Національна академія наук України
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача

На правах рукопису
УДК 539.3

ЗОЗУЛЯК
ЮРІЙ ДМИТРОВИЧ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ В ТЕРМОМЕХАНІЦІ ПРУЖНИХ ОБОЛОНОК З ВИКОРИСТАННЯМ ІТЕРАЦІЙНО-МОМЕНТНОГО ПІДХОДУ

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Львів–1997

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України

Науковий консультант — член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор *БУРАК Ярослав Йосипович*

Офіційні опоненти: академік НАН України, доктор технічних наук, професор *ГРИГОРЕНКО Ярослав Михайлович* (Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, м. Київ)

доктор фізико-математичних наук, професор *САВУЛА Ярема Григорович* (Львівський державний університет ім. Ів. Франка м. Львів)

доктор фізико-математичних наук, професор *ШАБЛІЙ Олег Миколайович* (Тернопільський державний технічний університет ім. Ів. Пулюя, м. Тернопіль)

Провідна організація — Дніпропетровський державний університет

Захист відбудеться "*26*" *травня* 1997 р. о *15* год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 04.17.01 в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України за адресою: 290601, м. Львів–53, вул. Наукова, 3 "б"

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України (м. Львів, вул. Наукова 3 б)

Відгук на автореферат просимо надсилати за адресою: 290601, м. Львів, вул. Наукова, 3 "б", ІППММ НАН України, вченому секретарю спеціалізованої ради Д 04.17.01

Автореферат розісланий "21" *квітня* 1997 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради
кандидат фізико-математичних наук П. Р. Шевчук

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми Створення сучасних інженерних конструкцій та приладів, які працюють в екстремальних умовах експлуатації, тісно пов'язане з розробкою теоретичних основ і методів удосконалення розрахункових моделей для кількісної оцінки і прогнозування параметрів їх міцності і надійності та цільової оптимізації. Так, для більш повного опису механічної поведінки термопружних систем та зміни їх властивостей в багатьох практично важливих випадках необхідно враховувати ефекти моментних напружень та високошвидкісного деформування. Стосовно тонкостінних елементів конструкцій важливою є також проблема побудови адекватних їм математичних моделей в двовимірній постановці.

Основи моментної теорії пружності були закладені Фойгтом і братами Коссера. Вагомий вклад в її розвиток внесли Э .Л. Аеро, Й. Еріксен, А. А. Ільюшин, В. Т. Койтер, Е. В. Кувшинський, В. А. Ломакін, Т. Л. Мартинович, Р. Д. Міндлін, Г. Н. Савін, С. Трусдел, Р. А. Тупін та інші вчені.

Проблеми високошвидкісного деформування, при якому аномально змінюються міцнісні характеристики матеріалу, досліджувалися в роботах Ю. С. Вороб'йова, С. С. Кохманюка, А. С. Кравчука, В. П. Майбороди, Г. С. Писаренка, А. П. Філіпова, Н. Н. Холіна, Є. Г. Янютіна та інших. Тут, в основному, використовувався емпіричний підхід до побудови реологічних співвідношень у вигляді відомих моделей Ільюшина, Максвела, Мальверна, Соколовського, Фойгта та відповідних модифікацій. Менше уваги приділяється в літературі отриманню таких зв'язків шляхом розширення фазового простору параметрів локального стану, зокрема, з одночасним врахуванням локально-градієнтних ефектів.

При дослідженні тонкостінних елементів конструкцій оболонкового типу вихідні співвідношення формулюються як двовимірні модельні наближення відповідних тривимірних крайових задач. Вагомий вклад в розробку уточнених моделей термопружних оболонок і математичних методів їх розрахунку зробили Н. І. Векуа, А. Т. Василенко, Я. М. Григоренко, В. А. Осадчук, В. І. Моссаковський, В. Н. Паймушин, Н. Д. Панкратова, Я. С. Підстригач, Я. Г. Савула, І. Ю. Хома, Ю. А. Чернуха та інші вчені. Одним з поширених методів побудови розрахункових моделей для термопружних оболонок є розклад в ряд шуканих величин за системою базисних функцій, або використання операторної форми їх подання. Такі підходи дозволяють забезпечити бажану точність розв"язків, але реалізація необхідної для цього відповідної кількості ітерацій може викликати додаткові технічні труднощі. Тому актуальною є задача побудови оптимальних базисних функцій розкладу, які забезпечували б задану точність розв'язку крайових задач механіки за найменшого числа послідовних наближень.

Згадані моделі є основою для математичної постановки відповідних задач оптимізації напружено-деформованого стану термопружних оболонок. Чільне місце в дослідженнях цього напрямку займають роботи С. І. Богомолова, Я. Й. Бурака, В. М. Вігака, Е. І. Григолюка, Н. В. Ділігенського, А. І. Егорова, Я. А. Леллепа, Ю. І. Няшина, Я. С. Підстригача, Г. В. Пляцка, Е. Я. Рапопорта, Ю. Г. Стояна, О. М. Шаблія та ін. Відзначимо, що при цьому за критерій оптимізації, як правило, приймаються інтегральні міри функцій мети, серед яких, зокрема, використовують енергетичні критерії та критерії оптимального наближення. Важливим є підвищення ефективності застосування інтегральних критеріїв для широкого класу задач, зокрема, у зв'язку з необхідністю створення і дальшого розвитку теоретичних основ і математичних методів оптимізації режимів і схем зміцнювальної термомеханічної обробки тонкостінних елементів конструкцій та перехідних режимів їх навантаження.

Актуальною є проблема дальшого розвитку модельного опису термопружних систем, з врахуванням ефектів локально-градієнтного і високошвидкісного деформування базуючись на загальних положеннях термодинаміки незворотніх процесів та отримання на цій основі в рамках єдиного підходу ефективних двовимірних апроксимацій для визначення і оптимізації напружено-деформованого стану тонкостінних елементів конструкцій.

Метою роботи є розвиток ітераційно-моментного підходу до побудови математичних моделей термопружності деформівних систем з метою врахування ефектів локально-градієнтного та високошвидкісного деформування; опрацювання методики встановлення базових співвідношень розрахункових моделей термопружних оболонок, які б найбільш адекватно відповідали тривимірній постановці; дальший розвиток загальних питань математичної постановки і методики ров"язування задач оптимізації напружено-деформованого стану з використанням інтегральних критеріїв якості; створення теоретичних основ побудови оптимальних режимів термомеханічного навантаження тонкостінних елементів конструкцій та їх застосування.

Наукова новизна. У роботі запропоновано ітераційно-моментний підхід до побудови узагальнених моделей термопружних систем, які враховують ефекти локально-градієнтного та високошвидкісного деформування. Побудовано вихідні співвідношення нелінійної теорії пружних оболонок з використанням подання шуканих функцій рядом Фур'є за тензорним базисом та запропоновано методику його оптимального вибору. Розроблено ітераційну схему побудови розв'язків для термопружних оболонок і пластин, яка забезпечує їх високу точність на малій базі наближень. Запропоновано варіанти формулювання інтегральних енергетичних критеріїв, які забезпечують розширення умов їх ефективного застосування при розв"язуванні екстремальних задач термопружності з метою забезпечення низьких рівнів напружень в тонкостінних елементах конструкцій. Запропоновано методику побудови оптимальних перехідних режимів періодичного в часі силового навантаження з метою суттєвого пониження динамічних ефектів. Сформульовано теоретичні основи раціонального вибору схем зварювання, які забезпечують оптимальний розподіл залишкових напружень при зварюванні оболонок і пластин.

Методика досліджень. В роботі використовуються методи механіки суцільного середовища, термодинаміки нерівноважних процесів, тензорного аналізу, варіаційного числення та динамічного програмування, інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа.

Вірогідність отриманих результатів забезпечується строгістю використання основних положень механіки деформівного твердого тіла та нерівноважної термодинаміки при узагальненні математичних моделей термомеханіки, формулюванні та розв'язуванні відповідних крайових задач математичної фізики та оптимального керування в системах з розподіленими параметрами; узгодженням в часткових випадках окремих моделей і результатів досліджень з відомими в літературі; апробацією запропонованих підходів на тестових задачах та порівнянням результатів з аналогічними, отриманими іншими методами; застосуванням прикладних результатів досліджень у виробничій практиці.

Теоретична і практична цінність. Теоретична цінність роботи полягає в розробці ітераційно-моментного підходу до побудови математичних моделей термопружних систем, в яких з єдиних позицій шляхом відповідного розширення фазового простору параметрів локальної ситуації описуються ефекти локально-градієнтного і високошвидкісного деформування. Розроблені варіаційно-моментний підхід та ітераційна методика побудови наближених розв'язків крайових задач термомеханіки з вибором відповідного базису розкладу забезпечують високу точність розв'язку на малій базі наближень. Одержані загальні результати можуть бути використані при розгляді споріднених крайових задач математичної фізики. Практична цінність роботи полягає в тому, що запропоновані математичні моделі термомеханіки є науковою основою кількісної оцінки параметрів міцності і надійності термопружних систем оболонкового типу в умовах інтенсивного силового навантаження і нагріву. Отримані результати досліджень можуть бути використані для оптимізації режимів і схем термомеханічної зміцнювальної обробки тонкостінних елементів конструкцій та перехідних режимів їх навантаження.

Теоретичні і практичні результати, які склали основу дисертації отримані здобувачем при виконанні держбюджетних тем Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, теми з програми фонду фундаментальних досліджень та двох проектів науково-технічної програми ДКНТ України, а також госпдоговірної тематики. За результатами прикладних досліджень, спільно з Інститутом електрозварювання ім. Є. О. Патона НАН України та галузевим інститутом Міннафтопрому розроблено два нормативних галузевих документи (РД 39-30-1119-84, РД 39-0147103-330- 86), впровадження яких у виробництво забезпечило значний економічний ефект.

Апробація роботи. Основні наукові результати роботи доповідались і обговорювались на 13-й, 14-й наукових нарадах по теплових напруженнях в елементах конструкцій (Канів, 1974, 1977), Всесоюзних конференціях: "Оптимізація конструкцій при динамічних навантаженнях" (Тарту, 1979), "Сучасні проблеми будівельної механіки і міцності літаючих апаратів" (Москва, 1983), "Міцність, жорсткість і технологічність виробів з композитних матеріалів" (Єреван, 1984), "Механіка неоднорідних структур" (Львів, 1983, 1987), "Керування в механічних системах" (Львів, 1988, Свердловськ, 1990), "Математичне моделювання технологічних процесів і обробка матеріалів тиском" (Перм, 1990, 1992); Всесоюзній конференції по теорії пластин і оболонок (Тбілісі, 1987), Всесоюзному з"їзді з теоретичної і прикладної механіки (Ташкент, 1986); Міжнародних конференціях: "Pipeline Inspection" (Москва, 1991), "Зварні конструкції" (Київ, 1990, 1995), "1-st Europe Solid Mechanics Conf." (Мюнхен, 1991), "1-й конференції українських інженерів-механіків" (Львів, 1993), "Матеріали для будівництва" (Дніпропетровськ, 1994), на 16-му симпозиумі "Vibration in Physical Systems" (Познань, 1994), 4-й конференції з механіки неоднорідних структур (Тернопіль, 1995), 3-й Польсько-Українській конференції "CAD w budowie maszyn:problemy wdrazania i nauczania" (Варшава, 1995), 4-й міжнародній нараді-семінарі "Інженерно-фізичні проблеми нової техніки" (Москва, 1996) та інших конференціях.

Дисертаційна робота в цілому обговорювалась на семінарах: "Проблеми механіки деформівного твердого тіла" Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України під керівництвом чл.-кор. НАН України Г. С. Кіта, "Будівельна механіка оболонкових систем" Інституту механіки імені С. П. Тимошенка НАН України під керівництвом акад. НАН України Я. М. Григоренка, "Математичне моделювання і механіка деформівного твердого тіла" Тернопільського державного технічного університету ім. Ів. Пулюя під керівництвом проф. О. М. Шаблія, "Числові методи в прикладній математиці" Львівського держуніверситету ім. Ів. Франка під керівництвом проф. Я. Г. Савули, "Комп'ютерні проблеми механіки" Дніпропетровського держуніверситету під керівництвом акад. НАН України В. І. Моссаковського.

Публікації. За результатами роботи опубліковано 67 наукових праць, в тому числі 1 монографія (в співавторстві) та одержано 5 авторських свідоцтв. Основні результати викладено в 37 публікаціях.

Особистий внесок автора. Основні результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно. Науковому консультанту належить ідея використання оптимальних функцій розкладу для неоднорідних крайових задач та подання потоку енергії адитивними градієнтними характеристиками напружено-деформованого стану. У спільній монографії здобувачем написано вступ і 5-й розділ, у препринті — вступ, §§ 4.1, 4.2. В інших спільних публікаціях здобувачу належать постановки задач, участь в розробці методів дослідження, а також аналіз одержаних результатів.

На захист виноситься:

— Ітераційно-моментний підхід і побудова математичних моделей термопружних систем, які враховують ефекти локально-градієнтного деформування;

— методика побудови математичних моделей термомеханіки пружних оболонок за варіаційно-моментним підходом та з використанням методу розкладу за тензорними функціями;

— математична постановка та методика розв'язування задач оптимізації з використанням узагальнених енергетичних критеріїв; оптимальні за напруженнями режими періодичного в часі силового навантаження оболонок обертання;

— побудовані розв'язки конкретних задач оптимізації для циліндричних оболонок і пластин, результати числових досліджень та виявлені закономірності;

— розроблені теоретичні основи оптимізації теплових режимів і схем зварювання навантажених трубопроводів, які впроваджені у виробництво.

Структура роботи. Дисертаційна робота, загальним обсягом 297 стор., складається зі вступу, шести розділів, висновків, списку літератури, що охоплює 249 назв та додатку, з копіями окремих актів про використання наукових розробок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі дається короткий огляд праць близьких за тематикою до дисертаційної роботи, обгрунтовується актуальність проблеми, що досліджується, сформульовано мету роботи, відзначено її новизну, наукове та практичне значення. Стисло наведено основні результати, одержані в дисертації та положення, що виносяться на захист.

Перший розділ присвячений побудові нелінійних моделей для термопружних систем, які враховують ефекти локально-градієнтного і високошвидкісного деформування. Вихідним для побудови визначальних співвідношень є рівняння балансу повної енергії, яке формулюється за підходом Лагранжа. Таке рівняння, сформульоване відносно величин, нормованих за геометричними характеристиками фізично-малих підсистем в початковий момент часу, набуває вигляду

$$\frac{d}{d\tau}\int\limits_{X(\tau_o)} E_o dV_o = -\int\limits_{\partial X(\tau_o)} \vec{n}_o\cdot\vec{J}^o_E d\Sigma_o + \int\limits_{X(\tau_o)} w^o_E dV_o, \qquad (1.1)$$

де $\vec{J}^o_E = T\vec{J}^o_s + \vec{J}^o_A$; T — абсолютна температура; $\vec{J}^o_s$ — потік ентропії; $\vec{J}^o_A$ — потік механічної енергії; E_o — густина повної енергії; $\vec{\nabla}_o = \vec{\ni}^k_o\frac{\partial}{\partial\xi^k}$ — диференціальний оператор Гамільтона; $\vec{\ni}^k_o$ — контраваріантні базисні орти лагранжевої системи координат $\{\xi^k\}$, $k=\overline{1,3}$; w^o_E — густина потужності джерел енергії; $dV_o, d\Sigma_o$ — об'єм і площа фізично-малих областей; $X(\tau_o)$ — область евклідового простору з границею $\partial X(\tau_o)$, що відповідає довільній мислимо виділеній підсистемі в початковий момент часу $\tau=\tau_o$; $\vec{n}_o$ — зовнішня нормаль. Індекс "$_o$" в адитивних параметрах системи вказує на те, що вони нормовані за геометричними характеристиками фізично-малих підсистем в початковий моменту часу. Крапкою позначено операцію повного скалярного добутку.

Для термопружних систем потік механічної енергії в загальному випадку подається сумою адитивних складових

$$\vec{J}^o_A = -\hat{\sigma}_o \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} - \hat{\sigma}^{(i)}_o \cdot \frac{\partial (\hat{e}^{(i-1)}_o)^T}{\partial \tau} - \hat{P}^{(2)}_{oj} \cdot \frac{\partial \vec{v}_{j-1}}{\partial \tau} - \hat{P}^{(i)}_{oj} \cdot \frac{\partial (\hat{\varepsilon}^{(i-1)}_{oj})^T}{\partial \tau}, \quad (1.2)$$

в яких поруч з традиційними характеристиками (тензором напружень Піоли-Кірхгофа $\hat{\sigma}_o$ і вектором швидкості $\vec{v} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}$) ітераційним шляхом вводяться вищого порядку тензорні характеристики процесу деформування та інерційного руху, а також відповідні їм характеристики силової дії. Тут

$$\hat{e}^{(i)}_o = \vec{\nabla}^{(i-1)}_o \otimes \vec{u}; \quad \hat{\varepsilon}^{(i)}_{oj} = (\frac{\partial}{\partial \tau})^j \hat{e}^{(i)}_o; \quad \vec{v}_j = (\frac{\partial}{\partial \tau})^j \vec{v};$$

$$\vec{v}_o \equiv \vec{v}; \qquad (i = \overline{3, n}), \qquad (j = \overline{1, m});$$

$\vec{\nabla}^{(i-1)}_o$ — (i−1) — кратний діадний добуток операторів $\vec{\nabla}_o$; $\vec{u}$ — вектор переміщень; $\hat{P}^{(2)}_{oj}$ — тензорні характеристики внутрішніх сил, які характеризують динамічне деформування матеріалу; $\hat{P}^{(i)}_{oj}$ — імпульси, що відповідають градієнтному характеру деформаційного руху. Символом "$\otimes$" позначено операцію тензорного добутку. Індекси (i) та (i − 1) вказують на валентність тензорних функцій. Повторення індексів означає операцію підсумовування. Індексом (T) позначено транспоновані величини.

Задання потоку механічної енергії у вигляді (1.2) дозволяє встановити фазовий простір параметрів локальної ситуації, в якому базовими параметрами є, крім ентропії чи температури (в залежності від вибору потенціалу), вектор швидкості, тензори деформації і швидкості деформації та вищого порядку градієнтні і швидкісні характеристики цих тензорів.

За умов потенціального опису локальної ситуації для відповідним чином вибраної функції стану

$$L_o = L_o(s_o, \vec{v}, \hat{e}_o, \{\hat{e}^{(i)}_o\}, \hat{\varepsilon}_o, \{\hat{\varepsilon}^{(i)}_o\})$$

виділяються характерні варіанти математичних моделей, які спрямовані на врахування інерційності поступальної і деформаційної складових механічної форми руху. Дається конкретизація структури конститутивних рівнянь на випадок лінійних фізичних співвідношень для ізотропних матеріалів. Зокрема, для класичних моделей, в яких враховується тільки інерційність поступальної форми руху поруч з системою рівнянь термодинамічного стану отримано рівняння, яке є узагальненням рівняння балансу імпульсу в нелінійній теорії пружності

$$\vec{\mathcal{P}}_o(s_o, \vec{v}, \hat{e}_o) = \vec{\mathcal{P}}_{o(o)} + \int\limits_{\tau_o}^{\tau} (\vec{\nabla}_o \cdot \hat{\sigma}_o + \vec{f}_o) d\xi = -\frac{\partial L_o}{\partial \vec{v}}, \qquad (1.3)$$

де s_o — ентропія; $\vec{\mathcal{P}}_{o(o)}$ — початкове значення силового імпульсу; $\vec{f}_o$ — вектор густини масових сил.

Показано, що у частковому випадку при заданні силового імпульсу (1.3) лінійною залежністю від вектора швидкості ($\vec{\mathcal{P}}_o = \varrho_o \vec{v}$) отримуються класичні рівняння симетричної теорії пружності, а введена функція L_o є функцією Лагранжа.

Аналогічно будується система визначальних співвідношень для моделі, яка додатково враховує інерційність деформаційної форми руху. В частковому випадку (при $n = 2, m = 0$), для ізотропних матеріалів і лінійних фізичних співвідношень отримано реологічне співвідношення з таким оператором хвильового типу

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_o^{\Sigma} \equiv \hat{\sigma}_o - \tfrac{\partial \hat{P}_{o]}^{(2)}}{\partial \tau} = 2(G - G^* \tfrac{\partial^2}{\partial \tau^2}) \hat{e}_o + \\ + \Big[(K - 2/3G) - (K^* - 2/3G^*) \tfrac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Big] e \hat{I}. \end{aligned} \qquad (1.4)$$

Тут K, G, K^*, G^* — ізотермічні модулі стиску і зсуву та їх динамічні аналоги; e — перший інваріант тензора деформації; $\hat{I}$ — одиничний тензор. Для такої моделі побудовано розв'язок тестової задачі про поширення поздовжніх хвиль в умовах одновимірного напруженого стану.

В цьому розділі, з використанням ітераційного підходу, наведено також систему визначальних співвідношень для математичних моделей термопружних систем, в яких враховуються ефекти моментних напружень, а також розглянуто частковий випадок ($n = 3, m = 1$) спільного врахування ефектів інерційності і локальної градієнтності.

В останньому випадку потік повної енергії, згідно (1.1), (1.2), набуває вигляду

$$\vec{J}^o_E = T\vec{J}^o_s - \hat{\sigma}_o \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} - \hat{P}^{(2)}_{o1} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \tau} - \hat{\sigma}^{(3)}_o \cdot \frac{\partial \hat{e}^T_o}{\partial \tau} - \hat{P}^{(3)}_{o1} \cdot \frac{\partial \hat{\varepsilon}^T_o}{\partial \tau}. \quad (1.5)$$

При цьому загальна структура визначальних рівнянь моделі для потенціалу $F_o = L_o - Ts_o$ буде

$$s_o = -\frac{\partial F_o}{\partial T} \equiv s_o(T, \vec{v}, \hat{e}_o, \hat{\eta}_o),$$

$$\vec{\mathcal{P}}_{o(o)} + \int\limits_{\tau_o}^{\tau} [\vec{\nabla}_o \cdot (\hat{\sigma}_o - \frac{\partial \hat{P}^{(2)}_{o1}}{\partial \tau}) + \vec{f}_o] d\xi = -\frac{\partial F_o}{\partial \vec{v}} \equiv \vec{\mathcal{P}}^*_o(T, \vec{v}, \hat{e}_o, \hat{\eta}_o),$$

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla}_o \cdot (\hat{\sigma}^{(3)}_o - \tfrac{\partial \hat{P}^{(3)}_{o1}}{\partial \tau}) + \hat{\sigma}_o - \tfrac{\partial \hat{P}^{(2)}_{o1}}{\partial \tau} = \tfrac{\partial F_o}{\partial \hat{e}_o} \equiv \hat{\sigma}^*_o(T, \vec{v}, \hat{e}_o, \hat{\eta}_o), \\ &\hat{\sigma}^{(3)}_o - \tfrac{\partial \hat{P}^{(3)}_{o1}}{\partial \tau} = \tfrac{\partial F_o}{\partial \hat{\eta}_o} \equiv \hat{\sigma}^{(3)*}_o(T, \vec{v}, \hat{e}_o, \hat{\eta}_o), \quad \hat{\eta}_o = \vec{\nabla}_o \otimes \hat{e}_o. \end{aligned} \quad (1.6)$$

На основі рівнянь моделі (1.6) записано відповідні лінійні фізичні співвідношення для ізотропних матеріалів. Аналогічним чином конкретизуються залежності силових імпульсів $\vec{\mathcal{P}}^*_o, \hat{P}^{(2)}_{o1}, \hat{P}^{(3)}_{o1}$ які є характеристиками інерційності поступальної і деформаційної складової механічної форми руху, від характеристик руху $\vec{v}, \hat{\varepsilon}_o$, $\vec{\nabla}_o \otimes \hat{\varepsilon}_o$.

У другому розділі, виходячи з нелінійних співвідношень класичної теорії пружності побудована відповідна система рівнянь для пружних оболонок. Для отримання цих рівнянь шукані величини — вектор переміщень і вектор швидкості подаються у формі розкладу за тензорним базисом таким інваріантним наближенням

$$\vec{u}(\vec{R}_o + \vec{r}_{o\gamma}, \tau) = \hat{\Phi}^{(n-1)}(\vec{r}_{o\gamma}) \cdot \hat{u}^{(n)}(\vec{R}_o, \tau),$$

$$\vec{v}(\vec{R}_o + \vec{r}_{o\gamma}, \tau) = \hat{\Phi}^{(n-1)}(\vec{r}_{o\gamma}) \cdot \hat{v}^{(n)}(\vec{R}_o, \tau), \quad n = \overline{1, N}. \quad (2.1)$$

Тут $\vec{R}_o = \vec{R}_o(\xi^1, \xi^2, \tau_o)$ — радіус-вектор точок базової(серединної) поверхні в початковий момент момент часу; $\vec{r}_{o\gamma} = \gamma \vec{\ni}^o_\gamma$; $-h \leq \gamma \leq h$; $\vec{\ni}^o_\gamma$ — одиничний базисний орт в напрямку нормалі до серединної поверхні; ξ^1, ξ^2 — криволінійні координати точок серединної поверхні у початковій конфігурації; $2h$ — товщина оболонки. Вважається, що вектори $\vec{u}, \vec{R}_o, \vec{r}_{o\gamma}$ є безрозмірними, тобто нормовані за деяким характерним розміром, а час τ — нормований за характерним часом.

Якщо підставити вираз (2.1) у рівняння балансу енергії (1.1), що записується для елемента оболонки, який побудований для довільно виділеної області $\partial X_o^c(\tau_o)$ серединної (базової) поверхні, а також врахувати те, що $dV_o = (1 + k_1\gamma)(1 + k_2\gamma)d\gamma d\Sigma_o^c$, де k_1, k_2 — головні кривини серединної поверхні, $d\Sigma_o^c$ — площа малого елементу серединної поверхні, отримаємо таку диференціальну 1-форму

$$d\tilde{L}_o = -\hat{Q}_{o1}^{(n)} \cdot d(\hat{v}^{(n)})^T + \hat{Q}_{2\alpha}^{(n+1)} \cdot d(\hat{e}_\alpha^{(n+1)})^T + \hat{Q}_{2\gamma}^{(n+1)} \cdot d(\hat{e}_\gamma^{(n+1)})^T, \quad (2.2)$$

$$(\alpha = 1, 2)$$

Тут

$$\tilde{L}_o = \int_{-h}^{h} L_o(1 + k_1\gamma)(1 + k_2\gamma)d\gamma,$$

$$\hat{e}_\alpha^{(n+1)} = \frac{\partial \hat{u}^{(n)}}{\partial \xi^\alpha} \otimes \vec{\ni}_\alpha^o, \qquad \hat{e}_\gamma^{(n+1)} = \hat{u}^{(n)} \otimes \vec{\ni}_\gamma^o.$$

Осереднені тензорні характеристики силового імпульсу $\hat{Q}_{o1}^{(n)}$ і напруженого стану оболонки $\hat{Q}_{2\alpha}^{(n+1)}$, $\hat{Q}_{2\gamma}^{(n+1)}$, які можна трактувати як узагальнені сили і які є спряженими до базових параметрів (узагальнених координат) функції $\tilde{L}_o$, задаються формулами

$$\hat{Q}_{o1}^{(n)} = \int_{-h}^{h} (\vec{\mathcal{P}}_o \otimes \hat{\Phi}^{(n-1)})(1 + k_1\gamma)(1 + k_2\gamma)d\gamma,$$

$$\hat{Q}_{2\alpha}^{(n+1)} = \int_{-h}^{h} (\hat{\sigma}_o \otimes \hat{\Phi}^{(n-1)})(1 + k_1\gamma)(1 + k_2\gamma)d\gamma,$$

$$\hat{Q}_{2\gamma}^{(n+1)} = \int_{-h}^{h} (\hat{\sigma}_o \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(n-1)}}{\partial \gamma})(1 + k_1\gamma)(1 + k_2\gamma)d\gamma.$$

Приймалося, що узагальнені координати $\hat{v}^{(n)}, \{\hat{e}_\alpha^{(n+1)}\}, \hat{e}_\gamma^{(n+1)}$ є незалежними параметрами. За умов потенціального опису локальної ситуації отримано систему рівнянь локального стану та відповідну систему N тензорних рівнянь руху, яка в межах точності наближеного розв'язку відповідає рівнянню руху в тривимірній постановці задачі і дозволяє визначати напружено-деформований стан при вибраній системі базисних функцій та заданих граничних умовах через осереднені тензорні характеристики.

В роботі конкретизуються рівняння теорії оболонок для лінійної теорії пружності, коли функція параметрів локальної ситуації $\tilde{L}_o$ є функцією Лагранжа, а за базу розкладу у формулах (2.1) прийнято $\{\hat{r}_{o\gamma}^{(n)}\}$, тобто можна записати

$$\vec{u} = \vec{u}^{(1)} + \vec{r}_{o\gamma} \cdot \hat{u}^{(2)} + (\vec{r}_{o\gamma} \otimes \vec{r}_{o\gamma}) \cdot \hat{u}^{(3)} + \cdots + \underbrace{(\vec{r}_{o\gamma} \otimes \cdots \otimes \vec{r}_{o\gamma})}_{\text{N-1}} \cdot \hat{u}^{(N)}. \quad (2.3)$$

Аналізуються часткові випадки моделі. Зокрема, для першого наближення ($N = 1$) компоненти вектора переміщень $\vec{u} = \vec{u}^{(1)}$не залежать від координати γ, а система рівнянь руху (за відсутності масових сил) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_{o\alpha} \cdot \hat{Q}_{2\alpha}^{(2)} + \vec{\sigma}_{o\gamma}^{+}(1 + k_1 h)(1 + k_2 h) - \vec{\sigma}_{o\gamma}^{-}(1 - k_1 h)(1 - k_2 h) = \\ = 2h(1 - 1/3 k_1 k_2 h^2) \varrho_o \frac{\partial^2 \vec{u}^{(1)}}{\partial \tau^2}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

де $\vec{\nabla}_{o\alpha} = \vec{\ni}_o^\alpha \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}, (\alpha = 1, 2); \vec{\sigma}_{o\gamma}^{\pm} = \vec{\ni}_\gamma^o \cdot \hat{\sigma}_o^{\pm}$. Індексами "$\pm$" позначено граничні значення відповідних величин при $\gamma = \pm h$.

Записано відповідні рівняння руху для тонких оболонок ($k_\alpha \gamma \ll 1$) в декартовій системі координат відносно компонент тензора переміщень. В наближенні $N = 1$ такі рівняння відповідають безмоментній теорії оболонок. Поряд з цим необхідно відзначити, що вже в рамках цього наближення всі компоненти тензора напружень є, в загальному випадку, відмінними від нуля. Досліджено рівняння моделі для другого наближення ($N = 2$), за якого вектор переміщення $\vec{u} = (u, v, w)$ подається так

$$v = u_1 + u_{31}\gamma, v = u_2 + u_{32}\gamma, w = u_3 + u_{3\gamma}\gamma.$$

Відзначається, що ефективність запропонованих розрахункових моделей теорії пружних оболонок вагомо залежить від вдалого вибору базису розкладу.

Третій розділ присв'ячений математичній постановці задачі про побудову оптимального базису розкладу для забезпечення найбільш адекватного переходу від тривимірних крайових задач для термопружних систем до їх двовимірних аналогів на малій базі наближень. З цією метою пропонується узагальнення варіаційного підходу в задачах теплопровідності і термопружності оболонок і пластин при якому, на відміну від відомих в літературі прямих методів (Рітца, Бубнова-Гальоркіна та ін.), приймається, що не тільки коефіцієнти розкладу, але і базисні функції, за якими здійснюється розклад, піддаються варіюванню.

В основі цього підходу є процедура розділення шукани < величин за моментними характеристиками їх зміни по товщині оболонки. Моментні характеристики і коефіцієнти розкладу визначаються з умов екстремуму функціоналу, який відповідає вихідній крайовій задачі в тривимірній постановці.

Для задач теплопровідності в лінійній постановці пропонується два варіанти побудови такого функціоналу. В першому випадку він будується з використанням інтегруючого оператора згортки при умові, що за шукані величини приймається тільки температура

$$M[T] = \frac{1}{2}\int_o^{\tau_o}\int_o^{\tau}\Big[\int_{(V)}(\vec{\nabla}T\cdot\vec{\nabla}T^* + \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial u}T^*)dV + \\ + H_o\int_{\Sigma} T(T^* - 2T_c^*)d\Sigma\Big]d\bar{\tau}d\tau, \tag{3.1}$$

Екстремалі цього функціоналу визначаються з розв'язку такої крайової задачі

$$\Delta T - \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0, \quad (\alpha,\beta,\gamma)\in V, \quad \tau > 0, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} + H_o(T - T_c), \quad (\alpha,\beta,\gamma)\in \Sigma, \quad \tau > 0, \tag{3.3}$$

$$T|_{\tau=o} = 0$$

де $T = T(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$; $T^* = T(\alpha,\beta,\gamma,\tau-\bar\tau)$, Δ — оператор Лапласа; $\vec\nabla$ — оператор Гамільтона; a — коефіцієнт температуропровідності; H_o — відносний коефіцієнт тепловіддачі з поверхні (Σ), T_c — температура зовнішнього середовища; $\vec n$ — зовнішня нормаль до поверхні (Σ).

Для побудови двовимірного наближення крайової задачі (3.2), (3.3) температура подається у вигляді

$$T(\alpha,\beta,\gamma,\tau) = t_k(\alpha,\beta,\tau)\varphi_k(\gamma), \qquad (k=\overline{0,p}). \tag{3.4}$$

Після підстановки (3.4) у функціонал (3.1) з необхідної умови екстремуму одержуємо взаємозв'язану систему нелінійних рівнянь та граничні умови на функції розкладу φ_k та коефіцієнти цього розкладу — функції t_k.

В другому варіанті функціонал будується на множині допустимих функцій температури T і теплового потоку $\vec J$

$$M[\vec J,T] = \int\limits_o^{\tau_0}\int\limits_o^{\tau}\int\limits_{(V)}\left(\tfrac{1}{2\lambda}\vec J\cdot\vec J^* + \vec J\cdot\vec\nabla T^* - \tfrac{c_V}{2}\tfrac{\partial T}{\partial u}T^* + wT^*\right)dV\,d\bar\tau\,d\tau +$$
$$+ H_o\int\limits_o^{\tau_0}\int\limits_o^{\tau}\int\limits_{(\Sigma)} T\left(\tfrac{1}{2}T^* - T_c^*\right)d\Sigma\,d\bar\tau\,d\tau. \tag{3.5}$$

Тут $\vec J^* = \vec J(\alpha,\beta,\gamma,\tau-\bar\tau)$, λ — коефіцієнт теплопровідності, c_V — коефіцієнт теплоємності, w — густина потужності джерел тепла. Екстремалі цього функціоналу задовольняють співвідношення задачі теплопровідності, а саме, рівняння балансу тепла

$$\vec\nabla\cdot\vec J + c_V\frac{\partial T}{\partial\tau} - w = 0, \tag{3.6}$$

закон Фур'є

$$\vec J + \lambda\vec\nabla T = 0, \tag{3.7}$$

та крайові умови (3.3).

Подаючи базисні функції у вигляді

$$\vec J(\alpha,\beta,\gamma,\tau) = \vec J_m(\alpha,\beta,\tau)\varphi_m(\gamma), \quad T(\alpha,\beta,\gamma,\tau) = t_k(\alpha,\beta,\tau)\psi_k(\gamma),$$
$$\vec J_m = \int\limits_{-h}^{h}\vec J\gamma^m d\gamma, \qquad \int\limits_{-h}^{h}\gamma^k\psi_m(\gamma)d\gamma = \delta_k^m, \quad (k,m=\overline{0,p}), \tag{3.8}$$

одержано систему співвідношень для побудови наближеного розв'язку, який відповідає оптимальній зміні теплових характеристик за товщиною оболонки.

Аналогічний підхід застосовано для побудови оптимального базису розкладу для системи рівнянь динамічної термопружності оболонок постійної товщини. За вихідний функціонал береться функціонал типу Рейснера. Тут, для задовольнення початкових умов як на вектор переміщень $\vec{u}$, так і на вектор швидкості $\vec{v}$, необхідно скористатися інтегруючим оператором згортки.

Вектори напружень і переміщень зображаються через свої моментні характеристики такими формулами

$$\vec{\sigma}_1(\alpha,\beta,\gamma,\tau)=\vec{M}_k^1(\alpha,\beta,\tau)\varphi_k^1(\gamma);\ \vec{\sigma}_2(\alpha,\beta,\gamma,\tau)=\vec{M}_k^2(\alpha,\beta,\tau)\varphi_k^2(\gamma);$$
$$\vec{\sigma}_3(\alpha,\beta,\gamma,\tau)=\vec{M}_k^3(\alpha,\beta,\tau)\varphi_k^3(\gamma);\ \vec{u}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)=\vec{u}_m(\alpha,\beta,\tau)\psi_m(\gamma);$$

$$\vec{M}_k^i=\int_{-h}^{h}\gamma^k\vec{\sigma}_i d\gamma;\quad \int_{-h}^{h}\gamma^k\varphi_k(\gamma)d\gamma=\delta_m^k;\quad (k,m=\overline{0,N}),\quad i=\overline{1,3}.$$

Отримано наближену систему рівнянь і відповідні граничні умови, що складають повну систему співвідношень розрахункової моделі термопружності оболонок, яка відповідає екстремальній зміні моментних характеристик напружено-деформованого стану по товщині.

Розроблена методика ітераційної побудови наближених розв'язків, отриманих нелінійних систем рівнянь для тонких оболонок.

Апробація запропонованого підходу ілюструється на модельному прикладі нестаціонарної задачі теплопровідності для безмежної пластинки, яка поміщена в зовнішнє середовище постійної температури за умов конвективного теплообміну з її бокових поверхонь. Використовувалося два варіанти побудови наближених розв'язків, згідно з поданням їх у формі (3.4), (3.8). Числові експерименти показали, що точність розв'язку суттєво залежить як від ширини базису (параметра p), так і від вибору вихідної системи функцій φ_k^o, ψ_k^o для ітераційного процесу. Зазначимо також, що найкращий за наближенням результат отримується, коли за функції φ_k^o, ψ_k^o вибрано власні функції оператора вихідного рівняння. Показано, що з використанням множини базисних функцій для температури і теплового потоку, за одинакових інших умов, в першому наближенні отримується на 4% точніший результат, ніж при аналогічному поданню (3.4) тільки для температури.

В кінці розділу наведено розв'язок модельної стаціонарної задачі теплопровідності для кільцевої термочутливої пластини. Показано, що запропонований ітераційний підхід може забезпечити високу точність розв'язку на малій базі наближень, використовуючи при цьому оптимальні функції розкладу по немалому геометричному параметру (вздовж радіусу кільця пластинки).

У четвертому розділі дається математична постановка і методика побудови розв'язку задач про знаходження оптимальних за напруженнями режимів нагріву та силового навантаження термопружних оболонок обертання, які в границях заданих обмежень забезпечують низький рівень напружень. За вихідні співвідношення термопружності приймаються рівняння лінійної теорії оболонок на основі гіпотези Кірхгофа-Лява.

Обговорюєтся варіанти раціонального вибору функціональних критеріїв оптимізації напруженого стану термопружних систем. В загальному випадку за такий критерій оптимізації приймається функціональний критерій

$$K_o = \int\limits_{X(\tau_o)} W_o dV. \tag{4.1}$$

При порівнянні напружень за енергетичною нормою густиною локального критерію оптимізації є енергія пружної деформації.

В задачах оптимізації, з метою забезпечення напруженого стану близького до заданого, за критерій оптимізації приймається функціонал середньквадратичного відхилення

$$K_o = \int\limits_{o}^{\tau_1} \int\limits_{X(\tau_o)} (\hat{\sigma} - \hat{\sigma}^*) \cdot (\hat{\sigma} - \hat{\sigma}^*) dV d\tau. \tag{4.2}$$

Тут $\hat{\sigma}, \hat{\sigma}^*$ — тензори напружень базового розв'язку σ^* та шуканого $\hat{\sigma}$.

Запропоновано варіанти узагальнення енергетичнпх критеріїв (4.1), як шляхом введення моментних характеристик V_k локального критерію W_o.

$$K = \int\limits_{X(\tau_o)} W_o dV + \varphi_k V_k, \quad (k = \overline{o,n}), \tag{4.3}$$

так і за допомогою введення функції W_*, яка враховує локальний вплив зміни напруженого стану за координатами та часом

$$K_* = \int\limits_o^{\tau_1} \int\limits_{X(\tau_o)} [W_o + \varphi_* W_*(\vec{\nabla}\otimes\hat{\sigma}_o, \vec{\nabla}\cdot\hat{\sigma}_o, \frac{d\hat{\sigma}_o}{d\tau}; \vec{\nabla}\otimes\vec{\nabla}\otimes\hat{\sigma}_o, ...)] dV d\tau. \tag{4.4}$$

Тут φ_k, φ_* — вагові коефіцієнти відповідних критеріїв.

Задачі оптимізації розв'язуються методами варіаційного числення з використанням множників Лагранжа та сингулярних функціоналів, які дозволяють враховувати обмеження на локальні зміни допустимих функцій. Зокрема, з метою пониження рівня напружень в зонах градієнтного локального навантаження оболонок, оптимізація реалізується не по всій області оболонки, а лише на відповідних розрахункових підобластях. Показано, що екстремальні умови на границях цих підобластей відповідають умовам ненавантажених країв.

Ефективність запропонованих підходів ілюструється на двох модельних задачах про пониження рівня напружень при вузьких зонах локального нагріву циліндричних оболонок за рахунок силового навантаження, прикладеного за межами цих зон. У першій задачі вважається, що оболонка нагрівається локальним постійним за товщиною температурним полем, а в другій — додаткове пониження рівня напружень забезпечується як за рахунок локального силового навантаження, так і екстремальних перепадів температури за товщиною. Отримані результати числових досліджень показали, що в першій задачі для зон локального нагріву в межах від однієї четвертої до однієї восьмої радіусу оболонки має місце додаткове зниження рівня осьових напружень в зоні високих температур майже вдвічі, в порівнянні з рівнем напружень при оптимальному нагріві ненавантажених оболонок. Разом з тим, зростають кільцеві напруження в зоні низьких температур. У другому випадку за рахунок оптимального розподілу температури поля за товщиною вдається забезпечити додаткове зниження рівня осьових і кільцевих напружень у всій області їх визначення. При цьому інтенсивність силового навантаження є на 30–35% меншою, ніж при нагріві постійним за товщиною температурним полем.

Оцінка ефективності використання узагальнених енергетичних критеріїв з моментними характеристиками (4.3) проводилась на прикладі осесиметричної задачі оптимізації для циліндричної оболонки кінцевої довжини з вільними від навантаження краями, при заданих значеннях температури на краях $T(x_o) = T_o$, $T(-x_o) = 0$ і в центральному перетині оболонки $T(0) = T_{1o}$. Для таких умов нагріву в першому наближенні екстремальний розподіл температур описується формулою

$$T = T_o\left[k - \left(\frac{5}{4} - k\right)\frac{|x|}{x_o} + \left(\frac{1}{2} - k\right)\frac{x^2}{x_o^2} - \left(\frac{3}{4} - k\right)\frac{|x|^3}{x_o^3}\right], \quad k = \frac{T_{1o}}{T_o}.$$

Показано, що оптимальні розв'язки, побудовані з використанням інтегральних критеріїв (4.3), забезпечують нижчий рівень напружень в порівнянні з тими, які отримані без використання узагальнених енергетичних критеріїв ($\varphi_k = 0$).

Методику застосування градієнтних критеріїв проілюстровано на прикладі задачі про локальний нагрів довгої циліндричної оболонки при заданні додаткових обмежень на величину максимальних розтягуючих напружень на зовнішній поверхні оболонки. Числові дослідження показали, що застосування градієнтних критеріїв дозволяє одержати нижчий рівень напружень без зміни ширини зони локального нагріву в порівнянні з отриманими на основі мінімізації енергії пружної деформації ($\varphi_* = 0$).

В цьому розділі пропонується також методика визначення оптимального (попереднього) силового навантаження оболонок обертання з метою забезпечення низького рівня залишкових напружень (деформацій) при їх зварюванні. За критерій оптимізації в цьому випадку приймається функціонал енергії пружної деформації. З розв'язку задачі оптимізації отримано систему інтегральних обмежень на шуканий розподіл силового навантаження. Наведено тестові приклади для циліндричної оболонки на яких показано, що за рахунок раціонального попереднього силового навантаження вдається майже вдвічі понизити рівень залишкових напружень.

У п'ятому розділі сформульовано математичну постановку і наведено розв'язок задач про оптимізацію перехідних режимів періодичного в часі силового навантаження оболонок обертання. За функціональний критерій оптимальності приймається середньоквадратичне відхилення напруженого стану оболонок при перехідному режимі від напруженого стану, що відповідає квазіусталеному режиму коливань.

Вважається, що оболонка обертання перебуває під впливом квазіперіодичного в часі силового навантаження, що визначається заданою частотою ω та змінними в часі інтенсивностями $f_p = \{p_i, p_n, m_i\}$, $(i = 1, 2)$. Тут p_i, p_n, m_i — компоненти зовнішнього силового і моментного навантаження, які зумовлені нормальними і дотичними зусиллями на поверхнях $\gamma = \pm h$. Приймається, що на проміжку часу $0 \leq \tau \leq \tau_н$ величини p_i, p_n, m_i є шуканими функціями, як координат так і часу, а для $\tau > \tau_н$ — заданими функціями координат.

Вихідною системою рівнянь для визначення напружено-деформованого стану є динамічні рівняння моделі оболонки Кірхгофа-Лява. При цьому функції силового навантаження, які задаються у формі

$$f_p(\alpha, \beta, \tau) = f_p^{(1)}(\tau) f_p^{(2)}(\alpha, \beta) e^{i\omega\tau},$$

підпорядковані ізопериметричним за часом додатковим обмеженням "моментного" типу

$$\int\limits_{o}^{\tau_н} \int\limits_{(\Sigma_o)} \tau^m f_p d\Sigma d\tau = f_p^{(m)}, \quad (m = \overline{0, N}).$$

Задача оптимізації полягає в тому, щоб на протязі часу $(0, \tau_н]$ за допомогою функцій керування p_i, p_n, m_i забезпечити вихід на заданий режим силового навантаження, при якому напружений стан оболонки обертання був би оптимально близьким до напруженого стану, що відповідає квазіусталеному режиму коливань. Тут під квазіусталеним режимом силового навантаження на проміжку $(0, \tau_н]$ розуміється такий режим, при якому зміна в часі амплітуди силового навантаження є малою в межах періоду коливань.

Методика побудови оптимального розв'язку ілюструється на прикладі задачі для довгої циліндричної оболонки радіусу R і товщиною $2h$. Оболонка зі стану спокою (при $\tau = 0$) навантажується рівномірно розподіленим по поверхні нормальним силовим навантаженням інтенсивності $P_n = P_n^{(1)}(\tau)e^{i\omega\tau}$. Функція $P_n^{(1)}(\tau)$ на проміжку часу $(0, \tau_н]$ характеризує змінну в часі амплітуду силового навантаження при перехідному режимі і для $\tau > \tau_н$ досягає постійного значення P_{no}. Знайдено розподіл оптимального силового навантаження, яке за критерієм (4.2) забезпечує низький рівень динамічних ефектів при перехідному режимі. Проведені числові дослідження для конкретних параметрів оболонки і умов навантаження показали, що напруження на перехідному режимі навантаження $(0 < \tau < \tau_н)$ не перевершують за рівнем аналогічних на етапі усталеного навантаження. Функції керування в початковий і кінцевий момент перехідного режиму допускають стрибок і, за інтенсивністю в процесі виходу на усталений режим коливань можуть перевищувати заданий рівень при $\tau > \tau_н$. Побудову функцій керування в класі неперервних функцій на всьому проміжку часу $(0 < \tau < \infty)$ можна реалізувати за допомогою ізопериметричних умов (5.1).

Наведена вище схема оптимізації перехідних режимів силового навантаження оболонок обертання може бути використана при розв'язуванні спорідненого класу задач про коливання пружних тіл, що взаємодіють з акустичним середовищем. Методика розв'язування ілюструється на прикладі задачі побудови оптимального за напруженнями виходу на квазіусталений режим коливань пружного шару, який поміщений в акустичне середовище. Приймається, що в площині $z = z_o$, яка паралельна до поверхні шару $z = 0$, на протязі часу $0 < \tau \leq \tau_н$ діє зондуючий імпульс, потенціал якого може бути зображений у вигляді $q(\tau)\cos\omega\tau\delta(z - z_o)$. За критерій оптимізації приймається умова мінімуму функціоналу квадратичного відхилення напружень на границі $z = 0$ для динамічного і квазіусталеного режимів при таких обмеженнях на функцію керування

$$\int\limits_{o}^{\tau_н} q(\tau)d\tau = q_o, \qquad q(0) = q_1.$$

Відзначимо, що при побудові розрахункової моделі було використано методику Я.С.Підстригача, яка дозволила контактну задачу для системи пружний шар-акустичне середовище звести до крайової задачі для шару з узагальненими граничними умовами.

В кінці розділу пропонується методика оптимізації заданої тривалості зондуючого імпульсу в системі пружний шар-акустичне середовище з метою забезпечення максимальної енергії exo-сигналу. Розв'язок задачі побудовано з використанням функціоналу оптимального наближення і досліджено для випадку плоского нормального до поверхні зондуючого імпульсу. За критерій оптимізації в даному випадку приймалась умова мінімуму різниці енергій падаючої і відбитої хвиль на границі акустичне середовище-пружний шар при заданому обмеженні на сумарну величину тиску падаючої хвилі.

Шостий розділ присв'ячений використанню запропонованих вище підходів до постановки і методики розв'язування конкретних модельних задач розрахунку і оптимізації теплових режимів і схем зварювання елементів тонкостінних конструкцій стосовно до науково-технічної проблеми ремонту трубопроводів під тиском.

В інженерній практиці при ремонті трубопроводів, зокрема, нафтопроводів високого тиску, виникає необхідність відновлення несучої здатності стінки труби шляхом заварювання окремих ненаскрізних локальних дефектів, або шляхом приварювання накладних елементів у вигляді латок, муфт, трійникових з'єднань. В цьому зв'язку при розробці розрахункових схем першочерговим завданням є встановлення допустимих теплових режимів електрозварювання в залежності від геометричних параметрів локального дефекту, величини тиску в трубопроводі, характеристик матеріалу, з якого він виготовлений та його діаметру. Для ефективного використання накладних елементів важливим є питання про встановлення оптимальних розмірів таких елементів, режимів і схем приварювання їх до трубопроводу.

Запропоновано математична модель розрахунку раціональної послідовності накладання ділянок зварного шва (схем зварювання) тонкостінних оболонок з метою оптимізації залишкового напруженого стану. При цьому, враховується, що залишкові деформації,які виникають в межах кожної завареної на даному етапі ділянки зумовлені як явищами усадки в процесі охолодження, так і впливом непружних деформацій, які виникли в зоні зварного з'єднання на попередніх етапах зварювання.

В розрахунковій моделі приймається припущення про те, що в межах кожної ділянки зварний шов накладається практично одночасно. Тому залишкова деформація в межах ділянки заварювання вважається однорідною.

Отримано рекурентне співвідношення для визначення залишкових деформацій при заданій схемі зварювання

$$
\begin{aligned}
e_{ij}^{o(k)} &= e_{ij}^{o(k-1)} + (e_{oij}^{o} + e_{ij}^{e(k-1)})S(L_k), \\
e_{ij}^{o(o)} &= 0, \quad e_{ij}^{e(o)} = 0, \quad e_{ij}^{o(n)} = e_{ij}^{o}(X).
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

Тут $e_{ij}^{o(k)}$ — залишкові деформації в оболонці на к-тому етапі зварювання; e_{oij}^{o} — деформації викликані усадкою матеріалу; $e_{ij}^{o(k-1)}$ — додаткові непружні деформації, зумовлені заварюванням попередніх ділянок; $S(L_k)$ — характеристична функція області формування залишкових деформацій; X — схема зварювання, яка характеризується параметрами розташування ділянок послідовного заварювання вздовж осі шва; $k = \overline{1,n}$, n — задана кількість ділянок заварювання.

Задача оптимізації полягає в тому, щоб знайти схему зварювання, яка забезпечувала б розподіл залишкових зварних напружень (деформацій) близький до заданого. За критерій оптимізації приймається локальна міра середньоквадратичного відхилення шуканих напружень від заданих. В запропонованій методиці розв'язування задач оптимізації використано метод динамічного програмування.

Проведені числові розрахунки для тонких пластин і циліндричних оболонок показали, що оптимальні схеми заварювання дозволяють суттєво понизити рівень залишкових напружень і деформацій та забезпечити найбільш рівномірний їх розподіл в зоні зварного з'єднання. Виконані, спільно з Інститутом електрозварювання ім. Є. О. Патона НАН України експериментальні дослідження підтвердили ефективність запропонованих схем зварювання, які знайшли застосування при ремонті навантажених нафтопроводів.

З метою встановлення допустимих теплових режимів заварювання нерухомим джерелом тепла локальних ненаскрізних дефектів (каверн) нафтопроводів під тиском сформулювана і розв'язана відповідна модельна крайова задача теплопровідності з врахуванням температурної залежності характеристик матеріалу. Проведено числові дослідження розподілу температур як по товщині труби, так і на її поверхні зі сторони дії джерела тепла в залежності від його інтенсивності. Побудовано графіки розподілу ізотерм, які дають можливість за вибраним критерієм міцності визначити ефективні геометричні характеристики області в зоні каверни.

В аналогічній постановці сформульована і розв'язана модельна задача про поширення тепла при зварюванні накладних елементів рухомим джерелом нагріву , яке рухається з постійною швидкістю. Встановлено час виходу на квазіусталений режим нагріву, яким лімітується тривалість неперервного приварювання накладного елемента.

Запропоновано методику побудови розрахункових режимів заварки каверн нафтопроводів під тиском. З цією метою досліджується напружений стан трубопроводу з каверною під внутрішнім тиском на основі суперпозиції розв'язків двох модельних задач для циліндричної оболонки під внутрішнім тиском та відповідних розмірів шарнірно опертої круглої пластини під дією нормального силового навантаження. При розрахунку трубопроводу на міцність температурними напруженнями від зварювання нехтувалось, оскільки це йшло в запас міцності матеріалу.

При виборі критерія міцності приймалось, що для температур вищих від певного критичного рівня ($T > T^*$) границя міцності і границя текучості матеріалу дорівнюють нулеві, а в інтервалі температур $T_c \leq T \leq T^*$ ці границі дорівнюють значенню величин відповідних напружень при $T = T^*$, тобто задаються у вигляді функцій стрибка.

Прикладні результати теоретичних досліджень, які розглянуті в даному розділі використані при розробці, спільно з Інститутом електрозварювання ім. Є. О. Патона НАН України і галузевим інститутом Міннафтопрому, нормативних документів на технологію ремонту нафтопроводів під тиском, впровадження якої у виробництво забезпечило значний економічний ефект.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

Запропоновано ітераційно-моментний підхід до побудови математичних моделей термопружних систем, які враховують ефекти локально-градієнтного і високошвидкісного деформування. Побудовано систему рівнянь термопружності, в яких враховується градієнтність характеристик тензора деформації та інерційність деформаційної форми руху. Одержані співвідношення є базовими для аналізу термопружного стану тонкостінних елементів конструкцій в умовах інтенсивного нагріву і силового навантаження з метою кількісної оцінки їх параметрів міцності та надійності.

Запропоновано методику варіаційно-моментної побудови двовимірних математичних моделей задач теплопровідності та термопружності пластин і оболонок, яка базується на використанні варіаційного формулювання задач в тривимірній постановці та конструктивній побудові відповідного даній крайовій задачі оптимального базису розкладу шуканих функцій. На модельних прикладах показано, що варіаційно-моментний підхід та ітераційна методика побудови наближених розв'язків з використанням оптимальних базисних функцій забезпечують високу точність розв'язку на малій базі наближень. Одержані загальні результати можуть бути використані при розгляді споріднених крайових задач математичної фізики.

Побудовано вихідні співвідношення нелінійної теорії пружних оболонок з використанням подання шуканих функцій рядом Фур'є за тензорним базисом. Отримані таким чином наближені двовимірні моделі дають можливість послідовно, починаючи з першої ітерації, визначати всі компоненти тензора напружень.

Сформульвано математичну постановку та розроблено методику розв'язування задач оптимізації напружено-деформованого стану термопружних оболонок на основі узагальнених енергетичних критеріїв. Побудовано оптимальні схеми нагріву циліндричних оболонок. Проведений числовий аналіз отриманих результатів показав, що використання запропонованих критеріїв забезпечує додаткове пониження рівня напружень в порівнянні з тими, що мають місце при використанні відомих в літературі енергетичних критеріїв.

Показано, що для розв'язування задач оптимізації напруженого стану оболонок обертання при наявності декількох розрахункових зон локального нагріву та силового навантаження, з метою одержання максимально низького рівня напружень, доцільно проводити оптимізацію не по всій області оболонки, а тільки в окремих розрахункових підобластях.

Запропоновано методику побудови оптимальних за напруженнями перехідних режимів періодичного в часі силового навантаження оболонок і пластин, які забезпечують суттєве пониження динамічних ефектів. Одержані в цьому напрямку загальні результати можуть бути використані також при розв'язуванні обернених крайових задач про взаємодію пружних систем з акустичним середовищем.

Сформульовано математичну постановку і розроблено методику розв'язування конкретних модельних задач розрахунку і оптимізації теплових режимів і схем зварювання тонкостінних елементів конструкцій стосовно до науково-технічної проблеми ремонту трубопроводів під тиском. На основі кількісної оцінки напружено-деформованого стану тонкої пластинки і циліндричної оболонки та проведених спільно з ІЕЗ ім. Є. О. Патона НАН України цільових експериментів показано, що оптимальні схеми заварювання дозволяють суттєво понизити рівень залишкових напружень і деформацій та забезпечити найбільш рівномірний їх розподіл в зоні зварного з'єднання.

Розроблено методику розрахунку оптимального попереднього силового навантаження з метою забезпечення умов близьких до бездеформаційного зварювання тонкостінних елементів конструкцій.

Прикладні результати теоретичних досліджень, отримані на основі запропонованих розрахункових та оптимізаійних схем, використано при розробці галузевих нормативних документів для обгрунтування безпечної і якісної технології зварювання при ремонті нафтопроводів під тиском, яка впроваджена у виробництво.

РОБОТИ, В ЯКИХ ОПУБЛІКОВАНІ ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Бурак Я. И., Зозуляк Ю. Д., Гера Б. В. Оптимизация переходных процессов в термоупругих оболочках, К. Наук. думка, 1984. — 158 с.
2. Зозуляк Ю. Д. Оптимизация силовой нагрузки при узких зонах локального нагрева цилиндрической оболочки. — Сб. "Мат. методы и физ.-мех. поля", в. 1, 1975. — С. 118–122.
3. Зозуляк Ю. Д. Оптимальные температурные поля при локальном нагреве цилиндрической оболочки. — Сб. "Мат. методы и физ.-мех. поля", в. 2, 1975. — С. 77–80.
4. Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Зозуляк Ю. Д. Об оптимизации напряженного состояния в зоне локальной термообработки оболочки вращения. — Прикл. механика, т. 11, в. 5, 1975. — С. 3–7.
5. Зозуляк Ю. Д. О применении силовой нагрузки в процессе сварки с целью оптимизации остаточных сварочных напряжений в цилиндрической оболочке. — Сб. "Мат. методы и физ.-мех. поля", в. 4, 1976. — С. 51–53.
6. Зозуляк Ю. Д., Беседина Л. П., Будз С. Ф. О построении оптимальных по напряжениям температурных полей применительно к условиям термообработки пластин и оболочек. — Сб. "Мат. методы и физ.-мех. поля", в. 7, 1978. — С. 11–16.
7. Зозуляк Ю. Д., Доманский П. П. Применение экстремальных перепадов температуры и силовой нагрузки для повышения эффективности локальной термообработки оболочек вращения. — Сб. "Мат. методы и физ.-мех. поля", в. 7, 1978. — С. 111–115.
8. Зозуляк Ю. Д., Вдович Е. А. Оптимизация импульса падающей волны в системе акустическая среда — упругий слой. — Сб. "Мат. методы и физ.-мех. поля", в. 9, 1979. — С. 96–99.
9. Зозуляк Ю. Д., Магерус Г. В. К оптимизации колебаний упругого слоя в акустической среде при импульсном нагружении. — Сб. "Мат. методы и физ.-мех поля", в. 12, 1980. — С. 42–46.
10. Зозуляк Ю. Д. Силовое нагружение оболочек вращения с целью оптимизации их прочности и надежности. — Сб. "Мат. методы и физ.-мех. поля", в. 20, 1984. — С. 65–68.

11. Зозуляк Ю. Д. Оптимизация условий выхода на установившийся режим колебаний оболочек вращения. — Сб. "Мат. методы и физ.-мех. поля", в. 21, 1985. — С. 93–96.
12. Зозуляк Ю. Д., Ледяшов Ю. Л. Методика определения рациональных схем сварки встык тонкостенных оболочек. — Авт. сварка, N 2, 1986. — С. 18–20.
13. Зозуляк Ю. Д. Узагальнений варіаційний підхід в задачах динамічної термопружності тонких оболонок. — ДАН УРСР, сер. А, N 6, 1987. — С. 23–25.
14. Бурак Я. И., Зозуляк Ю. Д. Вариационно-моментный подход в задачах теплопроводности и термоупругости оболочек и пластин // Труды Всесоюзн.конф. по теории оболочек и пластин, Москва, 1987. — С. 243–248.
15. Бурак Я. И., Зозуляк Ю. Д. Обобщенный вариационный подход в задачах теплопроводности. — ДАН УРСР, сер. А, N 3, 1987. — С. 28–30.
16. Бурак Я. И., Зозуляк Ю. Д. Вопросы оптимизации напряженно-деформированного состояния термоупругих тел. — Сб. "Мат. методы и физ.-мех. поля", в. 27, 1988. — С. 11–18.
17. Бурак Я. И., Зозуляк Ю. Д., Гнатів Ю. М. Застосування варіаційно-моментного підходу до задач теорії пружності тостостінних оболонок. — ДАН УРСР, сер. А, N 1, 1990. — С. 43–47.
18. Burak Ya., Galuk V., Zozulyak Yu. Mathematical modeling in working out the technology of restoration of oil pipelines under presure, 2 International conference "Pipeline inspection", Москва, 1991. — С. 73–76.
19. Зозуляк Ю. Д., Гнатів Ю. М. Застосування варіаційно-моментного підходу до задач термопружності оболонок. — Зб. "Мат. методи і фіз.-мех. поля", N 33, 1991. — С. 56–59.
20. Зозуляк Ю. Д., Казьмір Л. П. Розв'язування задач теплопровідності для тонких оболонок і пластин з використанням узагальненого варіаційного підходу. — Сб. "Мат. методы и физ.-мех. поля", в. 36, 1992. — С. 66–70.
21. Бурак Я. Й., Зозуляк Ю. Д., Нагірний Т. С. Визначальні співвідношення інерційної локально-нерівноважної термопружності. — ДАН УРСР, N 6, 1993. — С. 48–53.
22. Burak Ja., Zozulyak Yu. Governing equations of inertial locally gradient elastic systems. — ДАН України N 11, 1993. — С. 46-51.

23. Бурак Я. И., Зозуляк Ю. Д., Нагирный Т. С. Вопросы математического моделирования и оптимизации в локально-градиентной механике. — Известия РАН, "Механика твердого тела", N 2, 1994. - С. 170–176.
24. Zozulyak Yu. Optimal basic functions at reduction of boundary-value problems to the problems of lower dimensionality. — Advances in modelling & analysis, AMSE Press, v. 30, 1995. — P. 7–16.
25. Бурак Я. Й., Зозуляк Ю. Д. Енергетичний підхід до побудови рівнянь пружних оболонок в узагальнених змінних. — Доп. НАН України, N 6, 1995. — С. 41–43.
26. Бурак Я. И., Галюк В. Х., Джарджиманов А. С., Зозуляк Ю. Д., Костенко В. Г., Ледяшов Ю. Л., Савич И. М., Титаренко В. И. Разработка режимов заварки каверн магистральных нефтепроводов под давлением. Сб. "Транспорт и хранение нефти и нефтепродуктов" — ВНИИОЭНГ, Москва, в. 1, 1981. — С. 13–17.
27. Будз С. Ф., Зозуляк Ю. Д., Савич И. М., Ледяшов Ю. Л., Новацкий В. Т. Расчет и оптимизация технологии восстановления трубопроводов под давлением с целью обеспечения их прочности и надежности, 2 Всесоюзн. конф."Прочность, жесткость и технологичность изделий из композитов", т. 1, Ереван, 1984. — С. 136–141.
28. Зозуляк Ю. Д., Ледяшов Ю. Л. Оптимальное проектирование схем сварки стержневых конструкций. — Сб. "Исследования по оптимальному проектированию конструкций", Днепропетровск, 1994. — С. 49–51.
29. Бурак Я. И., Зозуляк Ю. Д. Ітераційний підхід в градієнтній теорії пружності. — Сб. "Смешанные задачи механики деформируемых сред" Дніпропетровськ, ДДУ, 1995. — С. 45–50.
30. Зозуляк Ю. Д. Математична модель термопружних оболонок в узагальнених змінних. — Зб. "Крайові задачі термомеханіки", І-нт математики НАНУ, Київ, 1996. — С. 143–147.
31. Зозуляк Ю. Д., Гнатів Ю. М., Шпак Л. Я. Варіаційно-моментний підхід в крайових задачах термопружних оболонок. Препринт N 8–94, Львів, 1994. — 52 с.
32. Руководящий документ (отв. исп. Гумеров А. Г., Хайруллин Ф. Г., Ямалеев К. М., Аснис А. Е., Савич И. М., Бурак Я. И.,

Зозуляк Ю. Д., Будз С. Ф.) "Инструкция по заварке коррозионных язв металла труб нефтепроводов под давлением" (РД 39-30-1119-84), ВНИИСПТнефть, Уфа, 1984. — 46 С.
33. Аснис А. Е., Бут В. С., Савич И. М., Галюк В. Х., Титаренко В. И., Иващенко Г. А., Зозуляк Ю. Д., Седов Ю. Д., Катунян С. А. Способ ремонта трубопровода, Автор. свидетельство N 1274898 от 8.08.1986.
34. Бурак Я. И.,Зозуляк Ю. Д. Вопросы оптимизации напряженно-деформированного состояния термоупругих тел, 6 Всесоюзный сьезд по теор. и прикл. механике, Ташкент, 1986. — С. 1436.
35. Burak Ja., Zozulyak Yu. Thermodynamic aspects and methods of thermodynamic optimization. — 1st Europ. Solid Mechanics Conf., Munich, 1991. — P. 25.
36. Zozulyak Yu. Mathematical simulation of thermoelastic systems with account of inertial deformational form of motion // 16 Symp. "Vibrations in phisical systems", Poznan-Blazejewko, 1994. — P. 355–356.
37. Зозуляк Ю. Д., Ледяшов Ю. Л., Новацький В. Т., Кисіль Л. Ю. Оптимальне керування залишковими напруженнями при виготовленні зварюваних тонкостінних конструкцій // Матеріали 1 Міжнар. симп. укр. інженерів-механіків, Львів, 1993. — С. 359–360.

Zozulyak Yu.D. Mathematical modelling and optimization in thermal mechanics of elastic shells using iterative-moment approach.

The thesis presented for Doctor degree, speciality 01.02.04 - deformable solid mechanics, Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, NAS of Ukraine, Lviv, 1997.

The scientific works (67 positions) are being defended in which the iterative-moment approach to the construction of mathematical models of thermo-elastic systems, describing the effects of locally-gradient and high-speed deformation has been proposed and developed. The initial relations of nonlinear theory of shells using the method of expansion of the sought functions into Furie series by tensor functions have been formulated. Two-dimensional models, corresponding to the optimal basic functions for non-homogeneous bundary-value problems and thermoelastic shells have been constructed and tested on the basis

of the proposed variational-moment approach. Methods of optimization of transient regimes of periodical in time force loading, providing low levels of dynamic effects in the shells of rotation have been proposed. Mathematical statement has been formulated and the methods of the solution of the problems of stress optimization in thermoelastic shells using generalized energy criteria have been proposed. Theoretical principles and mathematical methods of the residual stress control by means of rational choice of welding schemes and the preliminary force loading of the thin-walled shells and plates have been worked out. Optimal by stress regimes of thermomechanic loading of cylindrical shells have been investigated. The results of the work have practical value in application to the problem of strengthening, reliability and life time improvement of the elements of construction.

Зозуляк Ю. Д. Математическое моделирование и оптимизация в термомеханике упругих оболочек с использованием итерационно-моментного подхода.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.04.-механика деформируемого твердого тела, Институт прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача НАН Украины, Львов, 1997.

Защищается 67 научных работ, в которых предложен и разработан итерационно-моментный подход к построению математических моделей термоупругих систем, описывающих эффекты локально-градиентного и высокоскоростного деформирования. Сформулированы исходные соотношения нелинейной теории оболочек с использованием метода разложения искомых величин в ряды Фурье по тензорным функциям. На основании предложенного вариационно-моментного подхода построены и аппробированы двухмерные модели, соответствующие оптимальным базисным функциям для неоднородных краевых задач термоупругих оболочек. Предложена методика оптимизации переходных режимов периодического во времени силового нагружения, обеспечивающих низкие уровни динамических эффектов в оболочках вращения. Сформулирована математическая постановка и предложена методика решения задач оптимизации напряжений в термоупругих оболочках с использованием обобщенных энергетических критериев. Разработаны теоретические основы и математические методы регулирования остаточных напряжений за счёт рационального выбора схем сварки и предварительного силового нагружения тонкостенных оболочек и пластин. Исследованы оптимальные по напряжениям режимы термомеханического нагружения цилиндрических оболочек. Результаты работы имеют теоретическое и практическое значение применительно к проблеме повышения прочности, надежности и долговечности тонкостенных элементов конструкций.

Ключові слова: інерційні термопружні системи, математичні моделі, оболонки, локально-градієнтне і високошвидкісне деформування, критерії оптимізації, оптимальний базис, оптимальні напруження, регулювання залишкових напружень.

Піідписано до друку 10.04.1997р.
Формат 60×84/16
Обсяг 1 друк. арк.
Тираж 100 прим.
ТзОВ «Кольорове Небо»