КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

БУБНЯК
Тарас Іванович

НАПРУЖЕНИЙ І ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО СЕРЕДОВИЩА ІЗ СФЕРОЇДАЛЬНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ПРИ НЕІДЕАЛЬНОМУ ТЕПЛОВОМУ І МЕХАНІЧНОМУ КОНТАКТАХ

Спеціальність 01.02.04 - механіка деформівного твердого тіла

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

КИЇВ - 1997

Дисертація є рукописом

Робота виконана в Україн[illegible] університеті та в Інституті механі[illegible] ім. С.П.Тимошенка НАН України

Науковий керівник : кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник Соколовський Ярослав Іванович

Науковий консультант: доктор фізико-математичних наук , професор Подільчук Юрій Миколайович,

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор Панкратова Наталія Дмитрівна,

кандидат фізико-математичних наук, доцент Куценко Григорій Васильович

Провідна установа: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України.

Захист відбудеться "26" березня 1997 р. о 14 год. на засіданні спеціалізованої ради К 01.01.29 при Київському університеті імені Тараса Шевченка (252033, Київ-33, пр. акад. Глушкова,6, механіко-математичний факультет).

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці університету.

Відгук на автореферат просимо надсилати на адресу: 252033,Київ-33, пр. акад. Глушкова,6, Київський університет імені Тараса Шевченка, мех.-мат. факультет, вченому секретарю спеціалізованої ради, доценту Каліону В.А.

Автореферат розіслано "20" лютого 1997р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради, канд. фіз.-мат. наук Каліон В.А.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Просторові задачі теорії пружності і термопружності є важливою часткою сучасної механіки деформівного твердого тіла. Їх актуальність визначається численним застосуванням цієї науки для вирішення важливих технічних і технологічних проблем в різних галузях народного господарства. Необхідність таких досліджень обумовлюється тим, що на сучасному етапі розвитку науки в питаннях міцності матеріалів і елементів конструкцій та в інших технічних проблемах використовується в основному інформація про досягнення компонентами напружено-деформівного стану екстремальних значень в деяких локальних областях.

Як правило, такі екстремальні значення досягаються, зокрема, в зонах розділу фаз, оскільки практично всі конструктивні матеріали неоднорідні за своєю структурою. В одних випадках це обумовлено технологією виготовлення елементів, а в інших неоднорідність вводиться для досягнення оптимальної комбінації міцнісних властивостей. Незалежно від того, якими властивостями характеризується матеріал, неоднорідності є концентраторами напружень. Важливою є проблема моделювання властивостей міжфазної границі з урахуванням реальних особливостей її структури, оскільки властиві границям розділу інтенсивні фізико-хімічні процеси обумовлюють відповідні напруження контактної зони, що веде до можливої зміни розподілу напружень в самих міжфазних зонах, а, отже, і до зміни характеру локального руйнування. Отримання достовірної і повної інформації про розподіл напружено-деформівного стану в матеріалах та елементах конструкцій з урахуванням реальної картини міжфазної взаємодії зв"язано з використанням ефективних аналітичних і чисельних методів розв"язку просторових задач теорії пружності і термопружності.

З перерахованих причин, побудова розв"язків розглянутих в дисертаційній роботі просторових задач теорії пружності і термопружності

для неоднорідних анізотропних тіл та розробка алгоритмів їх чисельного розв"язку є актуальною і важливою проблемою.

Результати досліджень просторових задач теорії пружності і термопружності наведені у фундаментальних працях відомих вчених: Абрамяна Б.Л., Александрова О.Я., Андрейківа О.Є., Бородачова М.М., Векуа І.Н., Воровича І.І., Вольперта В.С., Галіна Л.О., Гриліцького Д.В., Грінченка В.Т., Гузя О.М., Капшивого О.О., Космодаміанського О.С., Кіта Г.С., Леонова М.Я., Лур"є А.І., Мартиненка М.А., Мартиненка М.Д., Мосаковського В.І., Мхітаряна С.М., Неміша Ю.М., Николишина М.М., Новожилова В.В., Нуллера Б.М., Панасюка В.В., Панкратової Н.Д., Партона В.З., Підстригача Я.С., Подільчука Ю.М., Положого І.І., Попова Г.Я., Приварнікова А.К., Прокопова В.К., Проценка В.С., Рвачова В.Л., Савіна Г.М., Саврука М.П., Семерака Ф.В., Сулими Г.Т., Улітка А.Т., Уфлянда Я.Ф., Хая М.В., Хоми І.Ю., Черепанова Г.П., Шапіро Г.С., Шевченка Ю.М., Юринця В.Є. та інших.

Одним з ефективних методів розв"язку просторових задач теорії пружності і термопружності для однозв"язних ізотропних тіл, які обмежені канонічними поверхнями є метод Фур"є, що базується на представленні загальних розв"язків рівнянь рівноваги через потенціальні функції. В просторових задачах для ізотропного тіла широке розповсюдження отримало представлення у формі Папковича-Нейбера.

У просторових задачах теорії пружності і термопружності для трансверсально-ізотропних тіл розв"язок представляється через потенціальні функції, які є гармонічними в різних системах координат. Це суттєво збільшує математичні труднощі, що виникають при розв"язуванні конкретних крайових задач.

Важливими стосовно розв"язку просторових задач теорії пружності і термопружності для трансверсально-ізотропних тіл є роботи Александрова О.Я., Лехніцького С.Г., Еліота Н.А., Ху Х. Ч., Новацького В., Сінгха А., Чена В.Т. Розв"язки першої і другої просторових крайових

задач для трансверсально-ізотропних тіл канонічної форми запропоновані Подільчуком Ю.М. В працях Подільчука Ю.М., Соколовського Я.І. досліджено концентрацію напружень в трансверсально-ізотропному середовищі біля сфероїдальних і гіперболоїдальних неоднорідностей в умовах повного спаю при довільному лінійному тепловому і механічному навантаженні.

В останні роки з"явились публікації як вітчизняних, так і зарубіжних вчених, в яких розглядаються просторові задачі теорії пружності і термопружності для ізотропного середовища зі сфероїдальним включенням в умовах неідеального механічного і теплового контакту. Зокрема, в працях Улітка А.Т., Неміша Ю.М., Качаловської Н.Е., Коуріса Д., Бенвеністе Ю. розглядаються осесиметричні задачі. Однак для трансверсально-ізотропного тіла з включенням канонічної форми розв'язки таких задач при ослабленому міжфазному контакті - відсутні. На відміну від проаналізованих задач для випадку ідеального контакту, розв"язок останніх отримується не в замкненому вигляді, а зводиться до розв"язку нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Виходячи з цього, <u>метою дисертаційної роботи</u> є постановка і розв"язок просторових задач теорії пружності та статичної термопружності про напружено-деформівний стан трансверсально-ізотропного середовища з таким же включенням у формі стиснутого і витягнутого сфероїда в умовах неідеального механічного і теплового контактів на границі розділу фаз, при лінійних силових і температурних навантаженнях і дослідження на їх основі впливу пружних, теплових і геометричних параметрів на концентрацію напружень у середовищі та включенні.

<u>Наукова новизна.</u> В роботі наведено постановку і отримано розв"язки нових просторових задач теорії пружності і статичної термопружності для трансверсально-ізотропного середовища з включенням у формі стиснутого і витягнутого сфероїда в умовах послабленого міжфазного контакту на межі розділу фаз (ковзання без відриву) при довільних

лінійних силових і температурних навантаженнях. Досліджено концентрацію напружень в середовищі зі сфероїдальним включенням при стиску (розтягу), згині, зсуві та крученні. Вивчено розподіл термонапружень в неоднорідному трансверсально-ізотропному середовищі при дії лінійного теплового потоку в умовах неідеального теплового і механічного контактів. Проаналізовано числові результати і виявлено характерні особливості полів напружень і термонапружень, обумовлених впливом анізотропії, температурного і силових полів, геометричних розмірів неоднорідності та умов ковзання на межі розділу фаз.

Положення, які виносяться на захист. Роз"язок просторових задач теорії пружності для трансверсально-ізотропного середовища з таким же включенням у формі стиснутого сфероїда в умовах неідеального механічного контакту (ковзання без відриву) при довільному лінійному силовому полі на нескінченності. Дослідження концентрації напружень неоднорідного середовища при стиску (розтягу), зсуві, згині та крученні.

Постановка і розв"язок статичної задачі термопружності для трансверсально-ізотропного середовища зі стиснутим сфероїдальним включенням при неідеальному механічному і тепловому контактах. Вивчення розподілу термонапружень при дії довільного лінійного температурного поля.

Дослідження напруженого і термонапруженого стану трансверсально-ізотропного середовища з включенням у формі витягнутого сфероїда при лінійних силових і температурних навантаженнях і вивчення концентрації напружень у середовищі і включенні.

Аналіз результатів числового експерименту і виявлення ряду характерних особливостей полів напружень, обумовлених порушенням умов спаю на межі розділу фаз, а також впливом анізотропії, механічних і температурних навантажень, геометричних параметрів включень.

Достовірність отриманих результатів забезпечується коректною постановкою задач, застосуванням для їх розв"язку класичних методів,

доведенням регулярності нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, практичною збіжністю чисельних розв'язків, а також порівнянням в часткових випадках з результатами інших авторів.

Практична цінність. Отримані в дисертаційній роботі результати можуть бути використані в інженерній практиці для розрахунку концентрації напружень і міцнісних показників елементів конструкцій з неоднорідностями складної форми, а також при розробці композитних матеріалів з наперед заданими властивостями. Отримані розв'язки просторових задач теорії пружності і статичної термопружності можуть використовуватися для апробації алгоритмів, розроблених на основі чисельних методів.

Отримані в дисертаційній роботі результати відповідають науково-дослідній тематиці Українського державного лісотехнічного університету і частково викладені в звіті з НДР «Розробка і створення нових класів деревинних композитних матеріалів» (ДБ 36.12-95).

Апробація роботи. Основні результати роботи доповідались та обговорювались на: семінарах відділу реології Інституту механіки НАН України (Київ, 1993-1995 рр.); XVIII конференції молодих вчених Інституту механіки НАН України (Київ, 1993р.); IV Міжнародній конференції з механіки неоднорідних структур (Тернопіль, 1995р.); семінарі з проблем механіки в Київському університеті імені Тараса Шевченка (Київ, 1996р.); науково-технічних конференціях Українського державного лісотехнічного університету та Львівського державного сільськогосподарського інституту (Львів, 1991-1996рр.).

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано 9 наук. праць.

Структура і обсяг роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, бібліографічного списку і додатку. Загальний обсяг дисертації становить 159 сторінок, в т.ч. 126 сторінок машинописного тексту , 36 рисунків. Бібліографічний список налічує 150 найменувань.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У *вступі* наведено короткий літературний огляд досліджень в області просторових задач теорії пружності і термопружності, обгрунтовано актуальність теми, визначено об'єкт досліджень, сформульовано основні положення, які виносяться на захист, і коротко викладено зміст роботи за розділами.

В *першому розділі* виписано основні рівняння і співвідношення лінійної статичної теорії пружності і термопружності однорідного анізотропного тіла

$$\lambda_{ij} T_{,ij} = 0; \tag{1}$$

$$c_{ijkl} u_{k,j} = \beta_{ij} \theta_{,j}, \tag{2}$$

де $\beta_{ij} = \alpha_{mn} c_{ijmn}$, $\theta = T - T_0$ - приріст температури; $\lambda_{ij}, \alpha_{ij}$ -- коефіцієнти теплопровідності, лінійного розширення та зсуву анізотропного тіла; c_{ijmn} - компоненти тензора пружних властивостей.

У випадку трансверсально-ізотропного тіла представлено загальний розв'язок рівнянь статичної термопружності через потенціальні функції:

$$u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_4\right) + \frac{\partial \Phi_3}{\partial y};$$

$$v = \frac{\partial}{\partial y}\left(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_4\right) - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x}; \tag{3}$$

$$w = k_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + k_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + k_4 \frac{\partial \Phi_4}{\partial z}.$$

Функції $\Phi_j (j = \overline{1,4})$ задовольняють такі умови:

$$\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial y^2} + \nu_j \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial z^2} = 0; \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_4}{\partial z^2} = k_3 T, \tag{5}$$

де $k_j (j = \overline{1,4})$ - сталі, які залежать від пружних і теплових властивостей матеріалу; ν_1 і ν_2 - корені характеристичного рівняння

$$c_{11}c_{44}\nu^2-\left[c_{44}^2+c_{33}c_{11}-(c_{13}+c_{44})^2\right]\nu+c_{33}c_{44}=0, \qquad (6)$$

а $\nu_3=2c_{44}/(c_{11}-c_{12})$, $\nu_4=\frac{\lambda}{\lambda}$. Вважаємо, що корені ν_1 і ν_2 дійсні і різні.

Введемо позначення $z_j=\frac{z}{\sqrt{\nu_j}}$. Тоді функції $\Phi_j(x,y,z_j)$, $(j=\overline{1,4})$, $T(x,y,z_4)$, є гармонічними у відповідних системах координат. Якщо корені характеристичного рівняння (6) дійсні і різні, то представлення розв'язку рівняння (2) для трансверсально-ізотропного тіла є загальним.

У *другому розділі* отримано розв'язки просторових задач теорії пружності і статичної термопружності про розподіл напружень і термонапружень в трансверсально-ізотропному середовищі з таким же включенням у формі стиснутого сфероїда при дії лінійного силового і температурного навантаження на достатній віддалі від неоднорідності. При цьому розглянуто неідеальний механічний і тепловий контакти на границі розділу фаз.

Для розв'язку задач використано системи координат стиснутого еліпсоїда обертання:

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}=a_j\bar{p}_jq_j\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\varphi; \qquad z=\sqrt{\nu_j}a_jp_j\bar{q}_j;$$

$$p_j=\cos\theta_j;\ \bar{p}_j=\sin\theta_j;\ q_j=\operatorname{ch}\eta_j;\ \bar{q}_j=\operatorname{sh}\eta_j,\ (j=\overline{1,4}), \qquad (7)$$

$$(0\le\eta_j<\infty;\quad 0\le\theta_j\le\pi;\quad 0\le\varphi<2\pi);$$

Для того, щоб граничні поверхні співпадали, необхідне виконання рівностей $(\eta_j=\eta_{j0})$:

$$a_1q_{10}=a_2q_{20}=a_3q_{30}=a_4q_{40} \qquad (8)$$

$$\lambda_1a_1\bar{q}_{10}=\lambda_2a_2\bar{q}_{20}=\lambda_3a_3\bar{q}_{30}=\lambda_4a_4\bar{q}_{40}.$$

Частинний розв'язок неоднорідних рівнянь рівноваги (2), який відповідає дії лінійного температурного поля в середовищі

$$T_0=ax+by+cz+d,$$

побудовано в такому вигляді

$$\Phi_4(x,y,z)=\frac{1}{2}v_4k_3\left\{A_3\int_{q_4}^{\infty}\left(z_4-z_4(\lambda)\right)^2\frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)}-\right.$$

$$-C\left[\int_{q_4}^{\infty}z_4^2(\lambda)\left(z_4-z_4(\lambda)\right)\frac{d\lambda}{(\lambda^2-1)\Delta(\lambda)}-\frac{1}{3}\int_{q_4}^{\infty}\left(z_4^4-z_4^2(\lambda)\right)\frac{d\lambda}{(\lambda^2-1)\Delta(\lambda)}\right]+ \qquad (9)$$

$$\left.+(Ax+By)\int_{q_4}^{\infty}\left(z_4-z_4(\lambda)\right)^2\frac{d\lambda}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\right\},$$

$$z_4(\lambda)=a_4\sqrt{\lambda^2-1}\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{a_4^2\lambda^2}},\quad \Delta(\lambda)=\lambda\sqrt{\lambda^2-1}.$$

Якщо до граничної поверхні сфероїда ($\eta_j=\eta_{j0}$) прикладено довільне зусилля σ_{ij}^{0}, то розв'язок задач про напружено-деформівний стан у трансверсально-ізотропному середовищі зі сфероїдальним включенням при дії лінійного температурного і силового полів в умовах неідеального теплового і механічного контактів (ковзання без відриву) зведено до розв'язку однорідних рівнянь рівноваги (2) з такими граничними умовами ($\eta_j=\eta_{j0}$), (j=1,2,3):

$$\sigma_{\eta}^{(1)}=\sigma_{\eta}^{(2)}+\sigma_{\eta}^{н.н.}\ ;\ \tau_{\eta\theta}^{(1)}+\tau_{\eta\theta}^{н.н}=0\ ;$$

$$\tau_{\eta\theta}^{(1)}=0\ ;\ \tau_{\eta\eta}^{(2)}+\tau_{\eta\eta}^{н.н}=0\ ;\ \tau_{\eta\eta}^{(1)}=0\ ; \qquad (10)$$

$$u_{\eta}^{(2)}+u_{\eta}^{(0)}+u_{\eta}^{н.н.}=u_{\eta}^{(1)}+u_{\eta}^{'}.$$

Індексом "1" позначено компоненти напружень і деформацій у включенні, "2" - аналогічні величини в середовищі. При цьому напружено-деформівний стан у середовищі є сумою основного і додаткого, викликаного наявністю включення. Величини $\sigma_{ij}^{н.н.}$, $u_{\eta}^{н.н.}$, отримано на основі часткового розв'язку (9), а u_{η}^{0}, $u_{\eta}^{'}$ - переміщення, викликані дією заданого температурного поля у середовищі T_0 і визначеної за ним температури T_1 на основі граничної задачі з умовами неідеального теплового контакту:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\nu_4\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(T_0+T)=0, \qquad (x\notin D)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\nu_4\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)T_1=0, \qquad (x\in D) \tag{11}$$

$$\lambda_i(T_0+T)_{,i}n_i\Big|_{\eta=0}=\lambda_i T_{1,i}n_i\Big|_{\eta=0}=\beta(T_1-T^0-T)\Big|_{\eta=0}$$

(D -область включення).

Розв'язок досліджуваних задач отримано на основі загальних розв'язків зовнішньої і внутрішньої задач теорії пружності для трансверсально-ізотропного стиснутого сфероїда .У випадку дійсних і різних коренів характеристичного рівняння (6) потенціальні функції $\Phi_j(x,y,z_j)$ $(j=1,2,3)$ мають вигляд

$$\Phi_j(x,y,z_j)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n+1}\frac{n+m}{i(2n+1)}\left[\frac{P_{n+1}^{(m)}(p_j)Q_{n+1}^{(m)}(i\bar{q}_j)}{(n+m)(n-m+1)}-\frac{P_{n-1}^{(m)}(p_j)Q_{n-1}^{(m)}(i\bar{q}_j)}{(n-m)(n-m+1)}\right]\times$$

$$\times\ (\delta_j a_{nm}^{(j)}\cos m\varphi+b_{nm}^{(j)}\sin m\varphi), \tag{12}$$

$$(j=1,2,3,\ \delta_1=\delta_2=1;\ \delta_3=-1;\ i^2=-1),$$

де $P_n^{(m)}(p)$, $Q_n^{(m)}(i\bar{q})$, - приєднані функції Лежандра I-го і II-го родів, $a_{nm}^{(j)}$, $b_{nm}^{(j)}$ -невідомі сталі.

Для визначення коефіцієнтів $a_{nm}^{(j)}$, $b_{nm}^{(j)}$, $a_{nm}^{(j)}$, $b_{nm}^{(j)}$ $(j=1,2,3)$ з граничних умов (10) прирівнюванням виразів при однакових тригонометричних і сфероїдальних функціях отримано нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка має такий структурний вигляд:

$$\sum_{j=1}^{3}\left(M_{j,n-1m}^{(k)}\begin{matrix}a_{n-1m}^{(j)}\\ b_{n-1m}^{(j)}\end{matrix}-M_{j,n-1m}^{(k)}\begin{matrix}a_{n-1m}^{(j)}\\ b_{n-1m}^{(j)}\end{matrix}+N_{j,n+1m}^{(k)}\begin{matrix}a_{n+1m}^{(j)}\\ b_{n+1m}^{(j)}\end{matrix}-N_{j,n+1m}^{(k)}\begin{matrix}a_{n+1m}^{(j)}\\ b_{n+1m}^{(j)}\end{matrix}\right)=L_{rm}^{(k)}\quad (k=\overline{1,6}). \tag{13}$$

Оскільки її матричні коефіцієнти $\left(T_{j,nm}^{(k)}\right)$ задовольняють умови $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\sum_{j=1}^{3}\left|T_{j,nm}^{(k)}\right|<\infty$, а $L_{nm}^{(k)}\in l_2$ і відображає l_2 в l_2 , то існує єдиний розв'язок системи (13), який знайдено методом редукції.

На основі отриманих розв'язків просторових задач теорії пружності і термопружності для трансверсально-ізотропного середовища зі стиснутим сфероїдальним включенням в умовах неідеального механічного і теплового контактів досліджено розподіл термонапружень як у середовищі, так і у включенні при дії довільного лінійного температурного і силового полів. Отримано інженерні формули для розрахунку концентрації напружень в середовищі та включенні при різних видах механічного навантаження - стиску, розтягу, зсуві, згині, крученні. На основі аналізу числових результатів наведено графіки, які дозволяють виявити ряд механічних особливостей, обумовлених впливом анізотропії, порушенням умов спаю, геометричних розмірів включення.

На рис. 1 зображено розподіл концентрацій нормальних, меридіальних і кругових напружень в середовищі зі стиснутим сфероїдальним включенням при рівномірному всесторонньому стиску в залежності від геометрії включення та кута θ. Мінімальні стискаючі напруження локалізуються біля полюса великої осі включення. Максимального значення $\sigma_\eta, \sigma_\theta$ досягають на полюсі меншої осі сфероїда. Напруження мають стискаючий характер і зростають при зменшенні відношення півосей b/a.

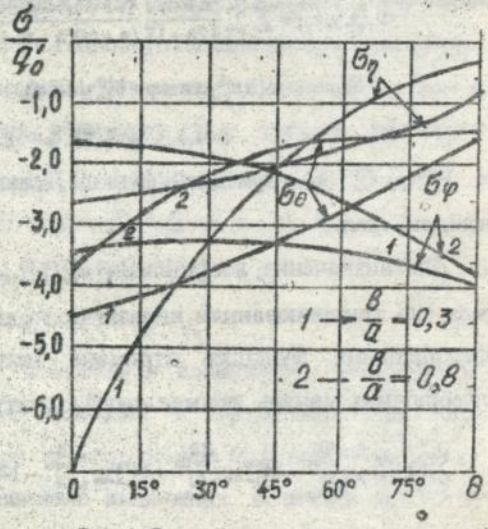

Рис. 1. Розподіл напружень в середовищі при всесторонньому рівномірному стиску (стиснутий сфероїд).

Третій розділ присвячено вивченню напруженого і термонапруженого стану трансверсально-ізотропного середовища з включенням у формі витягнутого сфероїда при довільних лінійних силових і температурних навантаженнях. Отримано розв'язки аналогічного класу просторових задач теорії пружності і термопружності, описаного в другому розділі. При цьому використано системи координат для витягнутого еліпсоїда обертання $(\eta_j, \theta_j, \varphi)$, $(j=\overline{1,4})$

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = a_j \bar{p}_j \bar{q}_j \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \varphi; \qquad z = \sqrt{\nu_j} a_j p_j q_j,$$

$$(0 \le \eta_j < \infty; \quad 0 \le \theta_j \le \infty; \quad 0 \le \varphi < 2\pi;) \tag{14}$$

Для співпадання граничних поверхонь (14) при j=1,2,3,4 необхідне використання рівностей

$$a_1 \bar{q}_{10} = a_2 \bar{q}_{20} = a_3 \bar{q}_{30} = a_4 \bar{q}_{40}; \tag{15}$$

$$\lambda_1 a_1 q_{10} = \lambda_2 a_2 q_{20} = \lambda_3 a_3 q_{30} = \lambda_4 a_4 q_{40}.$$

Розв'язки поставлених задач отримано на основі зовнішньої і внутрішньої задач теорії пружності і статичної термопружності для трансверсально-ізотропного витягнутого сфероїда. Потенціальну функцію Φ_4, що відповідає частинному розв'язку неоднорідних рівнянь рівноваги при наявності лінійного температурного поля, побудоване за допомогою спеціальних гармонічних функцій у такому вигляді:

$$\Phi_4 = \frac{1}{2} \nu_4 k_3 \left\{ A_0 \int_{q_4}^{\infty} (z_4 - z_4(\lambda))^2 \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} - \right.$$

$$- C \left[\int_{q_4}^{\infty} z_4^2(\lambda)(z_4 - z_4(\lambda)) \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - 1)\Delta(\lambda)} - \frac{1}{3} \int_{q_4}^{\infty} (z_4^3 - z_4^3(\lambda)) \frac{d\lambda}{\lambda^2 \Delta(\lambda)} \right] + \tag{16}$$

$$\left. (Ax + By) \int_{q_4}^{\infty} (z_4 - z_4(\lambda))^2 \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - 1)\Delta(\lambda)} \right\},$$

$$z_4(\lambda) = a_4 \lambda \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{a_4^2 \lambda^2}}, \quad \Delta(\lambda) = \lambda^2 - 1.$$

Розв'язок однорідних рівнянь рівноваги отримано на основі представлення (3) за допомогою потенціальних функцій $\Phi_j(x,y,z_j)$, $(j=1,2,3)$.

На основі отриманих розв'язків розглянутих задач проведено чисельний аналіз розподілу напружень і термонапружень. Подані в дисертації графіки показують залежність останніх від механічних і теплових властивостей матеріалів середовища і включення, геометричних розмірів, впливу порушення міжфазного зв'язку.

На рис. 2 відображено розподіл напружень при одноосному стиску (вздовж осі Z) при неідеальному механічному контакті між трансверсально-ізотропним середовищем та витягнутим сфероїдальним включенням. Перерозподіл контактних і кругових напружень проходить при $\theta \approx 65 \div 68°$, меридіальних - $\theta \approx 28 \div 30°$. Максимального значення напруження досягають в полюсі сфероїда ($\theta=0°$). При $\theta = 90°$ напруження локалізуються. Для порівняння отриманих результатів з ізотропним випадком (штриховими лініями) показано розподіл напружень, отриманий А.Т.Улітком та Н.Є.Качаловською.

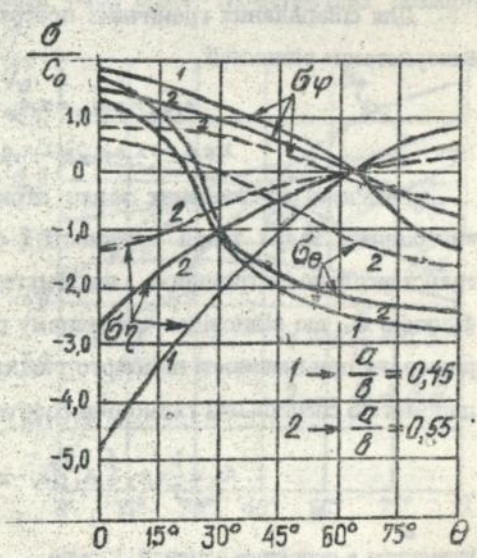

Рис. 2. Розподіл напружень в середовищі при одноосному стиску (витягнутий сфероїд).

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

Отримано розв'язки нових просторових задач теорії пружності для трансверсально-ізотропного середовища з таким же включенням у формі стиснутого сфероїда в умовах неідеального механічного контакту (ковзання без відриву) при довільному лінійному силовому полі на нескінченності. Досліджено концентрацію напружень при розтягу, стиску та крученні.

Наведено постановку і розв'язано новий клас задач статичної термопружності для трансверсально-ізотропного середовища зі стиснутим сфероїдальним включенням при неідеальному механічному і тепловому контактах. Вивчено розподіл термонапружень при дії довільного лінійного теплового поля.

Досліджено напружений і термонапружений стан трансверсально-ізотропного середовища зі включенням у формі витягнутого сфероїда в умовах неідеального теплового і механічного контактів при лінійних силових і температурних навантаженнях і виявлено характер розподілу напружень як у середовищі, так і у включенні.

На основі аналізу отриманих числових результатів виявлено наступні механічні особливості, обумовлені порушенням умов спаю на границі розділу фаз, а також впливом анізотропії, механічних і температурних зусиль, геометричних параметрів включення:

- наявність включення у формі стиснутого або витягнутого сфероїда в пружному трансверсально-ізотропному середовищі при неідеальному механічному контакті суттєво впливає на концентрацію напружень переважно на поверхні і в деякому околі розділу фаз. При віддаленні від неоднорідності концентрація напружень спадає, прямуючи до відповідних номінальних значень. Зокрема, на відстані трьох радіусів від поверхні включення відхилення нормальних напружень від відповідних номінальних не перевищує 3% у випадку стиску та розтягу;

- порушення умов спаю (ковзання без відриву) на поверхні розділу фаз веде до збільшення концентрації напружень, а також значного їх перерозподілу. Вплив анізотропії і умов неідеального контакту обумовлює відхилення нормальних напружень на поверхні розділу від відповідних номінальних напружень в середовищі приблизно на 40-45%. Зокрема, у випадку стиску радіальні напруження на поверхні включення збільшуються на 40% порівняно з ідеальним механічним контактом;

- вплив неідеального механічного контакту особливо проявляється у випадку однакових пружних властивостей середовища і включення, зокрема при всесторонньому стиску спостерігається значне збільшення кругових і радіальних напружень;

- концентрація напружень в середовищі значно зростає при збільшенні жорсткості включення та його геометричних параметрів в області, яка рівна двом радіусам;

- у випадку неідеального механічного контакту не виконується теорема про поліноміальну консервативність напружено-деформівного поля в сфероїдальному включенні (теорема Ешелбі). Наприклад, при основному однорідному полі напружень в середовищі розподіл полів напружень у включенні має лінійний характер;

- наявність неідеального механічного і теплового контактів на границі розділу фаз суттєво впливає на напружено-деформівний стан у середовищі і у включенні при дії лінійного температурного поля. При рівномірному нагріванні максимальні напруження досягаються в кінцях великої півосі еліпсоїда обертання. У випадку лінійного теплового потоку, який спрямований по осі симетрії, максимальні напруження досягаються на контурі еліпса, утвореного внаслідок перетину площини симетрії з еліпсоїдом обертання. Спостерігається значний перерозподіл напружень порівняно з ідеальним контактом. Напружено-деформівний стан у середовищі має локальний характер.

Основні результати дисертації опубліковані в працях:

1. Бубняк Т.І. Розподіл напружень біля сфероїдального включення в трансверсально-ізотропному середовищі //Наук. Вісник. УкрДЛТУ. Вип.3.2. -Львів, 1995. -С.125-127.
2. Бубняк Т.І. Дослідження термонапруженого стану неоднорідного трансверсально-ізотропного матеріалу. -Львів, 1996. -18 с. - (Препр.ЛДСГІ N:96/1).
3. Бубняк Т.І. Напружений стан трансверсально-ізотропного середовища із сфероїдальним включенням при неідеальному механічному контакті //IV Міжнародна конференція з механіки неоднорідних структур (Тернопіль, 19-22 вересня 1995.). - Тернопіль, 1995. -С.99.
4. Соколовський Я.І., Бубняк Т.І. Просторова задача трансверсально-ізотропного середовища із сфероїдальним включенням при неідеальному механічному контакті /Доп.НАН України. - 1996. - N:9. - С.45-50.
5. Соколовский Я.И., Бубняк Т.И. Напряженное состояние трансверсально-изотропной среды со сфероидальным включением при неидеальном механическом контакте // Теоретическая и прикл. механика.- 1995.- Вып.25.- С.15-21.
6. Соколовський Я.І., Бубняк Т.І. Деформація трансверсально-ізотропного середовища із сфероїдальним включенням при неідеальному механічному контакті //Наук. Вісник УкрДЛТУ. - Вип.3.2. -Львів, 1995. - С.120-124..
7. Соколовський Я.І., Бубняк Т.І. Розподіл напружень в трансверсально-ізотропному середовищі із сфероїдальним включенням при неідеальному механічному контакті. -Львів 1994.- 18с. / ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України; (Препр. № 10 - 94).
8. Соколовський Я.І., Бубняк Т.І. Напружено-деформівний стан трансверсально- ізотропного середовища із сфероїдальною неоднорідністю. -Львів. - 1994.- 68с. -УкрДЛТУ; (N:94/15 ,препр)
9. Гірник М.Л., Соколовський Я.І., Бубняк Т.І. Розв'язок просторових задач термопружності для трансверсально-ізотропного середовища з анізотропним включенням /Львів, 1995. - 62 с. - (Препр. УкрДЛТУ N:4/95).

Бубняк Т.И. Напряженное и термонапряженное состояние трансверсально-изотропной среды со сфероидальным включением при неидеальном тепловом и механическом контакте.
Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 - механика деформируемого твердого тела. Украинский государственный лесотехнический университет, Львов. Институт механики НАН Украины им. С.П.Тимошенка, Киев, 1996. Рукопись.
Решены пространственные задачи теории упругости и стационарной термоупругости для трансверсально-изотропной среды с включением в форме сжатого (вытянутого) сфероида в условиях неидеального механического и теплового контакта на границе раздела фаз при силовом и температурном воздействии. На основании численного анализа исследовано концентрацию напряжений в среде, содержащей включения, при растяжении, сжатии, сдвиге, изгибе, кручении и линейном тепловом потоке. Выявлены механические особенности полей напряжений и термонапряжений.

Bubnyak T.I. The stressed and thermostressed state of transversally isitropic medium with the inclusion of the spheroidic components in the case of the nonideal warm amd mechanical contact. Manuscript.
Thesis on search of the scientific degree of the candidate of physics and mathematics sciences, speciality 01.02.04 - the mechanic of the deformed strong body. Ukrainian State University of Forestry and Wood Technology, Lviv. Institut of Mechanics NAS of Ukraine, Kyiv, 1996.
The spatial of the stressed theory and stationary thermostress for transversally isotropic medium with the inclusion in the case of powerful and temperature influence in the nonideal conditions of mechanical and warm contact on the boundary of phase devision are solved. On the basis of numerous analyses the stress concentration in the medium containing the inclusion in the case of tension compression, shear, winding, torsion, and linear warm flow is investigated. The characteristic mechanical features of stress fields and thermostresses are found.

Ключові слова: *потенціальні функції;трансверсально-ізотропне середовище; неідеальним контакт; стиснутий або витягнутий сфероїд.*

Підписано до друку 24.12.96 р. Формат 64х84\16. Друк офсетн. Папір офсетн. Умов. друк. арк.1. Умов. фарбо-відб.1.
Тираж 100 прим. Замовл. 3-9.
Львівський державний аграрний університет.