Національна Академія наук України

Інститут математики

На правах рукопису.

Малашок

Людмила Андріївна

Варіаційно-ітеративні методи розв'язання рівнянь з K- позитивно визначеними і K - симетричними операторами

01.01.02 - диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Київ-1997

Дисертацією є рукопис

Робота виконана у відділі звичайних диференціальних рівнянь Інституту математики НАН України

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор *ЛУЧКА А.Ю.*

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор *ПЕРЕСТЮК М.О.*

кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник *ТУКАЛЕВСЬКА Н.І.*

Провідна установа: Національний технічний Університет України (КПІ)

Захист дисертації відбудеться «22» квітня 1997 року о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради Д-01.66.02 при Інституті математики НАН України за адресою: 252601, Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці інституту

Автореферат розіслано «18» березня 1997 року

Вчений секретар
спеціалізованої ради *А.Ю.ЛУЧКА*

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. Математичними моделями багатьох задач природознавства і техніки є різні класи диференціальних, інтегральних, інтегро-диференціальних рівнянь, точні розв'язки яких, як правило, не вдається виразити через елементарні функції або в квадратурах. У зв'язку з цим, разом з подальшим розвитком теорії цих рівнянь, особливого значення набувають методи наближеного розв'язання таких рівнянь.

Серед різноманітної кількості наближених методів найбільш часто в обчислювальній практиці застосовуються прямі, до яких належать варіаційні, проекційні і різницеві методи, та методи ітераційного типу. Останнім часом з'явилися методи, які поєднують в собі ідеї як прямих, так і ітераційних. Одним із представників цього класу є варіаційно-ітеративний метод, який був запропонований і в подальшому розроблений і досліджений А.Ю.Лучкою.

Теорія варіаційно-ітеративних методів добре розроблена для рівнянь в гільбертовому просторі з позитивно визначеними операторами, в тому числі для інтегральних рівнянь і крайових задач для диференціальних рівнянь. Для рівнянь, які не мають такої властивості, теорія варіаційно-ітеративних методів знаходиться на стадії становлення. На сьогодні відома невелика кількість робіт, які присвячені застосуванню варіаційно-ітеративних методів до рівнянь, в тому числі інтегральним і крайовим задачам для диференціальних, інтегро-диференціальних рівнянь, оператори яких не є позитивно визначеними. У зв'язку з цим поширення теорії варіаційно-ітеративних методів на більш широкі класи рівнянь, зокрема на рівняння в гільбертовому просторі з K- позитивно визначеними і K- симетричними операторами, і розробка ефективних обчислювальних алгоритмів є актуальною і перспективною задачею.

Мета роботи. Метою даної роботи є розробка і обгрунтування методів варіаційно-ітеративного типу розв'язання рівнянь з K- позитивно визначеними і K- симетричними операторами, в тому числі для рівнянь з малою нелінійністю, розробка зручних обчислювальних алгоритмів, а також застосування цих методів до розв'язання крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь.

Методи та об'єкт дослідження. Для побудови алгоритмів, дослідження збіжності запропонованих методів, отримання оцінок похибки використовувалися основні положення теорії диференціальних рівнянь, методи функціональго аналізу, теорії функцій, теорії наближених методів та обчислювальної математики. Основним об'єктом досліджень є крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь, оператори яких є K- позитивно визначеними і K - симетричними.

Наукова новизна. В роботі одержано такі основні результати:

- побудовано однокрокові (стаціонарний, оптимальний стаціонарний, оптимальний нестаціонарний, зі збуренням), двокрокові (стаціонарний, оптимальний стаціонарний) варіаційно-ітеративні методи для лінійних рівнянь з K- позитивно визначеними і K - симетричними операторами. Для запропонованих методів встановлено умови їх збіжності, а також оцінки, які характеризують швидкість збіжності методів;
- досліджено застосування однокрокових, двокрокових варіаційно-ітеративних методів для побудови розв'язків крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь;
- запропоновано варіаційно-ітеративний метод розв'язання рівнянь з малою нелінійністю, одержано умови його збіжності і оцінки похибки, розглянуто питання застосування методу до інтегро-диференціальних рівнянь;
- побудовано ефективні обчислювальні схеми запропонованих методів, для більшості з них здійснено чисельну реалізацію, зроблений аналіз отриманих результатів.

Теоретична і практична цінність. Одержані в дисертації результати збагачують теорію методів варіаційно-ітеративного типу, дають можливість розширити область їх застосування на більш широкі класи рівнянь. Запропоновані обчислювальні схеми методів можна реалізувати на ЕОМ і використати для знаходження розв'язків конкретних крайових задач, які виникають у прикладних дослідженнях.

__Апробація роботи.__ Основні результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на семінарах відділу звичайних диференціальних рівнянь Інституту математики НАН України, в школі-семінарі «Нелінійні крайові задачі математичної фізики та їх застосування» 10-14 жовтня 1996р., м. Кам'янець-Подільський, також на Четвертій та П'ятій Міжнародних наукових конференціях ім. академіка М.П.Кравчука, 11-13 травня 1995р., 16-18 травня 1996р., м. Київ, на Другій всеукраїнській конференції «Сучасні фізико-математичні дослідження молодих науковців вузів України», 16-18 травня 1995р., м. Київ, на Всеукраїнській конференції «Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування», 15-18 травня 1996р., м. Чернівці.

__Публікації.__ Основні результати дисертації опубліковано в роботах [1-5]. список яких подано в кінці автореферату.

__Структура і об'єм дисертації.__ Дисертаційна робота складається із вступу, трьох розділів і списку цитованої літератури, викладених на 137 сторінках машинописного тексту. Список літератури містить 69 найменувань.

Основний зміст роботи

У вступі дано обгрунтування актуальності теми, проаналізовано сучасний стан проблеми, вказується мета досліджень, яким присвячена дисертація, і коротко викладено основні результати.

__В першому розділі__ розроблено і досліджено однокрокові (стаціонарний, оптимальний стаціонарний, оптимальний нестаціонарний, зі збуренням) варіаційно-ітеративні методи для лінійних операторних рівнянь з K- позитивно визначеними і K- симетричними операторами, а також розглянуто питання застосування запропонованих методів до розв'язання крайової задачі такого вигляду:

$$\left(Ay\right)(t) := y^{(m)}(t) + c_1(t)y^{(m-1)}(t) + \ldots + c_m(t)y(t) +$$

$$+\sum_{j=0}^{m-1}\int_a^b H_j(t,\xi)y^{(j)}(\xi)d\xi = f(t), \quad t\in(a,b), \qquad (1)$$

$$U_l(y) := \sum_{j=0}^{m-1}\left\{ \alpha_{lj}\, y^{(j)}(a) + \beta_{lj}\, y^{(j)}(b) \right\} = 0, \ \ l=\overline{0,\, m-1}, \qquad (2)$$

в якій α_{lj}, β_{lj}, $l,j=\overline{0,m-1}$,- задані числа, $c_j(t)$, $j=\overline{1,m}$- функції, визначені і неперервні на відрізку $[a,b]$, $\left\{H_j\right\}_{j=0}^{m-1}\subset L_2[a,b]^2$- задані ядра, $f\in L_2[a,b]$- задана функція, і вважається, що так визначений оператор A є K- позитивно визначеним і K- симетричним.

В *§1* описані основні поняття K- позитивно визначених і K- симетричних операторів.

В *§§2.4* задача (1), (2) розглядається в абстрактному вигляді, а саме, у дійсному гільбертовому просторі H розглядається рівняння

$$Ay = f, \qquad (3)$$

в якому оператор A, визначений на щільному в H лінеалі $D(A)$, є лінійним K- позитивно визначеним і K- симетричним, $f\in H$- заданий елемент. Припускаємо, що існує лінійний K- позитивно визначений і K- симетричний оператор B, область визначення якого збігається з областю визначення оператора A, тобто $D(B)=D(A)$, причому для нього існує обернений B^{-1}, який можна побудувати в явному вигляді. Крім того, існують константи $\delta>\gamma>0$ такі, що справедлива нерівність

$$\gamma\left(By,Ky\right)\le\left(Ay,Ky\right)\le\delta\left(By,Ky\right) \quad \forall y\in D(A), \qquad (4)$$

де $(\cdot\,,\,\cdot)$ - скалярний добуток у гільбертовому просторі H.

Згідно з варіаційно-ітеративним методом, розглянутим у *§2*, наближені розв'язки рівняння (3) знаходяться за формулою

$$y_k = v_k + w_k, \quad k=1,2,3,\ldots, \qquad (5)$$

в якій елемент v_k визначається з рівняння

$$Bv_k = By_{k-1} + \tau_k(f - Ay_{k-1}), \tag{6}$$

в якому τ_k - деякі параметри, а поправка $w_k \in H_0$, $H_0 \subset D(A)$- підпростір простору H, визначається із умови мінімуму функціоналу

$$F(w_k) = (Aw_k, Kw_k) - 2(f - Av_k, Kw_k). \tag{7}$$

За початкове наближення беремо елемент $y_0 = v_0 + w_0$, визначаючи поправку w_0 із умови мінімуму функціоналу (7) при $k = 0$, а елемент $v_0 \in D(A)$ задається довільно.

Для методу (5)-(7) отримано умови його збіжності і оцінки похибки.

Теорема 2.3. При зроблених припущеннях відносно операторів A і B швидкість збіжності варіаційно-ітеративного методу (5)-(7) у просторі H_B характеризується нерівностями

$$|\, y_* - y_k|_B \le \frac{q_k}{\sqrt{\sigma}} |\, QS(y_* - v_0)|_B, \tag{8}$$

$$|\, y_* - y_k|_B \le \frac{q_m}{\sigma} |\, h - Gy_{k-m}|_B, \tag{9}$$

в яких

$$q_m = \begin{cases} |\, L_k L_{k-1} \ldots L_{k-m+1}\, |_B, & 1 \le m \le k, \\ 1,\ m = 0, \end{cases} \tag{10}$$

y_* - узагальнений розв'язок рівняння (3), оператор G - це розширення оператора $B^{-1}A$, $S = G^{1/2}$, $Q = I - \Pi$, де Π- оператор ортогонального проектування простору H_B на підпростір SH_0, $L_i = QT_iQ$ $T_i = I - \tau_i G$, $i = \overline{1,k}$, а H_B- енергетичний простір, який одержується замиканням множини $D(A)$ в метриці

$$[x,y]_B = (Bx, Ky),\ |\, x\,|_B^2 = [x,x]_B,\ \{x,y\} \subset D(B).$$

Якщо в оцінці (9) покласти $m = k$ і $m = 0$, то маємо апріорну і апостеріорну оцінки похибки.

В залежності від вибору параметрів τ_k розрізняють стаціонарний, оптимальний стаціонарний і оптимальний нестаціонарний варіаційно-ітеративні методи.

У теоремах 2.1, 2.2 доводиться збіжність і встановлюються оцінки швидкості збіжності стаціонарного варіаційно-ітеративного методу ($\tau_k = \tau$, $k = 1,2,\ldots$). Величина q_k, яка визначається за формулою (10), при $\tau_k = \tau$ набуває вигляду $q_k = q^k$, де $q = \max\{|1 - \tau\sigma|, |1 - \tau\eta|\}$, причому $q < 1$, коли $\tau \in \left(0, 2/\eta\right)$. Параметр τ у стаціонарному варіаційно-ітеративному методі пропонується вибирати таким: $\tau = \dfrac{2}{\gamma + \delta}$, у оптимальному стаціонарному варіаційно-ітеративному методі

$$\tau = \tau_0 = \frac{2}{\sigma + \eta}, \tag{11}$$

де σ і η- границі спектра оператора $V = QGQ$, причому $\gamma \le \sigma \le \eta \le \delta$. В цьому випадку величина

$$q = \frac{\eta - \sigma}{\eta + \sigma}. \tag{12}$$

Якщо в методі (5)-(7) параметри τ_k мають вигляд

$$\tau_i = \frac{\tau}{1 + qt_i}, \quad t_i = \cos\frac{(2i-1)\pi}{2k}, \quad i = \overline{1,k}, \tag{13}$$

де τ, q визначається з формулами (11), (12), то маємо оптимальний нестаціонарний варіаційно-ітеративний метод, швидкість збіжності якого характеризується оцінкою (8), в якій

$$q_k = \frac{2d^k}{1 + d^{2k}}, \; d = \frac{\sqrt{\eta} - \sqrt{\sigma}}{\sqrt{\eta} + \sqrt{\sigma}}. \tag{14}$$

Крім оцінок швидкості збіжності методу (5)-(7) у просторі H_B даються оцінки швидкості збіжності цього методу у просторі H.

В *§3* описано алгоритм застосування варіаційно-ітеративного методу, викладеного в *§2*, до крайової задачі (1), (2). Для побудови наближеного розв'язку задачі (1), (2) згідно з варіаційно-ітеративним методом задається оператор B, який породжується інтегро-диференціальним виразом

$$\left(By\right)(t) := y^{(m)}(t) + d_1(t)y^{(m-1)}(t)+\ldots+d_m(t)y(t) + \\ +\sum_{j=0}^{m-1}\int_a^b G_j(t,\xi)\, y^{(j)}(\xi)d\xi\,,\ t\in(a,b), \qquad (15)$$

і крайовими умовами (2), де $d_j(t),\ j=\overline{1,m}$, - визначені і неперервні на відрізку $[a,b]$ функції, $\left\{G_j\right\}_{j=0}^{m-1} \subset L_2[a,b]^2$ - ядра, і припускається, що так визначений оператор B є K- позитивно визначеним і K- симетричним. Крім того, існують константи $\delta > \gamma > 0$ такі, що справедлива нерівність

$$\gamma\int_a^b\left(By\right)(t)\cdot\left(Ky\right)(t)dt \le \int_a^b\left(Ay\right)(t)\cdot\left(Ky\right)(t)dt \le \\ \le \delta\int_a^b\left(By\right)(t)\cdot\left(Ky\right)(t)dt \quad \forall y\in D(A) \qquad (16)$$

Згідно з варіаційно-ітеративним методом наближені розв'язки задачі (1), (2) визначаються за формулою

$$y_k(t) = \upsilon_k(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i^k\varphi_i(t), \qquad (17)$$

в якій функція $\upsilon_k(t)$ знаходиться із крайової задачі

$$\begin{gathered}\left(B\upsilon_k\right)(t) = \left(By_{k-1}\right)(t) + \tau_k\left(f(t)-\left(Ay_{k-1}\right)(t)\right), \\ U_l(\upsilon_k) = 0,\ \ l=\overline{0,m-1}\,,\end{gathered} \qquad (18)$$

де τ_k- деякі параметри, $\left\{\varphi_i(t)\right\}_{i=\overline{1,n}} \subset D(A)$- система лінійно незалежних функцій, а невідомі параметри $a_i^k,\ \ i=\overline{1,n}$, визначаються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}a_j^k = b_i^k\,,\ i=\overline{1,n}, \qquad (19)$$

де

$$\lambda_{ij} = \int_a^b\left(A\varphi_j\right)(t)\cdot\left(K\varphi_i\right)(t)dt,\ \ i,j=\overline{1,n}\,, \qquad (20)$$

$$b_i^k = \int_a^b \left(f(t) - (Av_k)(t)\right) \cdot \left(K\varphi_i\right)(t)\, dt, \quad i = \overline{1,n}. \tag{21}$$

Початкову функцію $y_0(t)$ визначаємо за формулою (5) при $k = 0$, вибираючи довільно функцію $v_0(t) \in D(A)$.

В §4 запропоновано і досліджено в"ріаційно-ітеративний метод зі збуренням розв'язання рівнянь вигляду (3), який, на наш погляд, більш зручний для практичного застосування, ніж метод (5)-(7). Згідно з цим методом наближення до шуканого розв'язку рівняння (3) визначаються за формулою

$$v_k = z_{k-1} + w_k, \quad z_{k-1} \in H_{k-1}, \quad w_k \in H_0, \tag{22}$$

в якій елементи z_{k-1} і w_k визначаються із умов мінімуму функціоналів

$$F_1(z_{k-1}) = (Bz_{k-1}, Kz_{k-1}) - 2(By_{k-1}, Kz_{k-1}), \tag{23}$$

$$F_2(w_k) = (Aw_k, Kw_k) - 2(f - Az_{k-1}, Kw_k), \tag{24}$$

де $\{H_k\} \subset D(A)$, $k = 0,1,\ldots$,- послідовність скінченновимірних підпросторів, $H_0 \subset H_k$, $k = 1,2,\ldots$, а елемент y_k знаходиться з рівняння

$$By_k = Bv_k + \tau_k(f - Av_k), \quad k = 1,2,\ldots, \tag{25}$$

в якому τ_k - деякий параметр. Початкове наближення $y_0 \in D(A)$ вибираємо довільним.

У запропонованому вар ацiйно-ітеративному методі (22)-(25) за наближений розв'язок мож.іа взяти як елемент v_k, так і елемент z_k, або елемент y_k.

Для методу (22)-(25) отримано умови його збіжності і оцінки похибки, розглянуто питання вибору ітераційних параметрів.

В §5 розглянуто питання застосування варіаційно-ітеративного методу зі збуренням до розв'язання крайової задачі (1), (2). Наближені розв'язки до задачі (1), (2) визначаємо за формулою

$$v_k(t) = z_{k-1}(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i^k \varphi_i(t). \tag{26}$$

в якій функція $z_{k-1}(t)$ обчислюється за формулою

$$z_{k-1}(t) = \sum_{i=1}^{n_{k-1}} c_i^k \varphi_i(t), \tag{27}$$

де $\{\varphi_i(t)\} \subset D(A)$- система лінійно незалежних функцій, $\{n_k\}$- неспадна послідовність натуральних чисел, причому $n_k \geq n$, $k = 0,1,2,\ldots$, де $n \in N$- деяке фіксоване число, а невідомі параметри c_i^k, $i = \overline{1,n_{k-1}}$, визначаються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n_{k-1}} \beta_{ij} c_j^k = \delta_i^k, \; i = \overline{1,n_{k-1}},$$

де

$$\beta_{ij} = \int_a^b (B\varphi_j)(t) \cdot (K\varphi_i)(t)\, dt, \; i,j = \overline{1,n_{k-1}},$$

$$\delta_i^k = \int_a^b u_{k-1}(t) \cdot (K\varphi_i)(t)\, dt, \; i = \overline{1,n_{k-1}},$$

а невідомі параметри a_i^k, $i = \overline{1,n}$, визначаються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь (19), де λ_{ij}, $i,j = \overline{1,n}$, визначаються за формулою (20), а

$$b_i^k = \int_a^b \left(f(t) - (Az_{k-1})(t)\right) \cdot (K\varphi_i)(t)\, dt, \; i = \overline{1,n}.$$

Для побудови наступного наближення знаходимо функцію $u_k(t)$ за формулою

$$u_k(t) = (Bv_k)(t) + \tau_k\left(f(t) - (Av_k)(t)\right). \tag{28}$$

Оператор B задається інтегро-диференціальним виразом (15) і крайовими умовами (2). Початкове наближення $u_0(t) \in D(A)$ вибираємо довільно.

<u>*Другий розділ*</u> роботи присвячений двокроковому варіаційно-ітеративному методу. В $\S\S 6,7$ запропоновано і досліджено двокроковий варіаційно-ітеративний метод розв'язання рівнянь

вигляду (3). Ідея методу полягає в тому, що наближені розв'язки до шуканого розв'язку визначаємо за формулою

$$y_k = v_k + w_k, \quad w_k \in H_0,\ H_0 \subset D(A), \tag{29}$$

в якій елемент v_k визначається з рівняння

$$Bv_k = By_{k-1} + \alpha B(y_{k-1} - y_{k-2}) + \beta\tau(f - Ay_{k-1}),\ k = 2,3,\ldots, \tag{30}$$

в якому α, τ - деякі параметри, $\beta = \alpha + 1$, а поправка w_k визначається із умови мінімуму функціоналу

$$F(w_k) = (Aw_k, Kw_k) - 2(f - Av_k, Kw_k). \tag{31}$$

Початкові наближення y_0 і y_1 обчислюються за формулою (29) при $k = 0, 1$, в якій елемент $v_0 \in D(A)$ задається довільно, елемент v_1 знаходиться з рівняння (30) при $\alpha = 0,\ k = 1$, а поправки w_0 і w_1 визначаються із умови мінімуму функціоналу (31) при $k = 0$ і $k = 1$. У методі (29)-(31) за наближений розв'язок можна взяти як елемент y_k, так і елемент v_k.

Для методу (29)-(31) отримано умови його збіжності і оцінки похибки в просторах H_B і H, розглянуто питання оптимального вибору ітераційних параметрів.

Теорема 7.1. Швидкість збіжності двокрокового варіаційно-ітеративного методу (29)-(31) у просторі H_B характеризується нерівністю

$$\left| y_* - y_k \right|_B \le l\omega_k \left| QS(y_* - v_0) \right|_B, \tag{32}$$

в якій y_* - узагальнений розв'язок рівняння (3),

$$l = \left| S^{-1}Q \right|_B, \quad \omega_k = \left| \Phi_k \right|_B, \tag{33}$$

де $\Phi_0 = Q,\ \Phi_1 = L,\ \Phi_k = \beta L \Phi_{k-1} - \alpha \Phi_{k-2},\ k = 2,3,\ldots,\ L = QTQ,\ T = I - \tau G$.

Теорема 7.3. Якщо у методі (29)-(31) параметри τ і α мають вигляд

$$\tau = \tau_0 = \frac{2}{\sigma + \eta}, \quad \alpha = d^2, \quad d = \frac{\sqrt{\eta} - \sqrt{\sigma}}{\sqrt{\eta} + \sqrt{\sigma}}, \tag{34}$$

де σ і η- границі спектра оператора $V = QGQ$, то маємо оптимальний стаціонарний двокроковий варіаційно-ітеративний метод, швидкість збіжності якого в H_B характеризується оцінкою

$$\left| y_* - y_k \right|_B \le \frac{d^k}{\sqrt{\sigma}} \left(1 + \frac{1-d^2}{1+d^2} k\right) \cdot \left| QS(y_* - v_0) \right|_B . \qquad (35)$$

У методі (29)-(31) параметри τ і α $(\beta = 1 + \alpha)$ можна вибирати за формулами $\tau = \dfrac{2}{\gamma + \delta}$, $\alpha = \left(\dfrac{\sqrt{\delta} - \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\delta} + \sqrt{\gamma}} \right)^2$, одержуючи при цьому збіжний стаціонарний варіаційно-ітеративний метод, де γ і δ фігурують у нерівності (4).

В *§8* розглянуто питання застосування запропонованого двокрокового варіаційно-ітеративного методу до розв'язання крайової задачі (1), (2). Наближені розв'язки визначаємо за формулою

$$y_k(t) = v_k(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i^k \varphi_i(t), \qquad (36)$$

в якій функція $v_k(t)$ знаходиться із крайової задачі

$$\begin{gathered} (Bv_k)(t) = \beta(By_{k-1})(t) - \alpha(By_{k-2})(t) + \beta\tau(f(t) - (Ay_{k-1})(t)), \\ U_l(v_k) = 0, \quad l = \overline{0, m-1}, \quad k = 2, 3, \ldots, \end{gathered} \qquad (37)$$

а невідомі коефіцієнти a_i^k визначаються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь (19), де λ_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$, визначаються за формулою (20), а

$$b_i^k = \int_a^b \left(f(t) - (Av_k)(t)\right) \cdot (K\varphi_i)(t)\, dt, i = \overline{1, n}.$$

Початкове наближення $y_0(t)$ визначаємо за формулою (36) при $k = 0$, вважаючи, що функція $v_0(t) \in D(A)$ задана, а початкове наближення $y_1(t)$ знаходимо за допомогою однокрокового стаціонарного варіаційно-ітеративного методу, тобто за формулами (17)-(21) при $k = 1$.

В третьому розділі дисертації досліджений варіаційно-ітеративний метод для рівняння

$$Ay + \lambda Fy = f, \tag{38}$$

в якому оператор A, визначений на щільній в H (дійсний гільбертів простір) множині $D(A)$, є лінійним K- позитивно визначеним і K- симетричним, оператор $F : H \to H$ є нелінійним ліпшиц-неперервним, $f \in H$- заданий елемент, λ- малий параметр, а також розглянуто питання застосування запропонованого методу до розв'язання крайової задачі такого вигляду:

$$\big(Ay\big)(t) + \lambda\big(Fy\big)(t) = f(t), \;\; U_l(y) = 0, \; l = \overline{0, m-1}, \tag{39}$$

в якій $\big(Ay\big)(t)$ визначається інтегро-диференціальним виразом (1), $U_l(y)$ визначається за формулою (2), і припускається, що оператор A є K- позитивно визначеним і K- симетричним, а

$$\big(Fy\big)(t) := F\big(t, y(t)\big), \; t \in [a,b]. \tag{40}$$

Відносно функції $F(t,y)$ припускається, що вона майже при всіх $t \in [a,b]$, $y \in \big(-\infty, +\infty\big)$ задовольняє умову Каратеодорі, і для неї виконується нерівність

$$\big|F(t,y) - F(t,z)\big| \le \varepsilon\big|y - z\big| \;\; \forall y, z \in \big(-\infty, +\infty\big), \; \forall t \in [a,b]. \tag{41}$$

В *§§9.10* запропоновано і досліджено варіаційно-ітеративний метод розв'язання рівнянь вигляду (38). Як і в лінійному випадку для побудови алгоритму варіаційно-ітеративного методу задається оператор B, який є лінійним K- позитивно визначеним і K- симетричним з областю визначення $D(B) = D(A)$ і припускається, що для нього існує обернений B^{-1}, який можна побудувати в явному вигляді, крім того, виконується нерівність (4). Ідея методу полягає в тому, що наближені розв'язки до шуканого розв'язку визначаються з рівняння

$$By_k = Bv_k + \tau_k\big(f - Av_k - \lambda F y_{k-1}\big), \tag{42}$$

в якому τ_k - деякий параметр, елемент v_k будується за формулою

$$v_k = y_{k-1} + w_k, \quad w_k \in H_0, \tag{43}$$

де $H_0 \subset D(A)$, а поправка w_k визначається із умови мінімуму функціоналу

$$F(w_k) = \big(Aw_k, Kw_k\big) - 2\big(f - Ay_{k-1} - \lambda F y_{k-1}, Kw_k\big). \tag{44}$$

У методі (42)-(44) за наближений розв'язок можна взяти як елемент y_k, так і елемент v_k.

Теорема 10.1. Якщо виконуються нерівності

$$\left| Ux - Uy \right|_B \le \alpha \left| x - y \right|_B \quad \forall\{x,y\} \subset H_B, \tag{45}$$

$$\left| Dx - Dy \right|_B \le \beta \left| x - y \right|_B \quad \forall\{x,y\} \subset H_B, \tag{46}$$

і умова

$$\rho(\Omega) < 1, \tag{47}$$

де $\rho(\Omega)$- спектральний радіус матриці $\Omega = \begin{pmatrix} q & b \\ p & a \end{pmatrix}$, $q = \left| L \right|_B$, $p = \left| M \right|_B$, $a = |\lambda| \cdot \alpha$, $b = |\lambda| \cdot \beta$, $L = \Theta M$, $M = TZ$, $U = NC$, $C = B^{-1}F$, $D = \Theta U$, $Z = I - RG$, $N = \tau I + TR$, $\Theta = I - P$, P- оператор ортогонального проектування простору H_B на підпростір H_0, то рівняння (38) має єдиний узагальнений розв'язок $y_* \in H_B$ і послідовність $\{y_k\}$, побудована згідно з методом (42)-(44), збігається за нормою простору H_B до цього розв'язку.

Теорема 10.2. Якщо виконуються умови теореми 10.1, то справедливі такі оцінки похибки методу:

$$\Delta_k \le \Omega^k \cdot \Delta_0, \quad \Delta_k \le \Lambda \cdot \Omega \cdot \rho_k, \quad \Delta_k \le \Lambda \cdot \Omega^k \cdot \rho_1, \tag{48}$$

де

$$\Lambda = (E - \Omega)^{-1}, \ \Delta_k = \begin{pmatrix} |x_* - x_k|_B \\ |y_* - y_k|_B \end{pmatrix}, \ \rho_k = \begin{pmatrix} |x_k - x_{k-1}|_B \\ |y_k - y_{k-1}|_B \end{pmatrix},$$

E- одинична матриця розміру два, $x_* = \Theta y_*$, $x_k = \Theta y_k$.

Зауважимо, що якщо $\tau \in \left(0, \frac{2}{\eta}\right)$, то умову (47) можна замінити умовою на параметр λ, а саме, умовою: $|\lambda| < \dfrac{1-q}{(1-q)\alpha + \beta p}$.

В *§11* розглянуто питання застосування запропонованого варіаційно-ітеративного методу до розв'язання крайової задачі (39). Наближені розв'язки визначаємо із крайової задачі

$$\begin{aligned} &(By_k)(t) = (Bv_k)(t) + \tau_k\big(f(t) - (Av_k)(t) - \lambda(Fy_{k-1})(t)\big), \\ &U_l(y_k) = 0, \; l = \overline{0, m-1}, \end{aligned} \tag{49}$$

в якій τ_k - деякі параметри, а функція $v_k(t)$ обчислюється за формулою

$$v_k(t) = y_{k-1}(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i^k \varphi_i(t), \tag{50}$$

в якій $\{\varphi_i(t)\}_{i=\overline{1,n}} \subset D(A)$, $n \in N$ - система лінійно незалежних функцій, а невідомі коефіцієнти a_i^k визначаються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь (19), де λ_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$, визначаються за формулою (20),

$$b_i^k = \int_a^b \big(f(t) - (Ay_{k-1})(t) - \lambda(Fy_{k-1})(t)\big) \cdot (K\varphi_i)(t)dt.$$

Оператор B задається інтегро-диференціальним виразом (15) і крайовими умовами (2). Початкова функція $y_0(t) \in D(A)$ задається довільно.

Крім цього, в дисертаційній роботі до всіх запропонованих методів розроблені зручні обчислювальні схеми. Для більшості з них здійснено чисельну реалізацію, наведено приклади, які ілюструють ефективність запропонованих методів і зроблений порівняльний аналіз отриманих результатів.

Основні результати дисертації опубліковано в наступних роботах:

1. *Малашок Л.А.* Варіаційно-ітеративний метод розв'язання лінійних рівнянь з K- додатно визначеними операторами // Доп. НАН України. - 1996. - №7. - С.36-41.

2. *Малашок Л.А.* Розв'язання крайової задачі для інтегро-диференціального рівняння варіаційно-ітеративним методом // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. - Киев: Институт математики НАН Украины, 1995. - С.170-172.

3. *Малашок Л.А.* Варіаційно-ітеративний метод для рівнянь з малою нелінійністю // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. - Киев: Институт математики НАН Украины, 1996. - С.185-187.

4. *Малашок Л.А.* Застосування двокрокового варіаційно-ітеративного методу до розв'язання інтегро-диференціальних рівнянь з K- позитивно визначеними і K- симетричними операторами // Тези доп. Всеукр. конф. «Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування», м. Чернівці, 15-18 трав. 1996р. - Київ: Інститут математики НАН України, 1996. - С.117.

5. *Малашок Л.А.* Побудова розв'язку крайової задачі для інтегро-диференціального рівняння з K- позитивно визначеним і K- симетричним оператором варіаційно-ітеративним методом зі збуренням // Тези доп. П'ятої Міжнародної наук. конф. ім. академіка М. Кравчука, Київ, 16-18 трав. 1996р. - Київ, 1996. - С.272.

Малашок Л.А. Вариационно-итеративные методы решения уравнений с K- положительно определенными и K- симметричными операторами.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности: 01.01.02-дифференциальные уравнения. Институт математики НАН Украины, Киев, 1996.

Защищаются результаты теоретических исследований, изложенные в диссертации в 5 опубликованных работах.

Предложены и обоснованы вариационно-итеративные методы решения линейных уравнений с K - положительно определенными и K - симметричными операторами: одношаговые вариационно-итеративные (стационарный, оптимальный стационарный, оптимальный нестационарный, с возмущением), двухшаговые (стационарный, оптимальный стационарный), и вариационно-итеративный метод решения уравнений с малой нелинейностью, рассмотрены вопросы применения этих методов к краевым задачам для интегро-дифференциальных уравнений. Для предложенных методов получены условия сходимости, а также оценки, характеризующие скорость сходимости, построены удобные для счета вычислительные схемы.

Malashok L.A. Variational-iterative methods for solving equations with K - positive defined and K - symmetric operators.

Thesis for Ph. D degree of phisical and mathematical sciences on speciality 01.01.02. differential equations. Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, 1996.

The results of defended thesis were published in 5 papers.

There are suggested and proved variational-iterative methods for solving linear equations with K - positive defined and K - symmetric operators, such as single-step variational-iterative (stationary, optimal stationary, optimal non stationary, with disturbance), two-step (stationary, optimal stationary), and variational-iterative method for solving equations with small nonlinearity. The application of these methods to solve boundary-value problems for integral-differential equations is considered. The conditions of convergence and estimations of the speed of convergence are given for the suggested methods; convenient computational schemes are built.

Ключові слова: K - позитивно визначений оператор, K - симетричний оператор, крайова задача, інтегро-диференціальне рівняння, варіаційно-ітеративний метод.

Л. Малашок

Підп. до друку 11.03.97. Формат 60x84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,16. Ум. фарбо-відб. 1,16. Обл.-вид. арк. 0,8.
Тираж 100 пр. Зам. 45 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3