфере S в R^n, $n \geq 2$. Обозначим ρ, z - полярные координаты точки $x \in R^n$ ($\rho = |x|$, а если $x \neq 0$, то $z = x/\rho \in S$). Всякой функции $f \in C(B_R)$ соответствует ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{a_k} f_{kl}(\rho) Y_l^{(k)}(z), \quad \rho \in (0, R), \tag{I}$$

где $f_{kl}(\rho) = \int_S f(\rho z) \overline{Y_l^{(k)}(z)}\, dz$. Пусть $\Lambda_n = \{\nu_1, \nu_2, \dots\}$ - последовательность положительных корней функции Бесселя $J_{n/2}$, занумерованных в порядке возрастания.

<u>Теорема I.5.4.</u> Пусть $f \in C^\infty(B_R)$, $R > r$. Тогда для того, чтобы $f \in V_r(B_R)$, необходимо и достаточно, чтобы при всех целых $k \geq 0$, $1 \le l \le a_k$ коэффициенты ряда (I) имели вид

$$f_{kl}(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{m,k,l} \frac{J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)}{\rho^{\frac{n}{2}-1}}$$

где $c_{m,k,l} = O(m^{-\alpha})$ при $m \to \infty$ и любом фиксированном $\alpha > 0$ (см. [I]).

Аналогичные результаты получены и для функций конечной гладкости. Известно, что ненулевая функция класса $V_r(R^n)$ не может иметь быстрое убывание на бесконечности. Результаты такого типа берут свое начало в работах Ф.Йона и называются теоремами об одном радиусе. В § I.6 получены точные характеристики для убывания функции $f \in V_r(R^n)\setminus\{0\}$ на бесконечности. Одним из результатов является

Теорема I.6.6. Пусть $1 \le p \le \frac{2n}{n-1}$, $f \in V_r(R^n) \cap L^p_{loc}(R^n)$,

$$M_R(f)_p = \int_{|x|\le R} |f(x)|^p dx$$

Тогда

I. Если $1 \le p < \frac{2n}{n-1}$ и $\varliminf_{R\to\infty} M_R(f)_p R^{\frac{n-1}{2}p-n} = 0$, то $f = 0$.

2. Если $p = \frac{2n}{n-1}$ и $\varliminf_{R\to\infty} M_R(f)_p / \ln R = 0$, то $f = 0$.

3. Существует ненулевая функция $f \in V_r^{\infty}(R^n)$, у которой $M_R(f)_p = O\left(R^{n-\frac{n-1}{2}p}\right)$ при $1 \le p < \frac{2n}{n-1}$ и $M_R(f)_p = O(\ln R)$ при $p = \frac{2n}{n-1}$ и $R \to \infty$ (см. [2], [3]).

Отметим, что при любом $p > \frac{2n}{n-1}$ существует ненулевая функция $f \in V_r(R^n) \cap L^p(R^n)$. Теорема I.6.6 и ее обобщения (см. [2]) существенно уточняют соответствующие результаты Ф.Йона, Д.Смита и С.Санчавелу.

Пусть E - заданное множество положительных чисел и $f \in V_r(R^n)$ при всех $r \in E$. Для каких E отсюда следует, что $f = 0$? Известная теорема Л.Зальцмана о двух радиусах утверждает, что $f = 0$, если E состоит из двух положительных чисел r_1 и r_2, для которых число r_1/r_2

не является отношением корней функции Бесселя $J_{n/2}$. Простые примеры показывают, что указанное условие для r_1/r_2 является необходимым. Теорема Л.Зальцмана получила дальнейшее развитие и уточнение в ряде работ Л.Зальцмана, К.А.Беренстейна, Д.Смита, Р.Гэя, А.Ижера, Н.Л.Аграновского и других авторов. В § I.7 приводятся некоторые далеко идущие обобщения теоремы Л.Зальцмана, которые носят окончательный характер (см. [2]).

Одним из результатов § I.8 является

<u>Теорема I.8.I.</u> Пусть $f \in L_{loc}(R^n)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

I. $f \in V_r(R^n)$ при всех $r \in \Lambda_n$ (см. выше).

2. $\Delta f + f = 0$ (здесь Δ - оператор Лапласа и равенство понимается в смысле распределений), см. [3].

Этот результат играет важную роль при описании множеств Помпейю (см. ниже).

Одним из центральных результатов главы I является полученный в § I.9 окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах, см. также [I].

Пусть E_n - множество чисел вида α/β, где $\alpha, \beta \in \Lambda_n$

<u>Определение I.9.I.</u> Число $\zeta > 0$ называется хорошо приближаемым элементами E_n если для любого $N > 0$ существуют $\alpha, \beta \in \Lambda_n$, такие, что $|\zeta - \frac{\alpha}{\beta}| < (1+\beta)^{-N}$.

Пусть A_n - множество чисел, хорошо приближаемых элементами E_n. Отметим некоторые свойства A_n:

а) $\zeta \in A_n \Leftrightarrow \zeta^{-1} \in A_n$;

б) A_n имеет нулевую лебегову меру на $(0, +\infty)$;

в) пересечение A_n с любым интервалом $(a,b)\subset(0,+\infty)$ есть множество мощности континуума;

г) $A_n \setminus E_n$ не содержит рациональных чисел.

<u>Теорема I.9.2.</u> Пусть $n\geq 1$, $f\in V_r(B_R)$, $r=r_1,r_2$. Тогда: I. Если $r_1+r_2<R$ и $\frac{r_1}{r_2}\notin E_n$, то $f=0$.

2. Если $r_1+r_2=R$, $\frac{r_1}{r_2}\notin E_n$ и $f\in C^\infty(B_R)$, то $f=0$.

3. Если $n=1$, $r_1+r_2=R$ и $\frac{r_1}{r_2}\notin E_n$, то $f=0$.

4. Если $r_1+r_2=R$, $\frac{r_1}{r_2}\in A_n\setminus E_n$, то $f=0$.

5. Если $r_1+r_2=R$, $n\geq 2$ и $\frac{r_1}{r_2}\notin A_n$, то для любого натурального m существует ненулевая $f\in V_r^m(B_R)$, $r=r_1,r_2$.

6. Если $r_1+r_2>R$, то существует ненулевая функция $f\in V_r^\infty(B_R)$, $r=r_1,r_2$.

7. Если $r_1/r_2\in E_n$, то существует ненулевая вещественно-аналитическая функция $f\in V_r(R^n)$, $r=r_1,r_2$ (см.[I]).

Отметим, что утверждения I,2,7 были получены ранее в работах Д.Смита, К.А.Беренстейна, Р.Гэя и А.Ижера.

В § I.I0 главы I рассмотрен ряд обобщений полученных результатов для взвешенных сферических средних, см. [4].

В главе 2 рассмотрены некоторые задачи теории гармонических функций, связанные с шаровыми средними. Основные результаты главы 2 являются существенным усилением известных теорем Д.Дельсарта (о двух радиусах) и Л.Флатто (об одном радиусе), доказываются единым методом и носят окончательный характер (см. [5]).

Пусть $\mathcal{N}_n$ - множество ненулевых корней целой функции $\varphi_n(z)=2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)J_{\frac{n}{2}}(z)z^{-\frac{n}{2}}-1$, $\lambda=\min\limits_{z\in\mathcal{N}_n}|\operatorname{Im} z|$, $\Psi_n=\{z\in\mathbb{C}: z=\alpha/\beta,\ \alpha,\beta\in\mathcal{N}_n\}$. Для $x\in R^n$, $\tau>0$ положим $h(x,\tau)=e^{\lambda|x|/\tau}|x|^{\frac{1-n}{2}}$. Результаты главы 2 касаются функций $f\in C(R^n)$ с условием

$$f(x)=\frac{1}{\omega\tau^n}\int\limits_{|u|\le\tau} f(x+u)\,du,\quad x\in R^n, \tag{2}$$

где $\tau>0$ - фиксировано, ω - объем единичного шара в R^n.

<u>Теорема 2.6.I.</u> Пусть $f\in C(R^n)$ и удовлетворяет (2). Тогда: I. Если при $|x|\to\infty$ $f(x)=o(h(x,\tau))$, то f - гармоническая функция.

2. Существует негармоническая функция $f\in C^\infty(R^n)$ с условием (2), такая, что $f(x)=O(h(x,\tau))$ при $|x|\to\infty$ (см. [5]).

Отметим, что первое утверждение теоремы при $f(x)=O\left(e^{(\frac{\lambda}{\tau}-\varepsilon)|x|}\right)$, $\varepsilon>0$ получено Л.Флатто.

Доказательство этого факта содержится в § 2.6 и использует полученные в §§ 2.I - 2.5 многочисленные результаты о функциях с условием (2).

Некоторые обобщения теоремы 2.6.I содержатся в § 2.7. Обозначим $\mathcal{M}_\tau$ - класс функций $f\in C(R^n)$ с условием (2). Следующий результат одновременно усиливает теоремы Л.Флатто и Д.Дельсарта (см.[5]).

<u>Теорема 2.7.I.</u> Пусть $r_1 < r_2$, $f \in \mathcal{M}_{r_1}$, $g \in \mathcal{M}_{r_2}$.

Тогда: I. Если $\frac{r_1}{r_2} \notin \Psi_n$ и при $|x| \to \infty$ $f - g = o(h(x, r_2))$, то f и g - гармонические функции.

2. Если $\frac{r_1}{r_2} \notin \Psi_n$ и при $|x| \to \infty$ $f - g = o(h(x, r_1))$, то f - гармоническая функция. При любых r_1, r_2 существуют $f \in \mathcal{M}_{r_1}$, $g \in \mathcal{M}_{r_2}$, причем $f - g = O(h(x, r_2))$ и g негармоническая.

3. Если $\frac{r_1}{r_2} \in \Psi_n$ и при $|x| \to \infty$ $f - g = o(h(x, r_2))$, то $f - g$ гармоническая функция. При этих условиях существуют негармонические функции $f \in \mathcal{M}_{r_1}$ и $g \in \mathcal{M}_{r_2}$.

4. Если $\frac{r_1}{r_2} \in \Psi_n$, то существуют негармонические функции $f \in \mathcal{M}_{r_1}$, $g \in \mathcal{M}_{r_2}$, причем при $|x| \to \infty$ $f - g = O(h(x, r_2))$ и $f - g$ - негармоническая функция.

5. При любых $r_1, r_2 > 0$ существуют негармонические функции $f \in \mathcal{M}_{r_1}$, $g \in \mathcal{M}_{r_2}$, причем при $|x| \to \infty$ $f - g = O(h(x, r_1))$ и $f - g$ - негармоническая функция, (см. [5]).

Следующий результат касается случая, когда для одного из радиусов уравнение (2) выполняется лишь приближенно.

<u>Теорема 2.7.2.</u> Пусть $f \in \mathcal{M}_{r_1}$ и $(Bf)(x) = $
$= f(x) - (\omega r_2^n)^{-1} \int_{|u| \le r_2} f(x+u)\,du$. Тогда:

I. Если $\frac{r_1}{r_2} \notin \Psi_n$ и при $|x| \to \infty$ $Bf = o(h(x, r_1))$, то f - гармоническая функция.

2. При любых $r_1, r_2 > 0$ существует негармоническая функция $f \in \mathcal{M}_{r_1}$, такая, что при $|x| \to \infty$ $Bf = O(h(x, r_1))$.

В § 2.8 рассматриваются различные локальные аналоги теоремы о двух радиусах для гармонических функций, подобные теоремы I.9.2 (см. [6], [7]) и уточняющие некоторые результаты К.А.Беренстейна, Р.Гэя, и А.Ижера.

В главе 3 рассматривается классическая проблема Помпейю и некоторые ее обобщения.

Пусть K – компакт в $R^n \ (n \geq 2)$, $f \in L_{loc}(R^n)$ и

$$\int_{K^*} f(x)dx = 0 \qquad (3)$$

для любого множества $K^* \subset R^n$, конгруентного компакту K. Верно ли, что $f = 0$? Если ответ положительный, компакт K называют множеством Помпейю. Классическая проблема Помпейю, которая состоит в том, чтобы описать все множества Помпейю, изучалась многими авторами (см. обзоры [1),2)] с обширной библиографией). Основным результатом § 3.I является

<u>Теорема 3.I.I.</u> Пусть χ_K – характеристическая функция (индикатор) компакта $K \subset R^n$. Для того, чтобы существовала ненулевая функция f медленного роста с условием (3), необходимо и достаточно, чтобы функция χ_K была пределом сходящейся в $L(R^n)$ последовательности линейных комбинаций индикаторов шаров с радиусами, пропорциональными положительным корням бесселевой функции $J_{n/2}$. При этом коэффициент пропорциональности один и тот же для всех этих шаров и зависит только от K.

Для компактов K с гладкой границей имеет место аналогичное утверждение без каких-либо ограничений на рост функции f (см. [3]).

Отметим, что до настоящего времени не было известно описания класса множеств Помпейю. Наиболее общее достаточное условие, согласно которому каждый компакт K с неаналитической границей есть множество Помпейю, получено Вильямсом.

в § 3.2 рассмотрены различные обобщения проблемы Помпейю, в которых условие (3) заменяется несколькими условиями, в каждом из которых интегрирование ведется по более узкому классу множеств (см. [8]).

Результаты § 3.3. связаны с известной задачей о трех квадратах, ранее изучавшей в работах П.Ларда, К.А.Беренстейна, Р.Гэя, и А.Ижера.

Пусть $a_1,\dots,a_{n+1}$ $(n\geq 1)$ - фиксированные положительные числа, $a_1<\dots<a_{n+1}$, $b_k=\sum\limits_{m=k}^{n+1} a_m$, $E=(0,b_1)\times\dots\times(0,b_n)$ - параллелепипед в R^n со сторонами $b_1,\dots,b_n$. Одним из результатов § 33 является

<u>Теорема 3.3.2.</u> Пусть $f\in L_{loc}(E)$ и имеет нулевые интегралы по всем замкнутым кубам в E со сторонами $a_1,\dots,a_{n+1}$ параллельными сторонам E. Тогда

I. Если числа $a_1,\dots,a_{n+1}$ попарно несоизмеримы, то $f=0$ в E.

2. Если среди чисел $a_1,\dots,a_{n+1}$ есть пара соизмеримых, существует ненулевая функция $f\in C^\infty(E)$ с указанным свойством.

3. Первое утверждение становится неверным, если E заменить параллелепипедом вида $(0,\beta_1)\times\ldots\times(0,\beta_n)$, где $\beta_k < b_k$ при $k = 1,\ldots,n$ (см.[9]).

В работах К.А.Беренстейна, Р.Гэя и А.Ижера получен более слабый результат, в котором множество E имеет вид $E=(0,b)^n$ где $b > a_1+\ldots+a_{n+1}$. Некоторые приложения теоремы 3.3.2 в многомерном комплексном анализе рассмотрены в [9].

Большой интерес представляют "локальные" варианты проблемы Помпейю, когда f задана в шаре $B_r=\{x\in R^n : |x|<r\}$ и условие (3) выполнено при всех $K^*\subset B_r$. К.А.Беренстейн и Р.Гэй установили, что в этом случае для широкого класса множеств K следует, что $f=0$ в B_r, если только размеры B_r достаточно велики по сравнению с K. В связи с с этим возникает задача о нахождении минимального радиуса $r=r(K)$ шара B_r с этим свойством. Известен ряд результатов К.А.Беренстейна и Р.Гэя, содержащих оценки $r(K)$ для многих K, но до настоящего времени точное значение $r(K)$ не было известно ни при каком K. В § 3.4. получено полное решение этой задачи в следующих случаях: а) $K=[0,1]^n$ - единичный куб; б) K - единичный полушар, то есть

$$K=\{(x_1,\ldots,x_n)\in R^n : |x|\le 1,\ x_1\geqslant 0\}.$$

<u>Теорема 3.4.I.</u> Пусть $f\in L_{loc}(B_r)$ и для любого единичного куба $K\subset B_r$ $\int_K f(x)dx = 0$. Тогда:

I. Если $r\geqslant \frac{1}{2}\sqrt{n+3}$, то $f=0$.

2. При $r<\frac{1}{2}\sqrt{n+3}$ существуют ненулевые функции класса $C^\infty(B_r)$ с указанным свойством (см.[I0]).

<u>Теорема 3.4.5.</u> Пусть $f \in L_{loc}(B_r)$ и для любого единичного полушара $P \subset B_r$ $\int_P f(x)\,dx = 0$. Тогда:

I. Если $r \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{5}$, то $f = 0$.

2. При $r < \frac{1}{2}\sqrt{5}$ существуют ненулевые функции класса $C^\infty(B_r)$ с указанным свойством (см. [IO]).

При доказательстве теорем 3.4.I, 3.4.5 получены некоторые утверждения, представляющие самостоятельный интерес (см. [IO]).

В главе 4 рассматривается проблема Л.Зальцмана и некоторые ее обобщения.

Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Группа $SU(1,1)$ конформных автоморфизмов круга $\mathbb{D}$ состоит из комплексных матриц $\tau = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix}$, $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ и действует на $\mathbb{D}$ посредством отображений $z \to \tau(z) = \dfrac{\alpha z + \beta}{\bar\beta z + \bar\alpha}$. Пусть $f \in L_{loc}(\mathbb{D})$ и для некоторого фиксированного $r \in (0,1)$ и почти всех (по мере Хаара) $\tau \in SU(1,1)$ равен нулю интеграл

$$\int_{\tau(\gamma_r)} f(z)\,dz = 0, \tag{4}$$

где $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$. Верно ли, что f совпадает почти всюду (по мере Лебега) с голоморфной функцией? Для функций $f \in C(\bar{\mathbb{D}})$ эту проблему поставил Л.Зальцман в 1972 году. Положительное решение проблемы Зальцмана в более общем случае, когда $f \in L^2(\mathbb{D})$ было получено М.Л.Аграновским. Центральный результат главы 4 (см. теорему 4.4.I ниже) существенно усиливает теорему М.Л.Аграновского и носит окончательный характер.

В §§ 4.1 – 4.3 изучаются различные свойства функций с условиями вида (4). Получен ряд теорем об описании таких классов функций, представляющих самостоятельный интерес.

В § 4.4 получена

<u>Теорема 4.4.1.</u> Пусть $f \in L_{loc}(D)$, $m_R(f) = \iint\limits_{|z|\le R} \frac{|f(z)|\,dxdy}{\sqrt{1-|z|}}$, $r \in (0,1)$ – фиксировано и для почти всех $\tau \in SU(1,1)$ выполнено условие (4). Тогда:

1. Если $\varliminf\limits_{R\to\infty} m_R(f)/\ln\frac{1}{1-R} = 0$, то f совпадает почти всюду с голоморфной функцией.
2. Существует неголоморфная функция $f \in C^\infty(D)$ с условием (4), у которой $m_R(f)/\ln\frac{1}{1-R} = O(1)$.
3. Утверждения 1,2 сохраняют силу, если $m_R(f)$ заменив на

$$\tilde{m}_R(f) = \iint\limits_{|z|\le R} |f(z)|^2 dxdy \qquad \text{(см. [11]).}$$

Отметим, что результат М.Л.Аграновского соответствует случаю, когда $\tilde{m}_R(f) = O(1)$. Дальнейшие результаты главы 4 обобщают теорему 4.4.1 в разных направлениях. Одним из таких результатов является уточнение теоремы М.Л.Аграновского о двух радиусах для голоморфных функций (см. [11]).

В главе 5 рассмотрены приложения к некоторым вопросам теории рядов Фурье и комплексного анализа.

Хорошо известно, что многие свойства функций, имеющих ряды Фурье с пропусками, зависят лишь от поведения этих функций в окрестности некоторой точки. В § 5.1 изучается подобное явление в многомерном случае. Пусть $\mathbb{Z}^n$ - целочисленная решетка в R^n, $\mathcal{D}'(G)$ - пространство распределений на открытом множестве $G \subset R^n$. Для 2π - периодического распределения $f \in \mathcal{D}'(R^n)$ обозначим $spec\, f = \{m \in \mathbb{Z}^n : \hat{f}(m) \neq 0\}$, где $\hat{f}(m)$ - коэффициент Фурье f с номером $m \in \mathbb{Z}^n$. Пусть также A - множество линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.

<u>Определение 5.I.I.</u> Непустое открытое множество $G \subset R^n$ будем называть δ -областью $(\delta \geqslant 0)$, если выполнены условия: а) всякую точку из G можно покрыть замкнутым шаром радиуса δ, принадлежащим G; б) центры двух любых замкнутых шаров радиуса δ, принадлежащих G, можно соединить ломаной, так, что всякий замкнутый шар радиуса δ с центром на этой ломаной принадлежит G.

<u>Определение 5.I.2.</u> Последовательность $\{\tau_k\}$ $(k = 1, 2, \dots)$ положительных чисел будем называть δ - последовательностью $(\delta \geqslant 0)$, если $\inf(\tau_{k+1} - \tau_k) > 0$ и при $\delta > 0$ $\tau_k = \frac{\pi k}{\delta} + O(1)$ (постоянная не зависит от k), а при $\delta = 0$ $\tau_{k+1} - \tau_k \to +\infty$.

Для всякой δ - последовательности $\{\tau_k\}$ положим

$$H^n(\{\tau_k\}) = \{x \in R^n : |x| \in \{\tau_k\}\}.$$

<u>Теорема 5.I.3.</u> Пусть G - δ-область в R^n, $P \in A$, $\lambda_m \in R^n$ $(m = 1, 2, \dots)$ и для некоторой δ - последовательности $\{\tau_k\}$ $|\lambda_m| \in \{\tau_k\}$ при всех m. Пусть также последовательность $f_k(x) = \sum_{\nu=1}^{k} c_{k,\nu}\, e^{i(x, \lambda_\nu)}$,

где $C_{k,\nu} \in \mathbb{C}$ сходится в $\mathcal{D}'(G)$ к f и $Pf = 0$ в некотором шаре радиуса $r > \delta$. Тогда $Pf = 0$ на всей G (см. [12]).

Отметим, что в теореме 5.I.3 некоторые из чисел $|\lambda_m|$ могут совпадать. В частности, все $|\lambda_m|$ могут быть равны. Одним из следствий теоремы 5.I.3 является

Теорема 5.I.4. Пусть $f \in \mathcal{D}'(R^n)$ - 2π - периодическое распределение и для некоторой δ - последовательности $\{r_k\}$ $\operatorname{spec} f \subset H^n(\{r_k\})$. Тогда если $f = 0$ в некотором шаре радиуса $r > \delta$, то $f = 0$ всюду (см. [12]).

В одномерном случае подобные теоремы при разных предположениях получали многие авторы. Дальнейшие результаты § 5.I (см.[I2]). являются аналогами некоторых классических теорем теории лакунарных тригонометрических рядов, полученных М.Е.Ноблем, П.Л.Ульяновым и Кеннеди. Рассмотрены также лакунарные ряды по функциям Бесселя.

Результаты § 5.2 являются теоремами типа Мореры в областях со слабым условием конуса (см. [9]). Их особенностью является то, что контуры, по которым интегрируется функция, являются границами множеств, конгруентных данному.

Дальнейшие результаты главы 5 связаны с применением теорем главы 3 в некоторых задачах теории приближений функций и комплексного анализа.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах автора:

I. Волчков В.В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Мат.сборник, 1995, т.186, № 6, с.I5-34.

2. Волчков В.В. Теоремы о двух радиусах на пространствах постоянной кривизны // Доклады АН России, 1996, т.347, № 3, с.300-302.

3. Волчков В.В. Новые теоремы о среднем для решений уравнения Гельмгольца // Мат. сборник, 1993, т.184, № 7, с.71-78.

4. Волчков В.В. Теоремы о среднем для одного класса полиномов // Сиб. мат.ж., 1994, т.35, № 4, с.737-745.

5. Волчков В.В. Новые теоремы о двух радиусах в теории гармонических функций // Известия АН России, серия математическая, 1994, т.58, № I, с. I82-I94.

6. Волчков В.В. Теоремы о двух радиусах на ограниченных областях евклидовых пространств // Дифф. уравнения, 1994, т.30, № I0, с.I7I9-I724.

7. Волчков В.В. Окончательный вариант теоремы о среднем в теории гармонических функций // Мат.заметки, I996, т.59, № 3, с. 35I-358.

8. Волчков В.В. О проблеме Помпейю и некоторых ее обобщениях // Укр. мат. ж., I994, № I0, с.I444-I448.

9. Волчков В.В. Теоремы типа Морера в областях со слабым условием конуса // Изв. вузов. Математика, I993, № I0, с.I5-20.

I0. Волчков В.В. Экстремальные варианты проблемы Помпейю // Мат. заметки, I996, т.59, № 5, с. 67I-680.

II. Волчков В.В. Об одной проблеме Зальцмана и ее обобщениях // Мат. заметки, I993, т.53, № 2, с.30-36.

I2. Волчков В.В. Теоремы единственности для кратных лакунарных тригонометрических рядов // Мат. заметки, I992, т.5I, № 6, с. 27-3I.

13. Волчков В.В. Новые теоремы о среднем для полианалитических функций // Мат. заметки, 1994, т.56, № 3, с.20-28.

14. Волчков В.В. О функциях с нулевыми интегралами по кубам // Укр. мат. ж., 1991, т. 43, № 6, с. 859-863.

15. Волчков В.В. Аппроксимация функций на ограниченных областях в R^n линейными комбинациями сдвигов // Доклады АН России, 1994, т. 334, № 5, с.560-561.

16. Volchkov V.V. Morera type theorems on the unit disk// Anal. Math. 1994, N20, p. 49-63.

17. Волчков В.В. Теоремы о шаровых средних для некоторых дифференциальных уравнений // Доклады АН Украины, 1992, № 5, с.8-11.

18. Волчков В.В. Теоремы о среднем значении для некоторых дифференциальных уравнений // Доклады АН УССР, 1991, № 6, с.8-11.

19. Волчков В.В. О функциях с нулевыми интегралами по некоторым множествам // Доклады АН УССР, 1990, № 8, с.9-11.

20. Волчков В.В. Об одной экстремальной задаче, связанной с теоремой Мореры // Мат. заметки, 1997 (принято к печати).

Волчков

Волчков В.В. Преобразование Помпейю и его применение в теории функций.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 0I.0I.0I. - математический анализ, Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, I996, рукопись.

Изучаются различные классы функций с заданными интегралами по всем шарам фиксированного радиуса. Для таких функций получено описание в виде ряда по специальным функциям и доказаны теоремы единственности. Исследуется классическая проблема Помпейю на ограниченных областях. Рассмотрены приложения этих результатов к некоторым задачам теории функций. Результаты опубликованы в 20 научных работах.

Volchkov V.V. Pompeiu transform and its application in the theory of functions.

Thesis for Doktor degree in Physics and Mathematics. Speciality 01.01.01 - mathematical analysis. Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Nat. Ac. Sci. of Ukraine. Donetsk. 1996. Manuscript.

Various classes of functims with certain integrals over all ball of a fixed radius are studied. For functions in such classes a dezcription in the form of a series in special functions is obtained and a uniqueness theorems is proved. The classical Pompeiu problem on bounded regions is studied. These results make it possible to solve some problems of the theory of functions. The results are contained in 20 published papers.

КлючовI слова: множини Помпейю, кульовI середнI, гармонIчна функцIя, функцIя Бесселя, аналIтична функцIя, теореми единостI, тригонометричнI ряди.

Волчков Валерий Владимирович

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОМПЕЙЮ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Подписано в печать 03.02.1997г. Усл. печ.л. 1. Тираж 100 экз. Заказ №5.

Венчурное предприятие "Антор"