

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Інститут механіки ім.С.П.Тимошенка

На правах рукопису

САВЕЛЬЄВА Катерина Володимирівна

ЕВОЛЮЦІЯ ПЛОСКИХ ХВИЛЬ
В БАГАТОФАЗНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

01.02.04 - механіка деформівного твердого тіла

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Е.Савельєва

Київ - 1997

ЛННБ України ім.В.Стефаніка



00752419 (S)

Інститут механіки ім.С.П.Тимошенка
Національної академії наук України

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук
професор Рушицький Я.Я.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук
професор Бабіч С.Ю.

доктор фізико-математичних наук
Маслов Б.П.


Провідна установа: Інститут гідромеханіки НАН України

Захист відбудеться 29 квітня 1997 р. о 10 годині на
засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.03.03 при Інституті меха-
ніки ім.С.П.Тимошенка Національної академії наук України за адре-
сою: 252057, Київ, вул.Нестерова, 3 ; факс - (044)446-03-19.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Інституту меха-
ніки ім.С.П.Тимошенка НАН України (Київ, вул.Нестерова, 3).

Реферат розіслано 28 березня 1997 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
доктор технічних наук, професор

 І.С.Чернишенко

AB 37,395

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

В дисертаційній роботі досліджуються плоскі гармонічні хвилі в твердих двофазних сумішах. Суміші є гіперпружними, а більш конкретно квадратично пружно нелінійними, що описуються узагальненим потенціалом Мернагана. Для числових комп'ютерних прикладів двофазних сумішей вибрані гранульовані двофазні композитні матеріали. Вивчалася взаємодія нелінійних хвиль в гіперпружних сумішах. Для класичних гіперпружних матеріалів основні наукові результати про взаємодію хвиль отримані в нелінійній акустиці. Перехід від однофазних класичних середовищ до двофазних середовищ не є тривіальним і деякі явища взаємодії хвиль в сумішах виявилися більш складними. В дисертації досліджені три стандартні задачі про взаємодію гармонічних плоских хвиль, а також кілька нестандартних задач - про еволюцію та спотворення плоскої хвилі при двох різних способах аналізу та про взаємодію поперечних хвиль в рамках третього наближення.

Актуальність і ступінь дослідженості тематики дисертації.

Гармонічні хвилі в матеріалах вивчаються на протязі сотень років. Перші наукові спостереження швидкості гармонічних хвиль в матеріалах проводив Біо в 1809 році. Це були відомі всім механікам вимірювання швидкості звуку в чавунних трубах нового паризького трубопроводу, який якраз тоді будувався.

Квадратично нелінійна теорія матеріалів, оснований на введенні кубічного потенціалу спеціальної форми, була запропонована і почала застосовуватися до металів та інших традиційних матеріалів приблизно в 50-их роках нашого століття після опублікування Мернаганом відомої монографії про скінченні деформації в пружних тілах. Згаданий потенціал тепер називають потенціалом Мернагана.

Треба сказати, що нелінійність у фізиці є звичайним явищем. Такі розділи фізики як небесна механіка, гідродинаміка, теорія гравітації та ряд інших є просто нелінійними по своїй суті. До певного часу в цих областях нелінійність сприймалася як деяка специфічна неприємність, як "своя" нелінійність в кожній області. Однак вже в сорокових роках нашого століття був усвідомлений так званий ізоморфізм закономірностей, коли фізичні явища, пов'язані з коливаннями, стали класифікуватися не по їх відношеннях до традиційних областей фізики, а по спільності закономірностей. Це було сформульовано Мандельштамом як принцип "коливної взаємодопо-

ги" у фізиці, як певний "інтернаціоналізм" нелінійної теорії коливань.

В 70-80-их роках були усвідомлені наукова актуальність і пріоритетність нелінійності в теорії фізичних полів та хвильових задачах оптики, фізики плазми, радіофізики, акустики. Мандельштамівський принцип почав чітко працювати в нелінійній теорії хвиль. Почалася тотальна "хвильова взаємодопомога" в фізиці.

Перші наукові публікації з вивчення взаємодії звукових хвиль в матеріалах відносяться до 60-их років. В першу чергу, це публікація З.Я.Гольдберга в "Акустическом журнале" 1960 року російською мовою та публікація Інгарда та Прідмора-Броуна в *J. Acoust. Soc. Amer.* 1956 року англійською мовою. Далі ці дослідження були продовжені як англійським науковим співтовариством, так і російськомовним науковим співтовариством. Основний внесок внесли московська акустична школа та англійська акустична школа.

Одним з висновків, які можна зробити при детальному знайомстві з теорією нелінійних звукових хвиль, є відсутність досліджень таких хвиль в твердих тілах (матеріалах) з внутрішньою мікроструктурою, до яких, зокрема, відносяться композитні матеріали. Неперервні нелінійні хвилі в твердих тілах (механічні хвилі в матеріалах) взагалі значно менше досліджені порівняно з нелійними хвилями, які вивчаються в інших розділах фізики. Пояснити таке становище можна двома особливостями, з яких одна має дещо загальний характер, а друга стосується лише композитних матеріалів.

Перша особливість пов'язана зі складністю систем рівнянь нелінійної теорії деформування матеріалів і взаємозв'язаністю поздовжніх і поперечних хвиль. Взаємодія поздовжніх та поперечних хвиль ускладнює загальну хвильову картину додатково до тієї складності, яку створює врахування нелінійності деформування матеріалу. Це видно хоча б з того, що класична нелінійна абстрактна теорія пружності даліше побудови акустичних тензорів Адамара не пішла. Введення додаткових параметрів до моделі призводить до суттєвої зміни в базових системах рівнянь, збільшує кількість хвиль і не заохочує до досліджень взаємодії нелінійних хвиль в ускладнених моделях деформування матеріалів. Друга особливість полягає в тому, що хвилі в композитних матеріалах здебільшого описуються за допомогою мікроструктурних теорій другого порядку. Це звичайно лінійні теорії і математично вони зводяться до більш складних рівнянь, ніж класичні рівняння теорії пружності. Тобто, в композитних матеріалах завжди проявляється та згадувана вище загальна особливість. Як правило, хвильовий рух в таких теоріях вже не описується класичним хвильовим рівнянням.

Узагальнення мікροструктурних теорій на випадок фізичної та геометричної нелінійності ще більш ускладнює системи рівнянь, які описують хвильовий рух. Таким чином, були створені певні об'єктивні причини, які не спонукали до вивчення нелінійних хвиль в композитних матеріалах.

В дев'яностих роках з'явилися роботи Єрофеева В.І., Потапова О.І., Рущицького Я.Я., в яких були зроблені перші спроби проаналізувати найпростіші випадки взаємодії хвиль для деяких добре вивчених моделей матеріалів з внутрішньою мікροструктурою.

Ці роботи підтвердили, що теорія нелінійних гармонічних хвиль в матеріалах не є достатньо дослідженою. Отже, задача про гармонічні нелінійні хвилі в композитних матеріалах є актуальною з точки зору подальшого розвитку теорії гармонічних неперервних хвиль в матеріалах. Хвилі в нелінійних середовищах з внутрішньою мікροструктурою раніше вченими-механіками не розглядалися.

За мету в дисертаційній роботі було вибрано вивчення еволюції плоских гармонічних хвиль в багатофазних середовищах (матеріалах), які при деформуванні проявляють нелінійно пружні властивості.

Основний механічний ефект, який вивчається, полягає в еволюції хвилі та спотворенні початкового профіля хвилі внаслідок цієї еволюції. Механізм еволюції створюється нелінійностями, які в двофазних матеріалах мають два походження - нелінійність процесу деформування фаз та дисперсійна нелінійність, породжена мікροструктурою.

Поставлена мета включала постановку задачі про взаємодію гармонічних хвиль в двофазних матеріалах, яка в дисертації реалізувалася в постановку шести різних задач, три перших з яких є стандартними в класичній нелінійній акустиці.

Далі ставилася мета про отримання аналітичних розв'язків для кожної задачі та фізичного коментування отриманих розв'язків, яке найчастіше полягало у вивченні еволюції поздовжніх та поперечних хвиль аж до такого спотворення профіля гармонічної хвилі, коли він стає пілоподібним і хвиля перекидається. Передбачувалося, що отримана хвильова картина буде достатньо складною порівняно з класичною і тому планувався числовий аналіз (математичне моделювання) на комп'ютері еволюції хвилі.

Наукова новизна і значущість результатів роботи полягають в тому, що вперше: вивчена взаємодія і еволюція гармонічних плоских хвиль в пружно нелінійних матеріалах з чітко вираженою мікροструктурою; проведений теоретичний аналіз ряду стандартних та нестандартних задач про взаємодію хвиль, що поширюються в твердих двофазних сумішах; отримані нові розв'язки

рівнянь поширення поздовжніх та поперечних хвиль в твердих двофазних сумішах; теоретично та чисельно за допомогою комп'ютера проаналізовано еволюцію плоских гармонічних хвиль в композитних матеріалах; виявлено нові форми слотворення пружних гармонічних хвиль внаслідок взаємодії різних мод поздовжніх та поперечних хвиль; теоретично передбачено деякі нові хвильові ефекти.

Достовірність одержаних в дисертації результатів та висновків забезпечується коректністю постановок задач; обґрунтованістю використовуваного математичного апарату; зіставленнями з відповідними класичними задачами нелінійної акустики матеріалів та тестовими комп'ютерними задачами; погодженістю результатів між собою і несуперечливістю встановлених закономірностей з загальними міркуваннями фізичної природи.

Теоретичне значення та практична цінність одержаних в роботі результатів полягають:

- у розвитку теорії гармонічних хвиль, які поширюються в двофазних матеріалах, а саме в теоретичному та комп'ютерному аналізі еволюції та слотворення гармонічних хвиль в двофазних матеріалах в рамках нелінійної теорії суміші;
- в знаходженні нових розв'язків рівнянь хвильового руху;
- в знаходженні нових тривимірних форм графічного представлення еволюції хвиль;
- у виявленні механізму самогенерації поперечних хвиль.

Реалізація та впровадження результатів, отриманих в дисертації. Наукові дослідження виконувалися в рамках робіт, передбачених програмами та планами НДР НАН України. Результати дисертаційної роботи увійшли до звіту теми фундаментальних робіт №1/227 "Розробка тривимірних структурних моделей механіки композитів".

Апробація роботи. Основні результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на семінарах відділу динаміки поліагрегатних середовищ Інституту механіки НАН України (1995-1996); науковому семінарі за напрямком "Теорія коливань" при Інституті механіки НАН України (1997); науковому семінарі з теорії нелінійних хвиль при Інституті гідромеханіки НАН України (1997); 4-й та 5-й міжнародних наукових конференціях з математики пам'яті академіка М.Кравчука (1995, 1996); 2-й Всеукраїнській конференції молодих вчених (1995). Важливі результати з дисертації доповідалися на міжнародному науковому колоквиумі "Нелинейная динамика твердых тел с микроструктурой" (1995), 31-й Польській конференції з механіки SolMech96 (1996), 16-ому міжнародному симпозиумі "Vibrations in Physical Systems" (1996).

Особистий внесок дисертантки полягає в отриманні нових розв'язків рівнянь хвильового руху в двофазних середовищах, в теоретичному та комп'ютерному аналізі еволюції поздовжніх і поперечних плоских гармонічних хвиль.

Публікації. По результатах дисертації опубліковано 5 наукових праць. Основний зміст роботи відображено в публікаціях [1-5]. В працях, написаних з науковим керівником, проф. Рушицькому Я.Я. належить ідея досліджень, загальна постановка задач та вибір методів аналізу. Ст. наук. співр. канд.фіз.-мат.наук Коваленку А.П. належить вибір способів комп'ютерного моделювання. Співавторам також належить участь в обговоренні та аналізі результатів.

Структура роботи. Дисертаційна робота складається з чотирьох глав, висновків та списку літератури. Робота викладена на 140 сторінках, включаючи п'ять таблиць та 26 рисунків. Бібліографічний список налічує 136 назв.

КОРОТКИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

В першій главі (вступі) подано огляд сучасного стану проблеми гармонічних нелінійних хвиль в твердих тілах взагалі і в твердих тілах з мікроструктурою зокрема, описане місце даної роботи серед проведених раніше досліджень, сформульована мета роботи, обгрунтовано новизну та актуальність результатів, теоретичне значення і практичну цінність роботи, а також коротко викладені основні результати і обгрунтована їх достовірність. Сформульовані положення, що виносяться на захист. Стисло викладений зміст глав.

Друга глава містить необхідні факти з класичної нелінійної теорії пружності та лінійної теорії твердих сумішей. Спочатку викладаються базові поняття з класичної механіки суцільного середовища, де спеціально обговорюються композитні матеріали, для яких сам матеріальний континуум вводиться по-своєму. Далі послідовно описуються ті положення з класичної нелінійної теорії пружності, які стосуються гіперпружних середовищ. Нагадаємо, що поняття "гіперпружний" ввів Трусделл для позначення таких середовищ, для яких існує потенціал накопиченої енергії. Детально викладається необхідна в подальшому класична квадратично нелінійна теорія, основана на потенціалі Мернагана. Цей потенціал означає нелінійно пружний ізотропний матеріал, який характеризується двома пружними постійними другого порядку λ, μ (постійними Ляме) та трьома пружними постійними третього порядку A, B, C (постійними Мернагана). Записуються

рівняння нелінійної акустики, для чого вводяться тензор напружень Пюлі-Кірхгофа I_{nm} та створюючий з ним пару градієнт деформацій, і описується проблема взаємодії гармонічних акустичних хвиль. Особлива увага приділена трьом стандартним задачам нелінійної акустики про взаємодію поздовжніх та поперечних хвиль з однаковою частотою. Наприклад, постановка першої з них полягає в тому, що на вході в середовище задається тільки поздовжня хвиля. В термінах механіки це означає, що на границі пів площини $x=0$ задається коливання в поздовжньому напрямку з заданою частотою ω . Другий параграф цієї глави присвячений лінійній теорії двофазної суміші, яка трактується як мікροструктурна теорія композитних матеріалів. Викладаються основні положення теорії і аналізуються хвилі в сумішах. Суміш є дисперсивним середовищем і тому гармонічні хвилі в суміші дисперсивні. Особлива увага приділена плоским хвилям, поширення їх описується трьома невазв'язаними системами рівнянь

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha\alpha} \frac{\partial^2 u_1^{(\alpha)}}{\partial t^2} - (\lambda_{\alpha} + 2\mu_{\alpha}) \frac{\partial^2 u_1^{(\alpha)}}{\partial x_k^2} - \\ - (\lambda_3 + 2\mu_3) \frac{\partial^2 u_1^{(\delta)}}{\partial x_k^2} - \beta(u_1^{(\alpha)} - u_1^{(\delta)}) = 0 \\ \rho_{\alpha\alpha} \frac{\partial^2 u_m^{(\alpha)}}{\partial t^2} - \mu_{\alpha} \frac{\partial^2 u_m^{(\alpha)}}{\partial x_k^2} - \mu_3 \frac{\partial^2 u_m^{(\delta)}}{\partial x_k^2} - \beta(u_m^{(\alpha)} - u_m^{(\delta)}) = 0 \quad (m = 2, 3) \end{aligned} \quad (1)$$

Лінійно пружна двофазна суміш описується 9 фізичними сталими. Системи (1) описують незалежне поширення трьох видів хвиль - поздовжньої (P-хвилі), поперечної горизонтальної (SH-хвилі) і поперечної вертикальної (SV-хвилі). Розв'язки системи (1) мають вигляд суперпозиції двох гармонічних хвиль

$$u_m^{(\alpha)}(x_1, t) = A_{\alpha m}^{(\alpha)} e^{-i(k_{\alpha}^{(m)} x - \omega t)} + I(k_{\delta}^{(m)}) A_{\alpha m}^{(\delta)} e^{-i(k_{\delta}^{(m)} x - \omega t)} \quad (2)$$

Особливості розв'язку (2) такі: 1) одночасно існують дві моди (оптична та акустична), які відрізняються хвильовими числами $k_{\alpha}^{(m)}$ (індекс α фіксує номер моди); 2) обидві моди являють собою суттєво дисперсивні хвилі, в яких за означенням частота є нелінійною функцією хвильового числа; 3) оптична мода фільтрується сумішшю, вона запирається для низьких частот, починаючи з певної частоти, яку називають частотою запирання (частотою відсікання); 4) в кожній фазі поширюються обидві моди зі своїми амплітудами, матриці розподілу амплітуд задаються залежними від частоти коефіцієнтами, чому зі зміною частоти енергія перепомповується з однієї моди до іншої моди.

В третій главі розглядаються описані в попередній главі стандартні задачі, але вже в рамках нової моделі двофазних сумішей. Спочатку описані особливості побудови нелінійної теорії двофазної суміші взагалі і квадратично нелінійної теорії зокрема. Записані основні факти з квадратично нелінійної теорії поширення плоских гармонічних хвиль, підкреслено прямий зв'язок цієї теорії з класичною теорією нелінійної акустики. Теорія оснований на узагальненні потенціалу Мернагана на випадок двофазних сумішей. Новий потенціал включає сім пружних постійних другого порядку $(\lambda_k, \mu_k, \beta)$ і сім пружних постійних третього порядку $(A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha, \beta')$. Він описує основні властивості нелінійного деформування і властивості деформування суміші як мікроструктурного середовища. Приведені і надалі використані при комп'ютерному моделюванні комплекти фізичних сталих для ряду реальних гранульованих гіперпружних композитних матеріалів. Поширення плоских хвиль описується такими взаємозв'язаними нелінійними системами рівнянь

$$\rho_{\alpha\alpha} \frac{\partial^2 u_1^{(\alpha)}}{\partial t^2} - (\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha) \frac{\partial^2 u_1^{(\alpha)}}{\partial x_k^2} - (\lambda_3 + 2\mu_3) \frac{\partial^2 u_1^{(\delta)}}{\partial x_k^2} - \beta(u_1^{(\alpha)} - u_1^{(\delta)}) =$$

$$= N_1^{(\alpha)} \frac{\partial^2 u_1^{(\alpha)}}{\partial x_1^2} \frac{\partial u_1^{(\alpha)}}{\partial x_1} + N_2^{(\alpha)} \left(\frac{\partial^2 u_2^{(\alpha)}}{\partial x_1^2} \frac{\partial u_2^{(\alpha)}}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u_3^{(\alpha)}}{\partial x_1^2} \frac{\partial u_3^{(\alpha)}}{\partial x_1} \right); \quad (3)$$

$$\rho_{\alpha\alpha} \frac{\partial^2 u_m^{(\alpha)}}{\partial t^2} - \mu_\alpha \frac{\partial^2 u_m^{(\alpha)}}{\partial x_k^2} - \mu_3 \frac{\partial^2 u_m^{(\delta)}}{\partial x_k^2} - \beta(u_m^{(\alpha)} - u_m^{(\delta)}) =$$

$$= N_2^{(\alpha)} \left(\frac{\partial^2 u_m^{(\alpha)}}{\partial x_1^2} \frac{\partial u_1^{(\alpha)}}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u_1^{(\alpha)}}{\partial x_1^2} \frac{\partial u_m^{(\alpha)}}{\partial x_1} \right); \quad (m = 2, 3), \quad (4)$$

$$N_1^{(\alpha)} = 3(\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha) + 2(A_\alpha + 3B_\alpha + C_\alpha), \quad N_2^{(\alpha)} = \mu_\alpha + \frac{1}{2}A_\alpha + B_\alpha.$$

Отримана система рівнянь (3),(4) є основою для вивчення взаємодії плоских хвиль в сумішах. Далі будуються розв'язки трьох стандартних задач для рівнянь (3), (4). Постановки класичні, неklasичною в цій постановці є сама суміш і факт дисперсійності та двомодовості хвиль в ній.

В першій стандартній задачі треба розв'язувати таку систему

$$\rho_{\alpha\alpha} \frac{\partial^2 u_1^{(\alpha)}}{\partial t^2} - (\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha) \frac{\partial^2 u_1^{(\alpha)}}{\partial x_1^2} - (\lambda_3 + 2\mu_3) \frac{\partial^2 u_1^{(\delta)}}{\partial x_1^2} -$$

$$- \beta(u_1^{(\alpha)} - u_1^{(\delta)}) = N_1^{(\alpha)} \frac{\partial^2 u_1^{(\alpha)}}{\partial x_1^2} \frac{\partial u_1^{(\alpha)}}{\partial x_1}.$$

Метод розв'язування полягає в введенні малого параметру і знаходженні розв'язку з точністю до квадратів цього параметру. Фізичний зміст пара-

метру впливає з його представлення $\varepsilon_\alpha = \frac{N_1^{(\alpha)} k_1^{(\alpha \gamma)}}{\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha} \max u_1^{(\alpha \gamma)}$, тобто

щоб він був малим, треба, щоб максимальна амплітуда хвилі була хоча б на порядок меншою від довжини хвилі. Отриманий розв'язок має вигляд

$$\begin{aligned}
 u_1^{(\alpha)}(x_1, t) = & C_1^{(\alpha)} e^{-i(k_\alpha^{*(1)} x - \omega t)} + l(k_\delta^{*(1)}) C_1^{(\delta)} e^{-i(k_\delta^{*(1)} x - \omega t)} + \\
 & + \left(\frac{x_1 \omega}{M_1} S_{\alpha \delta} l(k_\delta^{*(1)}) + i k_\delta^{*(1)} c_{\delta 2} \right) C_1^{(\delta)} u_{o1}^{(\delta)} e^{-2i(k_\alpha^{*(1)} x - \omega t)} + \\
 & + \frac{x_1 \omega}{M_1} S_{\alpha \alpha} C_1^{(\alpha)} e^{-2i(k_\alpha^{*(1)} x - \omega t)} + \left[\frac{x_1 \omega}{M_1} S_{\delta \alpha} C_1^{(\alpha)} u_{o1}^{(\delta)} + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{x_1 \omega}{M_1} S_{\alpha \delta} l(k_\delta^{*(1)}) + i k_\delta^{*(1)} c_{\delta 2} \right) C_1^{(\delta)} u_{o1}^{(\alpha)} \right] e^{-i[(k_\alpha^{*(1)} + k_\delta^{*(1)}) x - 2\omega t]}
 \end{aligned} \quad (6)$$

Перші та другі складові в формулі (6) являють собою майже розв'язок лінійного наближення, тобто це дві гармонічні хвилі (дві моди) з відмінними хвильовими числами і іншими властивостями, відомими з лінійної теорії. Треті та четверті складові описують гармонічне коливання за другою гармонікою відповідно першої та другої мод. Ці другі гармоніки генеруються модами при їх взаємодії. Нарешті, п'яті складові описують зовсім нову поперечну хвилю, яка виникає при взаємодії двох різних мод і раніше не вивчалася. Нова хвиля є складною хвилею (модульованою хвилею), описує просторову модуляцію і просторові биття з частотою биття $2(k_1^{*(1)} - k_2^{*(1)})$, яка залежить тільки від параметрів лінійної задачі.

У другій стандартній задачі на вході до середовища задані лише поперечні вертикальні коливання і вважається, що поперечні горизонтальні зміщення відсутні. Тоді у другому наближенні необхідно розв'язувати такі системи

$$\begin{aligned}
 \rho_{\alpha\alpha} \frac{\partial^2 u_1^{*(\alpha)}}{\partial t^2} - (\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha) \frac{\partial^2 u_1^{*(\alpha)}}{\partial x_1^2} - (\lambda_3 + 2\mu_3) \frac{\partial^2 u_1^{*(\delta)}}{\partial x_1^2} - \\
 - \beta (u_1^{*(\alpha)} - u_1^{*(\delta)}) = N_2^{(\alpha)} \frac{\partial^2 u_3^{*(\alpha)}}{\partial x_1^2} \frac{\partial u_3^{*(\alpha)}}{\partial x_1};
 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\rho_{\alpha\alpha} \frac{\partial^2 u_3^{*(\alpha)}}{\partial t^2} - \mu_\alpha \frac{\partial^2 u_3^{*(\alpha)}}{\partial x_1^2} - \mu_3 \frac{\partial^2 u_3^{*(\delta)}}{\partial x_1^2} - \beta (u_3^{*(\alpha)} - u_3^{*(\delta)}) = 0 \quad (8)$$

Розв'язок системи (7) знаходиться звичайним методом, коли відома права частина. Вона відома, її треба вирахувати і тоді розв'язок знаходиться підбором подібних функцій і може бути представлений у вигляді суперпозиції п'яти хвиль

$$u_1^{(\alpha)}(x_1, t) = u_1^{(\alpha)} e^{-i[k_1^{(\alpha)} x_1 + \omega t]} + i(k_1^{(\delta)}) u_1^{(\delta)} e^{-i[k_1^{(\delta)} x_1 + \omega t]} + \quad (9) \\ + iS_{1\alpha} e^{-2i[k_3^{(\alpha)} x_1 + \omega t]} + iS_{2\alpha} e^{-2i[k_3^{(\delta)} x_1 + \omega t]} + iS_{3\alpha} e^{-i[(k_3^{(1)} + k_3^{(2)}) x_1 + \omega t]}$$

Дві перші хвилі в розв'язку (9) є майже розв'язками першого лінійного наближення. Це дійсно дві поздовжні гармонічні хвилі, що мають по дві моди зі всіма параметрами лінійних поздовжніх хвиль, за винятком амплітуд. Третя та четверта хвилі є фактично другими гармоніками для поперечних хвиль. У цьому випадку поздовжня хвиля не тільки генерується взагалі, тобто як перша гармоніка. Кожна поздовжня мода ще додатково генерує другі гармоніки поперечної хвилі. Так вона це робить при реалізації першого стандартного випадку збудження, але там генерується її власна друга гармоніка. Найбільш цікава п'ята хвиля. Ця нова складна хвиля є модульованою просторово хвилею. Вона представляє якраз новий, не фігуруючий в класичній акустиці, ефект - ефект взаємодії двох різних мод однієї і тієї ж хвилі. Цей ефект породжений суттю самої теорії суміші і саме їй тільки належить. Поява в амплітуді п'ятої хвилі множника x_1 теж є несподіваним, в класичній теорії складні хвилі такого множника не мають. Отже, мікроструктурне середовище може накопичувати нелінійні спотворення і у випадку відсутності звичайного синхронізму.

Третя стандартна задача ставиться так, що в середовищі одночасно збуджуються поздовжні і поперечні вертикальні хвилі. Хвильовий рух описує така нелінійна система, яка складається з двох взаємозв'язаних систем, кожна з яких в свою чергу є системою з двох взаємозв'язаних рівнянь

$$L_{1\alpha} u_1^{(\alpha)} + L_{13} u_1^{(\delta)} = L_{1\alpha}^{(n)} u_1^{(\alpha)} + L_{3\alpha}^{(n)} u_3^{(\alpha)} ; \quad (10)$$

$$L_{2\alpha} u_k^{(\alpha)} + L_{23} u_k^{(\delta)} = L_{3\alpha}^{(n)} (u_1^{(\alpha)} u_3^{(\alpha)}) \quad (11)$$

Розв'язок системи (10) має вигляд

$$u_1^{n\alpha(\alpha)}(x_1, t) = C_1^{(\alpha)} e^{-i[k_1^{(\alpha)} x_1 + \omega t]} + i_1(k_1^{n(\delta)}) C_1^{(\delta)} e^{-i[k_1^{(\delta)} x_1 + \omega t]} + \quad (12) \\ + \left(\frac{x_1 \omega}{M_1} S_{\alpha\delta} I(k_\delta^{n(1)}) + i k_\delta^{n(1)} c_{\delta 2} \right) C_1^{(\delta)} u_{o1}^{(\delta)} e^{-2i(k_\delta^{n(\delta)} x_1 - \omega t)} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{x_1 \omega}{M_1} S_{\alpha\alpha} C_1^{(\alpha)} e^{-2i(k_\alpha^{(*)} x - \omega t)} + \left[\frac{x_1 \omega}{M_1} S_{\delta\alpha} C_1^{(\alpha)} u_{o1}^{(\delta)} + \right. \\
& + \left. \left(\frac{x_1 \omega}{M_1} S_{\alpha\delta} I(k_\delta^{(*)}) + i k_\delta^{(*)} C_{\alpha\delta} \right) C_1^{(\delta)} u_{o1}^{(\alpha)} \right] e^{-i[(k_\alpha^{(*)} + k_\delta^{(*)}) x - 2\omega t]} + \\
& + Q_{1\alpha} e^{-i\left[\frac{k_1^{(1)} + 2k_3^{(1)}}{2} x_1 + 2\omega t\right]} + Q_{2\alpha} e^{-i\left[\frac{k_1^{(2)} + 2k_3^{(2)}}{2} x_1 + 2\omega t\right]} + Q_{3\alpha} e^{-i\left[\frac{k_1^{(1)} + k_3^{(1)} + k_3^{(2)}}{2} x_1 + 2\omega t\right]}
\end{aligned}$$

П'ять перших хвиль з (12) співпадають з точністю до амплітуд з розв'язком (6), який вже коментувався. Цікаві хвилі шоста, сьома та восьма, в яких проявилася взаємодія між модами. Ці хвилі і є тим новим елементом в розв'язку, в якому об'єдналися нелінійні та мікροструктурні ефекти. Складові з амплітудами Q_{α} являють собою поздовжні хвилі, які за частотою є другими гармоніками, але мають складні хвильові числа

$$\frac{1}{2}(k_1^{(\gamma)} - 2k_3^{(\gamma)}), \quad \frac{1}{2}(k_1^{(\alpha)} - k_3^{(1)} - k_3^{(2)}).$$

Розв'язок системи (11) у другому наближенні матиме вигляд

$$\begin{aligned}
u_3^{*(\alpha)}(x_1, t) = & A_3^{(\alpha)} e^{-i[k_3^{*(\alpha)} x_1 + \omega t]} + l_3(k_3^{*(\delta)}) A_3^{(\delta)} e^{-i[k_3^{*(\delta)} x_1 + \omega t]} + \\
& + \left(\frac{x_1 \omega}{M_1} \tilde{S}_{1\alpha} l_3(k_3^{*(\alpha)}) + i k_3^{*(\alpha)} \tilde{c}_{1\alpha} \right) A_3^{(\alpha)} u_{o3}^{(\alpha)} e^{-i[(k_1^{*(\alpha)} + k_3^{*(\alpha)}) x - 2\omega t]} + \\
& + \frac{x_1 \omega}{M_1} \tilde{S}_{1\alpha} A_3^{(\alpha)} u_{o3}^{(\alpha)} e^{-i[(k_1^{*(\alpha)} + k_3^{*(\alpha)}) x - 2\omega t]} + \\
& + \left(\frac{x_1 \omega}{M_1} \tilde{S}_{2\delta} l_3(k_3^{*(\delta)}) + i k_3^{*(\delta)} \tilde{c}_{2\delta} \right) A_3^{(\delta)} u_{o3}^{(\delta)} e^{-i[(k_1^{*(\delta)} + k_3^{*(\delta)}) x - 2\omega t]} + \\
& + \frac{x_1 \omega}{M_1} \tilde{S}_{2\delta} A_3^{(\delta)} u_{o3}^{(\delta)} e^{-i[(k_1^{*(\delta)} + k_3^{*(\delta)}) x - 2\omega t]} \quad (13)
\end{aligned}$$

Отже, розв'язок (13) складається з шести хвиль. Дві перші являють собою звичайне двомодове представлення поперечної хвилі в двофазній суміші. Решта є другими гармоніками за частотою з хвильовими числами, які являють собою лінійні комбінації хвильових чисел різних мод. Амплітуди цих складних хвиль зростають з пройденим шляхом. Ці складні хвилі не утворюють з лінійними хвилями просторово модульовані хвилі.

В четвертій главі викладені результати дослідження кількох вестанда-

ртних задач. Перші дві задачі є нестандартними у тому розумінні, що до вивчення взаємодії поздовжніх хвиль як для випадку класичного акустичного середовища, так і двофазної суміші застосовується метод повільно змінних амплітуд, який раніше до таких задач не застосовувався. Третя задача розглядає у третьому наближенні самогенерацію поперечної хвилі. Фактично це теж дві задачі, оскільки третє наближення будується як для акустичного середовища, так і для двофазної твердої суміші.

Перший параграф присвячений еволюції плоскої хвилі в суміші. Записується і використовується загальна схема нелінійної фізики для визначення критичного моменту часу та критичної відстані при еволюції хвилі. За класичною схемою нелінійної акустики вивчена еволюція гармонічної хвилі, в побудові використане спеціальне представлення розв'язку, яке нагадує вигляд хвилі Ріманна і тому дозволяє застосувати загальну схему. Отримані формули для знаходження критичних значень часу та відстані.

Другий параграф містить результати аналізу спотворення плоскої хвилі методом повільно змінних амплітуд. Спочатку вивчається класичне акустичне середовище, будуються вкорочені та еволюційні рівняння. Конкретно вивчається взаємодія трьох хвиль. Отримані системи рівнянь є стандартними для всіх класичних середовищ, відрізняються лише змістом та записом позначень. Умови повного синхронізму трьох хвиль теж стандартні

$$\omega_3 - \omega_2 - \omega_1 = 0 \quad k_3 - k_2 - k_1 = 0 \quad (14)$$

При цих умовах дві взаємодіючі між собою хвилі породжують третю та перепомпують до неї свою енергію. Записані теж умови Менлі-Рова, закон збереження енергії трьох хвиль та прокоментовані фазові портрети. Далі отримані результати узагальнені на випадок значно більш складного середовища - двофазної суміші. Тут теж отримані вкорочені та еволюційні рівняння і вивчена взаємодія трьох хвиль. Однак суміш як середовище містить 6 варіантів вибору трьох хвиль. Детально вивчався варіант "перша мода + друга мода = друга мода". Основна особливість полягає в тому, що взаємодія в першій і другій фазах відбувається по-різному. Вкорочені та еволюційні рівняння в різних фазах відрізняються коефіцієнтами. Умова частотного синхронізму не змінюється, а просторового ускладнюється

$$k_1^{(2)}(\omega_3) - k_1^{(2)}(\omega_2) - k_1^{(1)}(\omega_1) = 0 \quad (15)$$

Як відомо, хвильові числа в суміші є функціями частоти. В суміші енергія буде перепомпуватися двома шляхами - переходом від однієї хвилі-учасниці до іншої в конкретному триплеті та переходом від однієї моди до іншої при зміні частоти, на якій збуджена мода. В суміші одна і та ж пер-

ша мода породжує другу гармоніку другої моди і притому в різних фазах амплітуда нової хвилі зростає неоднаково.

$$A_{1(2\omega)}^{(2)}(x_1) = x_1 \frac{I_1^{(2)}(2\omega)N_1^{(1)} + N_1^{(3)}}{(\lambda_3 + 2\mu_3) + (\lambda_2 + 2\mu_2)I_1^{(2)}(2\omega)} (k_1^{(1)}(\omega))^2 (A_{11}^{(1)})^2;$$

$$A_{2(2\omega)}^{(2)}(x_1) = x_1 \frac{I_1^{(2)}(2\omega)N_1^{(2)} + N_1^{(3)}}{(\lambda_2 + 2\mu_2) + (\lambda_3 + 2\mu_3)I_1^{(2)}(2\omega)} (k_1^{(1)}(\omega))^2 (A_{11}^{(1)})^2. \quad (16)$$

В цьому можна бачити новий ефект.

У третьому параграфі вивчається еволюція поперечної плоскої хвилі у третьому наближенні. Відомо, що згідно з другим наближенням поперечна хвиля не взаємодіє сама з собою і не породжує ніяких нових гармонік. Третє наближення дає такі розв'язки

$$u_1^{(3)}(x_1, t) = \frac{N_1(N_2)^2 \omega^2 (u_3^o)^4}{64\rho^3(k^2 - 1)^2 c_T^6 c_L^2} \sum_{n=1}^4 w_{1n}(x_1, t) + \frac{N_2 \omega (u_3^o)^2}{8\rho c_T c_L^2} w_{15}(x_1, t) \quad (17)$$

$$u_3^{(3)}(x_1, t) = \frac{(N_2)^2 \omega^2 (u_3^o)^3}{8\rho^2(k^2 - 1)^2 c_T^6} \sum_{n=1}^4 w_{3n}(x_1, t). \quad k = (c_L/c_T) > 1 \quad (18)$$

Вирази $w_{in}(x_1, t)$ являють собою типові складні хвилі, у яких відсутній фазовий синхронізм з заданою на вході поперечною хвилею. Наприклад,

$$w_{14}(x_1, t) = \sin k\omega t \cos [2kx_1 - (2+k)\omega t].$$

Практично всі складні хвилі модулюються лише з часом, тоді як друге наближення дає хвилі, модульовані в просторі. Також всі складні хвилі третього наближення поширюються на частотах, не кратних до основної частоти, а дробових у відношенні до неї.

Для оцінки еволюції поперечної хвилі проводилося комп'ютерне моделювання (вибиралися п'ять звичайних та шість композитних матеріалів). Отримані просторові комп'ютерні графіки дуже показові і свідчать про суттєву еволюцію поперечної хвилі. Однак різні матеріали по-різному трансформують початково задану хвилю. Деякі просто спотворюють початковий імпульс, а деякі повністю змінюють форму хвилі, фактично зберігаючи лише її подібність до гармонічної.

Врахування двофазності і відповідно дисперсивності не змінюють картину еволюції, вивчену у третьому наближенні для однофазного середовища. Воно лише збагачує цю картину тим, що в кожній фазі еволюція відбувається по-своєму і що появляються нові складні хвилі внаслідок взаємодії між

модами. Нові хвилі теж мають спостережені раніше властивості - модуляція з часом та некратність частот основній частоті.

Заключна частина (Висновки) містить в першій своїй частині розширене формулювання основних результатів, отриманих в дисертації. В другій частині систематизовані висновки, які випливають з аналізу результатів дисертації.

А. Таким чином, в поданій на захист дисертаційній роботі досліджені гармонічні плоскі хвилі, які поширюються в нелінійних багатофазних середовищах (композитних матеріалах). Такі нелінійні хвилі раніше не вивчалися і дисертація започатковує новий напрямок в дослідженні хвиль в матеріалах з мікроструктурою. Проведене дослідження включає:

1. Постановки традиційних для класичної нелінійної акустики задач (названих в дисертації стандартними) і нетрадиційних (названих нестандартними) про поширення гармонічних плоских хвиль в двофазних середовищах (композитних матеріалах).
2. Отримання аналітичних розв'язків поставлених задач теорії суміші і математичне моделювання на комп'ютері процесу еволюції гармонічних хвиль.
3. Теоретичне засвідчення нових хвильових ефектів, пов'язаних з взаємодією, перш за все, різних мод гармонічних хвиль.

В. Основні результати роботи такі:

1. Вивчена взаємодія гармонічних плоских хвиль при їх поширенні в двофазному середовищі; 2. Проведений теоретичний та числовий аналіз еволюції плоскої поперечної хвилі за класичною схемою нелінійної акустики в третьому наближенні і узагальнено цю задачу на випадок двофазної суміші; 3. Проведений теоретичний аналіз еволюції плоскої поздовжньої хвилі в двофазному середовищі і отримані формули для обчислення критичних значень часу та відстані; 4. Вивчені особливості взаємодії гармонічних хвиль в трьох стандартних задачах, де звернено основну увагу на взаємодію різних мод і отримано аналітичні вирази для нових хвиль, що виникають внаслідок такої взаємодії; 5. Застосований метод повільно змінних амплітуд з метою вивчення еволюції поздовжньої хвилі як у наближенні нелінійної акустики, так і в наближенні нелінійної суміші; 6. Побудовані вкорочені, еволюційні рівняння та енергетичні співвідношення дали можливість проаналізувати перепомпування енергії між хвилями при їх взаємодії; 7. Для ряду задач зроблений комп'ютерний аналіз еволюції хвиль при їх взаємодії.

С. З отриманих результатів можна зробити такі висновки:

1. В двофазних нелінійних середовищах (сумішах) еволюція є явищем, яке супроводжує поширення кожної плоскої хвилі. Побудовані комп'ютерні тривимірні графіки для поперечних та поздовжніх хвиль свідчать, що для ряду композитів ця еволюція суттєва.

2. В стандартних задачах класичної нелінійної акустики про збудження тільки поздовжньої хвилі, чи тільки поперечної, чи обох разом еволюція гармонічної хвилі відбувається за рахунок двох механізмів: класичного механізму нелінійності деформування фаз суміші та дисперсійного механізму спричиненого врахуванням мікроструктури в моделі суміші.

3. В нестандартних задачах, до яких віднесені дві задачі (в кожній застосована класична модель лнійної акустики та модель нелінійно пружної суміші): про взаємодію поздовжніх хвиль та про еволюцію поперечної хвилі, еволюція теж є суттєвою. В перших двох задачах метод повільно змінних амплітуд дав можливість теоретично передбачити перепомпвання енергії внаслідок взаємодії хвиль, а в других двох взагалі вперше засвідчено еволюцію поперечної хвилі.

Основний зміст дисертаційної роботи викладено в таких працях:

1. Еволюция гармонической волны при ее прохождении через двухфазный материал // Прикл.механика.- 1992.- 28, №9.- С.13-21. (Співавтор Рушницький Я.Я.).
2. Анализ распространения гиперупругих волн с учетом третьего приближения //Тезисы докладов 4-й международной конференции памяти акад.П. Кравчука.-Киев: Нац. техн. универс. Украины "Киевский политех. институт", 1995.-С. 214.
3. К вопросу о взаимодействии волн в нелинейных гиперупругих материалах //Труды 2-й всеукраинской конференции молодых ученых.- Киев: Национальный университет Украины им.Т.Шевченко, 1995.- С.230-237.
4. Еволюція поперечної гармонічної хвилі в гіперпружних середовищах // Тезисы докладов 5-й международной конференции памяти акад.П. Кравчука.- Киев: Нац. техн. универс. Украины "Киевский политех. институт", 1996.- С. 379.
5. Самовозбуждение поперечных волн в гиперупругих материалах (третье приближение) // Прикл.механика.- 1996.- 32, №5.- С.30-38. (Співавтори Рушницький Я.Я., Коваленко А.П.).

Savelieva K.V. Evolution of plane waves in multi-phase media
Dissertation for the Candidate of Physical and Mathematical Sciences in Speciality 01.02.04 - mechanics of deformable solid, S.P.Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 1997.

Five papers containing results of theoretical and computer investigations of the interaction of harmonic plane waves, which propagate through elastic nonlinear multi-phase media (composite materials). Analytical solutions of 6 different problems are built. New wave effects which are generated both a deformations nonlinearity and dispersivity of media are studied. The special attention is given to new waves which are generated in mixtures as a result of the modes interaction.

Савельева Е.В. Эволюция плоских волн в многофазных средах.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 - механика деформируемого твердого тела, Институт механики им.С.П.Тимошенко Национальной академии наук Украины, Киев, 1997.

Защищается 5 научных работ, которые содержат результаты теоретических исследований и компьютерного моделирования взаимодействия плоских волн, распространяющихся в нелинейно упругих многофазных средах (композитных материалах). Построены аналитические решения шести разных задач. Изучены новые волновые эффекты, порожденные не только нелинейностью деформирования, но и дисперсивностью среды. Особое внимание уделено новым волнам, которые генерируются в смесях вследствие взаимодействия мод.

Ключові слова: плоска гармонічна хвиля, еволюція та спотворення хвилі, нелінійність деформування, композитний матеріал, мікроструктура, теорія суміші.

436025

Підп. до друку 25.08.87. Формат 60×84^{1/16}.
Папір друк. № 1. Спосіб друку офсетний. Умови. друк. арк. 0,93.
Умови. фарбо-відб. 1,04. Обл.-вид. арк. 1,0
Тираж 100. Зам. № 7-1023

Фірма «ВІПОЛ»
252151, Київ, вул. Волинська, 60.

436025

AB 37.395