

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

**СКЛЯРЕЦЬ Андрій Вікторович**

**ЗАДАЧА С.Л. СОВОЛЕВА  
В ПОВНИХ ШКАЛАХ  
БАНАХОВИХ ПРОСТОРІВ**

**01.01.02 — диференціальні рівняння**

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**

дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 1997



00761041 (J)

Дисертацією є рукопис  
Роботу виконано на кафедрі  
Чернігівського державного

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук,  
проф. Ройтберг Я.А.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,  
проф. Ейдельман С.Д.

доктор фізико-математичних наук  
Кочубей А.Н.

Провідна установа: Інститут прикладної математики і  
механіки НАН України, м.Донецьк

Захист відбудеться "11 березня 1997 р.  
о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 01.66.02  
при Інституті математики НАН України за адресою:

252061, Київ-4, ГСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці інституту.

Автореферат розіслано "28 - 01 1997 р.

Вчений секретар  
спеціалізованої ради

Лучка А.Ю.

## 1. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

### Актуальність теми.

Починаючи з 60-х років в роботах Ліонса - Мадженеса, Ю.М.Березанського, С.Г.Креяна і Я.А.Ройтберга та інших авторів еліптичні задачі вивчаються в повних шкалах гільбертових та банахових просторів. З еліптичною задачею зв'язується сім'я пар просторів  $(U_s, F_s)$ , що залежить від цілого або дійсного параметра  $s$ , так, що оператор  $A' = A_{s,p}$  еліптичної задачі встановлює ізоморфізм між просторами кожної пари з номером  $s$ . При достатньо великих значеннях  $s$  розв'язок задачі

$$A_s U = F \in F_s$$

є класичним розв'язком задачі. Чим менше  $s$ , тим більш узагальненим є розв'язок задачі. Говорять, що оператор  $A = A_s$  еліптичної задачі встановлює повний набір ізоморфізмів.

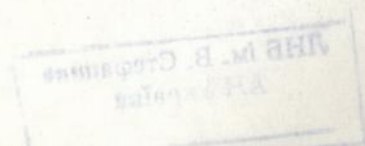
Теорема про повний набір ізоморфізмів, які цікаві самі по собі, знайшли численні застосування. Наведемо деякі з них: 1) доведені твердження про локальне підвищення гладкості впритул до межі області узагальнених розв'язків еліптичних граничних задач (Ю.М.Березанський, С.Г.Креян, Я.А. Ройтберг); 2) побудована і вивчена функція Гріна загальної еліптичної граничної задачі (Ю.М. Березанський, Я.А. Ройтберг, І.О. Коваленко, З.Г. Шефтель); 3) застосування в спектральній теорії - вивчені узагальнені власні функції, спектральна функція і т.д. (Ю.М.Березанський); 4) вивчені еліптичні граничні задачі з довільними

ЛНБ ім. В. Стефаника  
АН України

степеневими особливостями у правих частинах (Я.А.Ройтберг, З.Г. Шефтель та інші ); 5) вивчено сімейство еліптичних задач в сімействі областей, що розширюються, одержані результати застосовано до вивчення еліптичних задач із похідними по часу в граничних умовах і параболічних задач у нециліндричних областях ( С.Г. Крейн, Г.І. Лаптев, Л.А. Іванов, Л.І. Катко ); 6) вивчені еліптичні задачі, що сильно вироджуються (Я.А.Ройтберг, З.Г. Шефтель ); 7) застосування до вивчення слідів на межі області узагальнених розв'язків рівнянь (Я.А.Ройтберг ); 8) застосування до задач трансмісії (Я.А.Ройтберг, З.Г.Шефтель);9) застосування до вивчення нелокальних еліптичних задач ( Я.А. Ройтберг, З.Г.Шефтель);10) застосування в задачах оптимального керування (Ліонс, Я.А.Ройтберг, З.Г.Шефтель); 11) застосування до вивчення недоозначених та переозначених еліптичних задач (С.Г. Крейн, С.Я. Львін ); 12) застосування до механіки руху ньютонівської рідини (В.Г.Литвинов ).

У названих вище авторів еліптичні задачі вивчаються в обмеженні області  $G \subset \mathbb{R}^n$  із гладкою  $(n-1)$ - вимірною межею  $\Gamma_0 = \partial G$ . Міс тим, в роботах С.Л. Соболева вивчалися задачі, де межа вже не являє собою гладку  $(n-1)$ - вимірну поверхню, а може складатися із многовидів різних розмірностей. Результати С.Л.Соболева були узагальнені в роботах Б.Ю.Стерніна, С.П.Новікова. В них задача Соболева вивчається для загальних еліптичних рівнянь в класах достатньо гладких функцій, вивчено питання про індекс таких задач.

Мета роботи. Вивчити задачу Соболева в повних шкалах бана-



кових просторів, встановити для неї теорему про повний набір ізоморфізмів. Узагальнити результати для випадку систем структури Дугліса - Ніренберга.

Методи досліджень. В роботі істотно використовується теорема про повний набір ізоморфізмів для еліптичних задач.

Наукова новизна. Всі основні результати дисертаційної роботи є новими. В роботі вводяться поняття системи Діріхле та матриці Діріхле на  $1$ -вимірному многовиді  $(0 \leq n-1)$ , які є узагальненням відповідних класичних понять. Встановлюється теорема про повний набір ізоморфізмів для задачі Соболева. Одержані результати узагальнюються для систем структури Дугліса - Ніренберга.

Апробація роботи. Результати, які були встановлені в дослідженні, доповідалися на семінарах кафедри математичного аналізу Чернігівського педагогічного інституту, наукових семінарах Інституту математики НАН України, ряді міжнародних конференцій, а саме:

- 2-nd European Congress of Mathematics in Budapest Satellite Conference "Aspects of spectral theory: Operator methods in boundary value problems, Schrodinger operators", Vienna, July 15 to 18, 1996;

- Sommerfeld 96 - Workshop "Modern Methods In Diffraction Theory And Its Applications In Engineering" Freudenstadt, Schwarzwald 30 September - 4 October 1996.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані. Перелік публікацій наведено наприкінці автореферату.

Структура роботи. Дисертація викладена на 109 сторінках і

складається зі вступу, шести розділів та списку літератури, що містить 64 найменування.

## 2. ЗМІСТ РОБОТИ.

### 2.1. Постановка задачі для випадку одного рівняння

Нехай  $G \in \mathbb{R}^n$  - обмежена область,  $\partial G = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k$  її межа;  $\Gamma_0$  -  $(n-1)$ -вимірний замкнений многовид без країв, зовнішня межа,  $\Gamma_j$  -  $i_j$ -вимірний многовид без країв,  $0 \leq i_j \leq n-1$ ,  $i_j = n-1$ -ковимірність  $\Gamma_j$  ( $j=1, \dots, k$ );  $\Gamma_j \in C^\infty$  ( $j=0, \dots, k$ ). В  $G$  розглядається гранична задача

$$L(x, D)u = f \quad (в G) \quad (\text{ord } L = 2m) \quad (1)$$

$$B_{j0}(x, D)u|_{\Gamma_0} = \varphi_{j0} \quad (j=1, \dots, m; \text{ord } B_{j0} = q_{j0}) \quad (2)$$

$$B_{rk}(x, D)u|_{\Gamma_k} = \varphi_{rk} \quad (r=1, \dots, m_k; k=1, \dots, k; \text{ord } B_{rk} = q_{rk}) \quad (3)$$

Вважається, що рівняння (1) правильно еліптичне в  $\bar{G}$ , граничні умови (2) задовольняють на  $\Gamma_0$  умову Лопатинського. Вводиться поняття системи Діріхле на  $i$ -вимірному многовиді ( $0 \leq i \leq n-1$ ), яке є узагальненням класичного поняття системи Діріхле в розумінні Ароншайна - Мільграмма - Шехтера. Вважається, що для кожного  $k$  вирази  $(B_{rk})$  утворюють на  $\Gamma_k$  систему Діріхле. Коефіцієнти всіх диференціальних виразів вважаємо, для простоти, нескінченно гладкими; вважаємо також для простоти, що  $q_{rk} \leq 2m-1$  ( $k=0, \dots, k; r=1, \dots, m_k; m_0 = m$ ).

Розв'язок задачі (1) - (3) шукаємо як елемент простору  $H^{s,p}$ , який вводимо як поповнення простору  $C^\infty(\bar{G})$  по нормі

$$\| \| u \| \|_{s,p} \quad (4)$$

$$= \left[ \|u\|_{s,p}^p + \sum_{j=1}^m \langle D_\nu u, \Gamma_0 \rangle_{s-j+1/p, p}^p + \sum_{k=1}^k \sum_{|\alpha| \leq 2m-l_k} \langle D_\nu^\alpha u, \Gamma_k \rangle_{s-|\alpha|-l_k/p, p}^p \right]^{1/p}$$

$v \in \mathbb{R}, v = j+1/p$  ( $j=0, \dots, 2m-1; k=0, \dots, k$ ),

Тут  $D_\nu = \partial/\partial \nu, \nu$  - нормаль до  $\Gamma_0$ ;  $D_\nu^\alpha = D_{\nu_1}^{\alpha_1} \dots D_{\nu_k}^{\alpha_k}$ ,  
 $D_j = \partial/\partial y_j, (y_1, \dots, y_k)$  - ортогональний репер до  $\Gamma_k$ ,  
 $\|u\|_{s,p}$  - норма в просторі беселевих потенціалів  $H^{s,p}(G)$ ,  
 $H^{s,p}(G) = (H^{s,p}(G))^*$ , « $\Phi, \Gamma$ » $_{s,p}$  - норма в просторі Бессова  $B^{s,p}(\Gamma)$ ,  $B^{-s,p}(\Gamma) = B^{s,p}(\Gamma), 1/p + 1/p' = 1$ ,

Для виключених значень  $s$  норма (4) і простір  $H^{s,p}(G)$  визначаються за допомогою комплексної інтерполяції.

2.2. Основні результати для випадку одного рівняння

Встановлюється, що для кожного  $s \in \mathbb{R}$  і  $p \in (1, \infty)$  замикання  $A = A^{s,p}$  відображення

$$u \rightarrow (Lu|_{\bar{G}}, B_1 u|_{\Gamma_0}, \dots, B_m u|_{\Gamma_0}, (B_{r_k} u|_{\Gamma_k}; k=1, \dots, \bar{k}; r=1, \dots, m_k))$$

( $u \in C^\infty(\bar{G})$ ) неперервно діє в парі просторів

$$H^{s,p}(G) \rightarrow K^{s,p} = H^{s-2m,p}(G) \times \prod_{j=1}^m B^{-s-2j, p}(\Gamma_0) \times \prod_{k=1}^{\bar{k}} \prod_{r=1}^{m_k} B^{s-q_{r,k}-l_k/p, p}(\Gamma_k) \quad (5)$$

Якщо  $s_1 \leq s, p_1 \leq p$ , то оператор  $A_{s_1, p_1}$  є розширенням по неперервності оператора  $A_{s,p}$ .

Елемент  $u \in H^{s,p}$ , для якого  $A_{s,p} u = F = (f, \phi_{10}, \dots, \phi_{m0}, (\phi_{r,k})) \in K^{s,p}$ , назвемо узагальненим розв'язком задачі (1)-(3).

При дослідженні розв'язності задачі (1) - (3) користуємося тим, що замикання  $S$  відображення

$$u \rightarrow Su =$$

$$= (u|_{\bar{G}}, u|_{\Gamma_0}, \dots, D_Y^{2m-1} u|_{\Gamma_0}, (D_Y^\alpha u|_{\Gamma_k}, |\alpha| \leq 2m-1; k=1, \dots, \bar{k}))$$

( $u \in C^\infty(\bar{G})$ ) є ізометрією між  $\dot{H}^{s,p}(G)$  і підпростором прямого добутку

$$F^{s,p} = \quad (6)$$

$$= \dot{H}^{s,p}(G) \times \prod_{j=1}^{2m} B^{s-j+1-1/p, p}(\Gamma_0) \times \prod_{k=1}^{\bar{k}} \prod_{|\alpha| \leq 2m-1} B^{s-|\alpha|-1/p, p}(\Gamma_k)$$

При цьому  $S\dot{H}^{s,p} = F^{s,p}$ , якщо  $s < 1/p$ . Якщо  $s > 1/p$ , то  $S\dot{H}^{s,p} = (u_0, u_1, \dots, u_{2m}, (u_{\alpha k} : |\alpha| \leq 2m-1; k=1, \dots, \bar{k}); u_j = D_Y^{j-1} u_0|_{\Gamma_0} (\forall j: s-j+1-1/p > 0); u_{\alpha k} = D_Y^\alpha u_0|_{\Gamma_0}$ , якщо  $s-|\alpha|-1/p > 0$ ; інші компоненти  $Su$  від  $u_0$  не залежать).

Тому можна ототожнити  $u \in \dot{H}^{s,p}$  з елементом  $Su \in F^{s,p}$ . Будемо писати

$$u = (u_0, u_1, \dots, u_{2m}, (u_{\alpha k} : |\alpha| \leq 2m-1; k=1, \dots, \bar{k})) \in \dot{H}^{s,p} \quad (7)$$

для кожного  $u \in \dot{H}^{s,p}$ .

Крім того відома теорема про повний набір ізоморфізмів для задачі (1)-(2). Користуючись цими фактами, встановлюємо наступне твердження про розв'язність задачі (1)-(3).

**Теорема 4.4.1.** Нехай  $s \in \mathbb{R}$ ,  $p \in (1, \infty)$ ,  $F \in K^{s,p}$  і дефект задачі (1) - (2) відсутній. Тоді:

1) Якщо  $s < 1/p$ , то задача (1) - (3) завжди розв'язна: оператор  $A_{s,p}$  здійснює ізоморфізм  $\dot{H}^{s,p} \rightarrow K^{s,p}$ .

Інакше, для розв'язності в  $\dot{H}^{s,p}$  задачі (1) - (3) необхідно і достатньо, щоб:

2) виконувалися умови узгодження

$$\begin{aligned} \varphi_{r,k} &= B_{r,k} u_0|_{\Gamma_k} = B_{r,k} (A^{-1}(f, \varphi)|_{\bar{G}})|_{\Gamma_k} \\ (k=1, \dots, \bar{k}; r=1, \dots, m_k), \end{aligned} \quad (8)$$

якщо  $s > 2m-1/p$ ;

3) виконувалися умови узгодження

$$\varphi_{r,k} = B_{r,k} u_0 | \Gamma_k = B_{r,k} (A'^{-1}(f, \varphi) | \bar{G}) | \Gamma_k \quad (s - q_{r,k} - 1_k'/p > 0) \quad (9)$$

якщо  $1/p \leq s \leq 2m-1/p'$ .

У випадку наявності дефекту у задачі (1) - (3) ( $N(A') \neq 0$ ,  $N^*(A') \neq 0$ ) оператор  $A_{\dots, p}$  лише нетеровий. Вектор  $(f, \varphi)$  потрібно вибирати ортогональним до коядра задачі (1) - (2), тоді задача (1) - (2) має розв'язок - єдиний у фактор - просторі  $N^{s, p, (2m)}/N$ . Це дає можливість повторити всі міркування і в цьому випадку.

Розглядається частинний випадок одного многовиду ( $\bar{k}=1$ ) і вивчається питання: чи не можна до  $f$  додати такого елемента  $f_0 \in N^{s-2m, p}(G)$ , зосереджений на  $\Gamma = \Gamma_1$ , щоб для вектора  $\bar{F} = (f + f_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m, (\varphi_{r_1})) \in K^{s, p}$  виконувалися умови узгодження? Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема 4.4.2. Якщо  $1/p < s < 2m-1/p'$ , то можна до правої частини  $f$  в (1) додати таку функцію  $f_0 \in N^{s-2m, p}(G)$ , зосереджену на  $\Gamma_1$ , щоб умови узгодженості автоматично виконувались і тоді задача (1) - (3) (з  $f_0 + f$  замість  $f$ ) однозначно розв'язна в  $N^{s, p}(G)$ .

Аналогічне твердження має місце також, якщо задача (1) - (2) лише нетерова.

### 2.3. Постановка задачі Соболева та основні результати для випадку систем рівнянь структури Дугліса -

Ніренберга

Нехай  $G \subset \mathbb{R}^n$  - обмежена область,  $\partial G = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_N$  - її межа;  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_N$  - такі ж, як і в пункті 0.2. В  $G$  розглядається система диференціальних виразів структури Дугліса - Ніренберга

$$l = l(x, D) = (l_{r,j}(x, D))_{r,j=1,\dots,N}$$

$\text{ord } l_{r,j}(x, D) \leq s_r + t_j$ ;  $l_{r,j} = 0$ , якщо  $s_r + t_j < 0$ ;  $t_j, s_r$  ( $j, r=1, \dots, N$ ) - задані цілі числа. Вважаємо, що виконується умова

$$t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_N \geq 0 = s_1 \geq \dots \geq s_N.$$

Розглянемо граничну задачу

$$l(x, D)u = (l_{r,j}(x, D))_{r,j=1,\dots,N} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} = f \quad (\text{в } G), \quad (10)$$

$$b^0(x, D)u = (b_{h,j}^0(x, D))_{\substack{h=1,\dots,m^0 \\ j=1,\dots,N}} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1^0 \\ \vdots \\ \varphi_N^0 \end{pmatrix} = \varphi^0 \quad (\text{на } \Gamma_0). \quad (11)$$

Тут  $\text{ord } b_{h,j}^0 \leq \sigma_h^0 + t_j$ ;  $b_{h,j}^0 = 0$ , якщо  $\sigma_h^0 + t_j < 0$ .  $\sigma_1^0, \dots, \sigma_m^0$  - задані цілі числа. Для простоти, будемо вважати, що  $\sigma_h^0 < 0$  ( $h = 1, \dots, m^0$ ), тобто, що порядок диференціювання функції  $u_j$  в (11) не перевищує  $t_j - 1$ .

На частинах  $\Gamma_k$  ( $k = 1, \dots, \bar{k}$ ) межі  $\partial G$  додатково задані наступні умови:

$$b^k(x, D)u = (b_{h,j}^k(x, D))_{\substack{h=1,\dots,m^k \\ j=1,\dots,N}} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1^k \\ \vdots \\ \varphi_N^k \end{pmatrix} = \varphi^k \quad (\text{на } \Gamma_k), \quad (12)$$

Тут  $\text{ord } b_{h,j}^k \leq \sigma_h^k + t_j$ ;  $b_{h,j}^k = 0$ , якщо  $\sigma_h^k + t_j < 0$ .  $\sigma_1^k, \dots, \sigma_m^k$  - задані цілі числа. Для простоти, будемо вважати, що  $\sigma_h^k \leq -1$  ( $h = 1, \dots, m^k$ ).

Будемо вважати, що кожна з матриць  $b_k(x, D)$  ( $k=1, \dots, \bar{k}$ ), що входять до (12), утворюють на  $\Gamma_k$  матриці Діріхле в розумінні означення 5.4.3, яке є узагальненням поняття матриці Діріхле на  $(n-1)$ -вимірній поверхні. Для розв'язання задачі (10)-(12) вводяться деякі функціональні простори.

Нехай  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s = 1 + i'_k/p$  ( $i = 0, \dots, t_j - 1$ ;  $k = 0, \dots, \bar{k}$ ;  $j = 1, \dots, N$ ). Позначимо через  $H^{t_j+s, p}(G)$  поповнення  $C^\infty(\bar{G})$  по нормі

$$\| \| u \| \|_{s+t_j, p} = \left( \| u \|_{s+t_j, p}^p + \sum_{j=1}^{m^0} \langle \langle D_\nu^{j-1} u, \Gamma_0 \rangle \rangle_{s+t_j-1+1/p, p}^p + \sum_{k=1}^{\bar{k}} \sum_{|\alpha| \leq t_j - 1} \langle \langle D_\nu^\alpha u, \Gamma_k \rangle \rangle_{s+t_j-|\alpha|-1/p, p}^p \right)^{1/p}$$

Для виключених значень  $s$  ця норма і простір  $H^{t_j+s, p}(G)$  визначаються за допомогою методу комплексної інтерполяції [3]. Подібно пункту 2.2, встановлюється, що

$$\text{замикання } B \text{ відображення } u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \rightarrow Su =$$

$$= \begin{pmatrix} u_1|_G, u_1|_{\Gamma_0}, \dots, D_\nu^{t_1-1} u_1, \langle \langle D_\nu^\alpha u_1, \Gamma_k \rangle \rangle_{|\alpha| \leq t_1 - 1} ; k=1, \dots, \bar{k} \\ u_N|_G, u_N|_{\Gamma_0}, \dots, D_\nu^{t_N-1} u_N, \langle \langle D_\nu^\alpha u_N, \Gamma_k \rangle \rangle_{|\alpha| \leq t_N - 1} ; k=1, \dots, \bar{k} \end{pmatrix}$$

$u \in C^\infty(\bar{G})$  є ізометрією між

$$H^{s, p}(G) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^N H^{t_j+s, p}(G)$$

$$i \quad F_{s, p} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^N H^{t_j+s, p}(G) \times \prod_{j=1}^N \prod_{i=1}^{t_j} B^{t_j+s-1+1/p, p}(\Gamma_0) \times$$

$$x \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^{\bar{k}} |\alpha| \leq t_j^{-1} V^{t_j + s - |\alpha| - 1/p, p} (\Gamma_k).$$

При цьому  $S \dot{H}^{s, p} = F_{s, p}$ , якщо  $s < 1/p$ . Якщо ж  $s > 1/p$ ,

то

$$S \dot{H}^{s, p} = \left[ \begin{array}{l} u_0^1, u_1^1, \dots, u_{t_1}^1, (u_{\alpha_k}^1: |\alpha| < t_j - 1'_k; k=1, \dots, \bar{k}) \\ u_0^N, u_1^N, \dots, u_{t_N}^N, (u_{\alpha_k}^N: |\alpha| < t_N - 1'_k; k=1, \dots, \bar{k}) \end{array} \right];$$

$$u_j^1 = D_y^{j-1} u_0^1 |_{\Gamma_0} \quad \forall j: t_j + s - j + 1 - 1/p > 0, j < t_1;$$

$$u_{\alpha_k}^1 = D_y^\alpha u_0^1 |_{\Gamma_k} \quad \text{при } t_j + s - |\alpha| - 1/p > 0, |\alpha| < t_j - 1'_k.$$

інші компоненти від  $u_0 = (u_0^1, \dots, u_0^N)$  не залежать.

Ототожнимо  $u \in \dot{H}^{s, p}(G)$  з елементом  $Su \in F_{s, p}$ .

Будемо писати

$$u = \left[ \begin{array}{l} u_0^1, u_1^1, \dots, u_{t_1}^1, (u_{\alpha_k}^1: |\alpha| < t_j - 1'_k; k=1, \dots, \bar{k}) \\ u_0^N, u_1^N, \dots, u_{t_N}^N, (u_{\alpha_k}^N: |\alpha| < t_N - 1'_k; k=1, \dots, \bar{k}) \end{array} \right] \quad (13)$$

$$\forall u \in \dot{H}^{s, p}$$

Теорема 5.5.1. Для кожного  $s \in \mathbb{R}$   $1/p \in (1, \infty)$

злікання  $A = A^{s, p}$  : іображення

$$u \rightarrow (Lu |_{\bar{G}}, V_1 u |_{\Gamma_0}, \dots, m u |_{\Gamma_0}, (V_{r,k} u |_{\Gamma_k}: k=1, \dots, \bar{k}; r=1, \dots, m_k))$$

( $u \in C^\infty(\bar{G})$ ) неперервно діє в парі просторів

$$\dot{H}^{s, p}(G) \rightarrow K^{s, p} = \prod_{j=1}^n \dot{H}^{s-s_j, p}(G) \times \prod_{j=1}^n \prod_{l=1}^{m_l} V^{s-\sigma_{j,l}-1/p, p}(\Gamma_0) \times \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^{\bar{k}} \prod_{r=1}^{m_k} V^{s-\sigma_{r,k}-1/p, p}(\Gamma_k).$$

Якщо  $s_1 \leq s$ ,  $p_1 \leq p$ , то оператор  $A_{s_1, p_1}$  є розширенням по неперервності оператора  $A_{s, p}$ .

Елемент  $u \in \dot{H}^{s, p}$ , для якого  $A_{s, p} u = F = (f, \varphi_1, \dots, \varphi_{m_0})$ ,

$(\varphi_{r,k})_{r=1, \dots, m_k; k=1, \dots, \bar{k}} \in K^{s,p}$  назвемо узагальненим розв'язком задачі (10) - (12).

Користуючись наведеними вище твердженнями та теоремою про повний набір ізоморфізмів для загальних систем рівнянь, еліптичних за Дуглісом - Ніренбергом, встановлюємо наступну теорему про розв'язність задачі (10) - (12).

Теорема 5.6.1. Нехай  $s \in \mathbb{R}$ ,  $p \in (1, \infty)$ ,  $F \in K^{s,p}$  і дефект задачі (10)-(11) відсутній. Тоді

1. Якщо  $t_1 + s < 1/p$ , то задача (10) - (13) завжди розв'язна, оператор  $A_{s,p}$  здійснює ізоморфізм

$$\mathbb{H}^{s,p} \rightarrow K^{s,p}.$$

2. Інакше для розв'язності в  $\mathbb{H}^{s,p}(G)$  задачі (10) - (12) необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови узгодження

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \begin{bmatrix} \varphi_1^k \\ \vdots \\ \varphi_{m_k}^k \end{bmatrix} = (b_{h,j}^k(x,D))_{\substack{j=1, \dots, m_k \\ j=1, \dots, N}} u_0|_{\Gamma_k} = \\ &= b_k [A'^{-1}(f, \varphi)|_{\bar{G}}]_{\Gamma_k} \quad (s - \sigma_h^k - 1_k/p > 0) \quad k=1, \dots, \bar{k}; \end{aligned}$$

при  $t_1 + s > 1/p$ . Тут  $A'$  - оператор, що породжується задачею (10) - (11).

У випадку наявності дефекту у задачі (10)-(11) оператор  $A_{s,p}$  лише нетеровий. Вектор  $(f, \varphi)$  необхідно вибирати ортогональним до коядра задачі (10)-(11), тоді задача (10)-(12) має єдиний розв'язок у фактор - просторі  $\mathbb{H}^{s,p}/N$  ( $N$  - ядро оператора  $A$ ). Це дає можливість повторити всі наведені вище міркування і в цьому випадку.

2.4. Розв'язки еліптичних задач,  
зосереджені на многовидах різних  
розмірностей.

1. Нехай  $G \subset \mathbb{R}^n$  - обмежена область,  $G_0 \subset \mathbb{R}^n$  - підобласть  $G$ ,  $\Gamma_0$  -  $n-1$ -вимірний многовид - її межа, Розглянемо еліптичну задачу

$$Au = F = (f, \varphi_1, \dots, \varphi_m) \in K_{s,p} \quad (14)$$

$$A = (L, B_1, \dots, B_m); \quad u = (u_0, \dots, u_{2m}) \in \mathbb{H}^{s,p,(2m)}(G)$$

Тут  $\text{ord } L = 2m$ ,  $\text{ord } B_j = m_j$ . Для простоти покладемо, що  $m_j < 2m$ , а також ядро та коядро оператора  $A$  нульові. Розв'язок цієї задачі будемо шукати як елемент  $u = (u_0, u_1, \dots, u_{2m}) \in \mathbb{H}^{s,p,(2m)}$ .

Нехай  $\alpha < -1/p'$ . Встановимо умови, за яких  $u_0 \in \mathbb{H}^{s,p}(G)$  зосередження на  $\Gamma_0$ . Покладемо  $k = [1 - \alpha - 1/p']^-$  ( $[k]^-$  - найбільше ціле, не більше  $k$ ). Тоді  $u_0$  можна записати у вигляді:

$$u_0 = \sum_{j=1}^k D_V^{j-1} (w_j \times \delta(\Gamma_0)) \quad (w_j \in \mathbb{B}^{s+j-1/p,p}(\Gamma_0)); \quad (15)$$

тут  $\delta(\Gamma_0)$  - міра Дірака:

$$(D_V^{j-1} w_j \times \delta(\Gamma_0), v) = \langle w_j, D_V^{j-1} v |_{\partial G} \rangle_{\Gamma_0}.$$

Перепишемо задачу (14) у вигляді:

$$(u_0, L^+ v) = \sum_{j=1}^{2m} \langle u_j, T_{2m-j+1} v \rangle + (f, v) \quad (v \in C^\infty(\bar{G})) \quad (16)$$

$$\sum_{k=1}^{m_j} B_{j,k} u_k = \varphi_j, \quad (j=1, \dots, m; D_V^{k-1} u = u_k)$$

Підставивши (15) у (16), одержимо, що  $f$  необхідно зосереджена на  $\Gamma_0 \cup \partial G$ , тобто  $f$  можна розкласти в суму  $f = f' + f''$ , де  $f'$  зосереджена на  $\Gamma_0$ , а  $f''$  - на  $\partial G$ . Оскільки

$f, f', f'' \in H^{s-2m, p}(G)$ , то має місце наступне представлення:

$$f' = \sum_{j=1}^{s+2m} D_y^{j-1} (w'_j \times \delta(\Gamma_0)) \quad (w'_j \in B^{s+j-1/p, p}(\Gamma_0)), \quad (17)$$

$$f'' = \sum_{j=1}^{s+2m} D_y^{j-1} (w''_j \times \delta(\partial G)) \quad (w''_j \in B^{s+j-1/p, p}(\partial G)).$$

Врахувавши (15), (17), проводимо перетворення рівностей (16) (застосування властивостей виразів, що утворюють системи Діріхле; зміна порядків підсумовування; зведення подібних доданків та ін.). В результаті одержуємо, що вихідна задача еквівалентна до наступної сукупності рівнянь:

$$\sum_{j=1}^k \Lambda_{2m+j, k}^+ w_j - w'_k = 0, \quad k=1, \dots, 2m+1, \quad (18)$$

$$\sum_{j=k-2m}^k \Lambda_{2m+j, k}^+ w_j - w'_k = 0, \quad k=2m+2, \dots, 2m+k, \quad (19)$$

$$\sum_{j=1}^{2m+1-k} \Lambda_{2m-j+1, k}^+ u_j + w''_k = 0, \quad k=1, \dots, 2m, \quad (20)$$

$$\sum_{k=1}^j B_{j, k} u_k = \phi_j, \quad j=1, \dots, m, \quad (21)$$

$$w''_k = 0, \quad k=2m+1, \dots, 2m+k. \quad (22)$$

Гут, у (18) - (20)  $\Lambda_{j, k}^+$ ,  $\Lambda_{j, k}$  - деякі тангенціальні вирази, що виникають у якості коефіцієнтів при нормальних похідних, коли вирази, що утворюють системи Діріхле, записати як лінійні комбінації цих нормальних похідних;

$$\text{ord } \Lambda_{j, k}^+ = j-k, \Lambda_{j, j}^+ \neq 0; \text{ ord } \Lambda_{j, k} = j-k, \Lambda_{j, j} \neq 0.$$

Позначимо через  $A$  матрицю системи рівнянь, що задаються формулами (18), (19), а через  $A'$  - розширену матрицю цієї системи; аналогічно, нехай  $B$  - матриця системи рівнянь,

що задаються формулами (20), (21), а  $B'$  - розширена матриця цієї системи.

Проаналізуємо формули (18)-(22). Зрозуміло, що за відомими елементами  $w_j$  ( $j = 1, \dots, x$ ) та  $u_j$  ( $j = 1, \dots, 2m$ ) однозначно визначаються значення  $w'_k, w''_k$  ( $k = 1, \dots, 2m+x$ ), тобто елементи  $f'$  та  $f''$ .

Навпаки: нехай за відомими  $f', f''$  потрібно визначити елементи  $u_0, u_1, \dots, u_{2m}$ . Чи завжди це можливо і якщо так, то за яких умов цей розв'язок буде визначатися однозначно? Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема 6.1.1. Задача (14), тобто задача (18)-(22) з  $u_0$ , зосередженим на  $\Gamma_0$ , має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = x \quad \text{та} \quad \text{rang}(B) = \text{rang}(B') = 2m.$$

Зауваження 6.1.1. Нехай  $G_0 = G$ ,  $\Gamma_0 = \partial G$ . В результаті повторення наведених вище міркувань, одержимо, що і в цьому випадку справедливі співвідношення (18) - (22) та теорема 6.1.1 із заміною  $G_0$  на  $G$ ,  $\Gamma_0$  на  $\partial G$ .

2. Нехай тепер  $\Gamma_0 \subset \partial G$  - це гладкий  $i$  - вимірний многовид без краю,  $0 < i < n-1$ . Зафіксуємо  $\varepsilon > 0$  і нехай  $G_\varepsilon = \{x \in G: \text{dist}(x, \Gamma_0) > \varepsilon\}$ , а  $G \setminus \bar{G}_\varepsilon = \{x \in G: \text{dist}(x, \Gamma_0) < \varepsilon\}$  - підобласть  $G$ . Припустимо, що в  $G \setminus \bar{G}_\varepsilon$  можна так вибрати локальні координати  $x = (t, y) = (t_1, \dots, t_i, y_1, \dots, y_{n-i})$ , що  $t = (t, 0) \in \Gamma_0$  - локальні координати на  $\Gamma_0$ , а  $y = (0, y)$  - координати точок в ортогональному перетині області  $G \setminus \bar{G}_\varepsilon$  - в  $(n-i)$  - вимірній кулі  $\{y \in \mathbb{R}^{n-i}: |y| \leq \varepsilon\} = \{|y| \leq \varepsilon\}$ . Таким чином,  $G \setminus \bar{G}_\varepsilon = \Gamma_0 \times \{|y| \leq \varepsilon\}$ . Нехай в  $G \setminus \bar{G}_\varepsilon$  міра

$dx = dy dt$ , де  $dy$  - міра Лебега в кулі ( $|y| < \varepsilon$ ), а  $dt$  - міра на  $\Gamma_0$  та  $\int_{\Gamma_0} dt < \infty$ .

Розглянемо в  $G$  еліптичну задачу

$$Au = F = (f, \varphi_1, \dots, \varphi_m) \in K_{s,p} \quad (23)$$

$$A = (L, B_1, \dots, B_m); \quad u = (u_0, \dots, u_{2m}) \in H^{s,p,(2m)}(G)$$

і встановимо, за яких умов  $u_0$  може бути зосередження на  $\Gamma_0$ .

Одержуємо для  $u_0$  розклад, аналогічний (17), одержуємо

також, що  $f = f' + f'' \in H^{s-2m,p}(G)$ ,  $\text{supp } f' \subset \Gamma_0, \text{supp } f'' \subset \partial G$ ,

і для  $f', f''$  має місце розклад, аналогічний до (18).

Зрозуміло, що розклад  $f = f' + f''$  є неоднозначним.

Подібними до попереднього розгляду перетвореннями зводимо вихідну задачу до сукупності рівнянь:

$$\sum_{j=1}^{2m-k+1} \tilde{\lambda}_{2m-j+1,k} u_j = -\varphi_k \quad (k=1, \dots, 2m)$$

$$\varphi_k = 0 \quad (k=2m+1, \dots, 2m+k_1) \quad (24)$$

$$\sum_{k=1}^{m_j+1} B_{j,k} u_k = \varphi_j \quad (j=1, \dots, m)$$

$$\sum_{|\mu|=0}^x \Lambda_{\mu,\eta}^+ w_\mu - w_\mu' = w_\eta'' \quad (|\eta|=0, \dots, 2m-1)$$

$$\sum_{|\mu|=|\eta|-2m}^x \Lambda_{\mu,\eta}^+ w_\mu - w_\mu' = 2w_\eta'' \quad (|\eta|=2m, \dots, 2m+k-1) \quad (25)$$

$$\sum_{|\mu|=|\eta|-2m}^x \Lambda_{\mu,\eta}^+ w_\mu - w_\mu' = 0 \quad (|\eta|=2m+k)$$

Тут вирази  $\Lambda$  та  $\tilde{\lambda}$  - тангенціальні диференціальні вирази, подібні до попереднього розгляду,  $w_\mu$  визначають елемент  $u_0$ ,  $w_\mu'$  - елемент  $f'$ ,  $\varphi_k$  - елемент  $f''$ ,  $w_\mu''$  - дея-

кий елемент, що зосереджений на  $\Gamma_0$ .

Аналогічно до розгляду попередньої задачі, для того, щоб із сукупності (24) можна було визначити  $u_1, \dots, u_{2m}$ , необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\text{rang } B = \text{rang } B' = 2m, \quad (26)$$

де  $B$  - основна матриця системи рівнянь (24),  $B'$  - розширена матриця цієї системи.

Так само, для того, щоб із сукупності (25) можна було визначити елемент  $u_0$ , необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\text{rang } A = \text{rang } A' = \bar{k}, \quad (27)$$

де  $A$  - основна матриця системи рівнянь (25),  $A'$  - розширена матриця цієї системи,  $\bar{k} = \bar{k}_{n-1}$  - це кількість усіх можливих наборів з  $n-1$  натуральних чисел, таких, що суми компонент цих наборів не більше  $k$ .

Таким чином, встановлено теорему, аналогічну теоремі 6.1.1.

**Теорема 6.2.1.** Для розв'язності задачі (24), (25) необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови (26), (27).

Теорема 6.2.1. - це теорема про розв'язність задачі С.Л.Соболева на  $i$ -вимірному многовиді  $\Gamma_0 \in \mathcal{G}$ . При цьому встановлено твердження про повний набір ізоморфізмів

$$\mathbb{R}^{n \cdot p \cdot (2m)} \rightarrow \mathbb{R}^{n \cdot p \cdot (\mathcal{G})} = \mathbb{R}^{n \cdot 2m \cdot p \cdot (\mathcal{G})} \times \prod_{j=1}^m \mathbb{R}^{n \cdot (n-1) \cdot p \cdot (\mathcal{G})}$$

( $s \leftarrow (n-1)/p$ ), а, отже, і твердження про локальне підвищення гладкості одержаних розв'язків.

Пояснимо це. Нехай  $u = (u_0, u_1, \dots, u_{2m}) \in \mathbb{R}^{n \cdot p \cdot (2m)}(\mathcal{G})$  - розв'язок задачі (14) у випадку  $G_0 = G$ ,  $\Gamma_0 = \mathcal{G}$  (див.

зауваження 6.1.1.)

$$(u_0, L^+(x, D', D_n) v) \rightarrow \sum_{j=1}^{2m} \langle u_j, T_{2m-j+1} v \rangle = (f, v) \quad (v \in C^\infty(\bar{G}))$$

$$B_j u|_{\partial G} = \varphi_j \quad (j=1, \dots, m).$$

Оскільки  $\text{supp } u_0 \subset \partial G$ ,  $u_0 = \sum_{j=1}^k D_v^{j-1}(w_j \delta(\Gamma_0))$  ( $x = (1-s-1/p', \Gamma)$ ),

то мають місце рівності вигляду

$$\sum_{j=1}^k \langle w_j, D_v^{j-1} L^+ v \rangle_{\Gamma_0} = \sum_{j=1}^{2m} \langle u_j, T_{2m-j+1} v \rangle_{\partial G} + \sum_{j=1}^{k+2m} \langle w'_j, D_v^{j-1} v \rangle_{\Gamma_0} + \sum_{j=1}^{k+2m} \langle w''_j, D_v^{j-1} v \rangle_{\partial G}. \quad (28)$$

Нехай  $w_j = 0$  ( $j = 2, \dots, 2m+k-1$ ) і нехай  $D_v^{j-1} v|_{\partial G} = 0$  ( $j=2, \dots, 2m+k-1$ ). Тоді

$$\langle w_1, L^+(x, D', 0) v \rangle \rightarrow \sum_{j=1}^{2m} \langle u_j, \Lambda_{2m-j+1} v \rangle + \langle w''_1, v \rangle \quad (v \in C^\infty(\partial G)) \quad (29)$$

$$B_j u|_{\partial G} = \varphi_j \quad (j=1, \dots, m).$$

Якщо в (29) покласти  $u_j = 0$  ( $j=1, \dots, 2m$ ), то одержимо, що

$$L(x, D', 0) w_1 = w''_1, \quad (30)$$

тобто  $w_1$  - розв'язок на  $\partial G$  задачі (25).

Зосім аналогічно, якщо  $u$  - розв'язок задачі (23) і  $u_0$  зосередження на  $\Gamma_0 \subset \partial G$ , то знов виконувуться рівності вигляду

$$\langle w_1, L^+(x, D', 0) v \rangle_{\Gamma_0} = \sum_{j=1}^{2m} \langle u_j, \Lambda_{2m-j+1} v \rangle_{\Gamma_0} + \langle w''_1, v \rangle_{\Gamma_0} \quad (v \in C^\infty(\partial G)) \quad (31)$$

$$B_j u|_{\partial G} = \varphi_j \quad (j=1, \dots, m).$$

Якщо покласти тут, що  $\text{supp } u_j \subset \Gamma_0$ ,  $\text{supp } \varphi_j \subset \Gamma_0$ , то (30) означає, що вектор  $w = (w_1, u_1, \dots, u_{2m})$  задовольняє на  $\partial G$  рівності

$$L(x, D', 0)w = w_1^n$$

$$V_j w|_{\Gamma_0} = \varphi_j \quad (j=1, \dots, m).$$

Таким чином, із теореми 6.2.1. випливає розв'язність задачі С.Л. Соболева.

Наприкінці автор хоче висловити шире подяку своєму науковому керівнику доктору фізико - математичних наук проф. Ройтбергу Я.А. за постановку задачі і велику допомогу у її розв'язанні, а також викладачам і аспірантам кафедри математичного аналізу Чернігівського педінституту за обговорення результатів.

Основні положення дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Ройтберг Я.А., Склярєц А.В. Задача Соболева в полной шкале банаховых пространств // Доп. НАН України. - 1995. - № 7. - С. 19 - 22.
2. Ройтберг Я.А., Склярєц А.В. Задача Соболева в полной шкале банаховых пространств // Доп. НАН України. - 1996. - № II. -
3. Ройтберг Я.А., Склярєц А.В. Задача Соболева в повній шкалі банахових просторів // Укр. мат. журн. - 1996. - 48, № II. - С. 1555 - 1563.
4. Ройтберг Я.А., Склярєц А.В. Задача Соболева в повній шкалі банахових просторів // Матеріали шістнадцятої конференції з фізики та математики, присвяченої 80-річчю ЧДПІ ім. Т.Г.Шевченка. - 1996. - С. 3-4.

5. Склярєць А.В.

Про розв'язки еліптичних граничних задач, зосереджених на  
многовидах різних розмірностей, //

Матеріали ювілейної конференції з фізики та математики,  
присвяченої 80-річчю ЧДПІ ім.Т.Г.Шевченка.-1996.-С.5-7.

6. Jakov Roitberg, Andrei Sklyarets

Sobolev's problem in complete scale of Banach spaces //

2-Nd European Congress of Mathematics in Budapest.-1996.-P.9.

7. Roitberg J., Sklyarets A.

Sobolev's problem in complete scale of Banach spaces.-

Sommerfeld 96 - Workshop, 1996.-P.35-36.

#### ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ:

1. Введено поняття системи Діріхле на  $1$ -вимірному  
многовиді ( $0 \leq n-1$ ), які є узагальненням відповідних  
класичних понять.

2. Встановлюється теорема про повний набір ізоморфізмів  
для задачі С.Л.Соболева для випадку одного рівняння. Ці  
результати узагальнюються на випадок систем структури  
Дугліса - Ніренберга.

3. Вивчаються розв'язки еліптичних задач, зосереджені на  
многовидах різних розмірностей, встановлюється зв'язок  
одержаних результатів з розв'язністю задачі Соболева.

А.В.Склярец. Задача С.Л.Соболева в полных шкалах банаховых пространств. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02- дифференциальные уравнения.- НАН Украины, Институт математики, Киев, 1997 г.

В ограниченной области  $G \subset \mathbb{R}^n$ , граница которой является объединением многообразия различных размерностей, изучается задача Соболева для правильно эллиптического выражения порядка  $2m$  и для системы уравнения структуры Дуглиса-Ниренберга. В этой задаче граничные условия задаются линейными дифференциальными выражениями на многообразиях разных размерностей. Задача Соболева изучена в полной шкале банаховых пространств, для нее установлена теорема о полном наборе изоморфизмов, отмечены ее применения. В работе существенно используются теоремы о полном наборе изоморфизмов для эллиптических граничных задач в областях с гладкой  $(n-1)$ -мерной границей.

A.Sklyarets. Sobolev problem in complete scale of Banach spaces. Manuscript. Thesis for a degree of candidate of Science (Ph.D.) in physics and mathematics, speciality 01.01.02 - differential equations.- National Academy of Science of Ukraine, Mathematical Institute, Kyiv, 1997.

In the bounded domain  $G \subset \mathbb{R}^n$  I study the Sobolev problem for properly elliptic expression  $L$ , ord  $L = 2m$ , and for Douglis - Nirenberg elliptic system ;the boundary  $\partial G$  consists of manifolds of different dimensions. Boundary conditions are given by linear differential expressions on this manifolds. I study the Sobolev problem in complete scale of Banach spaces. I establish a complete set izomorphisms theorem for this problem and use complete set izomorphizms theorem for elliptic boundary value problems in domains with smooth  $(n-1)$ -dimensional boundary.

Ключові слова: задача С.Л.Соболева; система Діріхле; розв'язок, зосередження на многовиді; розв'язок в повній шкалі банахових просторів.

А.В.Склярец

---

Підп. до друку 21.01.97. Формат 60x84/16. Папір друк. Офс. друк.  
Ум. друк. арк. 1,39. Ум. фарбо-відб. 1,39. Обл.-вид. арк. 1,0.  
Тираж 100 пр. Зам. 9. Безкоштовно.

---

Віддруковано в Інституті математики НАН України  
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3

AB 36.983