НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

ПОЛОЖИЙ Тетяна Георгіївна

СТРУКТУРНІ ЗАДАЧІ СИНТЕЗУ НА ОСНОВІ ДРУГОГО МЕТОДУ ЛЯПУНОВА ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ В МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМАХ

01.02.01 - теоретична механіка

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ -1997

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Інституті математики НАН України

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук
НОВИЦЬКИЙ В.В.

Офіційні опоненти: доктор технічних наук
ЛИМАРЧЕНКО О.С.

доктор фізико-математичних наук
МАЗКО О.Г.

Провідна установа: Київський Національний університет ім. Тараса Шевченка

Захист відбудеться "8" квітня 1997 р. о 15-й годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 016.50.02 при Інституті математики НАН України за адресою: 252601 Київ, МСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці інституту.

Автореферат розіслано 5-го березня 1997 року.

Вчений секретар
спеціалізованої ради
доктор фізико-математичних наук ЛУЧКА А.Ю.

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми.

Дисертаційна робота присвячена структурним задачам синтезу зворотного зв'язку на основі другого методу Ляпунова та їх застосуванню для оцінки стану та керування деяких моделей механічних систем.

Існує багато методів побудови функцій Ляпунова, як для задач аналізу так і синтезу стійких механічних систем. Відомо, що більшість з них не є конструктивними. Після виходу в 1970 р. роботи А.М.Лєтова, який запропонував нові підходи у задачах керування динамічними системами, значно зріс інтерес до конструктивного застосування другого методу Ляпунова в керованих системах.

Зокрема, алгоритми знаходження функції Ляпунова та зворотного зв'язку було отримано В.М. Кунцевичем та М.М. Личаком, В.Д. Фурасовим та ін., які розв'язували відповідне матричне рівняння Ляпунова, О.С. Яковлевим, який використовує в алгоритмі побудови функції Ляпунова нерівності Сільвестра.

Однак задача знаходження досить простого, особливо в аналітичних випадках, та конструктивного алгоритму визначення функції Ляпунова та відповідного зворотного зв'язку залишається актуальною, зокрема в прикладних задачах, де суттєво можна зменшити похибки обчислень.

Один з підходів до ефективної побудови функції Ляпунова та відповідного зворотного зв'язку грунтується на декомпозиції лінійної керованої системи до блочної форми Гесенберґа. Дослідження В.В. Новицького показали, що саме ця канонічна форма керованих систем дозволяє реалізувати ідею використання результатів декомпозиції початкової задачі для ефективнішого розв'язання задач синтезу стаціонарних та нестаціонарних систем.

Одною з основних проблем при синтезі керування є проблема одержання аналітичних розв'язків. Вона конструктивно розв'язується, якщо система має певну канонічну форму, зокрема, Гесенберґа або Фробеніуса. Залишаються актуальними питання досліджень різноманітних модифікацій форми Гесенберґа та побудови для них функції Ляпунова та відповідного зворотного зв'язку, а також різноманітні практичні застосування.

Мета роботи:

— побудова конструктивного алгоритму знаходження зворотного зв'язку та функції Ляпунова для моделі механічної системи в формі Фробеніуса з одним керуванням;

— знаходження точних аналітичних розв'язків для матриць підсилення зворотного зв'язку та функції Ляпунова через розв'язки відповідної системи різницевих рівнянь;

— узагальнення алгоритму на блочні канонічні форми Фробеніуса та Гесенберґа систем з q керуваннями;

—застосування алгоритму синтезу в задачах керування механічними системами.

Загальна методика досліджень. В дисертаційній роботі використовуються методи Ляпунова, структурної декомпозиції, теорії лінійних різницевих рівнянь та матричної алгебри.

Наукова новизна результатів дисертаційної роботи полягає у тому, що в ній вперше:

- для моделі механічної системи у формі Фробеніуса з одним керуванням знайдено алгоритм побудови аналітичних розв'язків для матриць підсилення зворотного зв'язку та функції Ляпунова;
- встановлено, що розглянутий клас задач зводиться до системи різницевих рівнянь; знайдено аналітичні розв'язки цих систем;
- доведено теорему про структуру та аналітичний вигляд матриць зворотного зв'язку для керованих систем в формі Фробеніуса;
- отримано узагальнення алгоритму синтезу на блочні канонічні форми Фробеніуса та Гесенберґа систем з q керуваннями;
- в аналітичній формі розв'язано задачу про побудову фільтра для моделі похибок інерціальної навігаційної системи;
- проведено структурні дослідження керованих рівнянь руху моделі супутника на орбіті та побудовано керування для різних режимів роботи.

Теоретична та практична цінність. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати є новими. Побудовані алгоритми використовуються в учбовому процесі Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут" та викладені в навчальному посібнику В.В. Новицького, В.В. Ясінського "Прикладні задачі декомпозиції та керування в динамічних системах" для студентів вищих учбових закладів, які навчаються за фахом "Прилади та системи керування літальними апаратами та комплексами" та "Прилади та системи орієнтації, навігації та керування рухом у просторі".

Результати можуть бути використані фахівцями при дослідженнях різноманітних керованих динамічних систем в Інституті математики НАНУ, Інституті механікиНАНУ, Інституті прикладної математики та механіки НАНУ, інших наукових та вищих учбових закладах.

Апробація роботи. Основні положення та результати, що викладені в дисертаційній роботі, доповідались на семінарах відділу аналітичної механіки Інституту математики НАН України, а також на Республіканській конференції "Динаміка твердого тіла та стійкість руху" (Донецьк, 1990 р.), на Українській конференції "Моделювання та дослідження стійкості систем" (Київ, 1995 р.), на Другій Українській конференції з автоматичного керування ("Автоматика - 95", Львів, 1995 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в роботах [1-9]. Роботи [2,3,6-9] належать автору особисто.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційну роботу викладено на 93 сторінках машинописного тексту. Вона складається зі вступу, двох глав, висновків та списку використаної літератури.

Зміст роботи.

У вступі дано обгрунтування актуальності роботи, формулюється мета дослідження, його теоретична та практична цінність. Проводиться короткий огляд робіт за даною темою та результатів дисертаційної роботи.

Глава 1 присвячена структурним задачам синтезу зворотного зв'язку на основі другого методу Ляпунова.

В § 1 сформульовано постановку задачі та подано в загальному вигляді метод синтезу зворотного зв'язку, запропонований В.В. Новицьким.

В § 2 розглядається найпростіший випадок — керована система з одним керуванням в канонічній формі Фробеніуса. В цьому випадку згаданий метод дозволяє задачу керування звести до системи різницевих рівнянь, спеціальний вид якої дає можливість побудувати її аналітичний розв'язок.

Розглядається система

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

де $x(t) \in R^n$, A – матриця в формі Фробеніуса порядку $n \times n$, B – матриця порядку $n \times 1$, $u(t) \in R^1$ – керування.

Зворотний зв'язок для системи (1) будується таким чином:

$$u = -Kx, \tag{2}$$

а функція Ляпунова для замкненої системи (1)-(2) вибирається у вигляді додатно визначеної квадратичної форми

$$V = x^{\tau}Px > 0$$

так, щоб виконувалась умова

$$\dot{V} = -2\beta V, \quad \beta = const > 0.$$

Відповідне рівняння Ляпунова має вигляд

$$(A + \beta I_n - BK)^T P + P(A + \beta I_n - BK) = 0. \tag{3}$$

Позначимо через K^i матрицю коефіцієнтів зворотного зв'язку для системи (1) порядку $i+1$

$$K^i = [\,K_{21}^{i,1}, \quad K_{21}^{i,2}, \quad \cdots \quad K_{21}^{i,j}, \quad \cdots \quad K_{21}^{i,i}, \quad K_{22}^{i}\,].$$

В.В.Новицьким встановлені рекурентні співвідношення між K^{i-1}, K^i та K^{i+1}, які випливають з рівняння Ляпунова (3):

$$\begin{gathered} K^i = [K_{21}^i, K_{22}^i], \qquad K_{22}^i = \beta + K_{22}^{i-1}, \\ K_{21}^{i+1} = S_{i+1}[K^{i-1}, 1] + \beta K^i + [0, K_{21}^i], \\ i = 1, \cdots, n-2, \end{gathered} \tag{4}$$

де

$$K^0 = \beta = K_{22}^1, \qquad K_{21}^1 = S_1 + \beta^2.$$

Заміна змінних

$$K_{21}^{s,r} = x_{s-r}(r) \tag{5}$$

дозволила перейти від рекурентних співвідношень (4) до системи різницевих рівнянь, яка і є основним об'єктом досліджень § 2.

$$
\begin{aligned}
x_k(1) &= S_{k+1}x_{k-2}(1) + \beta x_{k-1}(1),\\
x_0(j) &= S_j + j\beta^2 + x_0(j-1),\\
x_1(j) &= jS_{j+1}\beta + \beta x_0(j) + x_1(j-1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_k(j) &= S_{j+1}x_{k-2}(j) + \beta x_{k-1}(j) + x_k(j-1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_n(n) &= S_{n+1}x_{n-2}(n) + \beta x_{n-1}(n) + x_n(n-1),
\end{aligned}
\tag{6}
$$

де

$$
x_0(1) = S_1 + \beta^2,\ \ x_1(1) = \beta^3 + \beta(S_1 + S_2),\ \ j = 2, 3, ..., n\ \ k = 2, 3, ..., n.
$$

Лема 1. Розв'язок рівняння

$$
x_k = \beta x_{k-1} + S_{k+1}x_{k-2}
$$

з початковими умовами

$$
x_0 = \beta^2 + S_1, \quad x_1 = \beta^3 + \beta(S_1 + S_2)
$$

має вигляд

$$
x_k = \beta^{k+2} + \sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]} \beta^{k-2i} \sum_{\substack{1+2i \,\le\, j_1 \,\le\, k+1 \\ 3+2(i-l) \,\le\, j_l \,\le\, j_{l-1}-2, \text{ при } l>1}} \prod_{l=1}^{i+1} S_{j_l}.
$$

Лема 2. Розв'язок системи (6) має вигляд

$$
x_k(j) = C_{j+k+1}^{k+2}\beta^{k+2} + \sum_{q=0}^{[\frac{k}{2}]} C_{j+k-2q-1}^{k-2q}\beta^{k-2q} \sum_{\substack{1+2q \,\le\, j_1 \,\le\, k+j \\ 3+2(q-l) \,\le\, j_l \,\le\, j_{l-1}-2, \text{ при } l>1}} \prod_{l=1}^{q+1} S_{j_l}
$$

при $j = 1, 2, 3, ..., n, \ \ k = 0, 1, 2, ..., n.$

З леми 2 та (5) випливає таке співвідношення:

$$
K_{21}^{i,j+1} = \frac{1}{j!}\frac{d^j K_{21}^{i,1}}{d\beta^j}, \quad j = 1, ..., i.
$$

Позначимо $\frac{1}{j!}\frac{d^j K_{21}^{i,1}}{d\beta^j}$ $j = 1, ..., i$ через $(K_{21}^{i,1})^{[j]}$.

Теорема. Нехай дана лінійна керована система

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

де $x(t) \in R^n$, A – матриця у формі Фробеніуса порядку $n \times n$, B – матриця порядку $n \times 1$, $u(t) \in R^1$ – керування та довільні константи $P_{22}^i > 0$, $i = 1, ..., n$ та $\beta > 0$. Тоді нульовий розв'язок відповідної замкнутої системи

$$\dot{x} = (A - BK)x,$$

буде асимптотично стійким, якщо перший елемент матриці коефіцієнтів зворотного зв'язку K має вигляд

$$K_{21}^{n,1} = \beta^n + \sum_{q=0}^{[\frac{n-2}{2}]} \beta^{n-2-2q} \sum_{\substack{1+2q \leq j_1 \leq n-1 \\ 3+2(q-l) \leq j_l \leq j_{l-1}-2, \text{ при } l>1}} \prod_{l=1}^{q+1} S_{j_l},$$

де $n = 1, 2, ...,$

$$S_n = (P_{22}^n)^{-1} P_{22}^{n-1},$$

а інші елементи K визначаються за формулою

$$K_{21}^{n,j+1} = \frac{1}{j!}\frac{d^j K_{21}^{n,1}}{d\beta^j},$$

де $j = 1, ...n-1$. При цьому матриця для функції Ляпунова P знаходиться таким чином:

$$P = L^T D L,$$

де $D = \mathrm{diag}(\mathrm{P}_{22}^1, \mathrm{P}_{22}^2, \cdots, \mathrm{P}_{22}^n)$,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ K^1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^{2,1} & (K_{21}^{2,1})^{[1]} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{21}^{n-1,1} & (K_{21}^{n-1,1})^{[1]} & \cdots & (K_{21}^{n-1,1})^{[n-2]} & (K_{21}^{n-1,1})^{[n-1]} & 1 \end{bmatrix},$$

де

$$K^1 = \beta,$$

$$(K_{21}^{n,1})^{[n-1]} = K_{22}^n.$$

В § 3 подано декілька узагальнень результатів, отриманих для систем у формі Фробеніуса, на динамічні системи в інших канонічних формах.

1. Для динамічної системи порядку n з одним керуванням у такій канонічній формі

$$\dot{x} = Fx + Bu,$$

де $x \in \Re_n, u \in \Re_m, F \in \Re_{n\times n}, B \in \Re_{n\times 1}$,

$$F = \begin{bmatrix} 0 & f_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & f_{23} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$f_{12}, f_{23}, \cdots, f_{n-1,n} = const \neq 0$.

До канонічної форми Фробеніуса цю систему зводить таке лінійне перетворення вектора стану

$$z = Tx,$$

де

$$T = \mathrm{diag}(t_{11}, t_{22}, \cdots, t_{n-1,n-1}, t_{nn}),$$

$$t_{11} = f_{12}^{-1} f_{23}^{-1} \cdots f_{n-1,n}^{-1}, \quad t_{22} = f_{23}^{-1} f_{34}^{-1} \cdots f_{n-1,n}^{-1}, \quad \cdots$$

$$t_{n-1,n-1} = f_{n-1,n}^{-1}, \quad t_{nn} = 1.$$

Матриця K коефіцієнтів підсилення зворотного зв'язку та матриця P для функції Ляпунова матимуть вигляд:

$$K = K^i T, \quad P = T^{-\tau} P^i T^{-1}.$$

2. Для динамічної системи порядку $n \times q$ з q керуваннями у такій блочній формі:

$$\dot{x} = A \otimes I_q x + B \otimes I_q u = A_q x + B_q u, \tag{7}$$

де

$$A_q = \begin{bmatrix} 0 & I_q & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I_q & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I_q \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, B_q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_q \end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$u = -K_q x,$$

I_q –одинична матриця порядку q, значок $\otimes$ – добуток за Кронекером, $x \in \Re_{nq}$.

Для системи (7)-(8) матриця K_q коефіцієнтів зворотного зв'язку та матриця P_q для функції Ляпунова матимуть вигляд

$$K_q = K \otimes I_q, \quad P_q = P \otimes I_q.$$

3. При розгляді динамічної системи порядку $n \times q$ з q керуваннями вигляду

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$u = -Kx,$$

де $x \in \Re_{nq}$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_q \end{bmatrix},$$

де $A_{12}, A_{23}, \cdots, A_{n-1,n} \in \Re_{q\times q}$ – невироджені матриці, за аналогією з попереднім, матимемо

$$K = K_q T, \quad P = T^{-\tau} P_q T^{-1},$$

де

$$z = Tx,$$

$$T = \mathrm{diag}(\mathrm{T}_{11}\ \mathrm{T}_{22}, \cdots, \mathrm{T}_{n-1,n-1}, \mathrm{T}_{nn}),$$

$$T_{11} = A^{-1}_{n-1,n} A^{-1}_{n-2,n-1} \cdots A^{-1}_{12}, \quad T_{22} = A^{-1}_{n-1,n} A^{-1}_{n-2,n-1} \cdots A^{-1}_{23},$$
$$\cdots, T_{n-1,n-1} = A^{-1}_{n-1,n}, \quad T_{nn} = I_q, \quad T_{ii} \in \Re_{q\times q}.$$

Глава 2 присвячена застосуванню отриманих результатів до розв'язку конкретних задач фільтрації та керування.

В § 1 розглянуто задачу побудови фільтра для моделі інерціальної навігаційної системи (ІНС) вигляду

$$\dot{\alpha} = \Omega\beta + \delta_{\zeta 0},$$
$$\dot{\beta} = -\Omega\alpha + \delta_{\xi 0},$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\dot{\lambda} &= \dot{\lambda}\Delta\varphi tg\varphi + \Delta V_E/R\cos\varphi + m_\lambda\dot{\lambda} + \varepsilon_{2E}/R\cos\varphi,\\
\Delta\dot{\varphi} &= \Delta V_N/R + m_\varphi\dot{\varphi} + \varepsilon_{2N}/R,\\
\Delta\dot{V}_N &= g\beta - g\Delta\varphi + \epsilon_N,\\
\Delta\dot{V}_E &= -g\alpha\sin\varphi - g\Delta\lambda\cos\varphi - g\Delta\psi\cos\varphi + \varepsilon_E,
\end{aligned}
$$

Тут α, β – похибки моделювання інерціального тригранника, $\Omega = U + \dot{\lambda}$, $U = 7.292116\times 10^{-5} 1/\text{c}$ – кутова швидкість Землі, $\delta_{\zeta 0}, \delta_{\eta 0}, \delta_{\xi 0}$ – швидкості відхилень гіростабілізованої платформи навколо осей ζ_0, η_0, ξ_0. η_0 направлена по осі обертання Землі, а ζ_0, ξ_0 лежать в екваторіальній площині, $\dot{\psi} = \delta_{\eta 0}$, $g = 978.049 \text{см}/\text{c}^2$ – прискорення сили тяжіння, $R = 6378245\text{м}$ – радіус Землі; φ та λ – широта і довгота місця, ϵ_N, ϵ_E – дрейфи акселерометрів та перших інтеграторів; $\varepsilon_{2N}, \varepsilon_{2E}$ –дрейфи других інтеграторів; m_λ, m_φ – маштабні похибки акселерометрів та перших інтеграторів; ΔV_N, ΔV_E – похибки відповідно у північній та східній складових швидкості об'єкта, $\Delta\varphi, \Delta\lambda$ – похибки координат місця.

В матричній формі

$$\dot{x} = F(t)x + \omega,$$

де $x \in R^6, F \in \Re_{6\times 6}, \omega \in R^6$,

$$
F = \begin{bmatrix}
0 & s(t) & 0 & 0 & 0 & 0\\
-s(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & n(t) & 0 & m(t)\\
0 & 0 & 0 & 0 & c & 0\\
0 & g & 0 & -g & 0 & 0\\
-f(t) & 0 & -r(t) & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix},
$$

$$w = [w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4,\ w_5,\ w_6]^{\mathrm{T}},$$

де

$$c = 1/R,\ s = U + \dot{\lambda},\ f(t) = g\sin\varphi,\ m(t) = 1/R\cos\varphi,$$

$$n(t) = \dot{\lambda} tg\varphi,\ \ r = g\cos\varphi,$$

$$w_1 = \delta_{\zeta 0},\quad w_2 = \delta_{\xi 0},\quad w_3 = m_\lambda\dot{\lambda} + \varepsilon_{2E}/R\cos\varphi,$$

$$w_4 = m_\varphi\dot{\varphi} + \varepsilon_{2N}/R,\quad w_5 = \varepsilon_N,\ w_6 = -g\Delta\psi\cos\varphi + \varepsilon_E,$$

з таким вектором стану:

$$x = [\alpha,\ \beta,\ \Delta\lambda,\ \Delta\varphi,\ \Delta V_N,\ \Delta V_E]^T.$$

Вважається, що на борту є можливість отримувати інформацію зі стабілізованого лага про похибки північної та східної складових швидкості об'єкта ΔV_N и ΔV_E.

$$y_1 = \Delta V_N + \Delta v_N = x_5 + \Delta v_N,$$

$$y_2 = \Delta V_E + \Delta v_E = x_6 + \Delta v_E$$

Тут Δv_N и Δv_E – похибки вимірювання швидкості відносними лагами, відповідно північним та східним.

В результаті матриця коефіцієнтів підсилення фільтра матиме вигляд

$$K = \mathcal{K} \otimes I_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{K} = [\beta^3 + \beta(S_1 + S_2), \;\; 2\beta^2 + (S_1 + S_2), \;\; 2\beta],$$

а матриця Ляпунова буде такою:

$$P = L^T D L$$

де

$$L = \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ K^1 & I_2 & 0 \\ K^2 & & I_2 \end{bmatrix},$$

$$K^1 = \mathcal{K}^1 \otimes I_2 + \begin{bmatrix} 0 & -(fs + nr)/g \\ (gs^2)/(fs + nr) & 0 \end{bmatrix},$$

$$K^2 = \mathcal{K}^2 \otimes I_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & nr/g \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

де

$$\mathcal{K}^1 = \beta, \;\; \mathcal{K}^2 = [\beta^2 + S_1, 2\beta].$$

В § 2 за допомогою синтезу керування на основі другого методу Ляпунова розв'язано задачу стабілізації стаціонарного руху супутника, утвореного з двох твердих тіл – зовнішнього та внутрішнього.

Досліджувана модель супутника така, що зовнішнє тіло супутника має сферичну каверну, центр якої збігається з центром мас тіла, а внутрішнє тіло знаходиться в цій каверні. Вважаємо, що обидва тіла мають осі динамічної симетрії, які збігаються в незбуреному русі.

Розглянемо рух центра мас супутника круговою орбітою з кутовою швидкістю $\omega_0 = const$. Положення супутника відносно орбітальної системи координат визначається кутами Ейлера $\psi_i,\ \theta_i,\ \varphi_i\ (i = 1, 2)$, $i = 1$ відноситься до зовнішнього, а $i = 2$ до внутрішнього тіла. Кути ψ_i, θ_i визначають положення осей симетрії тіл в орбітальній системі координат. Відносний рух тіл у першому наближенні відбувається під дією сили з потенціалом

$$V = -\frac{1}{2}k[(\psi_1 - \psi_2)^2 + (\theta_1 - \theta_2)^2].$$

Супутник може рухатися стаціонарно, що має назву циліндричної прецесії. Цьому стаціонарному рухові (незбурений рух) відповідають такі значення координат:

$$\theta_i = \frac{\pi}{2}, \quad \psi_i = \pi, \quad \dot{\theta}_i = \dot{\psi}_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

У збуреному русі покладаємо

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} + q_1, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} + q_2, \quad \psi_1 = \pi + q_3, \quad \psi_2 = \pi + q_4.$$

При цьому, без втрати загальності, обмежимося розглядом випадку $r_1 = r_2 = r$ (кутові швидкості внутрішнього та зовнішнього тіл в незбуреному русі однакові).

Рівняння збуреного руху центра мас супутника круговою орбітою з кутовою швидкістю $\omega_0 = const$ в першому наближенні можна подати у вигляді

$$A\ddot{q} + hG^1\dot{q} + K^1 q = V.$$

Тут

$$q = (q_1, q_2, q_3, q_4), \quad h = \frac{r}{\omega_0}, \quad A = \mathrm{diag}(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2),$$

$$G^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -h_1^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h_2^1 \\ h_1^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, K^1 = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 \\ k_{12}^1 & k_{22}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{33}^1 & k_{34}^1 \\ 0 & 0 & k_{34}^1 & k_{44}^1 \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_4 \end{bmatrix} \text{ - матриця керування,}$$

$$h_i^1 = C_i + \frac{2A_i\omega_0}{r}, \;\; k_{ii}^1 = 3C_i - 4A_i + \frac{k}{\omega_0^2}, \;\; i = 1, 2,$$

$$k_{33}^1 = \frac{k}{\omega_0^2} - A_1, \;\; k_{44}^1 = \frac{k}{\omega_0^2} - A_2, \;\; k_{12}^1 = k_{34}^1 = \frac{k}{\omega_0^2},$$

$$v_1 = M_{\theta_1}, \;\; v_2 = M_{\theta_2}, \;\; v_3 = M_{\psi_1}, \;\; v_4 = M_{\psi_2}.$$

Клас керувань, які дозволяють не тільки експоненційно стабілізувати рух супутника, але й змінювати структуру діючих сил, буде таким:

$$u = -[K_{21} \;\; K_{22}]x,$$

де

$$K_{22} = \begin{bmatrix} (2a+1)/2 & u_{12} & h_1 + u_{13} & u_{14} \\ -u_{12} & (2a+1)/2 & u_{23} & h_2 + u_{24} \\ -(h_1 + u_{13}) & -u_{23} & (2a+1)/2 & u_{34} \\ -u_{14} & -(h_2 + u_{24}) & -u_{34} & (2a+1)/2 \end{bmatrix},$$

$$K_{21} = \begin{bmatrix} -k_{11} + 1/2a & au_{12} - k_{12} & au_{13} & au_{14} \\ -(au_{12} + k_{12}) & -k_{22} + 1/2a & au_{23} & au_{24} \\ -au_{13} & -au_{23} & -k_{33} + 1/2a & au_{34} - k_{34} \\ -au_{14} & -au_{24} & -(au_{34} + k_{34}) & -k_{44} + 1/2a \end{bmatrix}.$$

Цей клас характерний саме наявністю вільних параметрів u_{ij}, які і дозволяють змінити структуру діючих сил.

У третьому параграфі розв'язано задачу стабілізації стаціонарного руху супутника на основі структурного підходу викладеного в гл. 1 § 2 зі спеціальним вибором матриці Q, а саме $Q = 2\beta P$ та керування

$$u = u' - [K, G]x,,$$

де

$$-[K, G] = \begin{bmatrix} -k_{11} & -k_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & h_1 & 0 \\ -k_{12} & -k_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 \\ 0 & 0 & -k_{33} & -k_{34} & -h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{34} & -k_{44} & 0 & -h_2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$u' = [u_1', u_2', u_3', u_4']^T,$$

тоді модель набуде вигляду

$$\dot{x} = Ax + Bu',$$

де

$$A=\begin{bmatrix}0 & I_4\\ 0 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\ I_4\end{bmatrix}.$$

Виходячи з результатів глави 1, отримуємо матрицю коефіцієнтів підсилення у вигляді

$$K_{21}=\begin{bmatrix}\beta^2+S_1-k_{11} & \beta\frac{1}{p_2}u_{12}-k_{12} & \beta\frac{1}{p_2}u_{13} & \beta\frac{1}{p_2}u_{14}\\ -\beta\frac{1}{p_2}u_{12}-k_{12} & \beta^2+S_1-k_{22} & \beta\frac{1}{p_2}u_{23} & \beta\frac{1}{p_2}u_{24}\\ -\beta\frac{1}{p_2}u_{13} & -\beta\frac{1}{p_2}u_{23} & \beta^2+S_1-k_{33} & \beta\frac{1}{p_2}u_{34}-k_{34}\\ -\beta\frac{1}{p_2}u_{14} & -\beta\frac{1}{p_2}u_{24} & -\beta\frac{1}{p_2}u_{34}-k_{34} & \beta^2+S_1-k_{44}\end{bmatrix},$$

$$K_{22}=\begin{bmatrix}2\beta & u_{12} & h_1+u_{13} & u_{14}\\ -u_{12} & 2\beta & u_{23} & h_2+u_{24}\\ -h_1-u_{13} & -u_{23} & 2\beta & u_{34}\\ -u_{14} & -h_2-u_{24} & -u_{34} & 2\beta\end{bmatrix}.$$

Розглянутий випадок показав, яким чином розв'язок задачі керування високої розмірності (восьмого порядку) можна отримати з допомогою відомих розв'язків для систем низьких порядків (в даному випадку систем другого порядку).

В четвертому параграфі розв'язано задачу синтезу для супутника у випадку виходу з ладу одного керування (для зручності нехай це буде u_1); тоді система матиме вигляд

$$\dot{x}=Ax+Bu,$$

де

$$A=\begin{bmatrix}0 & I_4\\ -K & -G\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0_{5\times3}\\ I_3\end{bmatrix},$$

а $0_{5\times3}$- нульова матриця розміру 5×3 , I_3 -одинична матриця третього порядку та

$$u=[u_2,u_3,u_4]^T.$$

Якщо u вибрати у вигляді

$$u=u'-[K,G]x,$$

де

$$-[K',G']=\begin{bmatrix}-k_{12} & -k_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2\\ 0 & 0 & -k_{33} & -k_{34} & -h_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -k_{34} & -k_{44} & 0 & -h_2 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$u' = [u_2', u_3', u_4']^T,$$

то

$$\dot{x} = Ax + Bu',$$

де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_{11} & -k_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & h_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Після зведення системи до нижньої блочної форми Гессенберґа та застосування результатів глави 1, знайдено керування u, матрицю коефіцієнтів підсилення та матрицю для функції Ляпунова

$$K_{21} = \begin{bmatrix} -k_{11} & -k_{12} & 0 & 0 \\ a_{11} - k_{12} & a_{12} - k_{22} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & -k_{33} & -k_{34} \\ 0 & 0 & -k_{34} & a_{34} - k_{44} \end{bmatrix},$$

$$K_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & h_1 & 0 \\ a_{15} & a_{16} & a_{17} & h_2 \\ a_{25} - h_1 & a_{26} & a_{27} & 0 \\ 0 & -h_2 & 0 & a_{38} \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & 0 & p_{15} & p_{16} & p_{17} & 0 \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} & 0 & p_{25} & p_{26} & p_{27} & 0 \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} & 0 & p_{35} & p_{36} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 & 0 & 0 & p_{48} \\ p_{15} & p_{25} & p_{35} & 0 & p_{55} & p_{56} & p_{57} & 0 \\ p_{16} & p_{26} & p_{36} & 0 & p_{56} & 1 & 0 & 0 \\ p_{17} & p_{27} & 0 & 0 & p_{57} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{48} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

де параметри $a_{i,j}$ та $p_{k,l}$ приймають відповідні значення.

Введення довільної кососиметричної матриці не змінює ступеня стійкості системи, але дозволяє змінювати структуру діючих сил.

Основні результати та висновки

1. Запропоновано конструктивний алгоритм аналітичної побудови зворотного зв'язку та функції Ляпунова для механічної системи в формі Фробеніуса з одним керуванням.

2. Доведено теорему про структуру та аналітичний вигляд матриць зворотного зв'язку і функції Ляпунова для керованих систем в формі Фробеніуса.

3. Отримано узагальнення запропонованого алгоритму синтезу на блочні канонічні форми Фробеніуса та Гесенберґа систем з q керуваннями.

4. В аналітичній формі розв'язано задачу про побудову фільтра для моделі похибок інерціальної навігаційної системи.

5. Проведено структурні дослідження керованих рівнянь руху моделі супутника на орбіті та побудовано керування для різних режимів роботи.

Основні результати дисертації опубліковані в таких роботах:

[1] Положий Т.Г., Новицкий В.В. *Построение обратной и функции Ляпунова в линейных управляемых системах* // Республ. конф. "Динамика твердого тела и устойчивость движения": Тез. докл. - Донецк, 1990. С. 44.

[2] Положий Т.Г. *Управление линейной нестационарной ИНС* // Фильтрация и управление в механических системах. - Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1991. - С.86–97.

[3] Положий Т.Г. *Структурные задачи синтеза обратной связи вторым методом Ляпунова* - Киев, 1993.- 24с. - (Препр. / АН Украины. Ин-т математики; 93.43).

[4] Положий Т.Г., Новицкий В.В. *Структурные задачи синтеза и треугольник Паскаля* // Укр. конф. "Моделирование и исследование устойчивости систем" (Моделирование систем): Тез. докл. – Киев, 1995.– С. 77.

[5] Положий Т.Г., Новицкий В.В *Структурные задачи синтеза и треугольник Паскаля* // Друга Українська конференція з автоматичного керування ("Автоматика– 95"). Тези доп. – Львів, 1995. – С. 9.

[6] Положий Т.Г. *Керування нестаціонарною моделлю похибок ІНС* // Новицький В.В., Ясінський В.В. "Прикладні задачі декомпозиції та керування в динамічних системах." – Київ: НТУУ "Київський політехнічний інститут", 1995. – С.48-57

[7] Положий Т.Г. *Узагальнення на багатовимірні системи* // Новицький В.В., Ясінський В.В. "Прикладні задачі декомпозиції та керування в динамічних системах." – Київ: НТУУ "Київський політехнічний інститут", 1995. С.67-70

[8] Положий Т.Г. *Алгоритм синтезу для форми Фробеніуса* // Новицький В.В., Ясінський В.В. "Прикладні задачі декомпозиції та керування в динамічних системах." НТУУ "Київський політехнічний інститут", 1995. С.70-96

[9] Положий Т.Г. *Алгоритм побудови зворотного зв'язку для канонічної форми Фробеніуса керованих систем* - Київ, 1996.- 32с. - (Препр. НАН України. Ін-т математики; 96.10).

Положий Т.Г. "Структурные задачи синтеза на основе второго метода Ляпунова и их применение в механических системах"

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.01 — теоретическая механика. Институт математики НАН Украины, Киев, 1997.

Диссертация посвящена решению задач синтеза обратной связи для линейных систем в канонических формах Хессенберга и Фробениуса на основе второго метода Ляпунова и их применению в задачах механики. Построены и обоснованы конструктивные алгоритмы вычисления обратной связи и функции Ляпунова. Найдены аналитические выражения матрицы усиления обратной связи и матрицы функции Ляпунова через решение соответствующей системы разностных уравнений. Полученные результаты применены для построения фильтра в модели ошибок инерциальной навигационной системы и для исследования задачи управления спутником на орбите.

Polozhii T.G. "Structural problems of synthesis based on Liapunov second method and their application to the mechanical systems".

Thesis for the degree of Doctor of Philosophy in Physics and Mathematics, speciality 01.02.01 – Theoretical Mecanics. Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 1997.

Thesis is devoted to solution of the problems of synthesis of feedback for linear systems in Hessenberg and Frobenius canonical form based on Liapunov second method and their application to the mechanical problems. The constructive algorithmes of calculation of feedback and Liapunov function were constructed and substantiated. Analitical expressions for matrix of strengthening of feedback and matrix of Liapunov function over solution of coresponding systems of difference equations were found. Obtained results were applieded for construction of filter in the model of error of the inertial navigational system and investigation of control problem of the satellite on the orbit.

Підп.до друку 00.00.97. Формат 60 × 84/16. Папір друк. Офс. друк. Ум. друк. арк. 1,16. Ум.-фарбо-відб. 1,16. Обл.-вид. арк. 0,85. Тираж 100 пр. Зам. 37 . Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики НАН України.
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3