НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

ТКАЧЕНКО Віктор Іванович

ДОСЛІДЖЕННЯ ОБМЕЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ТА ІНВАРІАНТНИХ МНОЖИН МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ СИСТЕМ

01.01.02 - диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття вченого ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ - 1997

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі звичайних диференціальних рівнянь Інституту математики НАН України

Науковий консультант - академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор А.М. САМОЙЛЕНКО

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, М.У. АХМЕТОВ

доктор фізико-математичних наук, О.К. ЛОПАТІН

доктор фізико-математичних наук, І.О. ПАРАСЮК

Провідна установа - Одеський державний університет імені І.І. Мечникова

Захист дисертації відбудеться "22" квітня 1997 року о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради Д.01.66.02 при Інституті математики НАН України за адресою:
252601 Київ - 4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці інституту.

Автореферет розіслано "18" березня 1997 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради А.Ю. ЛУЧКА

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дана робота присвячена дослідженню обмежених та майже періодичних розв'язків та інваріантних множин майже періодичних систем звичайних диференціальних рівнянь, різницевих рівнянь і рівнянь з імпульсами.

З часу створення у 20-х роках нашого століття теорії майже періодичних функцій майже періодичним системам присвячена величезна кількість досліджень. Це зв'язано як з численними застосуваннями в різних областях математики, механіки та теоретичної фізики, так і "внутрішніми" причинами – багатою та складною природою таких систем.

Для систем лінійних майже періодичних диференціальних чи різницевих рівнянь не справедлива теорема Флоке-Ляпунова, більше того, у загальному випадку не виконуються такі її ослаблені варіанти, як розщеплення на підсистеми, які відповідають експоненціальній дихотомії. Це пояснюється складною топологією векторних розшарувань над замиканням множини зсувів майже періодичної матриці коефіцієнтів. Замикання множини нетривіальних обмежених розв'язків однорідної системи у загальному випадку навіть не утворює розшарування. Дослідженню однорідних майже періодичних систем з нетривіальними обмеженими розв'язками та нетривіальними майже періодичними розв'язками присвячені роботи С. Бохнера, А. Венковської, В.А. Главана, Р. Джонсона, Р. Елліса, Р. Камерона, М. Картрайт, Я. Курцвейля, Д. Ліллю, М.Г. Любарського, В.М. Міліонщикова, К. Пальмера, Р. Саккера, Д. Селла. Наявність нетривіального обмеженого розв'язку у лінійної однорідної майже періодичної системи не гарантує існування нетривіального майже періодичного розв'язку. Отримання умов існування таких розв'язків – важлива і непроста задача.

Останні роки активно розвивається теорія майже періодичних імпульсних систем. Відмітимо роботи М.У. Ахметова, Д. Векслера, М.О. Перестюка, А.М. Самойленка, В.Ю. Слюсарчука, С.І. Трофимчука. В майже періодичних імпульсних системах проявляються властивості майже періодичних диференціальних і різницевих систем і виникають специфічні складнощі, пов'язані з розривністю та непродовжуваністю на від'ємну піввісь розв'язків. Багаточастотним розривним коливанням, які описуються розривними квазіперіодичними функціями, відповідають розривні інваріантні тори імпульсної системи. Це вимагає дослідження розривних інваріантних множин та імпульсних лінійних розширень, які дають основну інформацію про поведінку імпульсної системи в околі інваріантної множини.

Мета роботи. Розвиток методів дослідження обмежених і майже періодичних розв'язків і інваріантних множин майже періодичних систем звичайних диференціальних рівнянь, різницевих рівнянь і рівнянь з імпульсами. Отримання умов існування нетривіальних майже періодичних розв'язків лінійних майже періодичних систем. Дослідження поведінки сепаратрисних многовидів експоненціально дихотомічних лінійних майже періодичних систем різницевих рівнянь та систем з імпульсами. Отримання умов кускової неперервності та кускової гладкості сепаратрисних многовидів та інваріантних множин імпульсних розширень динамічних систем на торі.

Методика дослідження. Застосовуються методи якісної теорії звичайних диференціальних рівнянь, різницевих рівнянь, теорія диференціальних рівнянь з імпульсною дією та методи топологічної динаміки.

Наукова новизна. Основні результати та положення, які визначають наукову новизну і виносяться на захист, наступні:

1. Досліджено множини лінійних однорідних майже періодичних систем диференціальних рівнянь та систем різницевих рівнянь зі всіма обмеженими розв'язками. Досліджено топологію інтегральних підмножин таких систем. Доведено, що у множині систем з заданим частотним модулем підмножину другої категорії утворюють системи з не майже періодичними розв'язками.

2. Доведено, що у довільному околі системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь з кососпряженою майже періодичною матрицею існує система з нетривіальними майже періодичними розв'язками. Доведено існування лінійної однорідної майже періодичної системи з нетривіальним обмеженим розв'язком такої, що всі системи з деякого її околу не мають нетривіальних майже періодичних розв'язків.

3. Доведено, що у просторі лінійних однорідних різницевих рівнянь з майже періодичними ортогональними матрицями існують відкриті множини систем, які не мають нетривіальних майже періодичних розв'язків.

4. Знайдені достатні умови зведення лінійної майже періодичної імпульсної системи до системи звичайних диференціальних рівнянь з майже періодичною за Бором матрицею.

5. Досліджено експоненціальну дихотомію лінійних майже періодичних

різницевих та імпульсних систем. Для таких систем доведено, що з експоненціальної дихотомії на півосі випливає експоненціальна дихотомія на всій осі. Доведено також, що для експоненціальної дихотомії на осі достатньо вимагати експоненціальну дихотомію на скінченному досить великому інтервалі.

6. Досліджено експоненціальну дихотомію імпульсного лінійного розширення динамічної системи на торі. Отримано умови кускової неперервності та кускової гладкості сепаратрисних многовидів таких систем.

7. Знайдено достатні умови існування кусково-неперервного інваріантного тору слабконелінійного імпульсного розширення динамічної системи на торі. Отримано умови існування кусково-гладкого інваріантного тору імпульсної системи, заданої в добутку евклідового простору та тору.

9. Отримано умови існування нетривіальних квазіперіодичних розв'язків лінійних майже періодичних рівнянь, які залежать від параметра.

Теоретичне і практичне значення. Робота має теоретичний характер. Розроблені в дисертації методи дослідження майже періодичних рівнянь можна застосовувати при дослідженні конкретних систем диференціальних, різницевих чи імпульсних майже періодичних систем, зокрема при дослідженні багаточастотних розривних коливань. Теореми про структуру множини лінійних майже періодичних систем з обмеженими розв'язками можуть бути застосовані при вивченні структурної стійкості та біфуркацій неавтономних динамічних систем.

Апробація роботи. Результати, включені в дисертацію, доповідалися на Всесоюзній науковій конференції "Нелінійні проблеми диференціальних рівнянь та математичної фізики" (Тернопіль, 1989), Республіканських школах-семінарах "Розривні динамічні системи" (Київ, 1989; Івано-Франківськ, 1990; Ужгород, 1991), Міжнародній конференції "Нелінійні проблеми диференціальних рівнянь та математичної фізики - другі боголюбовські читання" (Київ, 1993), школах-семінарах "Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения" (Нальчик, 1990; Тернопіль, 1994; Чернівці, 1995), Першій Європейській конференції з нелінійних коливань (Гамбург, Німеччина, 1993), Чехо-Словацькій конференції EQUADIFF - 8 (Братіслава, 1993), Всеукраїнській конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (Дрогобич, 1994), Третьому Всесвітньому конгресі з індустріальної та прикладної математики (Гамбург, Німеччина, 1995), Другій міжнародній конференції з різницевих рівнянь та їх застосувань (Веспрем, Угорщина, 1995), Всеукраїнській конференції "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування" (Чернівці, 1996), а також на семінарах Інституту математики НАН України.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в работах [1 - 20].

Об'єм та структура. Дисертаційна робота складається з вступу, чотирьох розділів та списку літератури з 182 назв і викладена на 231 сторінках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі наводиться огляд літератури по тематиці дисертації, обгрунтовується актуальність теми, формулюються задачі дослідження та описуються основні результати автора.

У першому розділі досліджується множина обмежених розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь з майже періодичними коефіцієнтами

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{1}$$

Система (1) вкладається в сімейство систем

$$\frac{dx}{dt} = a(\varphi \cdot t)x, \tag{2}$$

де $\varphi \cdot t$ – динамічна система зсувів на компакті $\mathcal{H} = \mathrm{cls}\{A(t+\tau), \tau \in \mathbf{R}\}$ (замикання береться в рівномірній на осі топології), $a(\varphi)$ – неперервна функція на $\mathcal{H}$. Система (2) задає лінійне розширення динамічної системи $\varphi \cdot t$ на компакті $\mathcal{H}$.

Сформулюємо результати для комплексного простору $x \in \mathbf{C}^n$. Детально досліджується система (1) зі всіма обмеженими розв'язками. За теоремою Камерона матриці $A(t)$ і $a(\varphi)$ можна вважати кососпряженими при всіх значеннях аргументів. Тоді фундаментальна система розв'язків $\Phi(\varphi, t)$, $\Phi(\varphi, 0) = I$ системи (2) унітарна при всіх φ, t.

Нехай $X = \mathrm{cls}\{(\varphi, I) \cdot t : t \in \mathbf{R}\} \subset \mathcal{H} \times U(n)$ – замикання траєкторії з початковою точкою (φ, I) динамічної системи

$$(\varphi, A) \cdot t = (\varphi \cdot t, \Phi(\varphi, t)A), \quad (\varphi, A) \in \mathcal{H} \times U(n), \tag{3}$$

$U(n)$ – група n-вимірних унітарних матриць. X – мінімальна та дистальна інваріантна множина динамічної системи (3). Нехай π - проекція на перший співмножник $\pi : X \to \mathcal{H}$. $\pi^{-1}(\mathcal{H}) = G$ утворює компактну групу.

Якщо група G тривіальна, то фундаментальна система розв'язків системи (2) майже періодична з частотним модулем, який міститься в частотному модулі правої частини системи рівнянь. При скінченній групі G множина X утворює скінченнолистне накриття над компактом $\mathcal{H}$. Для комутативної групи G доведено наступне твердження

Лема 1.4.4. Якщо група G комутативна, то простір $\mathcal{H} \times \mathbf{C}^n$ системи (2) є сумою Уітні одновимірних локально тривіальних інваріантних розшарувань Υ_i, $i = \overline{1,n}$, над компактом $\mathcal{H}$. Відповідні розшаруванням проектори $P_i(\varphi)$, $i = \overline{1,n}$, належать простору $C'(\mathcal{H}, M(n,\mathbf{C}))$, $M(n,\mathbf{C})$ - множина комплексних квадратних матриць порядку n.

Топологія розшарувань $\Upsilon_i, i = \overline{1,n}$, і, відповідно, поведінка розв'язків системи може бути складною. В теоремі 1.4.4 доведено, що у комплексному просторі $x \in \mathbf{C}^n$ існує система (2) з комутативною групою G і нетривіальними розшаруваннями Υ_i. Така система не зводиться за допомогою ляпуновського перетворення $x = W(\varphi)y$ до діагонального вигляду. При виконанні деякої додаткової умови на $\Phi(\varphi, t)$ розшарування Υ_i, $i = \overline{1,n}$, тривіальні і існує заміна змінних $x = W(\varphi)y$, $W(\varphi) \in C'(\mathcal{H}, U(n))$, яка зводить систему (2) до діагонального вигляду. Це твердження справедливе для системи (2) з майже періодичною фундаментальною системою розв'язків.

У загальному випадку група G не комутативна. Більше того, доведено, що для типової системи група G співпадає з $U(n)$. Це дає змогу зробити висновок про наявність майже періодичних розв'язків у системи. Сформулюємо цей результат.

Теорема 1.4.1. При $n \geq 2$ у просторі лінійних розширень (2) фіксованої динамічної системи $\varphi \cdot t$ на $\mathcal{H}$ множину другої категорії (перетин зліченної кількості відкритих скрізь щільних множин) утворюють розширення, для яких група G дорівнює $U(n)$. Всі розв'язки цих розширень не майже періодичні. Відстань між двома розширеннями задається рівномірною на $\mathcal{H}$ нормою матричних функцій $a(\varphi)$.

Наслідок 1.4.1. Для квазіперіодичної матриці $A(t)$ $\mathcal{H} = \mathbf{R}^m/\mathbf{Z}^m = \mathbf{T}_m$ - m-вимірний тор, $\varphi \cdot t = \omega t + \varphi$, де $\omega = (\omega_1, ..., \omega_m)$ - сталий вектор з раціонально незалежними координатами. Тоді у просторі $\mathbf{R}^m \times C(\mathbf{T}_m, u(n))$

при $n \geq 2$ множину другої категорії утворюють вектори $\omega \in \mathbb{R}^m$ і функції $a(\varphi) \in C(\mathbf{T}_m, u(n))$, яким відповідають системи (2) з не майже періодичними розв'язками. $u(n)$ – Множина n-вимірних кососпряжених матриць.

Наведені результати залишаються справедливими для $x \in \mathbb{R}^n$. У цьому випадку унітарні матриці замінюються на ортогональні, а косоермітові на кососиметричні.

В параграфі 5 досліджується задача апроксимації лінійних майже періодичних систем з кососпряженою матрицею системами з майже періодичними розв'язками. А. Венковська і Я. Курцвейль дали позитивну відповідь на це питання для квазіперіодичних систем з розмірністю частотного модуля квазіперіодичної матриці коефіцієнтів два або три. Для цього використовувалася скінченність перших гомотопічних груп групи $SU(n)$ n-вимірних унітарних матриць з det = 1. Але вже третя гомотопічна група групи $SU(n)$ нескінченна циклічна $\pi_3(SU(n)) = \mathbf{Z}$ і метод А. Венковської – Я. Курцвейля для систем з розмірністю частотного модуля майже періодичної матриці коефіцієнтів більше три застосувати не можна.

В дисертації застосовується інший підхід. Використовуючи результати А. Кальдера, Дж. Сігеля і Х. Філіпса, доведено наступну лему

Лема 1.3.2. Для $\varepsilon > 0$ і натуральних чисел n та d існує натуральне число $N(\epsilon, n, d)$ таке, що для кожного метричного компактного простору X розмірності не більше d та кожного гомотопно тривіального відображення $u : X \to U(n)$ існує послідовність $u = u_0, u_1, \ldots, u_{N(\epsilon,n,d)} = I$ неперервних відображень з X в $U(n)$ таких, що

$$\sup_{\varphi \in X} \|u_k(\varphi) - u_{k+1}(\varphi)\| \leq \epsilon, \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Лема 1.3.2 основна для доведення наступної теореми

Теорема 1.5.1. В кожному околі системи (1) лінійних диференціальних рівнянь з майже періодичною кососпряженою матрицею з частотним модулем $\mathcal{F}$ існує система з частотним модулем, який міститься в раціональній оболонці $\mathcal{F}$ та з майже періодичною фундаментальною матрицею розв'язків.

Паралельно в розділі 1 розглядаються системи лінійних майже періодичних різницевих рівнянь

$$x_{n+1} = A_n x_n, \quad n \in \mathbf{Z} \tag{4}$$

з унітарними матрицями A_n та відповідні лінійні розширення

$$x_{n+1} = a(\varphi \cdot n)x_n, \quad n \in \mathbf{Z}, \tag{5}$$

де $x \in \mathbf{C}^m, \varphi \cdot n$ – динамічна система зсувів на компакті $\mathcal{H} = \mathrm{cls}\{A_{n+p},\ p \in \mathbf{Z}\}$ (замикання береться у рівномірній на осі топології). Для різницевих рівнянь розглядаються аналогічні питання, але, враховуючи специфіку різницевих рівнянь, існує суттєва відмінність від систем диференціальних рівнянь. Наведемо основні результати. Далі вважаємо, що у системі (5) матриця $a(\varphi)$ унітарна при всіх значеннях $\varphi \in \mathcal{H}$, а $\mathcal{H} = \mathbf{R}^s/\mathbf{Z}^s = \mathbf{T}_s$ – s-вимірний тор, $s > 1$. Дискретна динамічна система на торі задається рівністю $\varphi \cdot n = \omega n + \varphi_0$, де $\omega \in \mathbf{R}^s$ - сталий вектор, числа $(\omega_1, ..., \omega_s, 1)$ раціонально незалежні. На $\mathbf{T}_s \times U(m)$ як і у випадку диференціальних рівнянь вводиться динамічна система

$$(\varphi, A) \cdot n = (\varphi \cdot n, \Phi(\varphi, n)A), \quad (\varphi, A) \in \mathbf{T}_s \times U(m), \tag{6}$$

де $\Phi_a(\varphi_0, n)$, $\Phi_a(\varphi_0, 0) = I$ – фундаментальна система розв'язків системи різницевих рівнянь (5).

Нехай $X = \mathrm{cls}\{(\varphi_0, I) \cdot n : n \in \mathbf{Z}\} \subset \mathbf{T}_s \times U(m)$ - замикання траєкторії з початковою точкою (φ_0, I) системи (5). X – мінімальна та дистальна інваріантна множина динамічної системи (6). Нехай π - проекція на перший співмножник $\pi : X \to \mathbf{T}_s$, $\pi^{-1}(\varphi_0) = G$ утворює компактну групу.

Лема 1.2.2. У просторі $C(\mathbf{T}_s, U(m))$ при $m \geq 2$ множину другої категорії утворюють функції $a(\varphi)$, яким відповідають системи (5) з щільною в $\mathbf{T}_s \times U(m)$ траєкторією.

Теорема 1.2.2. У просторі $C(\mathbf{T}_s, U(m))$ при $m \geq 2$ множину другої категорії утворюють функції $a(\varphi)$, яким відповідають рівняння (5) з не майже періодичними розв'язками.

Наслідок 1.2.1. У просторі $\mathbf{R}^s \times C(\mathbf{T}_s, U(m))$ при $m \geq 2$ множину другої категорії утворюють вектори $\omega \in \mathbf{R}^s$ і функції $a(\omega) \in C(\mathbf{T}_s, U(m))$, яким відповідають рівняння (5) з не майже періодичними розв'язками.

На відміну від систем звичайних диференціальних рівнянь у просторі унітарних майже періодичних систем (5) існують відкриті множини систем з не майже періодичними розв'язками. Це встановлює наступна теорема

Теорема 1.2.2. Система різницевих рівнянь

$$x_{k+1} = \mathrm{diag}(e^{ik}, ..., e^{ik})x_k, \tag{7}$$

де $z \in \mathbf{C}^n, k \in \mathbf{Z}, i^2 = -1$, не має майже періодичних розв'язків. У рівномірній топології на $\mathbf{Z}$ послідовностей коефіцієнтів існує окіл системи (7) такий, що всі системи з нього не мають майже періодичних розв'язків.

Теорема про апроксимацію унітарних систем системами з майже періодичними розв'язками справедлива для більш вузького класу різницевих систем, конкретно для систем, які відповідають системам звичайних диференціальних рівнянь. Доведена наступна теорема

Теорема 1.3.1. Нехай у системи (4) майже періодична послідовність $\{A_k\}$ з частотним модулем $\mathcal{F}$ така, що систему можна розширити до системи лінійних диференціальних рівнянь з майже періодичною кососиметричною матрицею. Тоді в довільному околі системи (4) існує система з частотним модулем, який належить $\mathcal{F}_{rat}$, та з майже періодичними розв'язками.

У одновимірному просторі $x_k \in \mathbf{C}$ теорему 1.3.1 можна посилити – збурену систему можна вибрати з тим же частотним модулем $\mathcal{F}$.

Теорема 1.3.2. Якщо неперервна функція $\alpha : \mathcal{H} \to U(1) = \{e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi)\}$ гомотопна одиничній над $U(1)$, то в кожному околі функції $\alpha(\varphi)$ існує інша функція $\alpha_1(\varphi) : \mathcal{H} \to U(1)$ така, що рівняння

$$x_{k+1} = \alpha_1(\varphi \cdot k)x_k, \quad k \in \mathbf{Z},$$

має майже періодичні розв'язки.

Наслідок 1.3.2. Нехай рівняння (4) при $m = 1$ з частотним модулем $\mathcal{F}$ майже періодичної послідовності $\{A_k\}$ може бути розширене до лінійного диференціального рівняння з чисто уявним майже періодичним коефіцієнтом. Тоді в кожному околі рівняння (4) існує інше рівняння з частотним модулем $\mathcal{F}$ і майже періодичними розв'язками.

Розглянуто також різницеве рівняння другого порядку з майже періодичними коефіцієнтами

$$x_{n+1} = c_n x_{n-1} + v_n x_n, \quad n \in \mathbf{Z}, \tag{8}$$

$x_n \in \mathbf{R}$, послідовності дійсних чисел $\{c_n\}, \{v_n\}$ майже періодичні з частотним модулем $\mathcal{F}$. Крім того вимагаємо $|c_n| \geq \gamma > 0$ для всіх $n \in \mathbf{Z}$.

Теорема 1.3.3. Нехай всі розв'язки рівняння (8) обмежені. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує рівняння

$$x_{n+1} = c'_n x_{n-1} + v'_n x_n, \quad n \in \mathbf{Z}$$

зі всіма майже періодичними розв'язками, причому майже періодичні послідовності $\{c'_n\}, \{v'_n\}$ мають частоти, які належать $\mathcal{F}$ і $|c_n - c'_n| < \varepsilon$, $|v_n - v'_n| < \varepsilon$ для всіх $n \in \mathbf{Z}$.

Розглянемо різницеве рівняння другого порядку з квазіперіодичним потенціалом

$$x_{n+1} + x_{n-1} = v(\varphi \cdot n)x_n, \; n \in \mathbf{Z}, \tag{9}$$

де $\varphi \in \mathbf{T}_m$, $\mathbf{T}_m$ – m-вимірний тор, $v(\varphi) : \mathbf{T}_m \to \mathbf{R}$ – l раз неперервно диференційовна функція на торі $\mathbf{T}_m$, $\varphi \cdot n = \varphi + \omega n$, сталий вектор ω задовольняє умову нерезонансності.

Теорема 1.3.4. Нехай всі розв'язки рівняння (9) обмежені. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує l раз неперервно диференційовна функція $v'(\varphi) : \mathbf{T}_m \to \mathbf{R}$, $\|v'(\varphi) - v(\varphi)\| < \varepsilon$ така, що рівняння

$$x_{n+1} + x_{n-1} = v'(\varphi \cdot n)x_n, \; n \in \mathbf{Z},$$

має всі майже періодичні розв'язки.

У параграфі 5 першого розділу також розглядається система (1), яка має нетривіальні обмежені розв'язки, що задовольняють умову Фавара. Розглядається питання, чи можна мало збурити систему так, щоб збурена система мала нетривіальні майже періодичні розв'язки.

Теорема 1.5.2. У n-вимірному комплексному просторі існує лінійна майже періодична система (1), яка має обмежений відокремлений від нуля розв'язок і така, що всі лінійні майже періодичні системи з деякого її околу (в рівномірній на осі топології матричних функцій коефіцієнтів) не мають майже періодичних розв'язків.

Порівняємо останню теорему з теоремою 1.5.1. Система (1) зі всіма обмеженими розв'язками має тривіальне в $\mathcal{H} \times \mathbf{C}^n$ розшарування обмежених розв'язків (воно, очевидно, співпадає з $\mathcal{H} \times \mathbf{C}^n$). Якщо множина B обмежених розв'язків системи з теореми 1.5.2 є тривіальним розшаруванням, то в довільному її околі завжди існує система з нетривіальними майже періодичними розв'язками. Ситуація теореми 1.5.2 виникає, коли розшарування B нетривіальне, навіть більше, воно не має ненульових неперервних перетинів.

В другому розділі дисертації вивчається дихотомія різницевих та імпульсних майже періодичних систем. Розглянемо лінійну імпульсну систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x,\ t \neq t_n,\quad \Delta x\Big|_{t=t_n} = x(t_n+0) - x(t_n) = B_n x, \tag{10}$$

де $t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{V}^m$, $\mathbf{V}^m$ - m-вимірний дійсний $\mathbf{R}^m$ чи комплексний $\mathbf{C}^m$ простір. Припускаємо, що матриця $A(t)$ майже періодична за Бором, послідовність $\{B_n, n \in \mathbf{Z}\}$ майже періодична, послідовність $\{t_n, n \in \mathbf{Z}\}$ строго зростаюча і має рівностепенево відносно j майже періодичні різниці $\{t_n^j, n \in \mathbf{Z}\}$, $t_n^j = t_{n+j} - t_n$.

У параграфі 2.1 вивчається можливість зведення системи (10) за допомогою лінійної заміни змінних з невиродженою кусково-диференційовною розривною майже періодичною матрицею до системи лінійних диференціальних рівнянь з майже періодичною за Бором матрицею коефіцієнтів. Це можна зробити не завжди. Якщо при якомусь $n \in \mathbf{Z}$ імпульс вироджений $\det(I + B_n) = 0$, то таке зведення неможливе. Але, крім того, важливу роль відіграє топологія замикання зсувів майже періодичної послідовності $\{I + B_n,\ n \in \mathbf{Z}\}$. Доведено наступний результат

Теорема 2.1.2. Нехай в системі (10) $A(t)$ майже періодична за Бором, послідовність $\{t_n, n \in \mathbf{Z}\}$ строго зростаюча і має рівностепенево відносно j майже періодичні різниці $\{t_n^j, n \in \mathbf{Z}\}$, $t_n^j = t_{n+j} - t_n$, послідовність $\{B_n, n \in \mathbf{Z}\}$ майже періодична, крім того виконується умова невиродженості імпульсів $|\det(I+B_n)| \geq \alpha > 0$, $n \in \mathbf{Z}$. Позначимо через $\mathcal{B}$ замикання в рівномірній на $\mathbf{Z}$ топології множини зсувів послідовності $\{B_n, n \in \mathbf{Z}\}$: $\mathcal{B} = \mathrm{cls}\{\{B_{n+j}, n \in \mathbf{Z}\}, j \in \mathbf{Z}\}$. Тоді $B_n + I = B(\varphi \cdot n)$ для деякого $\varphi \in \mathcal{B}$, $\varphi \cdot n$ - динамічна система зсувів на $\mathcal{B}$, B - неперервна функція $\mathcal{B} \to CL(m, \mathbf{V})$. Припустимо, що неперервне відображення $B : \mathcal{B} \to CL(m, \mathbf{V})$ гомотопне тотожному над множиною невироджених матриць m-го порядку $CL(m, \mathbf{V})$. Тоді існує невироджена заміна змінних $x = U(t)y$ з розривною майже періодичною кусково-диференційовною матрицею $U(t)$, яка зводить систему (10) до системи без імпульсів з неперервною майже періодичною за Бором матрицею.

Відмовитися від вимоги гомотопної тотожності відображення B не можна. Наводиться відповідний приклад. Твердження залишається справедливим, якщо в системі (10) моменти імпульсної дії розділені а матричнозначна функція $A(t)$ розривна майже періодична з розривами в точках t_n, $n \in \mathbf{Z}$.

В параграфі 2.2 теорема 2.1.2 використовується для вивчення регулярності одновимірного лінійного диференціального рівняння з імпульсною дією

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + f(t),\ t \neq t_i, \quad x(t_n + 0) = b_n x(t_n) + g_n, \tag{11}$$

де обмежені функції $a(t), f(t)$ розривні майже періодичні, послідовність $\{t_n, n \in \mathbb{Z}\}$ строго зростаюча і має рівностепенево відносно j майже періодичні різниці, послідовності $\{b_n, n \in \mathbb{Z}\}$ та $\{g_n, n \in \mathbb{Z}\}$ майже періодичні і виконується умова невиродженості імпульсів $|b_n| \geq \gamma > 0, n \in \mathbb{Z}$.

Лінійний оператор L

$$Lx = \frac{dx}{dt} - a(t)x,\ t \neq t_n, \qquad x(t_n + 0) = b_n x(t_n) \tag{12}$$

називається регулярним, якщо відповідне йому неоднорідне імпульсне рівняння має єдиний кусково-неперервний розв'язок $\bar{x}(t)$ при довільній обмеженій кусково-неперервній функції $f(t)$ і обмеженій послідовності $\{g_n\}$, причому розв'язок $\bar{x}(t)$ майже періодичний з розривами в точках $t_n, n \in \mathbb{Z}$, якщо функція $f(t)$ та послідовність $\{g_n\}$ майже періодичні.

Теорема 2.2.1. Оператор (12) регулярний тоді і тільки тоді, коли

$$M[L] = M[a(t)] + pM[\{b_n\}] \neq 0,$$

де

$$M[a] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T a(t)dt, \quad M[\{b_n\}] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} b_j, \quad p = \lim_{T\to\infty} \frac{i(0,T)}{T},$$

$i(0,T)$ – кількість членів послідовності $\{t_n\}$ на відрізку $(0,T]$.

Аналогічний результат справедливий для трикутних систем.

В параграфі 3 другого розділу розглядається система лінійних різницевих рівнянь

$$x_{n+1} = A(n)x_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{13}$$

де $x_n \in \mathbf{V}^m$, $\mathbf{V}^m = \mathbb{R}^m$ або $\mathbb{C}^m$, $A(n) \in M(m, \mathbf{V})$, $\|A(n)\| \leq L$, $n \in \mathbb{Z}$, $L > 0$. Ми не вимагаємо невиродженості матриць $A(n), n \in \mathbb{Z}$, тому розв'язки $x(n, n_0)$ системи (13) можуть не продовжуватися чи продовжуватися неоднозначно на від'ємну піввісь. Під $x(n, n_0)$ розуміємо розв'язок, який однозначно визначений в точці n_0 і продовжується на $n \geq n_0$.

Означення 2.3.1. Рівняння (13) має експоненціальну дихотомію на множині $n \in \mathbf{J} \subseteq \mathbf{R}$, якщо існують додатні числа ν, K, K_1 такі, що для кожного $n_0 \in \mathbf{J}$ простір $\mathbf{V}^m$ можна зобразити у вигляді прямої суми $\mathbf{V}^m = S(n_0) \oplus U(n_0)$ так, що виконуються умови

1) $\Phi(n, n_0)S(n_0) \subseteq S(n)$, $\Phi(n, n_0)U(n_0) \subseteq U(n)$, $n \geq n_0$, $n \in \mathbf{J}$;

2) для відповідних проекторів $\sup\limits_n \|P(n)\| + \sup\limits_n \|Q(n)\| < \infty$;

3) для кожного розв'язку $x(n, n_0, x_0)$ рівняння (13) з $x_0 \in S(n_0)$ виконується оцінка

$$\|x(n, n_0, x_0)\| \leq Ke^{-\nu(n-k)}\|x(k, n_0, x_0)\|, \quad n \geq k \geq n_0, \quad k, n \in \mathbf{J}; \tag{14}$$

4) для кожного розв'язку $x(n, n_0, x_0)$ рівняння (13) з $x_0 \in U(n_0)$, виконується оцінка

$$\|x(n, n_0, x_0)\| \geq K_1 e^{\nu(n-k)}\|x(k, n_0, x_0)\|, \quad n \geq k \geq n_0, \quad k, n \in \mathbf{J}. \tag{15}$$

Наведені умови більш слабкі, ніж звичайно. При так означеній дихотомії розмірності сепаратрисних многовидів $S(n)$ та $U(n)$ можуть змінюватися при зміні n, але існує деяка закономірність такої зміни: при $n > k$ справедливі нерівності $\dim S(n) \leq \dim S(k)$, $\dim U(n) \geq \dim U(k)$. Для широкого класу рівнянь наведені вище розмірності не залежать від n, наведене означення експоненціальної дихотомії співпадає з традиційним – коли умову 4) можна замінити наступною:

4$'$) кожний розв'язок $x(n, n_0, x_0)$ системи (13) з $x_0 \in U(n_0)$ однозначно продовжується на від'ємну піввісь і для них виконується умова (15) для всіх $n \geq k$.

Послідовність $A = \{A(n),\ n \in \mathbf{Z}\}$ називається стійкою за Пуассоном, якщо вона є граничною послідовністю зсувів самої себе, тобто існує послідовність цілих чисел $\{n_j\}$, $n_j \to +\infty$, $j \to +\infty$ така, що $A(n) = \lim\limits_{j\to+\infty} A(n+n_j)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Теорема 2.3.1. Нехай послідовність $A = \{A(n), n \in \mathbf{Z}\}$ стійка за Пуассоном. Тоді, якщо система (13) експоненціально дихотомічна на півосі $n \geq a$ для деякого $a \in \mathbf{Z}$, то вона експоненціально дихотомічна на осі $n \in \mathbf{Z}$ і розмірності стійкого та нестійкого многовидів не змінюються при зміні n.

Наслідок 2.3.1. Нехай послідовність $\{A(n)\}$ майже періодична. Тоді з експоненціальної дихотомії системи (13) на півосі $n \geq a$ для деякого цілого а випливає її експоненціальна дихотомія на осі зі сталими розмірностями стійкого та нестійкого многовидів.

Теорема 2.3.2. Нехай у системи (13) послідовність $A(n)$ майже періодична і система (13) експоненціально дихотомічна на множині $\{0, 1, ..., T\}$ з константами $\nu, K, K_1 = 1/K$. Припустимо, що виконуються оцінки

$$\frac{1}{K}e^{\nu h} - Ke^{-\nu h} = 8, \quad \delta h M^h(1 + 2M^h) \leq 1, \quad M = \sup_{n \in \mathbf{Z}} \|A(n)\|.$$

Тоді, якщо $T > 0$ задовольняє умову $T \geq 4h$ і кожний інтервал довжини $[T/2] - 1$ ($[x]$ - ціла частина числа x) містить δ-майже період майже періодичної послідовності $\{A(n)\}$, то система (13) має експоненціальну дихотомію на осі $n \in \mathbf{Z}$ з константами $\alpha = \ln 2/h, K = (2M)^h, K_1 = (2M)^{-h}$.

В наступних параграфах другого розділу вивчається експоненціальна дихотомія лінійних імпульсних систем (10) з виродженими імпульсами. Припускаємо, що $x \in \mathbf{V}^m$, $\mathbf{V}^m = \mathbf{R}^m$ чи $\mathbf{C}^m$, матрична функція $A(t)$ кусково непрервна та обмежена на осі, послідовність $\{B_n, n \in \mathbf{Z}\}$ обмежена, $\{t_n, n \in \mathbf{Z}\}$ – строго зростаюча послідовність дійсних чисел, яка задовольняє умову $\lim_{T\to\infty} i(0,T)/T$, де $i(0,T)$ – кількість членів послідовності $\{t_n\}$ на відрізку $(0,T]$.

Припускаємо, що $\det(I + B_n) = 0$ для деяких чи всіх $n \in \mathbf{Z}$. Тому розв'язки $x(t, \tau, x_0), x(\tau, \tau, x_0) = x_0$ системи (10) можуть не продовжуватися чи продовжуватися неоднозначно на від'ємну піввісь $t < \tau$. Нехай $X(t, \tau), t \geq \tau$ - фундаментальна система розв'язків системи (10).

Експоненціальну дихотомію для імпульсної системи (10) означаємо як і для систем різницевих рівнянь.

Система (10) експоненціально дихотомічна на множині $\mathbf{J}$, якщо для довільного $\tau_0 \in \mathbf{J}$ простір $\mathbf{V}^m$ можна зобразити у вигляді прямої суми $U(\tau_0)$ та $S(\tau_0)$ так, що виконуються умови

1) довільний розв'язок системи (10) з $x_0 \in S(\tau_0)$ задовольняє нерівність

$$\|x(t, \tau_0, x_0)\| \leq K\exp(-\alpha(t - \tau))\|x(\tau, \tau_0, x_0)\|, \quad t \geq \tau \geq \tau_0;$$

2) довільний розв'язок з $x_0 \in U(\tau_0)$ задовольняє нерівність

$$\|x(t, \tau_0, x_0)\| \geq K_1\exp(\alpha(t - \tau))\|x(\tau, \tau_0, x_0)\|, \quad t \geq \tau \geq \tau_0,$$

де $t, \tau \in \mathbf{J}$ і сталі α, K, K_1 не залежать від τ_0, x_0;

3) $X(t,\tau)S(\tau) \subseteq S(t), \quad X(t,\tau)U(\tau) \subseteq U(t), \quad t \geq \tau$;

4) для відповідних проекторів $\sup\limits_t \|P(t)\| + \sup\limits_t \|Q(t)\| < \infty$.

Як і в різницевих системах розмірності сепаратрисних підпросторів $S(t)$ та $U(t)$ можуть змінюватися при зміні t. Вищеозначеної дихотомії у загальному випадку недостатньо для регулярності відповідного оператора. Справедлива теорема

Теорема 2.4.1. Для слабкої регулярності системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t),\ t \neq t_n, \qquad \Delta x\Big|_{t=t_n} = B_n x + b_n,$$

необхідно і достатньо, щоб відповідна однорідна система (10) була експоненціально дихотомічною на півосі і розмірності стійкого та нестійкого многовидів $S(t)$ і $U(t)$ не залежали від t.

Так означена експоненціальна дихотомія зберігається про малих збуреннях правої частини системи (10), малими залишаються і кути між відповідними сепаратрисними многовидами системи (10) та збуреної системи, хоч розмірності відповідних многовидів при цьому можуть не співпадати.

Теорема 2.5.1. Нехай у системи (10) матриця $A(t)$ майже періодична за Бором, послідовність $\{B_n, n \in \mathbf{Z}\}$ майже періодична, послідовність $\{t_n, n \in \mathbf{Z}\}$ строго зростаюча і має рівностепенево відносно j майже періодичні різниці $\{t_n^j, n \in \mathbf{Z}\}$, $t_n^j = t_{n+j} - t_n$. Нехай система (10) має експоненціальну дихотомію на півосі $t \geq 0$ з сепаратрисними многовидами $U(t)$ та $S(t)$. Тоді система експоненціально дихотомічна на всій осі, $\dim U(t)$ та $\dim S(t)$ не залежать від $t \in \mathbf{R}$ і $U(t)$ має єдине обмежене продовження на від'ємну піввісь.

Як наслідок доведено, що з експоненціальної дихотомії майже періодичної системи (10) на скінченному досить великому інтервалі часу випливає експоненціальна дихотомія на всій осі.

В третьому розділі дисертації вивчаються імпульсні розширення динамічних систем на торі.

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \tag{16}$$

$$\frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \quad \varphi \in \mathbf{T}_m \setminus \Gamma, \tag{17}$$

$$\Delta x\Big|_{\varphi\in\Gamma} = B(\varphi)x. \tag{18}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbf{T}_m$, $\mathbf{T}_m$ – m-вимірний тор, Γ – гладкий компактний підмноговид без краю коровмірності 1 тору $\mathbf{T}_m$, $a(\varphi) \in C_{Lip}(\mathbf{T}_m)$, $A(\varphi), B(\varphi) \in C(\mathbf{T}_m)$. Рівняння (16) має однозначний розв'язок $\varphi(t,\varphi_0) = \varphi \cdot t$. Позначимо через $t_j(\varphi_0), j \in \mathbf{Z}$, послідовність точок перетину $\varphi(t,\varphi_0)$ з підмноговидом Γ. Припускаємо, що ці перетини трансверсальні. Виходячи з компактності многовиду Γ і трансверсальності перетинів, виконується умова $t_j(\varphi) - t_{j-1}(\varphi) \geq \theta > 0$, $j \in \mathbf{Z}$, для деякого додатного θ.

Розв'язок $x(t,\varphi_0,x_0)$ рівняння (17) кусково неперервний з розривами першого роду в точках перетину $\varphi(t,\varphi_0)$ з Γ. Припускаємо, що він неперервний зліва. Δx означає стрибок функції x в точці φ при русі вздовж траєкторії системи рівнянь (16). Як і раніше припускаємо, що $\det(I + B(\varphi)) = 0$ для деяких чи всіх $\varphi \in \mathbf{T}_m$. Тому розв'язки $x(t,\varphi_0,x_0)$,$x(0,\varphi_0,x_0) = x_0$ можуть не продовжуватися на від'ємну піввісь $t < 0$ чи продовжуватися неоднозначно.

Для фіксованого φ_0 система (16) – (18) приймає вигляд

$$\frac{dx}{dt} = A(\varphi(t,\varphi_0))x, \quad t \neq t_i(\varphi_0), \tag{19}$$

$$\Delta x\Big|_{t=t_i(\varphi_0)} = B(\varphi_i(\varphi_0))x, \tag{20}$$

де $\varphi_i(\varphi_0) = \varphi(t_i(\varphi_0),\varphi_0)$. Позначимо через $X(t,\varphi_0)$, $t \geq 0$, фундаментальну систему розв'язків системи (19), (20), $X(0,\varphi_0) = I$.

Система (16) – (18) називається експоненціально дихотомічною, якщо для кожного $\varphi \in \mathbf{T}_m$ простір $\mathbb{R}^n$ може бути представленим у вигляді прямої суми підпросторів $U(\varphi)$ і $S(\varphi)$ розмірностей r і $(n-r)$ так, що

1) розв'язки системи (19), (20) з $x_0 \in S(\varphi)$ задовольняють нерівність

$$\|x(t,\varphi,x_0)\| \leq K\exp(-\alpha(t-\tau))\|x(\tau,\varphi,x_0)\|, \quad t \geq \tau \geq 0;$$

2) розв'язки з $x_0 \in U(\varphi)$ однозначно продовжуються на від'ємну піввісь і задовольняють нерівність

$$\|x(t,\varphi,x_0)\| \leq K_1\exp(\alpha(t-\tau))\|x(\tau,\varphi,x_0)\|, \quad t \leq \tau \leq 0,$$

де сталі α, K, K_1 не залежать від φ, x_0;

3) $X(t,\varphi)S(\varphi) \subseteq S(\varphi \cdot t), \quad X(t,\varphi)U(\varphi) \subseteq U(\varphi \cdot t), \quad t \geq 0.$

4) для відповідних проекторів $\sup_{\varphi} \|P(\varphi)\| + \sup_{\varphi} \|Q(\varphi)\| < \infty$.

Теорема 3.2.1. Нехай система (16) - (18) експоненціально дихотомічна. Тоді проектор $P(\varphi)$ неперервний на множині $\mathbb{T}_m \setminus \Gamma$, має розриви першого роду на множині Γ і

$$P(\varphi+0)(I+B(\varphi)) = (I+B(\varphi))P(\varphi-0).$$

Значення $(\varphi-0)$ і $(\varphi+0)$ для точки φ визначаємо водовж траєкторії $\varphi \cdot t$ рівняння (16) при зростанні t.

Теорема 3.2.2. Нехай система (16) - (18) експоненціально дихотомічна на осі і функції $a(\varphi)$, $A(\varphi)$, $B(\varphi)$ і $t_j(\varphi)$, $j \in \mathbb{Z}$, мають неперервні частинні похідні за $\varphi_k, k = \overline{1,m}$, до s-го порядку включно. Тоді проектор $P(\varphi)$ при $\varphi \in \mathbb{T}_m \setminus \Gamma$ має неперервні частинні похідні за $\varphi_k, k = \overline{1,m}$, до s-го порядку включно.

З останніх теорем випливає, що фазовий простір $\mathbb{T}_m \times \mathbb{R}^n$ експоненціально дихотомічної системи (16) - (18) є сумою Уітні $S \oplus U$ двох інваріантних підрозшарувань над тором $\mathbb{T}_m$, які розуміємо в більш широкому, ніж звичайно, сенсі – неперервні при $\varphi \in \mathbb{T}_m \setminus \Gamma$ та з розривами на Γ. Розглянемо питання про існування кусково-неперервної заміни змінних $x = U(\varphi)y$, яка зводить систему (16) - (18) до відповідного дихотомії розщепленого вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dy}{dt} = (A_1(\varphi) \oplus A_2(\varphi))y, \qquad \varphi \in \mathbb{T}_m \setminus \Gamma, \tag{21}$$

$$\Delta y \Big|_{\varphi \in \Gamma} = B_1(\varphi) \oplus B_2(\varphi))y, \tag{22}$$

де r-вимірні квадратні матриці $A_1(\varphi)$, $B_1(\varphi)$ та $n-r$-вимірні квадратні матриці $A_2(\varphi)$, $B_2(\varphi)$ задовольняють ті ж умови гладкості, що й матриці $A(\varphi)$ і $B(\varphi)$.

Можливість такого зведення суттєво залежить від топології многовиду імпульсної дії Γ. Припустимо, що Γ має вигляд

$$\Gamma = \{\varphi_1 = t_j(\mathrm{mod}\,1),\ j = \overline{1,s},\ \varphi_l \in [0, 2\pi],\ l = \overline{2,m}\}. \tag{23}$$

В цьому випадку для торів малих розмірностей справедливі досить загальні умови, які забезпечують зведення системи (16) - (18) до вигляду (21), (22).

Ці умови більш слабкі, ніж для розширень без імпульсної дії. Зокрема, всі розширення над двовимірним тором розщеплюються у вказаному вище сенсі.

Теорема 3.1.3. Нехай система (16) - (18) експоненціально дихотомічна з r-вимірним стійким та $n-r$-вимірним нестійким многовидами, а многовид Γ має вигляд (23).

Тоді при $m = 1, 2$ та при $m = 3, 4$, $r \neq 2$, $n - r \neq 2$ система (16) - (18) заміною змінних $x = U(\varphi)y$ з невиродженою, кусково-неперервною з розривами першого роду на Γ періодичною періоду 2 за φ_j, $j = \overline{1, m}$, матрицею $U(\varphi)$ зводиться до блочно-діагонального вигляду (21), (22).

Окремо розглянуто випадок, коли потік на торі $\mathbf{T}_m$ квазіперіодичний, $a(\varphi) = \omega$, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_m)$ - сталий вектор з раціонально незалежними координатами. В лемі 3.1.1 доведено, що послідовність $\{t_k(\varphi), k \in \mathbf{Z}\}$ точок перетину траєкторії $\varphi \cdot t$ з многовидом Γ має рівностепенево майже періодичні різниці, а імпульсна система (19), (20) майже періодична у сенсі означення параграфа 2.4. Це дає можливість при означенні експоненціальної дихотомії для таких систем не вимагати в означенні сталість розмірностей сепаратрисних многовидів та однозначної продовжуваності розв'язків з $U(\varphi)$ на від'ємну піввісь.

Теореми 3.2.1 та 3.2.2 дають можливість означити для системи (16) - (18) функцію Гріна :

$$G(t, \tau, \varphi) = \begin{cases} X(t - \tau, \varphi(\tau, \varphi))P(\varphi(\tau, \varphi)), & t \geq \tau, \\ -X(t - \tau, \varphi(\tau, \varphi))Q(\varphi(\tau, \varphi)), & \tau > t. \end{cases} \tag{24}$$

Функція Гріна $G(t, \tau, \varphi)$ для $t \neq \tau$ задовольняє систему (19), (20) і її норма обмежена експонентою.

Якщо система (16) – (18) експоненціально дихотомічна і $a(\varphi)$, $A(\varphi)$ і $B(\varphi)$ мають неперервні частинні похідні за φ_j, $j = \overline{1, m}$, до s-го порядку, то функція Гріна $G(t, \tau, \varphi)$ має неперервні частинні похідні за φ_j, $j = \overline{1, m}$, до s-го порядку включно на множині $\mathbf{T}_m \setminus \Gamma$ і похідні функції $G(0, \tau, \varphi)$ задовольняють оцінки

$$\left\| \frac{\partial^j}{\partial \varphi^j} G(0, \tau, \varphi) \right\| \leq K_4 \exp(-(\alpha_1 - j\omega)|\tau|), \quad \tau \in \mathbf{R},$$

$K_4 > 0$, $\omega \geq \|\partial a(\varphi)/\partial \varphi\|$, сталу α_1, $0 < \alpha_1 < \alpha$, можна вибрати як завгодно близькою до α.

Функція Гріна є основою для дослідження кусково-неперервних та кусково-гладких інваріантних множин слабконелінійних імпульсних систем вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \tag{25}$$

$$\frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi, x), \quad \varphi \in \mathbb{T}_m \setminus \Gamma, \tag{26}$$

$$\Delta x\Big|_{\varphi\in\Gamma} = B(\varphi)x + g(\varphi, x), \tag{27}$$

де функції $f(\varphi, x)$, $g(\varphi, x)$ періодичні за φ_i та кусково гладкі за (φ, x) і виконуються всі припущення для системи (16) – (18).

Під кусково-неперервним (кусково-гладким) інваріантним тором системи (25) – (27) розуміємо функцію $x = u(\varphi)$, неперервну (гладку) на $\mathbb{T}_m \setminus \Gamma$ з розривами першого роду на Γ і таку, що функція $x(t, \varphi) = u(\varphi(t, \varphi))$ є розв'язком системи (25) – (27). Інваріантний тор $u(\varphi)$ задовольняє наступне рівняння

$$u(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(0, \tau, \varphi) f(\varphi \cdot \tau, u(\varphi \cdot \tau)) d\tau + \sum_{i=-\infty}^{\infty} G(0, t_i(\varphi), \varphi) f(\varphi_i, u(\varphi_i)).$$

Теорема 3.3.1. Нехай система системи (16) – (18) експоненціально дихотомічна і виконуються наступні оцінки $\|f(\varphi, 0)\|_0 \le M_0$, $\|g(\varphi, 0)\|_0 \le M_0$ з деякою сталою $M_0 > 0$ і

$$\|f(\varphi, x) - f(\varphi, y)\|_0 + \|g(\varphi, x) - g(\varphi, y)\|_0 \le N\|x - y\|$$

з досить малою сталою $N > 0$. Тоді система (25) – (27) має інваріантний тор $x = u(\varphi), \varphi \in \mathbb{T}_m$, де функція $u(\varphi)$ неперервна для $\varphi \in \mathbb{T}_m \setminus \Gamma$ і має розриви першого роду для $\varphi \in \Gamma$.

Якщо функції $a(\varphi)$, $A(\varphi)$, $B(\varphi)$, $f(\varphi, x)$, $g(\varphi, y)$ мають неперервні частинні похідні за φ, x до s-го порядку включно і виконуються нерівності $\|f(\varphi, 0)\|_s \le M_0$, $\|g(\varphi, 0)\|_s \le M_0$ і

$$\|f(\varphi, x) - f(\varphi, y)\|_s + \|g(\varphi, x) - g(\varphi, y)\|_s \le N\|x - y\|,$$

з досить малою сталою N, то при $\varphi \in \mathbb{T}_m \setminus \Gamma$ функція $u(\varphi)$ має неперервні частинні похідні за φ до s-го порядку включно.

В наступному параграфі досліджується імпульсна система з потоком на торі, який залежить від x :

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi, x, \varepsilon), \tag{28}$$

$$\frac{dx}{dt} = A(\varphi, \varepsilon)x + f(\varphi, x, \varepsilon), \quad \varphi \in \mathbf{T}_m \setminus \Gamma, \tag{29}$$

$$\Delta x\Big|_{\varphi\in\Gamma} = B(\varphi, \varepsilon)x + g(\varphi, x, \varepsilon), \tag{30}$$

де, як і раніше, $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbf{T}_m, \mathbf{T}_m$ – m-вимірний тор, Γ – гладкий компактний підмноговид без краю корозмірності 1 тору $\mathbf{T}_m$, $\varepsilon > 0$ – малий параметр.

Вектори $a(\varphi, x, \varepsilon)$, $f(\varphi, x, \varepsilon)$, $g(\varphi, x, \varepsilon)$ і матриці $A(\varphi, \varepsilon)$, $B(\varphi, \varepsilon)$ гладкі при $\|x\| \le d$, $\varphi \in \mathbf{T}_m$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. $f(\varphi, x, 0) = 0$, $g(\varphi, x, 0) = 0$. Отже, система має тривіальну інваріантну множину (інваріантний тор) $x = 0$ при $\varepsilon = 0$. Досліджується питання існування інваріантного тору системи (28) – (30) при $\varepsilon \ne 0$.

Лінеаризована система для (28) – (30) при $\varepsilon = 0$ – це система (16) – (18) з $a(\varphi) = a(\varphi, 0, 0)$, $A(\varphi) = A(\varphi, \varepsilon)$, $B(\varphi) = B(\varphi, \varepsilon)$.

Як і раніше, припускаємо, що рівняння (16) для кожного $\varphi_0 \in \mathbf{T}_m$ має однозначний розв'язок $\varphi(t, \varphi_0)$, який трансверсально перетинається з підмноговидом Γ.

Основну роль відіграє лема про збереження експоненціальної дихотомії системи (16) – (18) при малому збуренні потоку на торі. Збурена система має вигляд

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi) + \tilde{a}(\varphi), \tag{31}$$

$$\frac{dx}{dt} = (A(\varphi) + \tilde{A}(\varphi))x, \quad \varphi \in \mathbf{T}_m \setminus \Gamma, \tag{32}$$

$$\Delta x\Big|_{\varphi\in\Gamma} = (B(\varphi) + \tilde{B}(\varphi))x, \tag{33}$$

де вектор $\tilde{a}(\varphi)$ і матриці $\tilde{A}(\varphi)$, $\tilde{B}(\varphi)$ s раз неперервно диференційовні на торі $\mathbf{T}_m$.

Лема 3.4.1. Нехай система (16) - (18) має експоненціальну дихотомію з показником α. Тоді існує досить мале $\delta > 0$ таке, що при $\|\tilde{a}(\varphi)\|_s \le \delta$, $\|\tilde{A}(\varphi)\|_s \le \delta$, $\|\tilde{B}(\varphi)\|_s \le \delta$ система (31) - (33) має експоненціальну дихотомію з показником $\tilde{\alpha} \le \alpha$ та кусково гладким проектором $\tilde{P}(\varphi)$.

Теорема 3.4.1. Нехай у системи (28) - (30) функції $a(\varphi, x, \varepsilon)$, $f(\varphi, x, \varepsilon)$, $g(\varphi, x, \varepsilon)$, $A(\varphi, \varepsilon)$, $B(\varphi, \varepsilon)$ мають при $\|x\| \le d$, $\varphi \in \mathbf{T}_m$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ неперервні частинні похідні за φ, x до s-го порядку включно. Припустимо, що лінеаризована система (16) - (18) має експоненціальну дихотомію.

Тоді при $s \ge 1$ можна вказати досить мале $\varepsilon_0 > 0$ таке, що для $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ система (28) - (30) має інваріантну множину $x = u(\varphi, \varepsilon)$, $\varphi \in \mathbf{T}_m$, причому функція $u(\varphi, \varepsilon)$ $(s-1)$ раз неперервно диференційовна при $\varphi \in \mathbf{T}_m \setminus \Gamma$ і має розриви першого роду при $\varphi \in \Gamma$.

У четвертому розділі вивчаються лінійні квазіперіодичні рівняння та системи, які залежать від параметра.

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння вигляду

$$(-1)^n y^{2n} + (q_1(t) y^{(n-1)})^{(n-1)} + \dots + (q_{n-1}(t) y')' + q_n(t) y = E y, \tag{34}$$

де $E = \lambda^{2n}$ - дійсний параметр, функції $q_j(t)$ квазіперіодичні з частотним базисом $\omega_1, \dots, \omega_m$, тобто функції $q_j(t)$ допускають зображення $q_j(t) = p_j(\omega_1 t, \dots, \omega_m t)$, де $p_j(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ - 2π-періодичні функції φ_k, $k = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Припускаємо, що функції $p_j(\varphi)$, $j = \overline{1, n}$, аналітичні в смузі $|\mathrm{Im}\, \varphi_k| \le \rho$, $k = \overline{1, m}$, і виконується умова неспіввимірності частот

$$|\sum_{i=1}^{m} n_j \omega_j| \ge C |n|^{-m+1}$$

з деякою сталою $C > 0$ для довільних ненульових цілочисельних векторів $n = (n_1, \dots, n_m), |n| = \sum |n_i|$.

Позначимо через $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n}$ корені $2n$-го степеня з $(-1)^n$. Занумеруємо їх так, щоб $\varepsilon_{2n} = i$, $\varepsilon_{2n-1} = -i$, $\varepsilon_{2n-2} = 1$, $\varepsilon_{2n-3} = -1$, $\varepsilon_l = \varepsilon_{2n-3-l}$, $l = \overline{1, 2n-4}$ при парному n і $\varepsilon_{2n} = i$, $\varepsilon_{2n-1} = -i$, $\varepsilon_l = \bar{\varepsilon}_{2n-3-l}$, $l = \overline{1, 2n-2}$ при непарному n ($\bar{a}$ комплексно спряжене до a).

Після перетворень рівняння (34) запишеться як система рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = (A_0 + P(\varphi, \lambda)) x, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \tag{35}$$

де $A_0 = \mathrm{diag}\{A_1, A_2\}$, $A_1 = \mathrm{diag}\{\lambda\varepsilon_1, \dots, \lambda\varepsilon_{2n-2}\}$, $A_2 = \mathrm{diag}\{\lambda\varepsilon_{2n-1}, \lambda\varepsilon_{2n}\}$, матриця $P(\varphi, \lambda)$ аналітична і періодична за φ та аналітично залежить від $1/\lambda$.

Теорема 4.1.1. Для досить великих λ існує заміна змінних

$$x = \begin{pmatrix} I_{2n-2} & U(\varphi,\lambda) \\ V(\varphi,\lambda) & I_2 \end{pmatrix} z, \tag{36}$$

з аналітичними при $|\mathrm{Im}\,\varphi| \le \rho$, 2π-періодичними за φ матрицями $U(\varphi,\lambda)$, $V(\varphi,\lambda)$, яка зводить систему (35) до блочно-діагонального вигляду

$$\frac{dz}{dt} = \mathrm{diag}\{B_1(\varphi,\lambda), B_2(\varphi,\lambda)\}z, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \tag{37}$$

де матриця $B_2(\varphi,\lambda)$ при $\mathrm{Im}\,\varphi = 0$ належить кільцю $\mathcal{Q}$ 2×2 - вимірних матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar\alpha & \bar\beta \end{pmatrix}.$$

Теорема 4.1.2. При досить великому λ_0 на півосі $\lambda \ge \lambda_0 > 0$ існує множина $\mathcal{W}$ така, що при $\lambda \in \mathcal{W}$ система

$$\dot{y}_2 = B_2(\varphi,\lambda)y_2$$

періодичною за φ та аналітичною заміною змінних зводиться до системи зі сталими коефіцієнтами

$$\dot{y} = \mathrm{diag}\{ib, -ib\}y,$$

а рівняння (34) має два лінійно незалежні квазіперіодичні розв'язки. Множина $\mathcal{W}$ належить абсолютно неперервному спектру оператора (34) і міра її доповнення прямує до нуля при $\lambda_0 \to +\infty$.

Аналогічні результати справедливі у випадку $p_j(\varphi) \in C^l(\mathbb{R}^m)$, $l \ge 2m+2$.

У параграфі 4.2 наводяться деякі достатні умови звідності недихотомічної лінійної квазіперіодичної системи

$$\frac{dx}{dt} = (A + \varepsilon P(\varphi))x, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \tag{38}$$

де $A = \mathrm{diag}\{a_1, ..., a_n, ia_0, -ia_0\}$, a_j, $j = \overline{0,n}$ - дійсні числа, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ - малий параметр, $x = (x_1, ..., x_{n+2})$, $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m)$, матриця $P(\varphi)$ 2π-періодична за φ_j, $j = \overline{1,m}$, аналітична при $|\mathrm{Im}\,\varphi| \le \rho$. Для сталого вектора $\omega = (\omega_1, ..., \omega_m)$ виконується умова нерезонансності.

Якщо матриця A має власні значення з різними дійсними частинами, то при досить малих $\varepsilon > 0$ методом прискореної збіжності можна довести звідність системи (38) до системи зі сталою матрицею. Для вищенаведених матриць A аналогічне твердження справедливе далеко не завжди. В дисертації вказано умови, при виконанні яких можна виділити деяку підмножину $\mathcal{E}$ додатної лебегівської міри множини $[0, \varepsilon_0]$ таку, що при $\varepsilon \in \mathcal{E}$ система (38) звідна і матриця зведеної системи має пару чисто уявних власних значень. Це забезпечує існування у системи (38) квазіперіодичних розв'язків вигляду $\Phi(t)\exp(iat)$ з дійсним a та квазіперіодичним вектором $\Phi(t)$. Міра доповнення множини $\mathcal{E}$ в $[0, \varepsilon_0]$ прямує до нуля при $\varepsilon_0 \to 0$.

У параграфі 4.3 розглядається питання розщеплюваності сингулярно збуреної лінійної майже періодичної системи на підсистеми.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ І ВИСНОВКИ

1. Досліджено множини обмежених розв'язків лінійних майже періодичних систем диференціальних чи різницевих рівнянь. Доведено, що у множині систем з заданим частотним модулем та всіма обмеженими розв'язками підмножину другої категорії утворюють системи з не майже періодичними розв'язками. Доведено щільність систем з майже періодичними розв'язками в множині систем лінійних диференціальних рівнянь з кососпряженою матрицею.

2. Досліджено поведінку сепаратрисних многовидів експоненціально дихотомічних лінійних майже періодичних систем різницевих рівнянь та систем з імпульсами. Знайдені достатні умови зведення лінійної майже періодичної імпульсної системи до системи звичайних диференціальних рівнянь з майже періодичною за Бором матрицею.

3. Отримано умови кускової неперервності та кускової гладкості сепаратрисних многовидів та інваріантних множин імпульсних розширень динамічних систем на торі.

4. Отримано умови існування квазіперіодичних розв'язків лінійних майже періодичних рівнянь, які залежать від параметра.

Основні положення дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Ткаченко В.И. Блочная диагонализация линейных почти периодических систем // Дифференц. уравнения. - 1984. - 20, N 2. - С. 359-360.

2. Ткаченко В.И. Расщепляемость сингулярно возмущенных линейных почти периодических систем // Применение асимптотических методов в теории нелинейных дифференциальных уравнений: Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С. 91–95.

3. Ткаченко В.И. Функция Грина и условия существования инвариантных множеств импульсных систем // Укр. мат. журн. - 1989. – 41, N 10. – С. 1379–1383.

4. Ткаченко В.И. Дихотомия и расщепляемость линейных квазипериодических систем с импульсным воздействием // Асимптотические методы в уравнениях математической физики: Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 133–137.

5. Ткаченко В.И. Расщепляемость и спектр линейного дифференциального уравнения с квазипериодическими коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1990. – 42, N 10. – С. 1383–1388.

6. Ткаченко В.И. О существовании кусочно гладкого инвариантного тора импульсной системы // Методы исследования дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений: Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 91–96.

7. Ткаченко В.И. Расщепляемость линейного дифференциального уравнения с квазипериодическими коэффициентами// Нелинейные эволюционные уравнения в прикладных задачах: Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991. – С. 126–128.

8. Ткаченко В.И. О приводимости недихотомичной квазипериодической системы // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1991. – 16(50). – С. 14–18.

9. Ткаченко В.И. О линейных почти периодических разностных уравнениях с ограниченными решениями // Асимптотические решения нелинейных уравнений с малым параметром: Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991. – С. 121–124.

10. Ткаченко В.И. О линейных почти периодических разностных уравнениях второго порядка с ограниченными решениями // Аналитические методы исследования нелинейных дифференциальных систем: Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1992. – С. 109–114.

11. Ткаченко В.И. О регулярности линейного почти периодического уравнения с импульсным воздействием // Асимптотическое интегрирование нелинейных уравнений: Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. – С. 115–118.

12. Ткаченко В.И. О линейных импульсных почти периодических системах // Укр. мат. журн. – 1993. – 45, N 1. – С. 105–113.

13. Tkachenko V.I. On multi-frequency impulsive systems // Abstracts of 1-st European Nonlinear Oscillations Conference. - Hamburg, 1993. - P. 160.

14. Ткаченко В.І. Про експоненціальну дихотомію імпульсних еволюційних систем // Укр. мат. журн. – 1994. – 46, N 4. – С. 418–424.

15. Ткаченко В.І. Про сепаратрисні многовиди лінійної імпульсної системи // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения: Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1994. – С. 184–186.

16. Tkachenko V.I. On multy-frequency discontinuous oscillatory systems // Abstracts of the Third International Congress on Industrial and Applied Mathematics. - Hamburg, 1995. - P. 462.

17. Ткаченко В.І. Про лінійні системи з квазіперіодичними коефіцієнтами та обмеженими розв'язками // Укр. мат. журн. – 1996. – 48, N 1. – С. 109–115.

18. Tkachenko V.I. On unitary quasi-periodic systems // Proceedings of the Second International Conference on Difference Equations and Applications. – New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1996. – C. 335–342.

19. Ткаченко В.І. Про експоненціальну дихотомію лінійних різницевих рівнянь // Укр. мат. журн. – 1996. – 48, N 10. – С. 1410–1417.

20. Tkachenko V.I. On linear almost periodic systems with bounded solutions // Bull. Austral. Math. Soc. – 1997. – 55, N 1. – P. 177–184.

Ткаченко В.И. Исследование ограниченных решений и инвариантных множеств почти периодических систем.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, Институт математики НАН Украины, Киев, 1997.

Защищается 20 научных работ, которые содержат теоретические исследования ограниченных и почти периодических решений и инвариантных множеств почти периодических систем дифференциальных, разностных уравнений, а также систем с импульсным воздействием. Доказана плотность множества систем с почти периодическими решениями в множестве систем линейных дифференциальных уравнений с почти периодической кососопряженной матрицей. Исследовано поведение сепаратрисных многообразий експоненциально дихотомичных линейных почти периодических систем разностных уравнений и систем с импульсами. Получены условия кусочной непрерывности и кусочной гладкости сепаратрисных многообразий и инвариантных множеств импульсных расширений динамических систем на торе.

Tkachenko V.I. Investigation of bounded solutions and invariant sets for almost periodic systems.

Thesis for a degree of Doctor of a Sciences in Physics and Mathematics, speciality – 01.01.02 – differential equations. Institute of Mathematics. National Academy of Science of Ukraine. Kyiv, 1997.

20 papers are defended. They are concerned with a theoretical analysis of bounded and almost periodic solutions and invariant sets for almost periodic systems of differential and difference equations and systems with impulses. Density of a set of systems with almost periodic solutions in the set of all systems of differential equations with almost periodic skew-adjoint matrix is proved. Behavior of separatrix manifolds of exponential dichotomous linear almost periodic systems of difference equations and systems with impulses is investigated. Conditions for piecewise continuity (piecewise smoothness) of separatrix manifolds and invariant sets for impulsive extensions of dynamic systems on a torus are obtained.

Ключові слова: майже періодична система, обмежений розв'язок, майже періодичний розв'язок, інваріантна множина, експоненціальна дихотомія, сепаратрисний многовид.

Підп. до друку 04.03.97. Формат 60×84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,63. Ум. фарбо-відб. 1,63. Обл.-вид. арк. 1,6.
Тираж 100 пр. Зам. 46 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601, Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3.