Міністерство освіти України
Запорізький державний технічний університет

На правах рукопису

Левада Володимир Степанович

Фундаментальні розв'язки двовимірних задач теорії пружності для анізотропних та неоднорідних середовищ

05.02.07 - Механіка деформівного твердого тіла

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

ЗАПОРІЖЖЯ-1997

Дисертацією є рукопис
Работа виконана на кафедрі обчислювальної математики Запорізького державного технічного університету.

Науковий керівник - кандидат фізико-математичних наук
доцент Левицький Ігор Аркадійович

Офіційни опоненти - доктор фізико-математичних наук,
професор Пожуєв В. І.
- кандидат технічних наук,
доцент Волкова Т. Д.

Провідна організація - Дніпропетровський державний університет

Захист відбудеться "11" березня 1997 р. о 15^00
на засіданні спеціалізованої вченої ради К 08.02.03 у Запорізькому державному технічному університеті за адресою:
330063, м. Запоріжжя, МСП-39, вул. Жуковського, 64

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці технічного університету

Автореферат розіслано "7" лютого 1997 р.

Вчений секретар спеціалізованої
вченої ради, д.т.н. I.П. Волчок

Загальна характеристика роботи

Актуальність проблеми. Поведінці пружних тіл під дією зосереджених навантажень присвячено велику кількість робіт. При цьому, для розв'язання відповідних крайових задач застосовувалися різні засоби. До другої половини теперешнього століття домінувала методика вирізання околу точки прикладання навантаження, з послідуючим спрямуванням діаметру до нуля. Для двовимірних задач широко застосовувались методи Колосова-Мусхелишвілі. Зі створенням теорії узагальнених функцій, методи цієї теорії стали використовуватись у механіці. Відмітимо вклад науковців: Андріанов І. В., Власов В.В., Гольдштейн Р.В., Коваленко М.Д., Коляно Ю.М., Кона шенко С.І., Кушнір Р.Н., Лавренюк В.І., Лазарян В.А., Михайлов Б.К.. Образцов І.Ф., Онанов Г.Г., Підстригач Я.С., Шевченко В.П.

Теорія узагальнених функцій дозволила дати єдине означення фундаментального розв'язку, як розв'язку рівняння з дельта-функцією у правій частини рівняння.

Інтерес до фундаментальних розв'язків різко зріс у зв'язку з виникненням та бурхливим розвитком методів граничних елементів (МГЕ). Серцевину цих методів складає знання фундаментальних розв'язків відповідних рівнянь.

При застосуванні МГЕ до зонально-однорідних середовищ, записують відповідне ГІР до конжної однорідної зони та задовілняють умовам спряження на лініях розподілу зон. Якщо лінії розподілу - довгі відрізки, то доречно ввести спеціальні фундаментальні розв'язкі, які задовільняють однорідним умовам спряження на внутришній межі. При використанні такого розв'язку відпадає необхідність дискретизації цієї межи, що істотно знижує розмірність відповідної системи лінійних рівнянь.

Застосування МГЕ до анізотропних середовищ потребує знання відповідних фундаментальних розв'язків. Для плоскої задачі теорії пружності С.Г. Лехницьким методами ТФКЗ було знайдено фундаментальний розв'язок у випадку різних комплексних пружних сталих. Спираючись на цей результат Г.Томлін у 1974 р. одержав повне розв'язання задачі для ортотропного випадку та застосував його у МГЕ.

С.Краучем був запропонований вариант МГЕ - метод розривних переміщень. Цей метод виявився ефективним для дослідження напруженого стану тіл, що мають тріщини. При цьому, використовуються розривні розв'язки, отримані за допомогою фундаментальних розв'язків статичних плоских задач теорії пружності для ізотропних середовищ. Розповсюдження цього методу на анізотропні середовища потребує побудови відповідного розривного розв'язку. Виходячі з вищесказанного, можна сформулювати мету дослідження.

Мета данної роботи полягає у побудові фундаментальних розв'язків деяких двовимірних задач теорії пружності для неоднорідних та анізотропних середовищ і таким чином розширення класу задач теорії пружності, що можуть бути розв'язані МГЕ.

Наукова новизна. У дисертаційній роботі запропоновано оригінальний підхід до знаходження оберненого перетворення Фур'є для дуже сингулярних зображень. У роботі введено один клас узагальнених функцій повільного зростання і отримано для нього обернене перетворення Фур'є. Використовуючи цей результат, у дисертаційній роботі побудовані методом інтегральних перетворень:

фундаментальний розв'язок для задачі згину зонально-однорідної пластини з прямолінійним розподілом;

фундаментальний розв'язок статичної задачі для зонально-однорідної пружної площини;

фундаментальний розв'язок задачі згину анізотропної пластини;

фундаментальні розв'язки статичних задач для анізотропних пружних площини та півплощини.

Достовірність наукових результатів забезпечується: точною постановою задач та коректністю математичних методів, застосованих для їх розв'язання; можливістю зведення, при відповідних значеннях параметрів, до відомих результатів для однорідніх, ізотропних та ортотропних середовищ.

Наукова та практична цінність роботи полягає у можливості застосування отриманих результатів у МГЕ, для розв'язання широкого класу задач теорії пружності для неоднорідних та анізотропних середовищ. Результати роботи можуть бути використані у різних галузях машинобудування та гірничий механіці.

Апробація роботи. Результати роботи доповідались на: Другій Всесоюзній конференції "Механіка неоднорідних структур" (Львів, 1987р.); науковому семінарі в інституті прикладних проблем механіки та математики (Львів, 1987р.); наукових семінарах кафедри обчислювальної математики та звітних наукових конференціях Запорізького державного технічного університету (1980-1996 рр.); міжкафедральному тематичному семінарі за спеціальностю 05.02.07 - "Механіка деформівного твердого тела" Запорізького державного технічного університету (1996р.).

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано 7 робіт.

Структура та об'єм роботи. Дисертаціна робота включає: вступ, три розділи, підсумки. Вона містить 173 сторінки тексту і бібліографічний список, що складається з 75 найменувань літературних джерел.

ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У вступі обгрунтована актуальність роботи, сформульована мета дослідження, наведено огляд робіт, зв'язаних з темою дисертації, викладено короткий зміст роботи, сформульовано положення, що виносяться на захист.

У першому розділі введено один важливий клас узагальнених функцій повільного зростання і для нього виконано обернене перетворення Фур'є. Якщо для побудови фундаментального розв'язку двовимірних эліптичних диференційних операторів зі сталими (кусково-сталими) коефіцієнтами, який задовільняє однорідним краєвим умовам на лінії X=0, застосовується перетворення Фур'є за змінною Y, то у багатьох важливих випадках розв'язок у зображеннях має вигляд

$$\overline{U}(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{m}\left(c_k(x)(-i\lambda)\frac{e^{-a_k(x)|\lambda|}}{|\lambda|^k}+b_k(x)\frac{e^{-d_k(x)|\lambda|}}{|\lambda|^k}\right)$$

$a_k(x)\ge 0$, $d_k(x)\ge 0$, λ - параметр перетворення Фур'є

Для знаходження оригіналу введено слідуючі регуляризації:

Під $reg\left[\frac{e^{-a|\lambda|}}{|\lambda|^{n+1}}\right]$ будемо розуміти узагальнені функції $z_{n,a}(\lambda)\in L'$,

що мають порядок не вище n, нескінчено диференційовані по параметру a, $\forall a\ge 0$, задовільняють рівнянням $|\lambda|^{n+1}Z_{n,a}(\lambda)=e^{-a|\lambda|}$, n=0,1,2,... (1)

та умовам узгодженості $\frac{\partial Z_{n,a}(\lambda)}{\partial a}=-Z_{n-1,a}(\lambda)$, n=1,2,... (2)

$$\frac{\partial^2 Z_{n,a}(\lambda)}{\partial a^2}=\lambda^2 Z_{n,a}(\lambda),\ n=1,2,... \tag{3}$$

$$\frac{\partial Z_{0,a}(\lambda)}{\partial a}=-e^{-a|\lambda|} \tag{4}$$

У розділі побудовано загальний розв'язок (1)-(4) і одержано обернене перетворення Фур'є для цих розв'язків.

$$F^{-1}\left[Z_{n,a}(\lambda)\right](y)=\frac{(-1)^{m+1}}{\pi n!}\left[\left(\ln\sqrt{a^2+y^2}+\gamma-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)*a^{n-2m}\sum_{S=0}^{m}(-1)^{m-S}C_n^{2(m-S)}y^{2(m-S)}a^{2S}-arctg\frac{y}{a}\left[\frac{(-1)^m}{2}y^n*\right.\right.$$

$$\left.\left.*\left(1+(-1)^{n+1}\right)+a^{n-2m}\sum_{S=1}^{m}(-1)^{m-S}C_n^{2(m-S)+1}a^{2S-1}y^{2(m-S)+1}\right]\right]+\frac{(-1)^n}{2\pi}\sum_{S=0}^{m}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=j}^{n-2S}\frac{c_{jk}(-1)^{S-j}}{(i)^j(j+2S)!}\frac{a^{n-(k+2S)}y^{j+2S}}{(n-(k+2S))!} \tag{5}$$

C_{jk} - будь-які сталі.

Формула (5) постійно використовується у наступних розділах роботи.

Другий розділ присвячений побудові фундаментальних розв'язків статичних задач двовимірної теорії пружности для зонально-однорідних тіл.

Насамперед була розглянута задача згину пластини.

$$D_i\Delta\Delta G(x,y,\xi,\eta)=\delta(x-\xi)\delta(y-\eta) \qquad (i=1,2) \tag{6}$$

при умовах

$$\lim_{x\to+0} G=\lim_{x\to-0} G \tag{7}$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\partial G}{\partial x}=\lim_{x\to-0}\frac{\partial G}{\partial x} \tag{8}$$

$$\lim_{x\to+0} D_1\left[\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\nu_1\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right]=\lim_{x\to-0} D_2\left[\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\nu_2\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right] \tag{9}$$

$$\lim_{x\to+0} D_1\left[\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}+(2-\nu_1)\frac{\partial^3 G}{\partial x\partial y^2}\right]=\lim_{x\to-0} D_2\left[\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}+(2-\nu_2)\frac{\partial^3 G}{\partial x\partial y^2}\right] \tag{10}$$

де $D_i=\dfrac{E_i h_i^3}{12(1-\nu_i^2)}$ - жорсткості пластини,

E_i,ν_i - модулі пружності та коефіцієти Пуассона.

Умови (7)-(10) - умови спряження на лінії розподілу середовищ X=0. Ці умови виражають: неперервність прогинів, кутів нахилу, згинних моментів, узагальнених перерізуючих зусиль.

Застосувавши до (6)-(10) перетворення Фур'є по Y і скориставшись (5), одержуємо розв'язок (6)-(10)

$$G=\begin{cases}\dfrac{1}{8\pi D_1}\left[r^2\ln r-(y-\eta)^2\right]+\dfrac{S}{8\pi D_1\Delta}\left[\bar r^2\ln\bar r-(y-\eta)^2-4x\xi(\ln\bar r+\tfrac{1}{2})\right]+\\ +\dfrac{D_1-D_2+\nu_1 D_1-\nu_2 D_2}{2\pi\Delta}\left[((y-\eta)^2-(x+\xi)^2)(\ln\bar r-1)+2(x+\xi)(y-\eta)\operatorname{arctg}\dfrac{y-\eta}{x+\xi}\right],\\ \text{при } \xi\geq 0,\ x\geq 0,\\ \dfrac{D_1+D_2}{\pi\Delta}\left[r^2\ln r-(y-\eta)^2\right]+\dfrac{D_1-D_2+\nu_1 D_1-\nu_2 D_2}{\pi\Delta}\left[(x+\xi)(y-\eta)\operatorname{arctg}\dfrac{y-\eta}{\xi-x}+(x^2-\xi^2)(\ln r-\tfrac{1}{2})\right],\\ \text{при } \xi\geq 0,\ x<0;\end{cases} \tag{11}$$

де $r=((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)^{\frac{1}{2}}$; $\bar r=((x+\xi)^2+(y-\eta)^2)^{\frac{1}{2}}$,

$$S=D_1^2+2D_1D_2-2\nu_1D_1^2+2\nu_2D_1D_2+\nu_1^2D_1^2-2\nu_1\nu_2D_1D_2-2\nu_1D_1D_2-3D_2^2+\nu_2D_2^2+\nu_2^2D_2^2$$

Для $\xi<0$ розв'язок одержуємо з (11) одержуємо заміною x на (-x), ξ на $(-\xi)$, D_1 на D_2на, D_2 на D_1, ν_1 на ν_2, ν_2 на ν_1.

На малюнках 1 та 2 зображено чинники, від яких залежить отриманий розв'язок

При $D_1 = D_2 = D$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ з (11) одержуємо $G = \frac{1}{8\pi D}\left[r^2 \ln r - (y-\eta)^2\right]$.
Якщо відкинути $-\frac{1}{8\pi D}(y-\eta)^2$, що задовільняє однорідному рівнянню (6), та умовам (7)-(10), отримуємо відомий фундаментальний розв'язок для задачі згину однорідної пластини.

Далі у розділі було розглянуто тестову задачу, що розв'язовувалась МГЕ, з використанням знайденого фундаментального розв'язку. Результати показали, що отриманий розв'язок може ефективно використовуватись.

Слідуюча задача, що розглядалася у цьому розділі стосувалася побудови матриці фундаментальних розв'язків для зонально-однорідної пружної площини.

$$DL(\sigma,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y})\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}F_1\\F_2\end{pmatrix}\delta(x-\xi)\delta(y-\eta) \tag{12}$$

$$(D,\sigma)=\begin{cases}(D_1,\sigma_1)\ \text{при}\ x>0\\(D_2,\sigma_2)\ \text{при}\ x<0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+0}B(D,\sigma,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y})\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}=\lim_{x\to-0}B(D,\sigma,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y})\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix} \tag{13}$$

де $L(\sigma,S,q)=\begin{pmatrix}S^2+\frac{1-\sigma}{2}q^2 & \frac{1+\sigma}{2}Sq\\ \frac{1+\sigma}{2}Sq & q^2+\frac{1-\sigma}{2}S^2\end{pmatrix}$,

$$B(D,\sigma,S,q)=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\DS & D\sigma q\\ \frac{D(1-\sigma)}{2}q & \frac{D(1-\sigma)}{2}S\end{pmatrix}$$

$D=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\sigma=\frac{\nu}{1-\nu}$, для плоскої деформації;

$D=\frac{E}{(1-\nu^2)}$, $\sigma=\nu$, для узагальненого плоского напруженого стану.

F_1, F_2 - комоненти вектора сили, засереджено у точці (ξ,η)

U, V - переміщення у напрямку вісей OX і OY.

Умови (13) виражають неперервність переміщень та напружень на лінії розподілу середовищ.

Застосоювучи методику розв'язання задачі (6)-(10) та позначивши $\Gamma_{11} = U/F_1 = 1, F_2 = 0$; $\Gamma_{21} = V/F_1 = 1, F_2 = 0$; $\Gamma_{12} = U/F_1 = 0, F_2 = 1$; $\Gamma_{22} = V/F_1 = 0, F_2 = 1$;
одержуємо матрицю фундаментальних розв'язків.

$$\Gamma_{kk} = \begin{cases} -\dfrac{3-\sigma_1}{4D_1(1-\sigma_1)\pi}\ln r + (-1)^{k+1}\dfrac{(1+\sigma_1)(x-\xi)^2}{4D_1(1-\sigma_1)\pi r^2} + \dfrac{S_1 \ln\bar r}{4D_1(1-\sigma_1)\pi\Delta} + \\ +(-1)^k \dfrac{S_2(x+\xi)^2}{4D_1(1-\sigma_1)\pi\Delta\bar r^2} - \dfrac{S_2 x\xi\left[(x+\xi)^2-(y-\eta)^2\right]}{2D_1(1-\sigma_1)\pi\Delta\bar r^4}, \text{ при } \xi\ge 0,\ x\ge 0 \\ \dfrac{S_7\ln r}{\pi\Delta} + (-1)^k\dfrac{S_5 x(\xi-x)}{\pi\Delta r^2} + (-1)^k\dfrac{S_6\xi(\xi-x)}{\pi\Delta r^2}, \text{ при } \xi\ge 0,\ x<0 \end{cases} \tag{14}$$

$$\Gamma_{ij} = \begin{cases} \dfrac{(1+\sigma_1)(x-\xi)(y-\eta)}{4(1-\sigma_1)\pi D_1 r^2} + (-1)^{j+1}\dfrac{S_4}{\pi\Delta}arctg\dfrac{y-\eta}{x+\xi} - \dfrac{S_2(x-\xi)(y-\eta)}{4(1-\sigma_1)\pi\Delta D_1\bar r^2} + \\ +(-1)^{j+1}\dfrac{S_3 x\xi(x+\xi)(y-\eta)}{(1+\sigma_2)\pi\Delta D_1\bar r^4}, \text{ при } \xi\ge 0,\ x\ge 0 \\ \dfrac{S_5 x(y-\eta)}{\pi\Delta r^2} + \dfrac{S_6\xi(y-\eta)}{\pi\Delta r^2} + (-1)^{j+1}\dfrac{S_4}{\pi\Delta}arctg\dfrac{y-\eta}{\xi-x}, \text{ при } \xi\ge 0,\ x<0 \end{cases} \tag{15}$$

$k,i,j = 1,2;\ i\ne j$

$\{\Delta, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7\}(D_1, D_2, \sigma_1, \sigma_2)$

У випадку $\xi < 0$ розв'язок (12), (13) отримуємо з (14),(15) за допомогою замін: $D_1 \leftrightarrow D_2$, $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$, $x \to -x$, $\xi \to -\xi$, $\eta \to -\eta$.

Одержані розв'язкі залежать від чинників, зображенних на мал.1 та 2. При рівності параметрів отримуємо відомі розв'язкидля однорідної пружної площини.

<u>**Третій розділ**</u> присвячено задачам для анізотропних середовищ. Першою розв'язувалась задача побудови фундаментального розв'язку для згину анізотропної площини.

$$D_{11}\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 4D_{16}\frac{\partial^4 W}{\partial x^3\partial y} + 2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2} + 4D_{26}\frac{\partial^4 W}{\partial x\partial y^3} + D_{22}\frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \delta(x)\delta(y) \tag{16}$$

$W(x,y)$ - прогин пластин, D_{ij} - жорсткості анізотропії, $\delta(x)\delta(y)$ - дельта-функція Дірака.

Таким чином, розглядається нескінчена анізотропна пластина, навантажена одиничним поперечним зосередженим навантаженням у точці (0,0). Знаючи W, можна знайти усі характеристики згину.

Застосовуючи перетворення Фур'є і використовуючи (5), приходимо до висновку, що розв'язок (16) залежить від вигляду коренів рівняння

$$D_{11}P^4 + 4D_{16}P^3 + 2(D_{12}+2D_{66})P^2 + 4D_{26}P + D_{22} = 0.$$

Це рівняння може мати два варіанта коренів:

1. $P_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1$, $P_{3,4} = \alpha_2 \pm i\beta_2$;
2. $P_{1,2} = \alpha + i\beta$, $P_{3,4} = \alpha - i\beta$;

де $\beta_1, \beta_2, \beta > 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha \in R$.

P_i - обернені до комплексних параметрів згину С.Г. Лехницького.
Розв'язок (16) має слідуючий вигляд.

Перший варіант коренів

$$W = \frac{1}{4\pi\beta_1\beta_2 Q D_{11}} \{\beta_2(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\beta_2^2-\beta_1^2-2\alpha_1\alpha_2)[\bar{r}_1^2 \ln r_1 + 2\beta_1 x(y+\alpha_1 x)\Theta_1] +$$
$$+\beta_1(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\beta_1^2-\beta_2^2-2\alpha_1\alpha_2)[\bar{r}_2^2 \ln r_2 + 2\beta_2 x(y+\alpha_2 x)\Theta_2] + 2\beta_1\beta_2(\alpha_1-\alpha_2) *$$
$$*[\bar{r}_1^2\Theta_1 - 2\beta_1 x(y+\alpha_1 x)\ln r_1 - \bar{r}_2^2\Theta_2 + 2\beta_2 x(y+\alpha_2 x)\ln r_2]\}, \qquad (17)$$

де $r_i = (x^2(\alpha_i^2+\beta_i^2)+2\alpha_i xy+y^2)^{\frac{1}{2}}$,

$\bar{r}_i = (x^2(\alpha_i^2-\beta_i^2)+2\alpha_i xy+y^2)^{\frac{1}{2}}$, $\Theta_i = \mathrm{arctg}(\frac{y}{x\beta_i}+\frac{\alpha_i}{\beta_i})$.

$Q_1 = Q(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$

Другий варіант коренів

$$W = \frac{1}{8\pi\beta^3 D_{11}}\left(x^2(\alpha^2+\beta^2)+2\alpha xy+y^2\right)\ln\left(x^2(\alpha^2+\beta^2)+2\alpha xy+y^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (18)$$

Якщо у (18)покласти α=0, β=1, то ми отримуємо відомий фундаментальний розв'язок для бігармонічного оператору.

Далі розглядалася задача побудови матриці фундаментальних розв'язків для анізотропної пружної площини.

Була розглянута плоска задача, за умови, XOY - площина пружної симетрії, а вісь OZ перпендикулярна до цієї площини.

$$A\left(b_{11}, b_{12}, b_{22}, b_{16}, b_{26}, b_{66}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}\delta(x)\delta(y) \qquad (19)$$

$$A(b_{11}, ..., b_{66}, S, q) = \begin{pmatrix} b_{11}S^2 + 2b_{16}Sq + b_{66}q^2 & b_{16}S^2 + (b_{12}+b_{66})Sq + b_{26}q^2 \\ b_{16}S^2 + (b_{12}+b_{66})Sq + b_{26}q^2 & b_{66}S^2 + 2b_{26}Sq + b_{22}q^2 \end{pmatrix},$$

b_{ij} - пружні сталі.

Для узагальненого плоского напруженого стану відповідні рівняння одержуються з (19) заміною b_{ij} на $b_{ij}^* = b_{ij} - \frac{b_{i3}b_{j3}}{b_{33}}$. Розв'язок задачі (19) залежить від коренів рівняння

$$(b_{11}b_{66} - b_{16}^2)P^4 + 2(b_{11}b_{26} - b_{16}b_{12})P^3 + (b_{12}b_{22} + 2b_{16}b_{26} - b_{12}^2 - 2b_{12}b_{66})P^2 +$$
$$2(b_{16}b_{22} - b_{12}b_{26})P + (b_{66}b_{22} - b_{26}^2) = 0$$

Це рівняння може мати два варіанти коренів, як і у задачі (16). У випадку узагальненого плоського напруженого стану ці корені обернені до комплексних пружних сталих С.Г. Лехницького.

Використовуючи методику розв'язання попередньої задачі, отримуємо розв'язок (19).

Перший варіант коренів

$$U=\frac{1}{D_1 2\pi\beta_1\beta_2}\left\{-F_1\left[\beta_2 H_1(\varphi_1-\tilde{\varphi}_1)+\beta_2 H_2\ln r_1+\beta_1\tilde{H}_2\ln\tilde{r}_1\right]-F_2\left[\beta_2 H_3(\varphi_1-\tilde{\varphi}_1)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\beta_2 H_4\ln r_1+\beta_1\tilde{H}_4\ln\tilde{r}_1\right]\right\} \tag{20}$$

$$V=\frac{1}{2\pi\beta_1\beta_2 D_1}\left\{-F_1\left[\beta_2 H_3(\varphi_1-\tilde{\varphi}_1)+\beta_2 H_4\ln r_1+\beta_1\tilde{H}_4\ln\tilde{r}_1\right]-F_2\left[\beta_2 H_5(\varphi_1-\tilde{\varphi}_1)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\beta_2 H_6\ln r_1+\beta_1\tilde{H}_6\ln\tilde{r}_1\right]\right\} \tag{21}$$

$$r_1(x,y)=\left(x^2(\alpha_1^2+\beta_1^2)+2\alpha_1 xy+y^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\varphi_1(x,y)=arctg\left(\frac{y}{x\beta_1}+\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right),$$

$$\tilde{f}(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)=f(\alpha_2,\alpha_1,\beta_2,\beta_1),$$

$$\{H_1,H_2,H_3,H_4,H_5,H_6,D_1\}(b_{11},\ldots,b_{66},\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$$

Другий варіант коренів

$$U=\frac{1}{4\pi D_2}\left\{F_1\left[-K_1\ln r+\frac{m_{23}}{r^2}\right]+F_2\left[-K_4\ln r+\frac{m_{56}}{r^2}\right]\right\} \tag{22}$$

$$V=\frac{1}{4\pi D_2}\left\{F_1\left[-K_4\ln r+\frac{m_{56}}{r^2}\right]+F_2\left[-K_7\ln r+\frac{m_{89}}{r^2}\right]\right\} \tag{23}$$

$$r=\left(x^2(\alpha^2+\beta^2)+2\alpha xy+y^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$m_{ij}=\left(K_j\alpha-K_i\beta\right)x^2+K_j xy,$$

$$\{K_1,K_2,K_3,K_4,K_5,K_6,K_7,K_8,D_2\}(b_{11},\ldots,b_{66},\alpha,\beta).$$

З (20)-(23) були отримані компоненти тензора напружень. Матриця фундаментальних розв'язків знаходиться з (20)-(23) слідуючим чином:

$$\Gamma_{11}(x,y,\xi,\eta)=U(x-\xi,y-\eta)\Big/_{F_1=1,F_2=0};$$

$$\Gamma_{21}(x,y,\xi,\eta)=V(x-\xi,y-\eta)\Big/_{F_1=1,F_2=0};$$

$$\Gamma_{12}(x,y,\xi,\eta)=U(x-\xi,y-\eta)\Big/_{F_1=0,F_2=1};$$

$$\Gamma_{22}(x,y,\xi,\eta)=V(x-\xi,y-\eta)\Big/_{F_1=0,F_2=1}.$$

Далі, у розділі були побудовані матриці Грина для анізотропної півплощини з непересувним та вільним краєм.

Останньою розглядалася задача побудови розривних розв'язків для анізотропної пружної площини.

$$A\left(b_{11},\dots,b_{66},\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \tag{24}$$

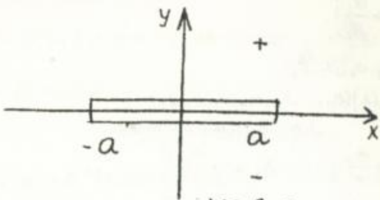
$$\begin{cases}U(x,+0)-U(x,-0)=B_1\\ V(x,+0)-V(x,-0)=B_2\\ \delta_y(x,+0)=\sigma_y(x,-0)\\ \tau_{xy}(x,+0)=\tau_{xy}(x,-0)\end{cases} \quad \text{при } y=0,\ x\in(-a,a) \tag{25}$$

B_1, B_2 - сталі.

Переміщення та напруження неперервні,

при $(x,y)\in R^2\setminus[-a,a]\times\{0\}$ (26)

Напруження прямують до 0 при $x^2+y^2\to\infty$ (27)



Мал. 3

Розглядаючи U(x,y), V(x,y), як узагальнені функції, позначаючи через $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ похідні в сенсі узагальнених функцій, а через $\frac{\tilde\partial}{\partial x}$, $\frac{\tilde\partial}{\partial y}$ звичайні похідні, використовуючі (24)-(26), приходимо до рівняння.

$$A\left(b_{11},\dots,b_{66},\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}U(x,y)\\V(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{66}B_1+b_{26}B_2\\b_{26}B_1+b_{22}B_2\end{pmatrix}\frac{\partial\delta(l)}{\partial y} \tag{28}$$

$\delta(l)$ - дельта-функція, зосереджена на відрізку (-a,a). Використовуючи знайдену матрицю фундаментальних розв'язків, з (28) отримуємо

$$\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}=-\int_{-a}^{a}\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(x-\xi,y)d\xi\begin{pmatrix}b_{66}B_1+b_{26}B_2\\b_{26}B_1+b_{22}B_2\end{pmatrix} \tag{29}$$

З (29) було знайдено розв'язок задачі (24)-(27), а також - компоненти тензора напружень.

При відповідних сталих цей розв'язок співпадає із знайденим Краучем для ізотропного випадку.

<u>**У підсумках**</u> результати роботи сформульовані у вигляді слідуючих висновків:

1. Введено один клас узагальнених функцій повільного зростання. Для функцій цього класу виконано обернене перетворення Фур'е. Цей

результат дає можливість легко отримувати фундаментальні розв'язки для ряду задач теорії пружності.

2. Використовуючи введений клас узагальнених функцій, побудовано фундаментальний розв'язок для задачі згину зонально-однорідної ізотропної пластини з прямолінійним розподілом середовищ.
3. Побудована матриця фундаментальних розв'язків для зонально-однорідної пружної площини з прямолінійним розподілом середовищ.
4. Побудовано фундаментальний розв'язок для задачі згину анізотропної пластини.
5. Побудована матриця фундаментальних розв'язків для анізотропної пружної півплощини з непересувним краєм.
6. Побудована матриця фундаментальних розв'язків для анізотропної пружної площини.
7. Побудована матриця фундаментальних розв'язків для анізотропної пружної півплощини з вільним краєм.
8. Побудовано розривний розв'язок для анізотропної пружної площини.

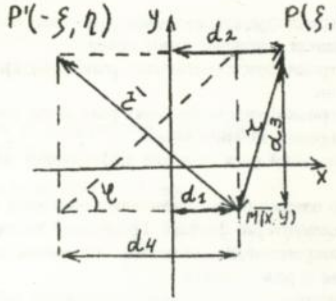
Слід відмітити, що одержані фундаментальні розв'язки виражені у замкненій формі через елементарні функції. Громіздкий вигляд отриманих розв'язків робить їх малопридатними для якісних висновків, але їх використання у МГЕ виглядає перспективним.

Основний зміст дисертації опубліковано у слідуючих роботах:

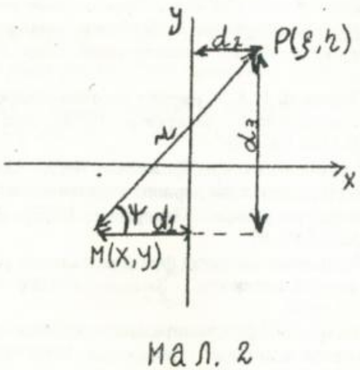
1. Левада В.С., Левицкий И.А. Построение фундаментального решения для кусочно-однородных пластин с прямолинейным разделом. - Математическая физика, 1981, вып. 31, с.87-92.
2. Левада В.С., Левицкий И.А. Построение матрицы фундаментальных решений для упругой кусочно-однородной плоскости с прямолинейным разделом. - В кн.: Новые конструкционные материалы, эффективные методы их получения и обработки, повышения надежности и долговечности деталей и конструкций. Киев: УМК ВО, 1991; с.124-126.
3. Левада В.С., Левицкий И.А. К расчету кусочно-однородных плас тин с прямолинейным разделом. - Запорожье, 1983. - Деп. В УкрНИИТИ, №1463-Ук-Д83.
4. Левада В.С. К применению преобразования Фурье для построения фундаментального решения двумерного эллиптического дифференциального оператора. - Запорожье, 1987. - Деп. В УкрНИИТИ, №706-Ук-87.
5. Левада В.С. Построение матрицы фундаментальных решений для анизотропной упругой плоскости. - Запорожье, 1996. -Деп. В ГНТБ Украины, №475-Ук96.
6. Левада В.С. Построение фундаментального решения для задачи изгиба анизотропной пластины. - Запорожье, 1996. -Деп. В ГНТБ Украины, №476-Ук96.
7. Левада В.С., Нагорный Ю.И., Попрыгина Т.Ф. Применение метода конечных и граничных элементов к решению прикладных задач теории упругости для неоднородных сред. - В кн.: Механика

неоднородных структур: Тезисы докладов Второй Всесоюз. конференции. - Львов, 1987. с.175.

У роботах, написаних у співавторстві, автору належить методика розв'зання задач, участь у їх постановці, ров'зуванні ти аналізі результатів.



мал 1



мал. 2

Summary

Levada V.S. Fundamental solutions of two-dimensional elasticity problems for anisotropic and nonhomogeneous mediums. Dissertation is manuscript.

The dissertaion on scientific degree of candidate of technical sciences on specialities 05.02.07 - mechanice of deformable slid body, Zaporozhye, 1997.

Fundamental solution for zoned homogeneous elastic plane, fundamnetal solution for zoned homogeneous plate bending problem, fundamental solutions for anisotropic elastic plane and halfplane, fundamental solution for anisotropic plate bending problem, discontinuous solution for anisotropic elastic plane are obtained by methods of theory of distribution.

Аннотация

Левада В.С. Фундаментальные решения двумерных задач теории упругости для анизотропных и неоднородных сред. Диссертацией является рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.02.07. - механика деформируемого твердого тела, Запорожский государственный технический университет, Запорожье, 1997.

С использованием аппарата теории обобщенных функций, получены фундаментальные решения: для кусочно-однородной упругой плоскости, для задачи изгиба кусочно-однородной пластины, для анизотропных упругой плоскости и полуплоскости, для задачи изгиба анизотропной пластины. Получено разрывное решение для анизотропной упругой плоскости.

Ключові слова: узагальнена функція, дельта-функція, перетворення Фур'є, анізотропна пружна площина, згин, деформація, напружений стан.

Подписано к печати 13.01.97 Объем 1 п.л. Тираж 100 экз. Заказ № 25

330600 г.Запорожье, ЗГТУ, Типография, ул.Гоголя, 64