НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

БАРНЯК Оксана Михайлівна

НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ОБМЕЖЕНОГО ОБ'ЄМУ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ

Спеціальність 01.01.03 — математична фізика

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 1997

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Інституті математики НАН України

Науковий керівник: член – кореспондент НАН України,
доктор фізико – математичних наук,
професор
ЛУКОВСЬКИЙ І.О.

Офіційні опоненти: член – кореспондент НАН України,
доктор фізико – математичних наук,
професор
КУБЕНКО В.Д.
кандидат фізико-математичних наук,
доцент
ГОРДИНСЬКИЙ Л.Д.

Провідна установа: Інститут гідромеханіки НАН України

Захист відбудеться "1" квітня 1997 р. о 1500 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.66.02 при Інституті математики НАН України за адресою: 252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Інституту.

Автореферат розіслано "26" лютого 1997 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради
доктор фіз. – мат. наук **ЛУЧКА А.Ю.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Задачі про рух рідини в порожнині твердого тіла стали актуальними в зв'язку з проектуванням об'єктів авіаційної, ракетної та космічної техніки. Саме при їх постановці виник ряд цікавих математичних проблем, які знайшли своє відображення в роботах О.Коші, М.В.Остроградського, С.Л.Соболева, С.Г.Крейна та інших.

В працях М.М.Моісеєва, Г.С.Наріманова, Б.І.Рабіновича, І.О.Луковського та інших грунтовно досліджені та запропоновані наближені методи розв'язання задач динаміки обмеженого об'єму ідеальної рідини. Подібні задачі для математичної моделі в'язкої рідини вивчені значно менше. В роботах С.Г.Крейна, Н.Д.Копачевського, Н.К.Аскерова, Г.І.Лаптєва, Нго Зуй Кана, В.Грінлі, А.К.Гараджаєва за допомогою методів функціонального аналізу досліджені питання існування і єдиності розв'язків задачі про малі коливання обмеженого об'єму в'язкої рідини та встановлені спектральні властивості задачі про нормальні коливання в'язкої рідини.

Менш розробленою є алгоритмічна сторона задач динаміки в'язкої рідини. Побудова розв'язків крайових задач для рівнянь Нав'є-Стокса, які описують рух в'язкої рідини, пов'язана з рядом математичних проблем. При малих значеннях в'язкості рідини рівняння є сингулярно-збуреними. В цьому випадку для побудови розв'язків крайових задач в роботах М.М.Моісеєва, Ф.Л.Чорноусько, Б.І.Рабіновича, С.Д.Вікторова застосовується метод примежевого шару. Для дослідження руху рідини при великих та середніх величинах коефіцієнта в'язкості застосовуються чисельні методи, які знайшли своє відображення в роботах Р.Темама, І.Б.Богоряда та інших.

Існує ще один підхід до побудови наближених розв'язків крайових задач математичної фізики - це проекційні методи, які грунтуються на визначенні узагальнених розв'язків задач шляхом знаходження стаціонарних значень відповідних квадратичних функціоналів. Такі методи були запропоновані в роботах М.М.Моісеєва, А.А.Петрова, І.О.Луковського для побудови розв'язків задач динаміки ідеальної рідини. Застосовувати проекційні методи до крайових задач динаміки в'язкої рідини не просто, оскільки ці задачі характеризуються високою розмірністю та сингулярністю. В роботах М.Я.Барняка розроблено проекційні методи побудови наближених розв'язків однієї із найпростіших задач цього класу, а саме: плоскої задачі про нормальні поперечні коливання в'язкої рідини в нескінченному горизонтальному каналі з умовою прилипання на твердій стінці.

Представляє інтерес побудова наближених методів розв'язання задачі про лінійні коливання в'язкої рідини при умові проковзування з тертям. Саме при такій умові можна описати реальний рух лінії перетину трьох середовищ: газу, твердої стінки і рідини. При умові прилипання ця лінія нерухома. Нерозв'язаною залишається також проблема поширення проекційних методів на просторові задачі, найпростішою з яких є задача про симетричні коливання рідини в посудині, що має форму тіла обертання.

Таким чином, задача про лінійні коливання в'язкої нестисливої рідини, яка частково заповнює порожнину нерухомого твердого тіла, відноситься до числа малодосліджених задач, особливо в аспекті побудови її наближених розв'язків у випадку конкретних областей і представляє теоретичний і практичний інтерес.

Мета роботи. Побудова квадратичних функціоналів, стаціонарні значення яких є узагальненими розв'язками задачі про нормальні коливання в'язкої рідини в нескінченному горизонтальному каналі з умовою проковзування з тертям на твердій стінці та задачі про нормальні симетричні коливання рідини в посудині, яка має форму тіла обертання. Розробка проекційних методів дослідження спектральних властивостей та визначення дійсних і комплексних власних значень задач при довільних співвідношеннях між величинами масових сил та сил в'язкого тертя.

Загальна методика досліджень.

В роботі використовуються методи теорії еліптичних крайових задач, варіаційні, проекційні методи, методи теорії спеціальних функцій, комплексного аналізу, лінійної алгебри, теорії наближених обчислень.

Наукова новизна результатів дисертаційної роботи полягає в тому, що в ній вперше

–запропоновано варіаційні формулювання наступних задач динаміки обмеженого об'єму в'язкої рідини: задачі про нормальні поперечні коливання рідини в нескінченному горизонтальному каналі з умовою проковзування з тертям на твердій стінці та задачі про нормальні симетричні коливання рідини в посудині, яка має форму тіла обертання;

–розроблено проекційний метод дослідження спектральних властивостей цих задач та знаходження їх дійсних власних значень;

–сформульовано проекційний метод визначення комплексних власних значень сингулярно-збурених спектральних крайових задач, які описують нормальні коливання маловʼязкої рідини;

–побудовано алгоритми обчислення сингулярних квадратур, які містять в собі фундаментальний розв'язок рівняння Гельмгольца;

–проведена чисельна реалізація всіх запропонованих в роботі наближених методів розв'язання спектральних крайових задач для областей конкретної геометричної форми.

Теоретична та практична цінність результатів роботи визначається розробкою ефективних методів розв'язання складної і важливої в прикладному відношенні задачі про лінійні коливання обмеженого об'єму в'язкої рідини. В тому числі, запропоновано проекційний метод розв'язання сингулярно-збурених крайових задач, які описують коливання малов'язкої рідини. Одержані результати є новими і можуть бути використані в крайових задачах математичної фізики з вільною границею та теоретичної гідромеханіки.

Апробація роботи. Результати дисертаційної роботи доповідались на Четвертій Міжнародній науковій конференції ім. академіка М.Кравчука (11 – 13 травня 1995 р., Київ), Другій Всеукраїнській конференції молодих вчених "Сучасні фізико-математичні дослідження молодих науковців вузів України" (16 – 18 травня 1995 р., Київ), П'ятій Міжнародній конференції ім. академіка М.Кравчука (16 – 18 травня 1996 р., Київ), семінарах "Математичні проблеми механіки" (Інститут математики НАН України), семінарі Інституту гідромеханіки НАН України.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1–6].

Обсяг і структура роботи. Дисертаційна робота складається з вступу, трьох розділів, висновків та списку цитованої літератури, що містить 81 джерело. Обсяг – 134 сторінки, таблиць – 17, рисунків – 22.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету дослідження, наведено короткий огляд робіт із даної тематики, дається опис змісту та результатів дисертації.

У першому розділі дається постановка задачі про малі коливання в'язкої рідини в обмеженому об'ємі. Виводяться крайові умови, які описують рух рідини при умові проковзування з тертям. Розв'язки цієї початково-крайової задачі подаються у вигляді узагальненого ряду Фур'є за власними функціями спектральної задачі про нормальні коливання рідини

$$-\frac{1}{H}\Delta\vec{v}+\nabla p=\lambda\vec{v},\quad div\vec{v}=0\quad \text{в } \Omega,$$

$$v_n=0,\qquad \frac{\partial v_{\tau_i}}{\partial n}+(\gamma-k_{\tau_i})v_{\tau_i}=0\quad \text{на } S,\quad i=1,2,$$

$$v_z=-\lambda h,\qquad \frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}=0\quad \text{на } \Sigma, \tag{1}$$

$$\frac{2}{H}\frac{\partial v_z}{\partial z}-p+h=0\quad \text{на } \Sigma,\quad \int_\Sigma h ds=0,$$

де Ω – об'єм, заповнений рідиною, $\partial\Omega=S\cup\Sigma$ – його межа, $\vec{\tau}_i$ – орти неколінеарних дотичних напрямків на S, k_{τ_i} – кривизни ліній перетину поверхні S нормальними площинами, паралельними $\vec{\tau}_i$, γ – величина, обернена до коефіцієнта проковзування, $H=g^{1/2}L^{3/2}\nu^{-1}$ – число Галілея, що визначає співвідношення між величинами масових сил (g – прискорення сил земного тяжіння), сил в'язкого тертя (ν – кінематичний коефіцієнт в'язкості) і характерним лінійним розміром L області Ω. Визначенню підлягають векторфункція $\vec{v}(x,y,z)$, скалярні функції $p(x,y,z)$, $h(x,y)$ та спектральний параметр λ.

В роботах С.Г.Крейна і його учнів доведено, що спектр задачі (1) дискретний і складається із зліченної множини власних значень скінченної алгебраїчної кратності, які розміщені в правій комплексній півплощині і мають дві точки згущення $\lambda = 0$ і $\lambda = \infty$.

Розв'язки задачі (1) суттєво залежать від величини числа H. При малих значеннях числа Галілея всі власні значення задачі дійсні і розбиваються на два підкласи λ_k^- з точкою згущення 0 і λ_k^+ з точкою згущення ∞. При деякому критичному значенні числа $H = H_1^*$ відбувається зіткнення λ_1^- і λ_1^+, і в задачі відбувається якісна зміна спектра, яка заключається в тому, що ці значення сходять з дійсної осі і стають комплексно-спряженою парою власних значень задачі. При збільшенні H відбувається зіткнення наступних пар власних значень λ_k^- і λ_k^+ при H_k^*, що зумовлює появу наступних пар комплексних власних значень.

В заключному §3 даного розділу викладені теоретичні положення визначення критичних значень числа Галілея. Вони грунтуються на наступній теоремі М.Я.Барняка.

Теорема 3.2 Нехай для $\vec{v} = \vec{v}_k^* \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ $(\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \subset W_2^1(\Omega) : div\vec{v} = 0,$ $v_n|_S = 0)$ функціонал

$$\Phi(\vec{v}) = \frac{E^2(\vec{v},\vec{v})}{4T(\vec{v},\vec{v})\Pi(\vec{v},\vec{v})} \quad \left(E(\vec{v},\vec{v}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right|^2 d\Omega + \gamma\int_S |\vec{v}|^2 ds,\right.$$

$$\left. T(\vec{v},\vec{v}) = \int_{\Omega} |\vec{v}|^2 d\Omega, \quad \Pi(\vec{v},\vec{v}) = \int_{\Sigma} |v_z|^2 ds\right)$$

набуває стаціонарного значення. Тоді при $H = H_k^* = \sqrt{\Phi(v_k^*)}$ векторфункція $\vec{v}_k^*$ є узагальненим розв'язком задачі (1), якому відповідає кратне власне значення $\lambda_k^- = \lambda_k^+ = \dfrac{E(v_k^*,v_k^*)}{2H_k^* T(v_k^*,v_k^*)}$.

<u>**Другий розділ**</u> присвячений побудові наближених методів розв'язування спектральної крайової задачі (1) про власні поперечні коливання в'язкої рідини в нескінченному горизонтальному каналі. В цьому випадку задача є двовимірною, і шляхом введення функції току зводиться до скалярного вигляду

$$\Delta^2\psi_0 + \lambda H\Delta\psi_0 = 0 \quad \text{в } G, \ \psi_0 = 0, \ \frac{\partial^2\psi_0}{\partial n^2} + (\gamma - k_r)\frac{\partial\psi_0}{\partial n} = 0 \quad \text{на } L,$$

$$\Delta\psi_0 - 2\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2} = 0, \ \frac{\lambda}{H}\frac{\partial}{\partial y}\Big(\Delta\psi_0 + 2\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2}\Big) + \lambda^2\frac{\partial\psi_0}{\partial y} - \frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2} = 0 \text{ на } \Gamma, \int_\Gamma \frac{\partial\psi_0}{\partial x}dx = 0, \tag{2}$$

де G – поперечний перетин області Ω, $L = G \cap S$, $\Gamma = G \cap \Sigma$.

В даному розділі задача розглядається з умовою проковзування з тертям на твердій стінці, що дає можливість описати рух лінії перетину твердої стінки і вільної поверхні. Окремо розглядаються задачі про симетричні і антисиметричні коливання.

Подаючи функцію $\psi_0 = \varphi + \psi$ $(\Delta\varphi = 0, \ \Delta\psi + \lambda H\psi = 0)$ і вводячи на Γ: $\{a \leq x \leq b, y = 0\}$ оператор T, який породжується диференціальним виразом $tu \equiv -\dfrac{d^2u}{dx^2}$ і діє на класі функцій $u \in C^2([a,b])$, $u'(0) = u(a) = 0$ (випадок антисиметричних коливань), одержуємо наступну крайову задачу:

$$\Delta\varphi = 0, \quad \Delta\psi + \lambda H\psi = 0 \quad \text{в } G, \quad \varphi + \psi = 0 \quad \text{на } L,$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(\varphi + \psi) - \beta\lambda H\psi = 0 \quad \text{на } L, \quad \varphi + \psi - \frac{\lambda H}{2}T^{-1}\psi = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{3}$$

$$\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial y} - \frac{\lambda H}{2}T^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{H^2}{4}T^{-1}\psi + \beta\lambda H\cos\alpha\psi\,|_{x=a} = 0 \quad \text{на } \Gamma,$$

α – кут між внутрішньою нормаллю до твердої стінки і віссю y в кутовій точці $(x = a, y = 0)$, $\beta = \dfrac{1}{\gamma - 2k_r}$.

У випадку симетричних коливань в задачі (3) друга крайова умова на Γ набуде вигляду

$$\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial y} - \frac{\lambda H}{2}T^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{H^2}{4}T^{-1}\psi + \frac{x}{a}\beta\lambda H\cos\alpha\psi\,|_{x=a} = 0 \quad \text{на } \Gamma.$$

В §5 побудовано квадратичний функціонал

$$K(\varphi,\psi)=\int_G|\nabla\varphi+\nabla\psi|^2dG-\frac{H^2}{4}\int_\Gamma T^{-1}\psi\bar{\psi}dx-$$

$$-\lambda H\left\{\int_G|\psi|^2dG+\beta\int_L|\psi|^2ds+\int_\Gamma T^{-1}\psi\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y}dx+\frac{ctg\alpha}{2}\left|\int_\Gamma\psi dx\right|^2\right\},\qquad(4)$$

який розглядається на класі функцій $\varphi\in H(G)\,(H(G)\subset W_2^1(G):\Delta\varphi=0$ в G), $\psi\in W_2^1(G)$ при $\lambda\in\mathbb{C}$, $H\in\mathbb{R}$. На основі функціоналу (4) запропоновано варіаційне формулювання задачі (3). Доведено теорему.

Теорема 5.1 Нехай пара функцій $\varphi_k\in H(G)$ і $\psi_k\in W_2^1(G)$ при відповідному значенні комплексного параметра $\lambda=\lambda_k$ і фіксованому параметрі H є розв'язком задачі (3). Тоді функціонал (4) на цих функціях набуває стаціонарного значення.

Справедлива і обернена теорема.

Теорема 5.2 Нехай функціонал $K(\varphi,\psi)$ набуває стаціонарного значення на функціях $\varphi_k\in H(G)$ і $\psi_k\in W_2^1(G)$ при відповідному значенні комплексного параметра $\lambda=\lambda_k$ і фіксованому параметрі H. Тоді при умові, що ці функції є двічі неперервно-диференційовними в G, вони є розв'язками задачі (3).

В §6 показано, що визначення критичних чисел H_k^* в задачі (3) зводиться до знаходження стаціонарних значень функціоналу

$$K(\varphi,\psi)=\int_{L+\Gamma}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\psi\frac{\partial\psi}{\partial n}+2\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)ds-\frac{H^2}{4}\int_\Gamma T^{-1}\psi\,\psi dx-$$

$$-\lambda H\left\{\beta\int_L\psi^2ds+\int_\Gamma T^{-1}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial y}dx+\frac{ctg\alpha}{2}\left(\int_\Gamma\psi dx\right)^2\right\},\qquad(5)$$

який розглядається на класі функцій $\varphi\in H(G)$, $\psi\in H_1(G)$ $(H_1(G)\subset W_2^1(G):$ $\Delta\psi+\chi^2\psi=0$ в $G)$ при $\chi\in\mathbb{R}$ $(\chi^2=\lambda H)$, $H\in\mathbb{R}$. Крім цього повинна виконуватися умова $\dfrac{\partial H}{\partial\chi}=0$. Суттєвим в такому підході є те, що константи χ і H, а також функції φ і ψ набувають тільки дійсних значень.

На основі функціоналу (5) будується проекційний метод знаходження критичних значень H_k^*. Наближений розв'язок шукається у вигляді

$$\varphi^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} a_k w_k, \quad \psi^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} b_k f_k,$$

де $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ і $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – деякі повні в $H(G)$ і $H_1(G)$ системи координатних функцій. Коефіцієнти a_k і b_k визначаються із умов стаціонарності функціоналу (5), що приводять до системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь. З умови існування нетривіального розв'язку цієї системи одержується характеристичне рівняння для знаходження шуканих значень параметра H.

Проведено чисельну реалізацію побудованого алгоритму для кругової області G. Порівняння чисельних даних, одержаних при різних числах β, показує, що при умові проковзування з тертям ($\beta = 0.1$) критичні значення H_k^* менші, ніж при умові прилипання ($\beta = 0$), тобто комплексні власні значення в задачі з'являються при менших значеннях H. Наведені залежності $H_k^* = H_k^*(\beta)$, $k = 1, 2$ у вигляді графіків.

В §7 на основі знаходження стаціонарних значень функціоналу (5) розроблена методика визначення дійсних власних значень задачі (3).

В §8 у випадку області, що має форму півкруга, побудовано систему координатних функцій, які задовольняють рівняння в області G, обидві крайові умови на L і першу крайову умову на Γ. Ці координатні функції побудовані у вигляді функціональних рядів, коефіцієнти яких виражаються в аналітичному вигляді. Проведена оцінка швидкості збіжності одержаних рядів. На основі побудованих координатних функцій проведена чисельна реалізація проекційного методу розв'язування задачі (3).

При $H > H_1^*$ задача має скінченну кількість комплексних власних значень. У випадку великих значень числа H задача є сингулярно-збуреною, і для побудови її розв'язків проекційний метод, який грунтується на знаходженні стаціонарних значень функціоналу (4), неефективний.

В §9 пропонується метод побудови розв'язків задачі (2) для довільних значень параметра H, в тому числі і для як завгодно великих.

Для довільного розв'язку рівняння Гельмгольца справедливе співвідношення

$$\alpha(P)\psi(P) + \int\limits_{L+\Gamma} \left(\frac{\partial Q}{\partial n}\psi - \frac{\partial \psi}{\partial n}Q\right) ds = 0, \tag{6}$$

де $Q(r) = K_0(\omega r(P,S))$ – фундаментальний розв'язок рівняння Гельмгольца, $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$, $K_0(z)$ – модифікована функція Бесселя 2-го роду, α дорівнює внутрішньому куту області G, у вершині якого знаходиться точка P.

Використовуючи співвідношення (6) і подаючи функцію $\varphi = -\tilde{\phi} - \omega^2\phi/2$, задачу зведено до наступної спектральної задачі:

$$\Delta\tilde{\phi} = 0, \quad \Delta\phi = 0 \text{ в } G, \quad \phi = 0 \quad \text{на } L, \quad \phi = T^{-1}\tilde{\phi} \quad \text{на } \Gamma,$$

$$S\varphi \equiv \alpha(P)\tilde{\phi}(P) + \int\limits_{L+\Gamma} \left(\frac{\partial K_0(\omega r)}{\partial n}\tilde{\phi} - K_0(\omega r)\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n}\right) ds - \frac{H^2}{4}\int\limits_{\Gamma} K_0(\omega r)T^{-1}\tilde{\phi}dx +$$

$$-\frac{\omega^2}{2}\left\{\int\limits_{L+\Gamma} K_0(\omega r)\frac{\partial \phi}{\partial n}ds + \int\limits_{\Gamma} K_0(\omega r)T^{-1}\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y}dx + 2\beta\left(\int\limits_{L} K_0(\omega r)\tilde{\phi}ds - \right.\right. \tag{7}$$

$$\left.\left. - \cos\alpha\tilde{\phi}(a)\int\limits_{\Gamma} K_0(\omega r)dx\right)\right\} - \frac{\omega^4}{4}\int\limits_{\Gamma} K_0(\omega r)T^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial y}dx = 0 \quad \text{на } L + \Gamma.$$

Така постановка задачі має ту суттєву перевагу, що спектральний параметр ω міститься тільки в крайовій умові задачі. Сингулярність задачі (7) виражається тільки в тому, що крайова умова містить в собі сингулярні інтеграли.

Запропоновано проекційний метод розв'язування задачі (7). Для вирахування сингулярних квадратур розроблено спеціальні чисельні алгоритми. Проведена чисельна реалізація методу для кругової області G при різних висотах заповнення каналу рідиною. Наведені графіки залежності частот і декрементів коливань від числа H при різних значеннях числа β.

В §10 побудовано форми вільної поверхні рідини при власних коливаннях, які відповідають власним значенням задачі із різних віток спектра. Проаналізовано відмінності, які спостерігаємо при розгляді умов прилипання і проковзування з тертям на твердій стінці.

Третій розділ присвячений побудові наближених методів розв'язання задачі про власні симетричні коливання в'язкої рідини в осесиметричній порожнині.

У випадку симетричних коливань рідини в довільному меридіальному перетині області Ω відбувається один і той самий рух рідини. Вектор-швидкості частинок рідини можна виразити через функцію току наступним чином:

$$\vec{v} = rot(\psi_0 \vec{e}_\eta) = -\frac{\partial \psi_0}{\partial z}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\psi_0)\vec{e}_z,$$

де (z, r, η) – циліндрична система координат.

В цьому випадку задача (1) зводиться до скалярного вигляду

$$\Delta_1^2 \psi_0 + \lambda H \Delta_1 \psi_0 = 0 \quad \text{в } G,$$

$$\psi_0 = 0, \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial n} = 0 \quad \text{на } L, \quad \Delta_1 \psi_0 - 2\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\psi_0\Big)\Big) = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{8}$$

$$\frac{\lambda}{H}\frac{\partial}{\partial z}\Big(\Delta_1 \psi_0 + 2\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\psi_0\Big)\Big)\Big) + \lambda^2 \frac{\partial \psi_0}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\psi_0\Big)\Big) = 0 \quad \text{на } \Gamma,$$

де $\Delta_1 \psi_0 \equiv \frac{\partial}{\partial r}\big(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\psi_0)\big) + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2}$; G – меридіальний перетин області Ω, $L = G \cap S$, $\Gamma = G \cap \Sigma$.

Подаючи функцію ψ_0 у вигляді суми $\psi_0 = \varphi + \psi$ $(\Delta_1 \psi + \lambda H \psi = 0, \Delta_1 \varphi = 0)$ і вводячи на Γ: $\{0 \le r \le a.\ z = 0\}$ оператор T_1, який породжується диференціальним виразом $t_1 u \equiv -\frac{d}{dr}\big(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\big(ru\big)\big)$ і діє на класі функцій $u \in C^2([0, a])$, $u(0) = u(a) = 0$, одержуємо наступну крайову задачу:

$$\Delta_1 \varphi = 0, \quad \Delta_1 \psi + \lambda H \psi = 0 \quad \text{в } G, \quad \varphi + \psi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n}(\varphi + \psi) = 0 \quad \text{на } L,$$

$$T_1(\varphi + \psi) - \frac{\lambda H}{2}\psi = 0, \quad T_1 \frac{\partial}{\partial z}(\varphi + \psi) - \frac{\lambda H}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{H^2}{4}\psi = 0 \quad \text{на } \Gamma. \tag{9}$$

В §12 побудовано квадратичний функціонал

$$K_1(\varphi, \psi) = \int_G r\Big[\Big|\frac{\partial}{\partial r}(\varphi + \psi)\Big|^2 + \Big|\frac{\partial}{\partial z}(\varphi + \psi)\Big|^2 + \frac{|\varphi + \psi|^2}{r^2} - \lambda H|\psi|^2\Big] dG -$$

$$-\lambda H \int_{\Gamma} r T_1^{-1} \psi \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} dr - \frac{H^2}{4} \int_{\Gamma} r T_1^{-1} \psi \bar{\psi} dr, \qquad (10)$$

який розглядається на класі функцій $\varphi \in H(G)$, $(H(G) \subset W_2^1(G) : \Delta_1 \varphi = 0$ в $G)$, $\psi \in W_2^1(G)$ при $\lambda \in \mathbb{C}$, $H \in \mathbb{R}$. На основі функціоналу (10) запропоновано варіаційне формулювання задачі (9). Доведено теорему.

Теорема 12.1. Нехай пара функцій $\varphi_k \in H(G)$ і $\psi_k \in W_2^1(G)$ при відповідному значенні комплексного параметра λ_k і фіксованому параметрі H є розв'язком задачі (9). Тоді функціонал (10) на цих функціях набуває стаціонарного значення.

Справедлива і обернена теорема.

Теорема 12.2. Нехай функціонал (10) набуває стаціонарного значення на функціях $\varphi_k \in H(G)$ і $\psi_k \in W_2^1(G)$ при відповідному значенні комплексного параметра $\lambda = \lambda_k$ і фіксованому параметрі H. Тоді при умові, що ці функції є двічі неперервно-диференційовними в G, вони є розв'язками задачі (9).

В §13 розроблено проекційний метод визначення критичних значень числа Галілея та дійсних власних значень задачі (9). Тут задача (9) ставиться в дещо іншій постановці, а саме: фіксується значення параметра χ $(\chi^2 = \lambda H)$ і визначаються ті значення параметра H, при яких дане фіксоване значення параметра χ є власним значенням задачі (9). В цьому випадку функціонал (10) розглядається на класі функцій $\varphi \in H(G)$ і $\psi \in H_1(G)$ $(H_1(G) \subset W_2^1(G):$ $\Delta_1 \psi + \chi^2 \psi = 0$ в $G)$, на яких він набуває наступного вигляду:

$$K_1(\varphi, \psi) = \int_{L+\Gamma} r \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial n} \psi + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial n} \psi \right) ds - \chi^2 \int_{\Gamma} r T_1^{-1} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial z} dr - \frac{H^2}{4} \int_{\Gamma} r T_1^{-1} \psi \, \psi dr.$$

Шуканий розв'язок апроксимується скінченними сумами вигляду

$$\varphi^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} a_k w_k, \quad \psi^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} b_k f_k,$$

в яких $w_k(R, \theta) = R^k P_k^1(\cos\theta)$, $f_k(R, \theta) = R^{-0.5} J_{k+0.5}(\chi R) P_k^1(\cos\theta)$, (11)

(R, η, θ) – сферична система координат з центром на Γ, $R = \sqrt{z^2 + r^2}$, $tg\theta = r/z$, $P_k^1(\cos\theta)$ – приєднані поліноми Лежандра, $J_{k+0.5}(\chi R)$ – сферичні функції Бесселя. Для визначення коефіцієнтів a_k і b_k одержується система лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь, умовою існування нетривіального розв'язку якої є характеристичне рівняння

$$det(\alpha_{ik}(\chi) - H^2\beta_{ik}(\chi)) = 0. \qquad (12)$$

На основі рівняння (12) будуються функціональні залежності $H_k = H_k(\chi)$. Знаходяться точки χ_k^*, в яких виконується умова $\dfrac{\partial H}{\partial \chi} = 0$. Відповідні значення $H_k^* = H_k(\chi_k^*)$ є критичними значеннями числа Галілея. Одержані із функціональних залежностей $H_k = H_k(\chi)$ при фіксованому значенні параметра H дійсні власні значення χ уточнюються на основі рівняння (12), в якому H вважається фіксованим, а χ – шуканим.

В §14 на основі систем розв'язків рівнянь Лапласа і Гельмгольца (11) побудовано систему функцій, які задовольняють три із чотирьох крайових умов задачі (9) для області Ω у вигляді півсфери. Для цієї мети використовується розвинення відповідних функцій в степеневі ряди та ряди Фур'є. Проведена оцінка швидкості збіжності одержаних рядів. На основі побудованих координатних функцій проведена чисельна реалізація проекційного методу розв'язування задачі (9).

В §15 формулюється проекційний метод знаходження комплексних власних значень задачі (9), яку зведено до наступного вигляду:

$$\Delta_1\psi + \lambda H\psi = 0 \quad \text{в } G, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} - \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial n} + \frac{\lambda H}{2}\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \text{ на } L,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial z} + \frac{\lambda H}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + T_1^{-1}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial z}\right) - \frac{\lambda^2 H^2}{4}T_1^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{H^2}{4}\phi = 0 \quad \text{на } \Gamma, \qquad (13)$$

де функції $\tilde{\varphi}$ і ϕ визначаються як розв'язки допоміжних задач Діріхле

$$\Delta_1\tilde{\varphi} = 0 \quad \text{в } G, \quad \tilde{\varphi} = \psi \quad \text{на } L + \Gamma,$$

$$\Delta_1\phi = 0 \quad \text{в } G, \quad \phi = 0 \quad \text{на } L, \quad \phi = T_1^{-1}\psi \quad \text{на } \Gamma.$$

На класі функцій $\psi \in W_2^1(G)$ побудовано квадратичний функціонал

$$D(\psi) = \int_G \left[r\left|\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|^2 + r\left|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|^2 + \frac{|\psi|^2}{r} - r\left|\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r}\right|^2 - r\left|\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial z}\right|^2 - \frac{|\tilde{\varphi}|^2}{r}\right]dG -$$

$$-\frac{H^2}{4}\int_{\Gamma} r\phi T_1\bar{\phi}dr + \lambda H\int_{G}\left[Re\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial r} + r\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial z} + \frac{\phi\bar{\phi}}{r}\right) - r|\psi|^2\right]dG-$$

$$-\frac{\lambda^2H^2}{4}\int_{G}\left[r\left|\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|^2 + r\left|\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|^2 + \frac{|\phi|^2}{r}\right]dG. \qquad (14)$$

Узагальненим розв'язком задачі (13) при деякому фіксованому значенні параметра H назвемо таку функцію $\psi \in W_2^1(G)$ і відповідне число λ, що для них функціонал $D(\psi)$ набуває стаціонарного значення.

Доведено теорему.

Теорема 15.1. **Всякий двічі неперервно-диференційовний узагальнений розв'язок задачі (13) є класичним розв'язком цієї задачі.**

На основі варіаційної постановки задачі сформульовано проекційний метод побудови її розв'язків. Наближений розв'язок шукається у вигляді

$$\psi^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k,$$

де $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – деяка повна в $W_2^1(G)$ система функцій. Коефіцієнти a_k визначаються із умови стаціонарності функціоналу (14), яка приводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\alpha_{ik}^{(0)} + \lambda\alpha_{ik}^{(1)} - \lambda^2\alpha_{ik}^{(2)}\right]a_k = 0. \qquad (15)$$

З умови існування нетривіального розв'язку системи (15) одержується характеристичне рівняння для шуканих значень параметра λ. За результатами чисельної реалізації зроблено висновок, що сформульований метод є достатньо ефективний при $H < 400$. При більших значеннях числа H на точність побудови розв'язку задачі суттєвий вплив має сингулярність задачі.

В §16 запропоновано принципово інший метод розв'язання задачі (9). Він грунтується на ідеї використання фундаментального розв'язку для рівняння $\Delta_1\psi - \omega^2\psi = 0$. На відміну від двовимірного рівняння Гельмгольца, для якого цей розв'язок виражається у вигляді функції $K_0(\omega r)$, в цьому випадку невідомий явний вираз для фундаментального розв'язку.

В роботі цей розв'язок подано у вигляді

$$Q_1(z,r,z',r') = 2\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\exp\{-\omega\sqrt{a^2+b^2\sin^2 t}\}}{\sqrt{a^2+b^2\sin^2 t}} \cos 2t dt, \qquad (16)$$

де $a^2 = (z-z')^2 + (r-r')^2$, $b^2 = 4rr'$.

Для довільного розв'язку рівняння $\Delta_1\psi - \omega^2\psi = 0$ і для довільної обмеженої області G виконується співвідношення

$$\frac{\alpha(P)}{2}\psi(P) + \int\limits_{L+\Gamma} r'\left(\psi\frac{\partial Q_1(P,S)}{\partial n'} - \frac{\partial\psi}{\partial n'}Q_1(P,S)\right)ds = 0, \qquad (17)$$

де $P(z,r)$ і $S(z',r')$ – фіксована і змінна точки області G; $\alpha = 2\pi$, якщо точка $P \in L+\Gamma$, $\frac{\alpha}{2}$ дорівнює внутрішньому куту області G, у вершині якого знаходиться точка P.

Задачу (9) на основі співвідношення (17) зведено до крайової задачі для рівняння Лапласа із спектральним параметром, який міститься в інтегро-диференціальній крайовій умові на межі області G

$$\Delta_1\varphi = 0, \quad \Delta_1\phi = 0 \quad \text{в } G, \quad \phi = 0 \quad \text{на } L, \quad \phi = T^{-1}\varphi \quad \text{на } \Gamma,$$

$$S_1\varphi \equiv \frac{\alpha(P)}{2}\varphi(P) + \int\limits_{L+\Gamma} r'\left(\varphi\frac{\partial Q_1}{\partial n'} - \frac{\partial\varphi}{\partial n'}Q_1\right)ds - \frac{H^2}{4}\int\limits_\Gamma r'\phi Q_1 dr' - \qquad (18)$$

$$-\frac{\omega^2}{2}\left\{\int\limits_{L+\Gamma} r'\frac{\partial\phi}{\partial n'}Q_1 ds + \int\limits_\Gamma r' T_1^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial z'}Q_1 dr'\right\} - \frac{\omega^4}{4}\int\limits_\Gamma r' T_1^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial z'}Q_1 dr' = 0 \quad \text{на } L+\Gamma.$$

Для визначення результату дії оператора S_1 на $L+\Gamma$ потрібно обчислювати квадратури вигляду

$$I_1 = \int\limits_\Gamma r' f(r')Q_1 dr', \quad I_2 = \int\limits_\Gamma r' f(r')\frac{\partial Q_1}{\partial n'}dr',$$

$$I_3 = \int\limits_L r' f(s)Q_1 ds, \quad I_4 = \int\limits_L r' f(s)\frac{\partial Q_1}{\partial n'}ds. \qquad (19)$$

У випадку коли $a \to 0$, тобто при $S \to P$ (точка P належить інтервалу інтегрування) і при $t \to 0$ підінтегральна функція в (16) прямує до ∞.

а тому квадратури (19) є невласними. Крім того при великих значеннях $Re\omega$ підінтегральна функція в (16) при віддаленні від точки $a = 0$, $t = 0$ зменшується по експоненціальному закону, тобто такі квадратури є одночасно і сингулярними. Для їх обчислення розроблено спеціальні алгоритми.

Розглянемо, для прикладу, I_1. Подамо цей повторний інтегал як подвійний

$$I_1 = 2\int_0^{r0}\int_0^{\pi/2}\frac{r' f(r')\exp\{-\omega\sqrt{a^2+b^2\sin^2 t}\}}{\sqrt{a^2+b^2\sin^2 t}}\cos 2t\,dt\,dr'. \qquad (20)$$

Введемо узагальнені полярні координати (ρ, γ)

$$r' = r_p + \rho\sin\gamma, \quad t = \frac{\rho\cos\gamma}{2r_p}, \qquad (21)$$

де $(0, r_p)$ – координати точки $P \in \Gamma$.

Завдяки тому, що якобіан перетворень $D = \frac{\rho}{2r_p}$, а $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\rho}{\sqrt{a^2+b^2\sin^2 t}} = 1$, невласний інтеграл (20) перетворюється у власний. Заміна змінних (21) дає можливість одночасно врахувати також сингулярність квадратур, оскільки в околі кутової точки підінтегральна функція має характер $\exp\{-\omega\rho\}$ при $Re\omega \gg 1$ квадратури вираховуються тільки в деякому ε околі по змінній ρ.

Побудовано проекційний метод розв'язування задачі (18). Проведено чисельну реалізацію алгоритму для сферичної порожнини при різних висотах заповнення рідиною. Результати обчислень подані у вигляді таблиць і графіків залежності комплексних власних значень від числа H. При великих значеннях числа Н частоти коливань $(Im\lambda_k)$ прямують до частоти коливань ідеальної рідини. Проведено порівняння одержаних величин λ_k з відповідними значеннями λ_k, визначеними за допомогою асимптотичного методу. При середніх значеннях Н $(H < 400)$ зроблено порівняння чисельних даних з результатами, одержаними в попередньому параграфі.

У висновках сформульовані основні результати дисертаційної роботи.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

1.Запропоновано варіаційні формулювання задачі про нормальні(власні) коливання в'язкої рідини в областях виду

а)нескінченний горизонтальний канал (розглядаються поперечні коливання рідини з умовою проковзування з тертям на твердій стінці),

б)область, яка має форму тіла обертання (розглядаються симетричні коливання рідини);

доведено еквівалентність спектральних крайових задач і задач знаходження стаціонарних значень відповідних квадратичних функціоналів.

2.Розроблено проекційні методи визначення критичних значень числа Галілея, при яких в задачах з'являються комплексні власні значення.

3.Сформульовано проекційні методи визначення дійсних і комплексних власних значень задач та розроблено чисельні алгоритми реалізації цих методів. Як показують обчислення, область застосування їх обмежена величинами $H < 400$. При більших значеннях H на точність наближених розв'язків суттєвий вплив має сингулярність задачі.

4.Шляхом використання фундаментальних розв'язків для рівняння Гельмгольца спектральні задачі з параметром в рівнянні і крайових умовах зведено до спектральних крайових задач для рівняння Лапласа з параметром тільки в крайових умовах. Такий підхід дав змогу розробити і ефективно реалізувати наближений метод побудови розв'язків задач для довільних значень числа Галілея.

5.Запропоновано інтегральне представлення фундаментального розв'язку рівняння Гельмгольца в осесиметричному випадку та спеціальна методика обчислення сингулярних квадратур, які містять в собі фундаментальний розв'язок і його похідні.

6.Проведено чисельну реалізацію всіх запропонованих в роботі наближених методів розв'язування спектральних крайових задач для областей конкретної геометричної форми; зроблено порівняння чисельних даних, одержаних за допомогою різних алгоритмів.

Основні результати дисертації опубліковані в наступних роботах:

1.Барняк О.М. Наближений метод визначення критичних значень числа Галілея в задачі про нормальні коливання в'язкої рідини в горизонтальному циліндрі з умовою проковзування по стінці // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб.наук.пр. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1995. – Вип.9. – С.6–17.

2.Барняк О.М. Визначення дійсних власних значень задачі про нормальні коливання в'язкої рідини в посудині з умовою проковзування на стінці //Сучасні фізико-математичні дослідження молодих науковців вузів України: Зб.наук.пр. – Київ: Київ. ун-т, 1995. – С. 56–63.

3.Барняк М.Я., Барняк О.М. Приближенный метод определения вещественных решений задачи о нормальных колебаниях вязкой жидкости в горизонтальном канале //Прикл. механика. – 1996. – 32, N7. – С.76–83.

4.Барняк О.М. Проекційний метод побудови розв'язків задачі про нормальні симетричні коливання в'язкої рідини // Укр. мат. журн. – 1997. – 49, N2. – С.315–320.

5.Барняк О.М. Проекційний метод дослідження нормальних коливань в'язкої рідини в посудині з умовою проковзування на стінці //Тези доповідей Четвертої Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука. – Київ, 1995. – С.36.

6.Барняк О.М. Побудова комплексних власних значень та власних функцій задачі про нормальні коливання в'язкої рідини в горизонтальному циліндрі //Тези доповідей П'ятої Міжнародної наукової конференції ім. академіка М.Кравчука. – Київ, 1996. – С.26.

Барняк О.М. "Приближенные методы решения задачи о линейных колебаниях ограниченного объема вязкой жидкости"
Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико - математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика. Институт математики НАН Украины, Киев, 1996.

Защищается диссертация, посвященная разработке приближенных методов решения спектральной каевой задачи о нормальных (собственных) колебаниях ограниченного объема вязкой жидкости. Построены и обоснованы проекционные методы исследования спектральных свойств и решения плоской задачи с условием проскальзывания с трением и осесимметричной задачи с условием прилипания. Разработан приближенный метод решения сингулярно-возмущенных задач, описывающих колебания маловязкой жидкости. Проведена численная реализация разработанных методов для областей конкретной геометрической формы.

Barnyak O.M. "Approximate methods of solving the problem on linear oscillations of bounded volume of viscous liquid"
Thesis for the degree of Doctor of Philosophy in Physics and Mathematics, speciality 01.01.03 – mathematical physics. Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 1996.

This thesis is devoted to development of approximate methods of solving the spectral boundary-value problem on normal (proper) oscillations of bounded volume of viscous liquid. Projection methods for investigation of spectral properties and solution of a plane problem with the friction sliding condition and an axisymmetric problem with the sticking condition are constructed and proved. An approximate method of solving singularly perturbed problems on oscillations of low-viscous liquid is worked out. Numerical realization of the developed methods is carried out for domains of particular configurations.

Ключові слова: крайова задача, лінійні коливання, в'язка рідина, варіаційна задача, квадратичний функціонал, проекційний метод, власні значення, власні функції, декремент коливань, сингулярно-збурена крайова задача, фундаментальний розв'язок.

О.Барн

Підп. до друку 23.01.97. Формат 60х84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,39. Ум. фарбо-відб. 1,39. Обл.-вид. арк. 0,9.
Тираж 100 пр. Зам. 19 . Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3

Баранюк О.М. "Приближенные методы решения задачи о линейных колебаниях ограниченного объема вязкой жидкости". Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика. Институт математики НАН Украины, Киев, 1996.

Защищается диссертация, посвященная разработке приближенных методов решения спектральной краевой задачи о нормальных (собственных) колебаниях ограниченного объема вязкой жидкости. Построены и обоснованы проекционные методы исследования спектральных свойств и решения краевой задачи с условием проскальзывания с границы и эквивалентной задачи с условием прилипания. Разработан приближенный метод решения [illegible] задач, описывающих колебания [illegible] жидкости. Проведены численная реализация разработанных методов для областей конкретной геометрической формы.

Baranyuk O.M. "Approximate methods of solving the problem on linear oscillations of bounded volume of viscous liquid". Thesis for the degree of Doctor of Philosophy in Physics and Mathematics, speciality 01.01.03 – mathematical physics. Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 1996.

This thesis is devoted to development of approximate methods of solving the spectral boundary value problem on normal (proper) oscillations of bounded [illegible] [illegible] and solution of a [illegible] problem with [illegible] An approximate method of solving [illegible] tions of [illegible] liquids is worked out. Numerical realization of the developed methods is carried out for domains of particular configuration.

Ключові слова: крайова задача, власні значення, в'язка рідина, варіаційна задача, [illegible] функціонал, проекційний метод, власні значення, власні функції, [illegible] коливання, [illegible] крайова задача, функціональний простір.