МІНІСТЕРСВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

Львівський державний університет імені Івана Франка

На правах рукопису

Тарасюк Роман Іванович

Асимптотичні властивості цілих функцій скінченного логарифмічного порядку

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Львів — 1997

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі теорії функцій та теорії ймовірностей Львівського державного університету ім. І. Франка.

Науковий керівник – кандидат фізико-математичних наук, доцент Заболоцький М.В.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор Боднар Д.І., доктор фізико-математичних наук, доцент Винницький Б.В.

Провідна установа – Харківський державний університет

Захист відбудеться "22" травня 1997 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 04.04.01 у Львівському державному університеті ім. І. Франка (290001, м. Львів, вул. Університетська, 1).

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Львівського державного університету (м. Львів, вул. Драгоманова, 5).

Автореферат розіслано "22" квітня 1997 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Я.В.Микитюк

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. Одним з центральних об'єктів у загальній теорії аналітичних функцій є клас цілих функцій, з яким так чи інакше має справу кожен математик. У сучасних дослідженнях з теорії цілих функцій можна виділити дві основні тенденції: з одного боку, доводяться результати, що стосуються всього класу цілих функцій, а з іншого, виділяється той чи інший їх підклас і вивчаються його властивості. До таких підкласів належить клас цілих функцій f скінченного порядку. Як і у загальному класі, так і у його підкласах (зокрема, у класі функцій скінченного порядку), основні задачі стосуються двох проблем: вивчення зв'язку між зростанням функції f і поводженням її нулів, а також між зростанням функції f та спаданням коефіцієнтів її розвинення в степеневий ряд.

Стосовно першої проблеми, у 1914 році Ж. Валірон показав, що у випадку, якщо всі нулі функції f від'ємні, рахуюча функція її нулів $n(t) \sim \Delta t^{\rho}$ $(t \to \infty)$, де $\Delta \in (0, +\infty)$ і ρ–неціле число, то для будь-якого $\delta > 0$ рівномірно відносно $\theta \in [-\pi+\delta, \pi-\delta]$ виконується співвідношення

$$\ln f(re^{i\theta}) \sim \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} e^{i\rho\theta} r^{\rho} \quad (r \to \infty),$$

де $\ln f(z)$ – однозначна в куті $\{z : |\arg z| < \pi - \delta\}$ вітка многозначної функції $\operatorname{Ln} f(z)$ така, що $\ln f(0) = 0$. Ним також доведено, що коли f має нецілий порядок ρ, всі її нулі від'ємні і

$$\ln |f(r)| \sim \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} r^{\rho} \quad (r \to \infty), \quad \Delta \in (0, +\infty),$$

то $n(t) \sim \Delta t^\rho$ $(t \to \infty)$. Значно простіше доведення останнього твердження дав Е. Тітчмарш у 1927 році.

Теореми, в яких за відомою асимптотикою $n(t)$ робиться висновок про асимптотику $\ln f(z)$ називають теоремами типу Валірона, а теореми, де за відомою асимптотикою $\ln|f(z)|$ на промені робиться висновок про асимптотику $n(t)$, – теоремами типу Валірона – Тітчмарша. В.М. Логвиненко (1973 р.) довів теореми типу Валірона і Валірона-Тітчмарша для цілих функцій нецілого порядку ρ в термінах двочленної асимптотики.

Зв'язок між зростаням функції f та спаданням коефіцієнтів a_n її розвинення в степеневий ряд розглядав Е. Ліндельоф. У 1903 році він знайшов необхідні та достатні умови на поведінку коефіцієнтів a_n для виконання співвідношення $\ln M_f(r) = (1+o(1))\sigma r^\rho$ $(r \to +\infty)$, де $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $0 < \rho, \sigma < +\infty$.

Цей результат при $\rho = 1$ був перевідкритий М.В. Говоровим та Н.М. Черних. М.М. Шеремета (1990 р.) посилив результат Е. Ліндельофа на випадок двочленної асимптотики. Він показав, що для того, щоб

$$\ln M_f(r) = \sigma r^\rho + \sigma_1 r^{\rho_1} + o(r^{\rho_1}) \quad (r \to +\infty),$$

де $0 < \rho_1 < \rho < +\infty, 0 < \sigma < +\infty$ і $\sigma_1 \in \mathbb{R}$, необхідно і досить, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконувалась нерівність

$$\ln|a_n| \le -\frac{n}{\rho}\ln\frac{n}{e\rho\sigma} + (\sigma_1 + \varepsilon)\left(\frac{n}{\rho\sigma}\right)^{\rho_1/\rho} \qquad (n \ge n_0(\varepsilon))$$

та існувала зростаюча до $+\infty$ послідовність (n_k) натуральних чисел така, що $n_{k+1} - n_k = o\left(n_k^{(\rho+\rho_1)/2\rho}\right) \quad (k \to +\infty)$ і

$$\ln|a_{n_k}| \geq -\frac{n_k}{\rho}\ln\frac{n_k}{e\rho\sigma} + (\sigma_1 - \varepsilon)\left(\frac{n_k}{\rho\sigma}\right)^{\rho_1/\rho} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

В останнє тридцятиріччя, окрім класу цілих функцій скінченного порядку, вивчається клас цілих функцій так званого скінченного логарифмічного порядку

$$\rho_\ell = \lim_{r\to\infty}\sup\frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln\ln r} < \infty.$$

До цього часу були відомі лише формули для знаходження ρ_ℓ через коефіцієнти розвинення в степеневий ряд. Про теореми типу Валірона та Валірона-Тітчмарша для функцій даного класу в літературі мова не йшла.

Отже, актуальною стала задача про встановлення аналогів теорем В.М.Логвиненка та М.М.Шеремети для цілих функцій скінченного логарифмічного порядку. Цій проблемі присвячена дана дисертаційна робота.

<u>**Мета роботи**</u> полягає у доведенні теорем типу Валірона та Валірона-Тітчмарша для цілих функцій скінченного логарифмічного порядку, а також у встановленні аналогів теорем Е. Ліндельофа та М.М. Шеремети для функцій згаданого класу.

Наукова новизна. В роботі:

1. Отримано аналоги теорем типу Валірона та Валірона-Тітчмарша для цілих функцій скінченного логарифмічного порядку, коли лічильна функція нулів має двочленну асимптотику логарифмічного вигляду.

2. Встановлено критерії регулярності асимптотики цілих функцій скінченного логарифмічного порядку. Ці критерії є аналогами теорем Е. Ліндельофа та М.М. Шеремети. У випадку двочленної асимптотики $\ln M_f(r)$ побудовано приклади функцій, які показують істотність обмежень на зростання другого члена цієї асимптотики.

Всі отримані результати є новими.

Теоретична і практична цінність. Результати дисертації є певним внеском у теорію цілих функцій. Вони можуть знайти своє застосування як у теоретичних, так і у практичних питаннях.

Основні положення дисертації, що виносяться на захист:

1. Доведення теорем типу Валірона та Валірона-Тітчмарша для цілих функцій скінченного логарифмічного порядку.
2. Встановлення критеріїв регулярності асимптотики цілих функцій скінченного логарифмічного порядку.
3. Побудова прикладів функцій, що показують істотність обмеження на зростання другого члена асимптотики.

Методи досліджень. При доведенні наведених в роботі результатів використовувались методи загальної теорії цілих функцій, а також деякі прийоми з праць В.М. Логвиненка та М.М. Шеремети.

Апробація роботи. Результати роботи доповідались на Міжнародній математичній конференції, присвяченій пам'яті Ганса Гана (10-13 жовтня 1994 р., Чернівці), Четвертій Міжнародній науковій конференції ім. академіка М. Кравчука (Київ, 11-13 травня 1995 р.), а також на Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівник проф. Гольдберг А.А., 1996, 1997 р.) та Харківському міжвузівському семінарі з теорії функцій (керівник проф. Ронкін Л.І., 1997 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в працях [1] – [5], список яких подано в кінці автореферату.

Особистий внесок дисертанта. У статті [3] М.М. Шереметі належить постановка задачі і загальне керівництво над її розв'язуванням, а результати належать автору дисертації та М.В. Заболоцькому в однаковій мірі. Результати роботи [4] отримані дисертантом у співавторстві з М.В. Заболоцьким. Всі інші результати отримані автором самостійно.

Структура та об'єм дисертації. Дисертація складається зі вступу, двох розділів, які загалом містять 9 параграфів, та списку літератури із 21 назви. Загальний обсяг роботи – 99 сторінок.

Автор дисертації висловлює щиру подяку М.М. Шереметі, вважаючи його також своїм науковим керівником.

Виклад основних результатів роботи

У першому розділі дисертаційної роботи розглядається залежність між асимптотикою логарифма цілої функції скінченного логарифмічного порядку та двочленною асимптотикою її рахуючої функції.

У §2 розділу 1 даної роботи доведено теореми типу Валірона та Валірона – Тітчмарша в термінах многочленної асимптотики для цілих функцій скінченного логарифмічного порядку, тобто доведено наступні теореми

Теорема 1.2.1. *Нехай $2 < q < p < q+1 < \infty$, $\Delta \in (0, +\infty)$, $\Delta_1 \in \mathbb{R}$, а φ_1 – інтегрована на кожному скінченному проміжку з $\mathbb{R}_+$ функція така, що при деякому $m \geq 1$*

$$\int_T^{2T} |\varphi_1(x)|^m dx = o\left(T(\ln T)^{m(q-2)}\right) , \quad T \to +\infty. \tag{1}$$

Тоді, якщо $\rho = 0$, всі нулі функції f від'ємні і

$$n(t) = \Delta \ln^p t + \Delta_1 \ln^q t + \varphi_1(t) \quad (t \geq 1),$$

то для будь-яких $\theta \in [-\pi, \pi]$ справедлива рівність

$$\ln f(re^{i\theta}) = \frac{\Delta}{p+1} \ln^{p+1} r + \frac{\Delta_1}{q+1} \ln^{q+1} r + i\theta(\Delta \ln^p r + \Delta_1 \ln^q r) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{3} - \theta^2\right)(\Delta p \ln^{p-1} r + \Delta_1 q \ln^{q-1} r) + \tilde{\psi}_1(z) , \quad z = re^{i\theta},$$

де

$$\tilde{\psi}_1(z) = o(\ln^{q-1} r)$$

при $z \to \infty$ зовні деякої винятковоі множини $E(f)$. Ця виняткова множина $E(f)$ складається з не більш як зліченного об'єднання прямокутників $\{z : x'_n < \mathrm{Re} z < x''_n\ ,\ |\mathrm{Im} z| < y_n\}$ таких, що $x''_n < 0$, $\sum_{|x'_n|<R}(x''_n - x'_n) = o(R)$ і $\sup\{y_n : |x'_n| < R\} = o(R)$ при $R \to \infty$. Якщо, крім того, умова (1) виконується для деякого $m > 1$, то рівномірно відносно θ

$$\int_T^{2T} \left|\tilde{\psi}_1(re^{i\theta})\right|^m dx = o\left(T(\ln T)^{m(q-1)}\right)\ ,\ \ T \to +\infty.$$

Теорема 1.2.2. *Нехай числа p, q, Δ і Δ_1 такі ж, як і в теоремі 1.2.1, функція f має лише від'ємні нулі і*

$$\ln|f(re^{i\theta})| = \frac{\Delta}{p+1}\ln^{p+1} r + \frac{\Delta_1}{q+1}\ln^{q+1} r + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{3} - \theta^2\right)\left(\Delta p \ln^{p-1} r + \Delta_1 q \ln^{q-1} r\right) + \psi_2(re^{i\theta})$$

для значень $\theta = 0$ і $\theta = \pi$, де ψ_2 для деякого $m \geq 1$ задовольняє умову

$$\int_{T<|x|<2T} |\psi_2(x)|^m dx = o\left(T(\ln T)^{m(q-1)}\right),\ \ T \to +\infty. \qquad (2)$$

Тоді

$$n(t) = \Delta \ln^p t + \Delta_1 \ln^q t + \tilde{\varphi}_2(t)\ \ (t \geq 1),$$

де

$$\tilde{\varphi}_2(t) = o(\ln^q t)$$

при $t \to \infty$ зовні деякої множини нульової лінійної щільності, тобто множини $E \subset [0, +\infty)$ такої, що $\mathrm{mes}\ (E \cap [0, t]) = o(t)$, $t \to +\infty$. Якщо *умова (2) справедлива для деякого $m > 1$, то*

$$\int_T^{2T} |\tilde{\varphi}_2(t)|^m dt = o(T \ln^{mq} T) , \quad T \to \infty.$$

У §1 першого розділу доведено леми, необхідні для доведення наведених теорем. В §3 подано зауваження, що стосуються випадків, коли числа p і q не зв'язані умовами теорем 1.2.1 і 1.2.2, тобто вказано можливість отримати різні аналоги теорем типу Валірона та Валірона – Тітчмарша. Також у §3 показано, що коли у теоремі 1.2.2 обмежитися двочленною асимптотикою $\ln|f|$ лише на додатному промені (або на довільному промені $\arg z = \varphi, \varphi \neq -\pi$), то двочленної асимптотики для $n(t)$ не отримується. Дану теорему можна вважати аналогом теореми М.М.Тян:

Теорема 1.3.1. *Нехай ціла функція f має нульовий порядок і лише від'ємні нулі, а*

$$\ln|f(r)| = \frac{\Delta}{p+1} \ln^{p+1} r + \frac{\Delta_1}{q+1} \ln^{q+1} r + O(\ln^{p-1} r) , \quad r \to \infty,$$

де $-1 < q < p$. Тоді для $n(t)$ точною є оцінка

$$n(t) = \Delta \ln^p t + O\left(\frac{\ln^p t}{\ln \ln t}\right) , \quad t \to +\infty.$$

У §4 розглядається питання про "величину" виняткової множини у теоремі типу Валірона (доведено, що вона є C_0^1-множиною). Також у цьому параграфі доведено, що для виконання асимптотичної рівності вигляду $n(t) = \Delta \ln^p t + \Delta_1 \ln^q t + \varphi_1(t)$ достатньо наявності двочленної асимптотики $\ln|f|$ лише на промені $\arg z = -\pi$, тобто на промені, де розташовані нулі f.

Теорема 1.4.2. *Нехай p, q, Δ, Δ_1 такі, як в теоремі 1.2.1, функція f має від'ємні нулі і*

$$\ln|f(-r)| = \frac{\Delta}{p+1}\ln^{p+1} r + \frac{\Delta_1}{q+1}\ln^{q+1} r -$$

$$-\frac{\pi^2}{3}(\Delta p \ln^{p-1} r + \Delta_1 q \ln^{q-1} r) + \psi(-r)\,, \quad r > 0\,,$$

де

$$\int_{-2T}^{-T} |\psi(t)|^m dt = o\left(T(\ln T)^{m(q-1)}\right)\,, \quad T \to +\infty.$$

Тоді

$$n(t) = \Delta \ln^p t + \Delta_1 \ln^q t + \varphi(t)\,,$$

де

$$\varphi(t) = o(\ln^q t)\,, \quad t \to \infty\,,$$

зовні множини нульової лінійної щільності.

Результати першого розділу узагальнюють та посилюють результати Ж. Валірона, В.М. Логвиненка, М.М. Тян.

У другому розділі даної роботи розглядається зв'язок між зростанням логарифма максимума модуля цілої функції скінченного логарифмічного порядку та спаданням коефіцієнтів a_n її степеневого розвинення в ряд Тейлора ($z_0 = 0$).

Метою другого розділу є встановлення аналогів теорем Е. Ліндельофа та М.М. Шеремети для функцій скінченного логарифмічного порядку.

У §1 другого розділу наведено допоміжні результати, необхідні для доведення подальших теорем. В §2, зокрема, знайдено формули для знаходження величини типу та нижнього типу цілої функції f логарифмічного порядку $\rho_l = 1+p$ через коефіцієнти її розвинення у степеневий ряд. Також у цьому параграфі доведено аналог теореми Е. Ліндельофа, тобто знайдено необхідні та достатні умови на коефіцієнти a_n для виконання співвідношення

$$\ln M_f(r) = (1+o(1))T\ln^{p+1} r \quad (r \to +\infty,\ 0 < T < +\infty) \tag{3}$$

для будь-якої цілої функції скінченного логарифмічного порядку:

Теорема 2.2.2. ***Для того, щоб для цілої функції f логарифмічного порядку $\rho_l = 1+p, 0 < p < +\infty$, виконувалось співвідношення (3), необхідно та досить, щоб для будь-якого $\varepsilon \in (0;T)$ виконувалась нерівність***

$$\ln|a_n| \le -\frac{p}{(T+\varepsilon)^{1/p}}\left(\frac{n}{1+p}\right)^{\frac{p+1}{p}} \quad (n \ge n_0(\varepsilon))$$

та існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що $n_{k+1} - n_k = o(n_{k+1})$ $(k \to \infty)$ і

$$\ln|a_{n_k}| \ge -\frac{p}{(T-\varepsilon)^{1/p}}\left(\frac{n_k}{1+p}\right)^{\frac{p+1}{p}} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

У §3 вводиться поняття типу та нижнього типу другого члена асимптотики цілої функції скінченного логарифмічного порядку та вивчаються їх властивості.

Нехай $0 < p < +\infty, p_1 < p$ і $0 < T < +\infty$. Величина

$$\tau^* = \inf\{\tau \in \mathbb{R} : (\exists r_0(\tau))(\forall r > r_0)\{\ln M_f(r) \le T \ln^{p+1} r + \tau \ln^{p_1+1} r\}\}$$

називається типом, а

$$\tau_* = \sup\{\tau \in \mathbb{R} : (\exists r_0(\tau))(\forall r \ge r_0)\{\ln M_f(r) \ge T \ln^{p+1} r + \tau \ln^{p_1+1} r\}\}$$

нижнім типом другого члена асимптотики цілої функції f логарифмічного порядку $\rho_l = 1 + p$.

Покладемо також

$$t^* = \inf\left\{ t \in \mathbb{R} : (\exists n_0(t))(\forall n \ge n_0) \left\{ \ln|a_n| \le -\frac{p}{T^{1/p}}\left(\frac{n}{1+p}\right)^{\frac{p+1}{p}} + t\left(\frac{n}{T(1+p)}\right)^{\frac{p_1+1}{p}} \right\}\right\}$$

і

$$t_* = \sup\left\{ t \in \mathbb{R} : (\exists n_0(t))(\forall n \ge n_0) \left\{ \ln|a_n| \ge -\frac{p}{T^{1/p}}\left(\frac{n}{1+p}\right)^{\frac{p+1}{p}} + t\left(\frac{n}{T(1+p)}\right)^{\frac{p_1+1}{p}} \right\}\right\}$$

Справедливі наступні теореми:

Теорема 2.3.1. *Якщо $p_1 > -1$, то справедлива рівність $\tau^* = t^*$;*

Теорема 2.3.2. *Якщо $p_1 > \max\{-1, -p\}$ і $\varkappa_n = |a_{n-1}/a_n| \uparrow +\infty$ $(n \to \infty)$, то $\tau_* = t_*$.*

У цьому параграфі також побудовано приклади цілих функцій, що показують істотність умов $p_1 > -1$ та $p_1 > \max\{-1, -p\}$ в теоремах 2.3.1 та 2.3.2.

В §4 доводиться теорема, котра описує необхідні та достатні умови існування регулярної двочленної асимптотики $\ln M_f(r)$ у випадку, коли $p > p_1 \geq \max\{-1, -p\}$:

Теорема 2.4.1. *Нехай $0 < p < +\infty$, $\max\{-1, -p\} < p_1 < p$, $0 < T < +\infty$ і $\tau \in \mathbb{R}$. Для того, щоб виконувалося співвідношення*

$$\ln M_f(r) = T \ln^{1+p} r + (\tau + o(1)) \ln^{1+p_1} r \quad (r \to +\infty),$$

необхідно і досить, щоб для кожного $\varepsilon > 0$ виконувалась нерівність

$$\ln|a_n| \leq -pT \left(\frac{n}{T(1+p)}\right)^{\frac{p+1}{p}} + (\tau + \varepsilon) \left(\frac{n}{T(1+p)}\right)^{\frac{p_1+1}{p}} \quad (n \geq n_0(\varepsilon)).$$

та існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$n_{k+1} - n_k = o\left(n_{k+1}^{\frac{p+p_1}{2p}}\right) \quad (k \to +\infty)$$

$$\ln|a_{n_k}| \geq -pT \left(\frac{n_k}{T(1+p)}\right)^{\frac{p+1}{p}} + (\tau - \varepsilon) \left(\frac{n_k}{T(1+p)}\right)^{\frac{p_1+1}{p}} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

У заключному параграфі другого розділу розглядається питання про регулярну двочленну асимптотику $\ln M_f(r)$ для випадку $p = 1$ та $p_1 = -1$. Якщо $p = 1$, то теореми 2.3.1, 2.3.2, 2.4.1 залишаються справедливими у випадку $p_1 > -1$. Якщо ж $p_1 = -1$, то приклад функції

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{4}n^2 + \tau\right\} z^n,$$

для якої $\ln M_{f_0}(r) \geq \ln^2 r + \tau + \ln(4\pi - 1)$, а отже, $t^* = \tau, \tau^* \geq \tau + \ln(4\pi - 1)$, показує суттєвість умови $p_1 > -1$ у згаданих теоремах.

Проте, аналоги теореми Шеремети можна отримати і у цьому випадку, якщо другий член асимптотики зростає швидше, ніж $\ln\ln r$. Сформулюємо один з варіантів таких теорем ($p = 1$):

Теорема 2.5.1. *Нехай $0 < T < +\infty, 0 < q < 1$ і $\tau \in \mathbb{R}$. Для того, щоб*

$$\ln M_f(r) = T \ln^2 r + (1 + o(1))\tau \ln^{1+q} \ln r \quad (r \to +\infty),$$

необхідно і досить, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконувалась нерівність

$$\ln |a_n| \leq -\frac{n^2}{4T} + (\tau + \varepsilon) \ln^{1+q} n \quad (n \geq n_0(\varepsilon))$$

та існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$n_{k+1} - n_k = o\left(\ln^{\frac{1+q}{2}} n_{k+1}\right) \quad (k \to \infty)$$

і

$$\ln |a_{n_k}| \geq -\frac{{n_k}^2}{4T} + (\tau - \varepsilon) \ln^{1+q} n_k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Висновки

У дисертаційній роботі доведено теореми типу Валірона та Валірона-Тітчмарша для класу цілих функцій скінченного логарифмічного порядку, коли лічильна функція нулів має двочленну асимптотику логарифмічного вигляду. Встановлено, що з асимптотики $\ln |f|$ на всій дійсній осі $\mathbb{R}$, або на від'ємному промені функції f з від'ємними нулями, можна отримати двочленну асимптотику для рахуючої функції $n(t)$ її нулів, а коли обмежитися асимптотикою $\ln|f|$ лише на додатному промені (або на довільному промені $\arg z = \varphi, \varphi \neq -\pi$), то двочленної асимптотики логарифмічного вигляду для $n(t)$ не отримуємо. Встановлені критерії регулярності асимптотики $\ln M_f(r)$ для функцій згаданого класу, що є аналогами теорем Е. Ліндельофа та М.М. Шеремети. Побудовано приклади функцій, які показують істотність обмежень на зростання другого члена у випадку двочленної асимптотики $\ln M_f(r)$.

Основні результати дисертації опубліковані в наступних статтях:

1. Тарасюк Р.І. *Про двочленну асимптотику цілих функцій, представлених степеневими рядами* // Волинський математичний вісник.– 1995.– вип. 2.– С. 162-164.

2. Тарасюк Р.І. *Теорема типу Валірона-Тітчмарша для цілих функцій скінченного логарифмічного порядку* // Мат. студії. Праці Львівського Мат. Тов.– 1995.– вип. 5.– С. 31-38.

3. Sheremeta M.M., Tarasyuk R.I., Zabolotskii M.V. *On asymptotic of entire functions of finite logarithmic order* // Мат.физ., анализ, геом.– 1996.– Т. 3, N 1/2.– С. 146-163.

4. Заболоцький М.В., Тарасюк Р.І. *Теореми типу Валірона та Валірона-Тітчмарша для цілих функцій нульового порядку* // Міжнародна математична конференція, присвячена пам'яті Ганса Гана (10-13

жовтня 1994 р., Чернівці): Тези доповідей.– 1994.– С. 169.

5. Тарасюк Р.І. *Про двочленну асимптотику цілих функцій скінченного логарифмічного порядку з нулями на промені* // Четверта Міжнародна наукова конференція ім. академіка М.Кравчука (Київ. 11-13 травня 1995 р.): Тези доповідей.– Ін-т. математики НАН України, 1995.– С. 232.

Тарасюк Р.И. Асимптотические свойства целых функций конечного логарифмического порядка.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ, Львовский государственный университет, Львов, 1997.

Изучены асимптотические свойства целых функций конечного логарифмического порядка. Исследована связь возрастания целой функции конечного логарифмического порядка с поведением ее нулей, а также с убыванием коефициентов ее разложения в ряд.

Tarasyuk R.I. Asymptotic properties of the entire functions of finite logarithm order.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.01 — mathematical analysis, Lviv State University, Lviv, 1997.

The asymptotic properties of the entire functions of finite logarithmic order are studied. Connection between growth of the entire function of finite logarithm order with behaviour of its zeroes and with decreasing of its power serie's coefficients are investigated.

Ключові слова: цілі функції, логарифмічний порядок, скінченний логарифмічний порядок, рахуюча функція нулів, двочленна асимптотика, максимум модуля, максимальний член, тип, нижній тип функції.

Підписано до друку 18.04.97. Формат 60х84/16. Папір друк. №1. Друк офсетн. Умовн.друк.арк.1,2.Обл.-вид.арк. 1,2.Умовн.фарб. відб.1,3. Тираж 100. Зам. 79.

Машинно-офсетна лабораторія Львівського держуніверситету ім.І.Франка. 290602 Львів, вул. Університетська, 1.