Національна академія наук України
Інститут проблем машинобудування

На правах рукопису

Цуканов Ігор Георгійович

Структурні та комп'ютерні моделі процесів теплопровідності у анізотропних середовищах з розривними коефіцієнтами теплопровідності

01.05.02 - математичне моделювання та обчислювальні методи в наукових дослідженнях

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Харків 1997

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі пр[illegible] методів Інституту проблем ма[illegible]

Науковий керівник - доктор ф[illegible]
професор [illegible]др Миколайович

Офіційні опоненти - доктор технічних наук,
професор Сіроджа Ігор Борисович

- кандидат фізико-математичних наук
Новожилова Марина Володимирівна

Провідна організація - Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України (м. Київ)

Захист відбудеться "19" березня 1997р. о 14 годині в аудиторії №1112 на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 02.18.02 в Інституті проблем машинобудування НАН України за адресою: 310046, м. Харків, вул. Дм. Пожарського, 2/10.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту проблем машинобудування НАН України за адресою: 310046, м. Харків, вул. Дм. Пожарського, 2/10.

Автореферат розісланий "14" лютого 1997 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради,
кандидат фізико-математичних наук Веретельник В.В.Веретельник

Загальна характеристика роботи

Актуальність проблеми що розглядається, обумовлено необхідністю прогнозування фізико-механічних характеристик та показників якості полімерних композиційних матеріалів. У роботах О.М.Гузя, В.В.Васильєва, В.В.Воробья, Є.В.Морозова та ін. показано, що на величину залишкових напружень в відформованому виробі значний вплив здійснює розподіл температурного поля у процесі формування. Крім того, нерівномірне поле температури сприяє виникненню фронтів полімерізації, некерований рух яких разом з хімічною усадкою може призвести до порушення суцільності, а отже і до зниження його міцності та якості. Використання чисельних методів, обчислювального експерименту для комп'ютерного моделювання температурних полів у конструкціях із композиційних матеріалів дозволяє без проведення натурних експериментів підібрати теплові режими технологічного процесу їх формування, теоретично прогнозувати можливі дефекти та вказувати на місця їх виникнення. Моделювання температурних полів у полімерних композиційних матеріалах є актуальним не тільки на стадії виготовлення конструкцій, але і у процесі їх експлуатації. Такі поля виникають при аеродинамічному нагріві поверхні літальних апаратів, при вході головних частин літальних апаратів у щільні шари атмосфери і т.і.

Комп'ютерне моделювання теплових полів у конструкціях з композиційних матеріалів та технологічному оснащенні значно ускладнюється деякими обставинами:

- полімерні композиційні матеріали мають анізотропію фізико-механічних характеристик. Іноді теплопровідність матеріалу у одному із головних напрямків анізотропії на декілька порядків перевищує теплопровідність у інших напрямках;
- технологічний пакет формування виробів із композиційних матеріалів складається із різнорідних матеріалів, у яких співвідношення фізичних та геометричних характеристик може лежати у широкому діапазоні значень;
- температурне поле є нестаціонарним.

Велику увагу дослідники приділяють не тільки створенню математичних моделей процесу теплопровідності, але й розвитку методів розв'язання крайових задач теплопровідності. Оскільки використання класичних методів, таких як розділення змінних, функцій джерел та потенціалів, обмежується складністю геометрії границі області, у якій шукається рішення, різноманітністю крайових умов, нелінійностями і т.і., то широке розповсюдження одержали наближені методи - МСЕ, кінцево-різницеві, варіаційні та ін. Їх розвитку до розв'язання задачі теплопровідності у кусково-однорідних ізотропних середовищах присвячені роботи І.В.Сергієнка, В.В. Скопецького, В.С. Дейнека, Г.І. Марчука, А.А. Самарського, С.В. Вендіна, Ю.М. Коляно, В.І. Лавренюка, В.Л. Рвачова, А.П.Слесаренка, Г.П.Манька, Т.І.Шейко, М.М.Литвина та ін. Методи розв'язання нестаціонарних задач теплопровідності описані у роботах М.М.Беляєва, А.А.Рядна, А.В.Ликова, Л.А. Коздоби, Я.С.Підстригача, Ю.М.Коляно, В.Л.Рвачова, А.П.Слесаренка, Н.Д.Сизової, М.О.Сафонова та ін.

Важливу роль у розвитку чисельних методів зіграли R-функції, за допомогою яких вдалося вирішити проблему точного задоволення граничним умовам. R-функції було покладено в основу нового методу розв'язку крайових задач математичної фізики - варіаційно-структурного методу.

Побудовою та дослідженням жмутків функцій, які задовольняють умовам ідеального теплового контакту ізотропних середовищ, займалися А.П.Слесаренко, Г.П.Манько, Т.І.Шейко, М.М.Литвин та ін.

Зазначимо, що всі побудовані жмутки функцій було чисельно реалізовано тільки для ізотропних середовищ. Структурну модель ідеального теплового контакту з тепловиділенням на границі контакту розглянуто у роботі А.В.Темнікова та А.П.Слесаренка.

Моделювання фізико-механічних полів на ЕОМ включає не тільки проблеми, пов'язані з розв'язком задач про розрахунок тих або інших полів, але і проблеми вводу початкових даних та зображення результатів розрахунків. У системі "Поле", де реалізовано варіаційно-структурний метод, геометрична, аналітична та логічна інформація тісно пов'язані між собою.

Ця обставина призводить до того, щоб разом з побудовою геометричного креслення одночасно будувалась його аналітико-логічна модель (рівняння $\omega(x,y,z)=0$). У системі "Поле" вхідна інформація являє собою програму на проблемно-орієнтовній мові RL. Однак насущною потребою сьогоднішнього дня є створення проблемно-орієнтованих комп'ютерних систем, які направлені на розв'язок певних класів крайових задач. Тому актуальним є створення у системі "Поле" інтерактивної подсистеми для вводу та спільної переробки геометричної, аналітичної та логічної інформації.

Не менш актуальні проблеми, пов'язані з виведенням і графічним зображенням результатів розв'язку крайових задач. Вони знайшли своє відображення у роботах Ю.М.Баяковського. Для кожного класу задач є свій найбільш ефективний засіб зображення результатів. Використовувати як графічний постпроцесор для візуалізації й оформлення результатів розв'язків крайових задач у системі "Поле" такі універсальні пакети як Boeing Graph, Harvard Graphics та ін. неможливо, оскільки рішення крайової задачі в системі "Поле" шукається в області з довільною геометричною формою, у той час як стандартне програмне забезпечення дозволяє здійснювати виведення тільки для прямокутних областей. Тому актуальна задача створення спеціалізованого програмного забезпечення для виведення та графічного зображення результатів розв'язку крайових задач у системі "Поле".

Робота виконана у відділі прикладної математики та обчислювальних методів Інституту проблем машинобудування НАН України з 1991 р. по 1997 р. у відповідності з:

- держбюджетною темою № 01900033544 "Создание на основе теории R-функций интеллектуальных систем, ориентированных на задачи расчета физико-механических полей в научных исследованиях, инженерной практике и учебном процессе" (1990-1992 рр.);
- держбюджетною темою № 01900009451 "Развитие теории R-функций и создание на ее основе мобильного программного обеспечения современ-

ных ЭВМ (в том числе персональных) для исследования термоупругих, упруго-пластических, электромагнитных и магнитогидродинамических полей" (1991-1993 pp.).

- темою ДКНТ № 06.04.05/032-94 "Интеллектуальный инструментарий компьютерной технологии моделирования в математической физике" (1994-1995 pp.).
- бюджетною темою НАН України "Високоінтелектуальні системи програмування, орієнтовані на використання алгебраїзованих структурних формул розв'язання крайових задач".

Мета роботи полягає у: розвитку конструктивних засобів теорії R-функцій для створення структурних та комп'ютерних моделей температурних полів у кусково-анізотропних середовищах з великим контрастом фізичних характеристик; розробці ефективних алгоритмів та програмного забезпечення для проведення експрес-аналізу полів, які досліджуються, а також у визначенні ефективності запропонованих алгоритмів.

Методи досліджень. Методами досліджень є конструктивна теорія R-функцій; варіаційні методи розв'язку крайових задач математичної фізики; обчислювальний експеримент як спосіб вирішення природознавчих проблем засобами математичного моделювання та обчислювальної математики.

Наукова новизна. У роботі отримано нові результати, які виносяться на захист:

- створено та вивчено структурні та комп'ютерні моделі, які описують конвективний теплообмін анізотропного тіла з навколишнім середовищем та ідеальний тепловий контакт анізотропних середовищ, які мають різні теплофізичні характеристики;
- у рамках системи "Поле" реалізовано ефективні алгоритми роз'вязку лінійних нестаціонарних задач теплопровідності. Отримано теоретичні оцінки витрат машинного часу, необхідного для розв'язку задачі на n кроках по часу.
- розроблено та модифіковано такі алгоритми комп'ютерної графіки, які

використовують R-функції для опису геометричної інформації:

- інтерполяційний алгоритм побудови аксонометричних проекцій трикутних граней;
- алгоритм полігонізації поверхні тіла, яка задається рівнянням $\omega(x, y, z) = 0$;
- алгоритм вилучення невидних ліній трасировкою променя;

- з метою проведення експрес-аналізу фізико-механічних полів, що досліджуються, у системі "Поле" створено препроцесор для вводу геометричної інформації та її перетворення до аналітичного виду та постпроцесор для графічного подання результатів рішень крайових задач у системі "Поле".

Теоретична та практична цінність. Теоретичне значення роботи полягає в розробці структурних моделей конвективного теплообміну анізотропного тіла з навколишнім середовищем та ідеального теплового контакту анізотропних середовищ, які мають різні теплофізичні характеристики; ефективних алгоритмів для проведення експрес-аналізу фізико-механічних полів.

Побудовані структурні та комп'ютерні моделі можна використовувати у системах автоматизованого проектування для проведення розрахунків температурних полів у кусково-анізотропних середовищах. Структурні моделі, що розглядаються, є універсальними: за їх допомогою можна описувати теплові процеси не тільки у анізотропних середовищах, але й у комбінаціях анізотропних та ізотропних середовищ. Ці структурні моделі допускають виродження анізотропії в ізотропію та кускової однорідності у повну однорідність.

Розв'язана задача про розрахунок нестаціонарного температурного поля у технологічному пакеті формування тришарових пластин із застосуванням запропонованих автором алгоритмів. При її вирішенні отримано чисельні значення витрат машинного часу, на основі яких може бути зроблено вибір ЕОМ, базового програмного та алгоритмічного забезпечення для проведення експрес-аналізу нестаціонарних температурних полів.

Створене програмне забезпечення для графічного подання результатів розрахунків у системі "Поле" вже кілька років успішно експлуатується у відділі прикладної математики та обчислювальних методів ІПМаш НАН України та при проведенні лабораторного практикуму для студентів Харківського авіаційного інституту ім. М.Є.Жуковського.

Достовірність результатів забезпечується коректністю та точністю математичних моделей теплопровідності і методів, що застосовуться, стверджується розв'язком тестових задач для областей канонічної форми та порівнянням отриманих результатів з точними рішеннями.

Апробація роботи. Основні результати дисертаційної роботи доповідались на конференції "Современные проблемы алгоритмизации" (Ташкент, 1991); на всеукраїнській конференції "Геометричне моделювання, інженерна та комп'ютерна графіка" (Харків, 1993); на міжнародному конгресі по моделюванню EUROSIM'95 (Відень, 1995); на міжнародній конференції "Математические модели и численные методы механики сплошных сред" (Новосибірськ, 1996), а також на семінарі "Прикладні методи математики та кібернетики".

Публікації. За темою дисертаційної роботи опубліковано 13 робіт, із них 1 доповідь на міжнародному конгресі по моделюванню, 4 тез доповідей на конференціях та 8 статей.

Особистий внесок автора. У роботах [1, 8, 13] автором розроблено програмне забезпечення ПЕОМ для проведення експрес-аналізу результатів розрахунків фізико-механічних полів у системі "Поле".

У роботах [2, 3, 12] запропоновані алгоритм полігонізації поверхні тіла, що описується рівнянням $\omega(x, y, z) = 0$, та модифікований алгоритм вилучення невидних ліній трасировкою променя для тіл, поверхня яких описується за домогою R-функцій.

У роботі [4] розроблено систему для інтерактивної побудови предикатних та аналітичних рівнянь складних геометричних об'єктів.

У роботі [6] створено комп'ютерну модель нестаціонарного температурного поля у технологічному пакеті формування тришарункових пластин.

У роботах [9, 11] узагальнено структурну модель ідеального теплового контакту двох ізотропних середовищ, які мають різні теплофізичні властивості на випадок більшої кількості тіл, що дотикаються одне до одного.

Зміст роботи

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, трьох глав, заключної частини та додатків. Список цитованої літератури включає 165 назв. Основний зміст роботи містить120 сторінок, у тому числі 3 таблиці та 11 малюнків.

У першій главі розглядаються постановки крайових задач теплопровідності у кусково-анізотропних середовищах, основні положення теорії R-функцій і варіаційно-структурного методу розв'язання крайових задач математичної фізики.

Для опису граничної умови конвективного теплообміну анізотропного тіла з навколишнім середовищем по закону Н'ютона:

$$-\left(\left(\lambda_{xx}\frac{\partial T}{\partial x}+\lambda_{xy}\frac{\partial T}{\partial y}\right)Cos(\vec{n},\vec{i})+\left(\lambda_{yx}\frac{\partial T}{\partial x}+\lambda_{yy}\frac{\partial T}{\partial y}\right)Cos(\vec{n},\vec{j})\right)=\alpha\left(T-T_{cp}\right),$$

де n - зовнішня нормаль до границі області $\partial\Omega$, α - коефіцієнт тепловіддачі, T_{cp} - температура навколишнього середовища, автором побудовані такі жмутки функцій:

$$T=\Phi_1-\omega\left(\alpha T_{cp}+(\lambda\nabla\omega)\nabla\Phi_1-\alpha\Phi_1\right)\left((\lambda_0\nabla\omega)\nabla\omega+\beta-\alpha\omega+\gamma\omega^2\right)^{-1}+\omega^2\Phi_2;\quad(1)$$

$$T=\Phi_1-\omega\left(\alpha T_{cp}+(\lambda\nabla\omega)\nabla\Phi_1-\alpha\Phi_1\right)\left((\lambda\nabla\omega)\nabla\omega+d\omega\right)^{-1}+\omega^2\Phi_2,\quad(2)$$

де λ та λ_0 - тензори другого рангу, причому елементи тензора λ_0 пов'язані з елементами тензора λ такою залежністю:

$$\lambda_0=\begin{cases}\lambda_{ij}-\beta, & i=j\\ \lambda_{ij}, & i\neq j\end{cases};$$

β, γ, d - нелінійні параметри структурної моделі. Для них зроблено оцінки:

$$d>0;\quad \gamma > \frac{\alpha^2}{4\left((\lambda_{xx}-\beta)\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + 2\lambda_{xy}\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y} + (\lambda_{yy}-\beta)\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 + \beta\right)}.$$

З метою одержання оцінки нелінійного параметру структурної моделі β доведена наступна теорема.

Теорема. Для будь-яких λ_{xx}, λ_{xy}, λ_{yy}, які задовольняють умові $\lambda_{xx}\lambda_{yy} - \lambda_{xy}^2 > 0$, і нормалізованій до першого порядку функції ω завжди знайдеться таке $\beta > 0$, при якому у замкненій області $\overline{\Omega}$ буде виконуватись нерівність:

$$(\lambda_{xx}-\beta)\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + 2\lambda_{xy}\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}(\lambda_{yy}-\beta)\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 + \beta > 0.$$

Слідством з цієї теореми є:

$$0 < \beta < \min\left(-\frac{f(x,y,0)}{f'_\beta(x,y)}\right)_{|\forall(x,y), f'_\beta(x,y)<0, \omega(x,y)>0} \tag{3}$$

де

$$f(x,y,0) = \lambda_{xx}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + 2\lambda_{xy}\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y} + \lambda_{yy}\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2;$$

$$f'_\beta(x,y) = \left(1 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\right).$$

У випадку ортотропного тіла оцінки для β та γ значно спрощуються:

$$\gamma > \frac{\alpha^2}{4\beta};\quad \beta = \min\{\lambda_{xx}, \lambda_{yy}\}.$$

Далі виконується побудова структурних моделей ідеального теплового контакту анізотропних середовищ. Спочатку розглядається контакт двох ортотропних середовищ, у яких збігаються напрямки головних осей ортотропії. Для цього випадку автором побудовано жмуток функцій:

$$T_i = B(\Phi) + \left(\omega_0^2 \cap \omega_i\right)\left(\varepsilon_i \frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial \omega_i}{\partial x} + \delta_i \frac{\partial B}{\partial y}\frac{\partial \omega_i}{\partial y}\right), \tag{4}$$

де

$$\varepsilon_i = \left(\lambda_{xx_j} - \lambda_{xx_i}\right) \times A^{-1}; \qquad \varepsilon_j = \left(\lambda_{xx_i} - \lambda_{xx_j}\right) \times A^{-1}; \tag{5}$$

$$\delta_i = \left(\lambda_{yy_j} - \lambda_{yy_i}\right) \times A^{-1}; \qquad \delta_j = \left(\lambda_{yy_i} - \lambda_{yy_j}\right) \times A^{-1};$$

$$A = \left(\lambda_{xx_i} + \lambda_{xx_j} - \beta\right)\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\lambda_{yy_i} + \lambda_{yy_j} - \beta\right)\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial y}\right)^2 + \beta;$$

$$\beta = \min\left\{\lambda_{xx_i}, \lambda_{xx_j}, \lambda_{yy_i}, \lambda_{yy_j}\right\}.$$

Жмуток функцій (4) узагальнюється на випадок ідеального теплового контакту декількох анізотропних середовищ:

$$T_i = B(\Phi) + \sum_{j=1}^{n_i}\left(\left(\omega_0^2 \cap \omega_{0i}\right)\bigcap_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n_i} \omega_{0k}^2\right)\left(\varepsilon_{ij} \frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial \omega_{0i}}{\partial x} + \delta_{ij} \frac{\partial B}{\partial y}\frac{\partial \omega_{0i}}{\partial y}\right), \text{ i=1,...,m}, \tag{6}$$

де n_i - кількість середовищ, з якими межує і-те середовище; ε_{ij} та δ_{ij} визначаються по формулам (5). Функції ω_{0j} повинні задовольняти умовам:

$$\omega_{0i}(M)_{|M\in\Omega_i} \neq 0; \; \omega_{0i}(M)_{|M\notin\Omega_i} = 0; \; \frac{\partial \omega_{0i}}{\partial \nu}_{|\partial\Omega_i} = 1,$$

де ν - внутрішня нормаль до $\partial\Omega_j$.

Провадиться узагальнення жмутків (4, 6) на випадок ідеального теплового контакту повністю анізотропних середовищ:

$$T_i = B(\Phi) + \sum_{j=1}^{n_i}\left(\left(\omega_0^2 \cap \omega_{0i}\right)\bigcap_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n_i} \omega_{0k}^2\right)\left(\varepsilon_{ij} \frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial \omega_{0i}}{\partial x} + \delta_{ij} \frac{\partial B}{\partial y}\frac{\partial \omega_{0i}}{\partial y} + \sigma_{ij}\left(\frac{\partial B}{\partial y}\frac{\partial \omega_{0i}}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial \omega_{0i}}{\partial y}\right)\right) \tag{7}$$

де

$$\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji} = \left(\lambda_{xx_j} - \lambda_{xx_i}\right) \times A^{-1};$$

$$\delta_{ij} = -\delta_{ji} = \left(\lambda_{yy_j} - \lambda_{yy_i}\right) \times A^{-1};$$

$$\sigma_{ij} = -\sigma_{ji} = \left(\lambda_{xy_j} - \lambda_{xy_i}\right) \times A^{-1};$$

$$A = \left(\lambda_{xx_i} + \lambda_{xx_j} - \beta\right)\left(\frac{\partial \omega_{0i}}{\partial x}\right)^2 + \left(\lambda_{yy_i} + \lambda_{yy_j} - \beta\right)\left(\frac{\partial \omega_{0i}}{\partial y}\right)^2 + $$
$$+ 2\left(\lambda_{xy_i} + \lambda_{xy_j}\right)\frac{\partial \omega_{0i}}{\partial x}\frac{\partial \omega_{0i}}{\partial y} + \beta$$

Вибір чисельних значень нелінійного параметру β структурної моделі забезпечується обмеженнями, які накладаються у наслідку з вищеприведеної теореми. При цьому функція $f(x, y, 0)$ у нерівності (3) має такий вигляд:

$$f(x, y, 0) = \left(\lambda_{xx_i} + \lambda_{xx_j}\right)\left(\frac{\partial \omega_{0i}}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\lambda_{xy_i} + \lambda_{xy_j}\right)\frac{\partial \omega_{0i}}{\partial x}\frac{\partial \omega_{0i}}{\partial y} + $$
$$+ \left(\lambda_{yy_i} + \lambda_{yy_j}\right)\left(\frac{\partial \omega_{0i}}{\partial y}\right)^2$$

<u>Другу главу</u> присвячено розгляду алгоритмічного та програмного забезпечення для розв'язку нестаціонарних задач теплопровідності, для графічного подання та оформлення результатів розрахунків у програмуючий системі "Поле". Запропоновано дві модифікації алгоритму розв'язку лінійної нестаціонарної задачі теплопровідності варіаційно-структурним методом. Як математична модель нестаціонарного теплового процесу розглядається система диференційно-різницевих рівнянь

$$\lambda_{xx_k} \frac{\partial^2 T_n}{\partial x^2} + 2\lambda_{xy_k} \frac{\partial^2 T_n}{\partial x \partial y} + \lambda_{yy_k} \frac{\partial^2 T_n}{\partial y^2} = (c\rho)_k \frac{T_n - T_{n-1}}{\Delta \tau}, \; k = 1, \ldots, m \qquad (8)$$

де m- кількість різнорідних середовищ, які складають єдине тіло. Для розв'язку системи рівнянь (8) із заданими граничними та початковими умовами на кожному часовому шарі використано варіаційно-структурний метод. У результаті застосування варіаційного або проекційного методу от-

римано для визначення коефіцієнтів $C_{i,n}$ лінійної комбінації $T_n = \sum_{i=1}^{N} C_{i,n}\psi_i$ систему лінійних алгебраічних рівнянь $AC = B$, причому елементи матриці A не залежать від розв'язку задачі на попередньому часовому шарі. Вектор B можна подати у вигляді двох складових: $B = B_н + B_\tau$, де B - компонент вектору B, який не залежить від предісторії температурного поля, а B_τ визначається полем температури на попередньому кроці:

$$b_{i\tau} = \sum_{k=1}^{m}\left(\iint_{\Omega_k} \frac{(c\rho)_k}{\Delta\tau}(T_{n-1} - T_0)\psi_i d\Omega_k\right).$$

Перший алгоритм розв'язку лінійної нестаціонарної задачі теплопровідності засновано на тому, що елементи матриці A та вектору B обчислюються один раз, а на кожному часовому шарі перераховуються тільки елементи вектора B_τ. Витрати машинного часу, що необхідний для отримання розв'язку задачі на n часових шарах, оцінюються таким чином:

$$t_{маш_n} = t_a + t_{bн} + t_{b\tau 1} + t_s + t_r + (n-1)(t_{b\tau i} + t_s + t_r),$$

де t_a та t_b - витрати машинного часу на обчислення елементів матриці A і вектора B ; $t_{b\tau 1}$ та $t_{b\tau i}$ - витрати машинного часу на обчислювання вектора B_τ на першому та і-тому кроках по часу; t_s та t_r - машинний час, необхідний для розв'язання системи лінійних алгебраічних рівнянь та для виводу результатів розрахунків.

Другий алгоритм розв'язку лінійної нестаціонарної задачі теплопровідності засновано на тому, що елементи вектора B_τ можна подати у такому вигляді:

$$b_{i\tau} = \sum_{j=1}^{N} C_{j,n-1} d_{ij}\,,\quad i=1,\dots,N; \tag{9}$$

де $d_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \left(\iint_{\Omega_k} \frac{(c\rho)_k}{\Delta\tau} \psi_j \psi_i d\Omega_k \right)$.

Матриця D формується один раз, а на кожному кроці по часовій координаті вектор B_τ перераховується по формулі (9). Витрати часу, що необхідний для розв'язання задачі по цьому алгоритму, визначено по формулі:

$$t_{маш_{II}} = t_a + t_{bн} + t_{b\tau 1} + t_s + t_r + h(n-1)(t_D + t_B + t_s + t_r) + \\ + h(n-2)(n-2)(t_B + t_s + t_r)$$

де t_d - витрати машинного часу на формування матриці D; t_B - витрати машинного часу на формування вектора B за допомогою матриці D та вектора B ; $h(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$ - функція Хевісайда.

Вказано межі застосування запропонованих алгоритмів.

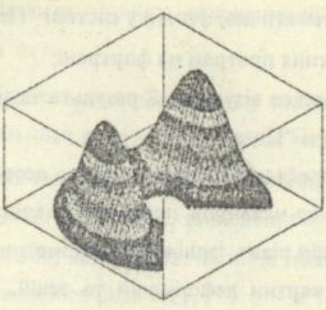
З метою створення швидкодіючого програмного забезпечення для проведення експрес-аналізу результатів розрахунків фізико-механічних полів у системі "Поле" автором запропоновано кілька алгоритмів комп'ютерної графіки, які використовують властивості нормалізованих рівнянь геометричних об'єктів:

- алгоритм вилучення невидних ліній трасировкою променя для тіл, поверхню яких описано за домогою R-функцій;
- алгоритм полігонізації поверхні тіла;
- інтерполяційний алгоритм побудови аксонометричних проекцій трикутних граней.

Модифікація алгоритма вилучення невидних ліній трасировкою променя заснована на тесті видності точки, яка належить поверхні тіла, описаного неявною функцією $\omega(x, y, z) = 0$. Цей алгоритм дозволяє вилучати тільки повністю невидні грані. Для вилучення частково невидних граней застосовуються відомі алгоритми, наприклад, алгоритм, що застосовує список приоритетів.

Робота алгоритма полігонізації поверхні тіла, яка описується за допомогою R-функцій, заснована на розподілі обмежуючого геометричний об'єкт паралелепіпеда на елементарні паралелепіпеди та визначенні знаку функції $\omega(x, y, z)$ у їх вершинах.

Приведені алгоритми використовувались для побудови реалістичних зображень у роботах [2, 3, 12].



Мал. 1

В основу інтерполяційного алгоритму побудови аксонометричних проекцій трикутних граней покладені алгоритми розкладання відрізку у растр та лінійної інтерполяції функцій. Вхідною інформацією для цього алгоритму є координати вершин грані та задані у них значення функції, що досліджується, і функції-предиката. Результат - зображення грані на екрані дисплея, при цьому точки, в яких функція-предикат приймає від'ємні значення, не повинні зображуватись. Колір інших точок грані вибирається по шкалі кольорів в залежності від значення функції, що досліджується. На мал.1 приведено результат роботи інтерполяційного алгоритму побудови аксонометричних проекцій трикутних граней.

Для створення на основі системи "Поле" проблемно-орієнтованих систем для розв'язку вузьких класів крайових задач, у дисертаційній роботі пропонуються графічні пре- та постпроцесор системи "Поле". Графічний препроцесор системи "Поле" призначено для інтерактивної побудови рівнянь складних геометричних об'єктів. У роботі описано схему організації зберігання даних і доступу до них, перетворення геометріко-логічної інформації до аналітичного виду, метод стикування препроцесора з програмами інтегрування та виведення результатів розв'язку задачі, схема взаємодії з користувачем.

Графічний постпроцесор складається із:

- операторів мови RL, які призначені для візуалізації результатів розв'язків крайових задач математичної фізики у системі "Поле";
- бібліотеки стандартних програм на фортрані;
- програмного комплекса візуалізації результатів наукових та інженерних розрахунків у системі "Поле".

Використання графічного постпроцесора дозволяє подати аналітичну інформацію про фізико-механічні поля, що досліджуються, у графічному виді: у виді картин ліній рівня, ізоліній, аксонометричних проекцій, графіків у різних перетинах, картин деформацій, та течій. При побудові графіків функцій, які задані у табличному вигляді, можливо їх зглаження за допомогою В-сплайнів. У додатках 4 та 5 наводяться приклади оформлення результатів розв'язків крайових задач із застосуванням програмного комплексу візуалізації результатів наукових та інженерних розрахунків у системі "Поле".

У третій главі наводяться результати обчислювальних експериментів, метою яких було дослідження жмутків функцій (1, 2, 4, 6). При дослідженні жмутків (1, 2) вивчалась поведінка відносної похибки наближенного розв'язку в залежності від розмірності апроксимаційних просторів невизначених компонент Φ_1 та Φ_2 при різному співвідношенні коефіцієнтів у головних напрямках $\lambda_{yy}/\lambda_{xx}$, різних значеннях коефіцієнта тепловіддачі α та параметра γ у структурі (1), а також параметра d у структурі (2).

Як тестову задачу було вибрано крайову задачу для рівняння Пуассона, що має точне рішення. Наближений розв'язок поставленої задачі отримано варіаційно-структурним методом з використанням системи "Поле".

Відносна похибка рішення визначалась за нормами функціональних просторів L_2 та C.

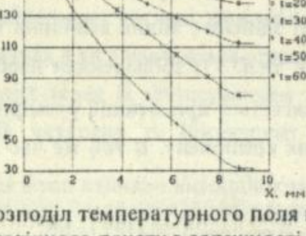
Основні результати обчислювальних експериментів наведено у додатку 6. Їх аналіз виявляє, що:

- із збільшенням розмірності апроксимаційних просторів невизначених компонент Φ_1 та Φ_2 спостерігається збіжність наближених розв'язків, які отримано варіаційно-структурним методом, до точного. Більш значний вплив на похибку чинить розмірність апроксимаційного простору невизначеного компонента Φ_1;
- із збільшенням контрасту теплопровідності у головних напрямках ортотропії збільшується похибка наближенного розв'язку;
- на точність наближенного розв'язку значний вплив здійснює величина коефіцієнту тепловіддачі α. З його збільшенням у граничних умовах зменшується вплив членів, які містять часткові похідні, що визиває зниження похибки наближенного розв'язку;
- на швидкість збіжності здійснює вплив величина нелінійних параметрів структурних моделей γ та d. З їх збільшенням необхідна точність наближенного розв'язку досягається при меншій розмірності апроксимаційних просторів невизначених компонент. В той же час існують такі значення цих параметрів, при яких відносна похибка досягає мінімуму. Вони залежать від величин λ_{xx_i}, λ_{xy_i}, λ_{yy_i}, α_i, $i=1,\dots,m$;
- застосування жмутка (2) є більш вигідним з точки зору забезпечення необхідної точності наближенного розв'язку.

При дослідженні жмутків (4, 6), які задовольняють умові ідеального теплового контакту анізотропних середовищ, вивчено вплив на похибку наближенного розв'язку розмірності апроксимаційного простору невизначеного компонента структурної моделі. Зроблено порівняння наближених розв'язків, побудованих на основі жмутків (4, 6), з наближеними розв'язками, для побудови яких використовувались жмутки функцій, що задовольняють умові ідеального теплового контакту як натуральній. Для побудови системи координатних функцій використовувались степенні поліноми та B-сплайни.

Аналіз результатів цього обчислювального експерименту дозволяє зробити висновок, що всі наближені розв'язки, побудовані на основі жмутків функцій (4, 6), добре узгоджуються з точним розв'язком. Застосування жмутків, які задовольняють умові ідеального теплового контакту як натуральній, призводить до значного збільшення похибки.

На прикладі задачі про розрахунок нестаціонарного температурного поля у тришаровій композитній пластині отримано чисельні оцінки ефективності запропонованих алгоритмів розв'язку лінійної нестаціонарної крайової задачі теплопровідності та витрати машинного часу, що необхідний для розв'язку задачі на *n* часових шарах, в залежності від типу ЕОМ, базового програмного та алгоритмічного забезпечення (див. табл.1).



Мал. 2. Розподіл температурного поля по товщині технологічного пакету в залежності від часу

Таблиця 1

Тип ЕОМ	Алгоритм	Компілятор фортрану	
		MS Fortran-77 V. 5.10	MS PS Fortran-77 V. 1.0
AT-386	1	$t_n = 2962.04 + 3507.85(n-1)$	$t_n = 1338.54 + 1585.48(n-1)$
	2	$t_n = 2951.15 + 1303.72(n-1)$	$t_n = 1352.76 + 639.82(n-1)$
	3	$t_n = 2956.88 + 803.27\, h(n-1) + 264.69\, (n-2)\, h(n-2)$	$t_n = 1494.31 + 426.78\, h(n-1) + 141.34\, (n-2)\, h(n-2)$
Pentium-120	1	$t_n = 127.49 + 149.51(n-1)$	$t_n = 22.431 + 27.771(n-1)$
	2	$t_n = 129.07 + 56.68(n-1)$	$t_n = 23.401 + 11.591(n-1)$
	3	$t_n = 128.46 + 34.981\, h(n-1) + 11.581\, (n-2)\, h(n-2)$	$t_n = 25.211 + 7.751\, h(n-1) + 2.591\, (n-2)\, h(n-2)$

Основні результати та висновки

У результаті проведених досліджень досягнуто основну мету роботи - на основі теорії R-функцій та системи "Поле" створено структурні та комп'ютерні моделі процесів стаціонарної та нестаціонарної теплопровідності у анізотропних середовищах з розривними коефіцієнтами теплопровідності. При цьому:

1. Побудовано структурні моделі конвективного теплообміну анізотропного тіла з навколишнім середовищем та ідеального теплового контакту різнорідних анізотропних середовищ. Запропоновані структурні моделі є універсальними: вони допускають виродження анізотропії в ізотропію і кускової однорідності у повну однорідність. Доведено теорему, що дозволяє зробити оцінку нелінійних параметрів побудованих структурних моделей.
2. Для вирішення лінійних нестаціонарних задач теплопровідності реалізовано ефективні алгоритми, які зводять їх вирішення до розв'язку послідовності систем лінійних алгебраїчних рівнянь. На основі аналізу цих алгоритмів даються теоретичні оцінки витрат машинного часу, необхідного для розв'язку задачі на *n* часових шарах.
3. З метою створення програмного комплексу для проведення експрес-аналізу результатів розрахунків фізико-механічних полів у системі "Поле" розроблено алгоритми комп'ютерної графіки: алгоритм вилучення невидних ліній трасировкою променя для тіл, поверхню яких описано за допомогою R-функцій; алгоритм полігонізації поверхні тіла; інтерполяційний алгоритм побудови аксонометричних проекцій трикутних граней.
4. З метою створення проблемно-орієнтованих комп'ютерних комплексів у роботі запропоновано систему для автоматизованої побудови предикатних та аналітичних рівнянь складних геометричних об'єктів. Зазначено проблеми, які виникають при стикуванні цієї системи з системою "Поле" та шляхи їх вирішення.

5. Для проведення експрес-аналізу результатів розрахунків фізико-механічних полів у системі "Поле" створено програмний комплекс для їх візуалізації, який дозволяє подавати їх у виді картин ліній рівня та ізоліній, аксонометричних проекцій, графіків у перетинах.
6. Проведено серію обчислювальних експериментів, які спрямовані на вивчення поведінки запропонованих структурних моделей конвективного теплообміну анізотропного тіла з навколишнім середовищем та ідеального теплового контакту різнорідних анізотропних середовищ при зміні контрасту теплопровідності у головних напрямках анізотропії, характеристик теплообміну з навколишнім середовищем. Досліджено збіжність наближенних розв'язків при зміні розмірності апроксимаційних просторів невизначених компонент структурних моделей. Вивчено вплив на швидкість збіжності нелінійних параметрів структурних моделей.
7. Створено комп'ютерну модель нестаціонарного температурного поля у технологічному пакеті формування тришарових композитних пластин. При проведенні обчислювальних експериментів по моделюванню еволюції температурного поля у технологічному обладнанні отримано реальні витрати машинного часу для вирішення лінійних нестаціонарних задач теплопровідності. На основі результатів хронометражу даються рекомендації по вибору ЕОМ, базового алгоритмічного та програмного забезпечення для проведення експрес-аналізу температурного поля у конструкції.

Автор висловлює щиру вдячність за постійну увагу до його дисертаційної роботи та допомогу науковому керівнику доктору фізико-математичних наук професору О.М.Шевченку, завідуючому відділом прикладної математики та обчислювальних методів ІПМаш НАН України академіку НАН України В.Л.Рвачову, а також доктору технічних наук провідному науковому співробітнику ІПМаш НАН України професору Т.І.Шейко. Автор також вдячний за фінансову підтримку фонду Дж.Сороса (грант PSU051134), Національному науковому фонду США (грант DMI-9522806).

Публікації за темою дисертаційної роботи

Основні результати досліджень відображено у 13 печатних роботах здобувача за темою дисертації, перелік яких наводиться:

1. Шевченко А.Н., Цуканов И.Г. Программное обеспечение для представления результатов моделирования полей в областях сложной формы// Управляющие системы и машины.- 1994.- №4-5.- С.86-89
2. Rvachev V.L., Shevchenko A.N., Tsukanov I.G. Application of R-functions to the Construction of Realistic Images// Pattern Recognition and Image Analysis.- 1994.- Vol.4, №2, P. 123-134
3. Шевченко А.Н., Цуканов И.Г. Построение реалистических изображений с использованием R-функций// Кибернетика и системный анализ.- 1995.- №1.- С.122-128
4. Шевченко А.Н., Цуканов И.Г. Система для интерактивной обработки геометрической, логической и аналитической информации.// Математическое моделирование и оптимизация технических систем и процессов : Сб. науч. тр./ АН Украины. Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова - Киев, 1993.- С. 4-7.
5. Цуканов И.Г. Решение задачи теплопроводности с краевыми условиями конвективного теплообмена в ортотропных средах// Методы оптимизации технических и информационных систем: Сб. науч. тр./ НАН Украины. Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова. - Киев, 1995.- С. 50-54
6. Кириченко В.В., Цуканов И.Г., Тимкин С.В. Расчет температурных режимов формования трехслойных конструкций из КМ// Авиационно-космическая техника и технология: Сб. науч. тр.- Харьков: Харьк. авиац. ин-т им. Н.Е. Жуковского.- 1996.- С.350-354
7. Цуканов И.Г. Структурная модель идеального теплового контакта разнородных ортотропных сред// R-функции в задачах математической физики и прикладной геометрии: Сб. научн. тр., посв. 70-летию В.Л.Рвачева.- Харьков: Харьк. Гос. политехн. ун-т, 1996.- С.28-32
8. Шевченко А.Н., Цуканов И.Г. Диалоговый графический инструментарий

в системе "Поле".- Харьков, 1992.-56с. (Препр./АН Украины. Институт пробл. машиностроения;355).

9. Shevchenko A., Tsukanov I., Rokityanska V. Simulation of Temperature Fields in Forming Products from Composite Materials// Proceedings of EUROSIM'95 Simulation Congress. - Vienna, 1995, P. 777-782

10. Цуканов И.Г. Об одном эффективном алгоритме решения линейной нестационарной задачи теплопроводности методом R-функций // Тез. докл. международной конференции "Математические модели и численные методы механики сплошных сред.-Новосибирск.- май-июнь 1996.- С.499-500

11. Рвачев В.Л., Шейко Т.И., Сизова Н.Д., Цуканов И.Г. R-функции и компьютерное моделирование термомеханических процессов при формовании изделий из композиционных материалов // Тез. докл. IV Международной конференции по механике неоднородных структур.- Львов.- сентябрь 1995.- С.49

12. Рвачев В.Л., Шевченко А.Н., Цуканов И.Г. Применение R-функций для построения реалистических изображений // Тез. докл. всеукраинской конференции "Геометрическое моделирование, инженерная и компьютерная графика",- Харьков, 1993.- С. 150-151

13. Рвачев В.Л., Шевченко А.Н., Цуканов И.Г. Интеллектуальный инструментарий для решения задач математического моделирования// Тез. докл. конференции "Современные проблемы алгоритмизации",- Ташкент, 1991.- С.24

Summary

Tsukanov I.G. Structural and Computer Models of Thermal Processes in Anisotropic Media with Discontinuous Factors of Thermal Conduction.

The dissertation is the manuscript, presented for the candidate science degree in Physics and Mathematics. The speciality number 01.05.02 - Mathematical Modeling and Numerical Methods in Scientific Researches. Institute for Problems in Machinery of the National Academy of Sciences of

Ukraine, Kharkiv, 1997.

13 scientific works are protected.

In this thesis a problem of construction of structural and computer models of temperature fields in anisotropic media is considered. Are offered constructed on the basis of the constructive theory of R-functions structural models of thermal convection anisotropic body with external environment and ideal thermal contact of diverse anisotropic media. Are created effective algorithms and software for realization of the express-analysis of researched physical and mechanical field

Аннотация

Цуканов И.Г. Структурные и компьютерные модели тепловых процессов в анизотропных средах с разрывными коэффициентами теплопроводности.

Диссертация является рукописью, представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.02 - математическое моделирование и вычислительные методы в научных исследованиях. Институт проблем машиностроения НАН Украины, Харьков, 1997.

Защищается 13 научных работ.

В диссертационной работе рассматривается проблема построения структурных и компьютерных моделей температурных полей в кусочно-анизотропных средах. Предлагаются построенные на основе конструктивной теории R-фукнций структурные модели конвективного теплообмена анизотропного тела с внешней средой и идеального теплового контакта разнородных анизотропных сред. Создано эффективное алгоритмическое и программное обеспечение ЭВМ для проведения экспресс-анализа исследуемых физико-механических полей.

<u>Ключові слова:</u>

математичне моделювання, крайові задачі, варіаційні методи, теорія R-функцій, жмутки функцій, структурні та комп'ютерні моделі, експрес-аналіз, алгоритми полігонізації та вилучення невидних ліній, обчислювальний експеримент, проблемно-орієнтовані системи.

Відповідальний за випуск доктор фіз.-мат. наук професор Шевченко О.М.

Підписано до друку 4.03.1997 Формат 60x90

Ум.друк.арк. 1.00 Папір друк. №1

Обл.вид.арк. 0,92 Тираж 100 пр. Зам.№21

Ротапринт Інституту проблем машинобудування НАН України

310046, м.Харків, вул. Дм. Пожарського 2/10.