НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

РОЙТБЕРГ Борис Якович

ЕЛІПТИЧНІ ГРАНИЧНІ ЗАДАЧІ В ОБЛАСТЯХ З НЕГЛАДКИМИ МЕЖАМИ В ПОВНИХ ШКАЛАХ БАНАХОВИХ ПРОСТОРІВ

01.01.02 — диференціальні рівняння

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Київ — 1997

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано на кафедрі математичного аналізу Чернігівського державного педагогічного інституту ім. Т. Г. Шевченка.

Науковий керівник – доктор фізико-математичних наук, академік НАН України
Березанський Юрій Макарович;

Офіційні опоненти – доктор фізико-математичних наук, професор Ейдельман Самуїл Давидович;
доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник Горбачук Валентина Іванівна.

Провідна установа: Інститут прикладної математики і механіки НАН України

Захист відбудеться "11" березня 1997 р. в 15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.66.02 в Інституті математики НАН України за адресою: 252601, Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Інституту.

Автореферат розісланий "28" 01 1997 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Лучка А.Ю.

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. Починаючи з 60-х років в роботах Ліонса – Маджeнеса, Ю.М. Березанського – С.Г. Крейна – Я.А. Ройтберга та інших було встановлено так звані теореми про повний набір ізоморфізмів для еліптичних задач в областях з гладкими межами. Ці теореми стверджують, грубо кажучи, що оператор еліптичної задачі встановлює ізоморфізм між просторами функцій, що "мають s і $s-r$ похідних" (s – довільне дійсне число, r – порядок задачі). Ці теореми, важливі самі по собі, знайшли чисельні застосування у спектральній теорії, для локального підвищення гладкості узагальнених розв'язків, для дослідження слідів узагальнених розв'язків еліптичних рівнянь на многовидах різних розмірностей, для побудови і вивчення матриць Гріна, для вивчення еліптичних задач з степеневими особливостями в правих частинах, для вивчення класу сильно вироджених еліптичних задач, для вивчення задач про оптимальне управління, задач механіки. В наведених вище роботах еліптичні задачі вивчались в областях з гладкими межами. Проте, після відомої роботи В. А. Кондратьєва (1967), еліптичні задачі вивчались багатьма математиками в класах достатньо гладких функцій в областях, межі яких містять конічні точки, ребра, тощо. Відмітимо тут роботи В. Г. Мазьї, Б. О. Пламеневського, Грісварда, Ескіна, Майстера, Костабеля, Дож, Россмана та ін. Тому природно виникає задача про встановлення теорем про повний набір ізоморфізмів для еліптичних граничних задач в областях з негладкими межами і про розвинення застосувань цих теорем. Розв'язанню цієї задачі, поставленої Ю. М. Березанським, присвячено дану роботу. Крім того, в роботі досліджено питання про локальне підвищення гладкості узагальнених розв'язків впритул до гладких відкритих кусків межі. Останню задачу поставив у 1992 році В. А. Кондратьєв.

Мета роботи. Довести теореми про повний набір ізоморфізмів в областях з негладкими межами для еліптичних граничних задач для одного рівняння, для загальних систем рівнянь, для еліптичних задач трансмісії; розвинути застосування цих теорем, довести твердження про локальне підвищення гладкості узагальнених розв'язків.

Метод дослідження. Використовуються і розвиваються методи функціонального аналізу і теорії операторів, які в останні роки застосовуються для дослідження розв'язності граничних задач в узагальнених функціях.

Наукова новина. Одержані в роботі результати є новими.

Теоретична і практична цінність роботи. В роботі досліджено еліптичні граничні задачі, задачі трансмісії в повних шкалах банахових просторів. Ці результати застосовні до дослідження граничних задач з довільними степеневими особливостями правих частин, для дослідження задач з сильним виродженням, для побудови і дослідження матриць Гріна і т. д. Відмітимо також, що еліптичними граничними задачами для загальних систем є важливі задачі теорії пружності і гідродинаміки.

Апробація роботи. Результати роботи доповідались на семінарах Інституту математики НАН України та кафедри матаналізу Чернігівського педінституту, а також на ряді міжнародних конференцій [2, 3, 7, 8].

Публікації. Основні результати дисертації викладено в 10 роботах. Список публікацій – в кінці автореферату.

Структура та обсяг роботи. Дисертацію викладено на 104 сторінках. Вона складається з вступу, трьох розділів та списку літератури.

Основні результати, що виносяться до захисту.

1. Теореми про локальне підвищення гладкості і про повний набір ізоморфізмів для еліптичної задачі для одного рівняння в області з негладкою межею.
2. Теореми про локальне підвищення гладкості і про повний набір ізоморфізмів для еліптичної задачі для системи структури Дугліса - Ніренберга в області з негладкою межею.
3. Теореми про локальне підвищення гладкості і повний набір ізоморфізмів для еліптичних задач трансмісії в областях з негладкими межами.

Зміст роботи

1. Поняття узагальненого розв'язку еліптичної задачі в негладкій області. Нехай $G \subset I\!R^n$ – обмежена область, її межа ∂G містить конічні точки, ребра; $M \subset \partial G$ – множина особливих точок межі; $\partial G \setminus M \in C^\infty$; всі похідні функцій, що задають $\partial G \setminus M$ в локальних координатах, обмежені.

В G розглядається еліптична гранична задача

$$L(x,D)u(x) = f(x) \qquad (x\in G,\ \mathrm{ord}L=2m),$$
$$B_j(x,D)u(x)|_{\partial G\setminus M} = \phi_j(x)\ (j=1,\dots,m;\mathrm{ord}B_j=m_j). \tag{1}$$

Скрізь у роботі вважається, що коефіцієнти диференціальних виразів визначені і нескінченно гладкі в околах в IR^n множин $\overline{G}$ і ∂G, відповідно; всі похідні коефіцієнтів обмежені.

Введемо поняття узагальненого розв'язку задачі (1). За допомогою інтегрування частинами знайдемо:

$$(Lu,v)=(u,L^+v)+\sum_{j=1}^{2m}\langle D_\nu^{j-1}u,\Lambda_{2m-j+1}v\rangle$$
$$(u\in C^\infty(\overline{G}\setminus M),\ v\in C_M^\infty(\overline{G})),$$

де v належить до $C_M^\infty(\overline{G})$, якщо $v\in C^\infty(\overline{G})$ аннулюється в деякому околі в $\overline{G}$ множини M. Тут і нижче $(\cdot,\cdot)$ і $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярні добутки (або їх розширення) відповідно в $L_2(G)$ і $L_2(\partial G)$; вираз L^+ формально спряжений до L; $D_\nu = i\partial/\partial\nu$, ν-нормаль до $\partial G\setminus M$; $\mathrm{ord}\Lambda_k(x,D) = k-1 \quad (k=1,\dots,2m)$. Тому рівняння (1) еквівалентне співвідношенням

$$(u_0,L^+v)+\sum_{1\le j\le 2m}\langle u_j,\Lambda_{2m-j+1}v\rangle=(f_0,v)\,(v\in C_M^\infty(\overline{G})). \tag{2}$$

Тут $u_0=u|_{\overline{G}}$, $u_j=D_\nu^{j-1}u|_{\partial G\setminus M}$, $f_0=f|_{\overline{G}}$.

Аналогічно, якщо $B_j(x,D)=\sum_{1\le k\le m_j+1}B_{jk}(x,D')D_\nu^{k-1}$, де $B_{jk}(x,D')$ – тангенціальні вирази порядків (m_j-k+1), то граничні умови (1) запишуться у вигляді

$$\sum_{1\le k\le m_j+1} B_{jk}(x,D')u_k=\phi_j \qquad (j=1,\dots,m), \tag{3}$$

або у вигляді

$$\sum_{1\le k\le m_j+1}\langle u_k,B_{jk}^+(x,D')v\rangle=\langle\phi_j,v\rangle\ (v\in C_M^\infty(\overline{G}),\ j=1,\dots,m). \tag{4}$$

Ототожнимо елемент $u\in C^\infty(\overline{G})$ з вектором $(u_0,\dots,u_r)$, де $u_0=u|_{\overline{G}}, u_j=D_\nu^{j-1}u|_{\partial G\setminus M} \quad (j=1,\dots,r)$, і

$$r=\max\{2m,m+1,\dots,m_m+1\}. \tag{5}$$

Будемо писати $u = (u_0, \ldots, u_r)$ для кожного $u \in C^\infty(\overline{G})$.

Якщо $r > 2m$, то ототожнимо елемент $f \in C^\infty(\overline{G})$ з вектором $(f_0, \ldots, f_{r-2m})$, де $f_0 = f|_{\overline{G}}$, $f_j = D_\nu^{j-1} f|_{\partial G \setminus M}$ $(j = 1, \ldots, r-2m)$. Тоді вектор $u = (u_0, \ldots, u_r) \in C^\infty(\overline{G})$ є розв'язком задачі (1)тоді і тільки тоді, коли виконуються співвідношення (2) - (4), і

$$D_\nu^{j-1} L(x, D)u|_{\partial G \setminus M} = f_j \quad (j : 1 \le j \le r - 2m). \tag{6}$$

Нехай тепер u_0, f_0 - функції (узагальнені) в G, а u_j, f_k - функції (узагальнені) на $\partial G \setminus M$ $(j = 1, \ldots, r, 1 \le k \le r - 2m)$. Тоді вектор $u = (u_0, \ldots, u_r)$ назвемо *узагальненим розв'язком* задачі (1), якщо виконуються співвідношення (2)–(4), (6).

2. Функціональні простори. Нехай $p, p' \in (1, \infty), 1/p + 1/p' = 1$. Через $H^{s,p}(G)$ $(s \ge 0)$ позначимо простір бесселевих потенціалів, а через $H^{-s,p}(G) = (H^{s,p'}(G))^*$ - простір, спряжений до $H_M^{s,p'}(G)$ відносно розширення $(\cdot, \cdot)$ скалярного добутку в $L_2(G)$; $H_M^{s,p'}(G)$ $(s \ge 0)$ - замикання $C_M^\infty(\overline{G})$ в $H^{s,p}(G)$ - підпростір $H^{s,p}(G)$; $\| \cdot \|_{s,p} = \| u, \Omega \|_{s,p}$ - норма в $H^{s,p}(\Omega)$ $(s \in I\!R)$.

Через $B^{s,p}(\partial G \setminus M)$ $(s \in I\!R, p \in (1, +\infty))$ позначимо простір Бесова, $\langle\langle \cdot \rangle\rangle_{s,p} = \langle\langle \cdot, \partial G \setminus M \rangle\rangle_{s,p}$ - норма в ньому.

Нехай $r > 0$ - фіксоване ціле число, $s, p \in I\!R$, $1 < p < \infty$, $\ne k + 1/p$ $(k = 0, \ldots, r-1)$. Через $\widetilde{H}^{s,p,(r)} = \widetilde{H}^{s,p,(r)}(G)$ позначимо поповнення $C^\infty(\overline{G})$ по нормі

$$|||u, G|||_{s,p,(r)} := \left(\| u, G \|_{s,p}^p + \sum_{j=1}^r \langle\langle D_\nu^{j-1} u, \partial G \setminus M \rangle\rangle_{s-j+1-1/p,p}^p\right)^{1/p}. \tag{7}$$

За допомогою методу комплексної інтерполяції визначаємо простори $\widetilde{H}^{s,p,(r)}$ і норму (8) і для виключених значень s. Нарешті, якщо $r = 0$, то покладемо

$$\widetilde{H}^{s,p,(0)} := H^{s,p}(G); \quad |||u|||_{s,p,(0)} := \| u, G \|_{s,p}.$$

Замикання S відображення

$$u \longmapsto (u|_{\overline{G}}, u|_{\partial G \setminus M}, \ldots, D_\nu^{r-1} u|_{\partial G \setminus M}) \quad (u \in C^\infty(\overline{G}))$$

є ізометрією між простором $\widetilde{H}^{s,p,(r)}$ і підпростором $\mathfrak{H}_0^{s,p,(r)}$ простору

$$\mathfrak{H}^{s,p,(r)} := H^{s,p}(G) \times \prod_{j=1}^r B^{s-j+1-1/p,p}(\partial G \setminus M).$$

Тому можна ототожнити кожний елемент $u \in \widetilde{H}^{s,p,(r)}$ з елементом $Su = (u_0, \dots, u_r) \in \mathfrak{H}^{s,p,(r)}$. Для кожного $u \in \widetilde{H}^{s,p,(r)}$ будемо писати $u = (u_0, \dots, u_r) \in \widetilde{H}^{s,p,(r)}$.

Оператор A (7), визначений співвідношеннями (2)–(4), (6), неперервно діє в парі просторів

$$\widetilde{H}^{s,p,(r)} \to K^{s,p} := \widetilde{H}^{s-2m,p,(r-2m)} \times \prod_{j=1}^{m} B^{s-m_j-1/p,p}(\partial G \setminus M). \quad (8)$$

Він співпадає з замиканням $A_{s,p}$ відображення

$$u \mapsto \big(Lu|_{\overline{G}}, \{D_\nu^{j-1} Lu|_{\partial G \setminus M} : 1 \le j \le r-2m\},$$
$$B_1 u|_{\partial G \setminus M}, \dots, B_m u|_{\partial G \setminus M}\big) \quad (u \in C^\infty(\overline{G})), \quad (9)$$

що розглядається діючим в парі просторів (9).

Означення. Елемент $u \in \widetilde{H}^{s,p,(r)}$ ($s \in IR, p \in (1,\infty)$), для якого $Au = F \in K^{s,p}$, назвемо узагальненим розв'язком задачі (1).

Звідси випливає, що елемент $u = (u_0, \dots, u_r) \in H^{s,p,(r)}$ є узагальненим розв'язком задачі (1) тоді і тільки тоді, коли виконуються співвідношення (2)–(4), (6).

3. Локальне підвищення гладкості узагальнених розв'язків. Нехай $G_0 \subset G$ – підобласть G, що примикає до гладкого відкритого куска γ межі ∂G. Кажуть, що елемент $u = (u_0, \dots, u_r) \in \widetilde{H}^{s,p,(r)}$ належить локально в G_0 впритул до γ простору $\widetilde{H}^{s_1,p_1,(r)}$ ($s_1 \ge s$, $p_1 \ge p$); це записують так: $u \in \widetilde{H}^{s_1,p_1,(r)}_{\mathrm{loc}}(G_0, \gamma)$, якщо для кожної функції $\chi \in C^\infty(\overline{G})$, рівної нулю в деякому околі в $\overline{G}$ множини $\overline{G} \setminus (G_0 \cup \gamma)$ (ці функції назвемо допустимими), виконується співвідношення $\chi u \in \widetilde{H}^{s_1,p_1,(r)}$. Аналогічно, елемент $F \in K^{s,p}$ належить локально в G_0 впритул до γ простору K^{s_1,p_1} (це записують так: $F \in K^{s_1,p_1}_{\mathrm{loc}}(G_0, \gamma)$), якщо $\chi F \in K^{s_1,p_1}$ для кожної допустимої функції χ.

Теорема 1. *Нехай $u = (u_0, \dots, u_r) \in \widetilde{H}^{s,p,(r)}$ ($s \in IR, 1 < p < \infty$) – узагальнений розв'язок задачі (1). Нехай $x_0 \in \partial G \setminus M$ належить гладкому відкритому в ∂G куску γ, і $U(x_0)$ – достатньо малий окіл точки x_0 в $\overline{G}$, що примикає до γ. Тоді з $F \in K^{s_1,p_1}_{loc}(U, \gamma)$ ($s_1 \ge$*

$s, p_1 \geq p$) випливає, що $u \in \widetilde{H}^{s_1,p_1,(\tau)}_{loc}(U,\gamma)$. При цьому для кожної допустимої функції χ існує стала $c > 0$ така, що

$$|||\chi u|||_{s_1,p_1,(\tau)} \leq c(\| \chi F \|_{K^{s_1,p_1}} + |||u|||_{s,p,(\tau)}).$$

Ця теорема дає відповідь на питання, поставлене В. А. Кондратьєвим у 1992 році.

4. Теорема про повний набір ізоморфізмів для задачі (1). Наслідки. В кожній точці $x_0 \in M$ розглядатимемо відповідні модельні області $\Omega(x_0)$ – конуси або двогранні кути, що характеризують ∂G в околі точки x_0. Нехай $A_0(x_0, D)$ – головна частина оператора $A(x, D)$ з замороженими в точці x_0 коефіцієнтами. Будемо вважати, що в кожній точці $x_0 \in M$ або оператор

$$A_0 : \widetilde{H}^{s,p,(\tau)}(\Omega(x_0)) \to K^{s,p}(\Omega(x_0)) -$$

нетеровий, або фактор-простір $K^{s,p}(\Omega(x_0))/\overline{\mathfrak{R}(A_0)}$ – скінченновимірний [1] ($\overline{\mathfrak{R}(A_0)}$ – замикання в $K^{s,p}(\Omega(x_0))$ множини значень оператора $A_0(x_0, D)$).

Теорема 2. *Нехай задача (1) еліптична. Тоді для кожного $s \in IR$ і $p \in (1,\infty)$ оператор $A = A_{s,p}$, що неперервно діє в парі просторів (9), є нетеровим. Це означає, що*

а) ядро $\mathfrak{N}_{s,p} = \{u \in \widetilde{H}_{s,p,(\tau)} : Au = 0\}$ – скінченновимірне;

б) множина значень $\mathfrak{R}(A_{s,p})$ замкнена в $K^{s,p}$ і має скінченну корозмірність: існує скінченновимірний підпростір $\mathfrak{N}^*_{s,p}$ простору $(K^{s,p})^*$, такий, що задача $A_{s,p}u = F \in K^{s,p}$ має розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$[F, V] = 0 \quad (\forall V \in \mathfrak{N}^*_{s,p}) \tag{10}$$

($[F, V]$ – значення функціонала $F \in K^{s,p}$ на елементі $V \in (K^{s,p})^*$).

Тут, на відміну від області з гладкою межею, ядро $\mathfrak{N}_{s,p}$ і коядро $\mathfrak{N}^*_{s,p}$ залежать від s and p: якщо $s_2 \geq s_1$ і $p_2 \geq p_1$, то

$$\mathfrak{N}_{s_2,p_2} \subset \mathfrak{N}_{s_1,p_1}, \quad \mathfrak{N}^*_{s_2,p_2} \supset \mathfrak{N}^*_{s_1,p_1}. \tag{11}$$

[1] Ця умова завжди виконується, якщо x_0 – конічна точка.

Тому, якщо $u \in \widetilde{H}^{s_1,p,(r)}$ – розв'язок задачі

$$Au = F \in K^{s_2,p} \quad (s_2 > s_1), \tag{12}$$

то, навіть якщо $\mathfrak{N}_{s_1,p} = 0$, необов'язково, щоб $u \in \widetilde{H}^{s_2,p,(r)}$. З (13) випливає, що

$$[F, V] = 0 \quad (\forall V \in \mathfrak{N}^*_{s_1,p}). \tag{13}$$

Для того, щоб глобальне підвищення гладкості мало місце у випадку $\mathfrak{N}_{s_1,p} = 0$, необхідно і достатньо, щоб

$$[F, V] = 0 \quad (\forall V \in \mathfrak{N}^*_{s_2,p}). \tag{14}$$

В загальному випадку, якщо має місце (14), то існує розв'язок $u_1 \in \widetilde{H}^{s_2,p,(r)}$ задачі (12), такий, що $u - u_1 \in \mathfrak{N}_{s_1,p}$.

Нехай $V_1, \ldots, V_k, \ldots, V_l$ – базис в $\mathfrak{N}^*_{s_2,p}$ такий, що $V_1, \ldots, V_k$ – базис в $\mathfrak{N}^*_{s_1,p}$. Нехай $F_1, \ldots, F_l \in K^{\infty,p}$ такі, що

$$[F_i, V_j] = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{for } i \neq j \\ 1, & \text{for } i = j \end{cases} \quad (i, j = 1, \ldots, l). \tag{15}$$

Кожен елемент $F \in K^{s_2,p}$ представимо у вигляді

$$F = \sum_{j=1}^{l} [F, V_j] F_j + F', \tag{16}$$

де $F' \in K^{s_2,p}$, і

$$[F', V_j] = 0 \quad (j = 1, \ldots, l). \tag{17}$$

Нехай $\mathfrak{N}_{s_1,p} = 0$. Тоді задача $Au = F'$ має єдиний розв'язок

$$v = A^{-1}_{s_2,p} F' \in \widetilde{H}^{s_2,p,(r)}. \tag{18}$$

З (17), (18) випливає, що розв'язок $u \in \widetilde{H}^{s_1,p,(r)}$ задачі (13) можна представити у вигляді

$$u = v + \sum_{j=k+1}^{l} c_j v_j \quad (c_j = [F, V_j], v_j = A^{-1}_{s,p} F_j),$$

де $v \in \widetilde{H}^{s_2,p,(r)}$, $v_j \in \widetilde{H}^{s_1,p,(r)}$ $(j = k+1, \ldots, l)$, і v_j не залежить від F. Таким чином, глобальне підвищення гладкості має місце лише тоді, коли $c_1 = \ldots = c_l = 0$.

5. Еліптичні задачі для загальних систем рівнянь. Розглянемо еліптичну граничну задачу (1) у випадку, коли $L(x, D)$ – система Дугліса – Ніренберга порядку $(T, S) = (t_1, \ldots, t_N, s_1, \ldots, s_N)$:

$$\begin{aligned} L(x,D)u &:= (L_{rj}(x,D))_{r,j=1,\ldots,N}u(x) = f(x) \quad (x \in G), \\ B(x,D)u &:= (B_{hj}(x,D))_{\substack{h=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,N}} u(x) = \phi(x) \quad (x \in \partial G \setminus M). \end{aligned} \tag{19}$$

Тут $\operatorname{ord} L_{rj} \le s_r + t_j$, якщо $s_r + t_j \ge 0$, і $L_{rj} = 0$, якщо $s_r + t_j < 0$;

$$s_1 + \cdots + s_N + t_1 + \cdots + t_N = 2m; t_1 \ge \cdots \ge t_N \ge 0 = s_1 \ge \ldots \ge s_N;$$

$\operatorname{ord} B_{hj} \le \sigma_h + t_j$, якщо $\sigma_h + t_j \ge 0$, і $B_{hj} = 0$, якщо $\sigma_h + t_j < 0$; $\sigma_1 \ge \ldots \ge \sigma_m$; $t_1, \ldots, t_N, s_1, \ldots, s_N, \sigma_1, \ldots, \sigma_m$ – задані цілі числа. Крім того вважаємо, що умови регулярності коефіцієнтів і межі такі ж, як в пункті 1, і що задача (19) – еліптична.

Теореми 3 і 4 – це аналоги Теорем 1 і 2 для задачі (19).

6. Еліптичні задачі трансмісії. Нехай $G \in I\!R^n$ – обмежена область, Γ – її межа. Поверхня γ розбиває G на дві підобласті G_1 і G_2, ∂G_k – межа G_k; $\partial G_k = \gamma \cup \Gamma_k$ $(k = 1, 2)$. Поверхні Γ і γ можуть містити конічні точки, ребра. Множину цих особливих точок поверхонь $\gamma \cup \Gamma$ позначимо через M_0, $\Gamma \setminus M_0 \in C^\infty$, $\gamma \setminus M_0 \in C^\infty$. Нехай $M = M_0 \cup (\Gamma \cap \bar{\gamma})$. В G_k задані лінійні диференціальні вирази $L_k(x, D)$ $(\operatorname{ord} L_k = 2m_k)$. На $\Gamma_k \setminus M$ задані граничні вирази $B_{j,k}$ $(j = 1, \ldots, m_k)$, а на γ – вирази

$$B^3_{jk} \quad (\operatorname{ord} B^3_{jk} = m^3_{jk},\ j = 1, \ldots, m_1 + m_2),\ k = 1, 2.$$

Вивчається еліптична задача

$$\begin{aligned} L_k(x,D)u_k(x) &= f_k(x) \quad (x \in G_k;\ k = 1,2), \\ B_{jk}u_k(x) &= g_{kj}(x)\ (x \in \Gamma_k \setminus M; k = 1,2; j = 1,\ldots,m_k), \\ B^3_j u := B^3_{j1}u_1(x) + B^3_{j2}u_2(x) &= g_{3j}(x)\ (x \in \gamma \setminus M; j = 1, \ldots, m_1 + m_2). \end{aligned} \tag{20}$$

Починаючи з 60-х років задачі трансмісії в класах достатньо гладких функцій вивчались у роботах Ліонса, Шехтера, О. О. Ладиженської, О. А. Олейнік, В. А. Ільїна, І. А. Шишмарьова, М. В. Житарашу – С. Д. Ейдельмана, Я. А. Ройтберга – З. Г.

Шефтеля, М. В. Житарашу, З. Г. Шефтеля та інших. В повних шкалах банахових просторів ці задачі в областях з гладкими межами вивчено Я.А. Ройтбергом, Я.А. Ройтбергом – З.Г. Шефтелем, І.П. Коваленком – Я.А. Ройтбергом.

Теореми 5 і 6 – це аналоги Теорем 1 і 2 для задачі (20).

7. Застосування теорем.

7.1. Доведені теореми можна застосувати для побудови і вивчення матриць Гріна розглянутих задач.

7.2. Їх можна застосувати для вивчення розглянутих задач з довільними степеневими особливостями в правих частинах.

7.3. Вони дозволяють вивчити клас розглянутих задач з сильним виродженням.

Основні результати дисертації опубліковано в роботах:

[1] Ройтберг Б. Я., *Задачи трансмиссии в областях с негладкими границами* // Доп. НАН України. – 1996.– №3. – С. 15–20.

[2] Ройтберг Б. Я, Ройтберг Я. А. *Эллиптические задачи с негладкими границами в полных шкалах банаховых пространств* // Успехи мат. наук. – 1994. – 49, №4. – С.111.

[3] Roitberg B. Ya., *Elliptic boundary value problems in non-smooth domains in complete scales of Banach spaces// Abstracts of International Conference on Functional Differential Equations and Applications, Moscow, Moscow State Av. Institute, 1994,– p. 70-71.*

[4] Ройтберг Б. Я., Ройтберг Я. А. *Эллиптические задачи в негладких областях* // Укр. мат. журн.– 1995. – 47, №5. – С. 701–709.

[5] Ройтберг Б. Я., Ройтберг Я. А., *Локальное повышение гладкости обобщенных решений эллиптических граничных задач в негладких областях* // Докл. РАН. – 1995. – 345, №2. – С. 175–178.

[6] Ройтберг Б. Я., Ройтберг Я. А.. *Эллиптические граничные задачи в негладких областях в полных шкалах банаховых пространств* // Докл. РАН. - 1996. - 346, №4. - С. 448-451.

[7] Roitberg Ya. A., Roitberg B. Ya. *Elliptic and parabolic (local and non-local) boundary value problems in non-smooth domains in complete scales of Banach spaces.-Book of Abstracts,-p. 61.*

[8] Roitberg Ya. A., Roitberg B. Ya. *Elliptic and parabolic (local and non-local) boundary value problems in non-smooth domains in complete scales of Banach spaces//International Conference "Non-linear Differential Equations", Book of abstracts, Kiev, 1995.-p.140.*

[9] Ройтберг Б. Я. *Про регулярність розв'язків еліптичних задач в негладких областях// Тези доп. четвертої Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука,-Київ; КПІ, 1995,-С. 206.*

[10] Ройтберг Б. Я. *Еліптичні задачі в негладких областях в повних шкалах банахових просторів//Матеріали Ювілейної конференції з фізики та математики, присвяченої 80-річчю Чернігівського державного пед. ін-ту, 1996,-С. 7-8.*

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ:

1. Встановлені теореми про локальне підвищення гладкості і про повний набір ізоморфізмів для еліптичної задачі для одного рівняння в області з негладкою межею.

2. Встановлені теореми про локальне підвищення гладкості і про повний набір ізоморфізмів для еліптичної задачі для системи структури Дугліса-Ніренберга в області з негладкою межею.

3. Встановлені теореми про локальне підвищення гладкості і повний набір ізоморфізмів для еліптичних задач трансмісії в областях з негладкими межами.

Ройтберг Б. Я. Эллиптические граничные задачи в областях с негладкими границами в полных шкалах банаховых пространств. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения.- НАН Украины, Институт математики, Киев, 1997 г.

1. Доказана теорема о локальном повышении гладкости вплоть до гладких кусков границы обобщенных решений эллиптических граничных задач для уравнения порядка $2m$ и для систем структуры Дуглиса-Ниренберга в областях с негладкими границами и для задач трансмиссии.

2. Доказана теорема о нетеровости операторов рассмотренных задач в полной шкале банаховых пространств.

Теоремы о локальном повышении гладкости дают ответ на вопрос, поставленный В.А.Кондратьевым в 1992 г., теоремы о нетеровости операторов в полных шкалах банаховых пространств – на вопрос, поставленный Ю. М. Березанским.

Roitberg B. Ya. Elliptic boundary value problems in non-smooth domains in complete scales of Banach spaces. Manuscript. Thesis for a degree of candidate of science (Ph.D.) in Physics and Mathematics, speciality 01.01.02-Differential Equations.- National Academy of Science of Ukraine, Mathematical Institute, Kyiv, 1997.

1. Theorems on local increasing in smoothness up to the smooth parts of the boundary of the generalized solutions of elliptic boundary value problems are proved for $2m$th-order equation and for Douglis-Nirenberg elliptic systems in non-smooth domains, and for transmission problems.

2. Theorem on Noetherity of the operator of the problem under consideration is proved in complete scales of Banach spaces.

The question conserning with the theorems on local increasing in smoothness was formulated by V. A. Kondratjev (1992). The question conserning with Noetherity of the operators in complete scales of Banach spaces was formulated by Yu. M. Berezanskii.

Ключові слова: Еліптична задача в області з негладкою межею, Локальне підвищення гладкості узагальнених розв'язків, Нетеровість задачі в повних шкалах банахових просторів, Теорема про повний набір ізоморфізмів.

Б Ройтберг

Підп. до друку 21.01.97. Формат 60x84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 0,93. Ум. фарбо-відб. 0,93. Обл.-вид. арк. 0,7.
Тираж 100 пр. Зам. 10. Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3