Міністерство освіти України
Запорізький державний технічний університет

На правах рукопису

Левада Володимир Степанович

Фундаментальні розв'язки двовимірних задач теорії пружності для анізотропних та неоднорідних середовищ

05.02.07 – Механіка деформівного твердого тіла

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

ЗАПОРІЖЖЯ-1997

539.3

ЛННБ України ім.В.Стефаника

00751884 (X)

Дисертацією є рукопис
Робота виконана на кафедрі обчислювальної математики
Запорізького державного технічного університету.

Науковий керівник - кандидат фізико-математичних наук
доцент Левицький Ігор Аркадійович

Офіційні опоненти - доктор фізико-математичних наук,
професор Пожуєв В. І.
- кандидат технічних наук,
доцент Волкова Т. Д.

Провідна організація - Дніпропетровський державний університет

Захист відбудеться "13" травня 1997 р. о 15-00
на засіданні спеціалізованої вченої ради К 08.02.03 у Запорізькому державному технічному університеті за адресою:
330063, м. Запоріжжя, МСП-39, вул. Жуковського, 64

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці технічного університету

Автореферат розіслано "11" квітня 1997 р.

Вчений секретар спеціалізованої
вченої ради, д.т.н. І.П. Волчок

АВ 37.454

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність проблеми. Поведінці пружних тіл під дією зосереджених навантажень присвячено велику кількість робіт. При цьому, для розв'язання відповідних крайових задач застосовувалися різні засоби. До другої половини теперішнього століття домінувала методика вирізання окілу точки прикладання навантаження, з послідуючим спрямуванням діаметру до нуля. Для двовимірних задач широко використовувались методи Колосова-Мусхелишвілі. Зі створенням теорії узагальнених функцій методи цієї теорії стали використовуватись у механіці. Відмітимо вклад науковців: Андріанов І.В., Власов В.В., Гольдштейн Р.В., Коваленко М.Д., Коляно Ю.М., Конашенко С.І., Кушнір Р.Н., Лавренюк В.І., Лазарян В.А., Михайлов Б.К., Образцов І.Ф., Онанов Г.Г., Підстригач Я.С., Шевченко В.П.

Теорія узагальнених функцій дозволила дати єдине означення фундаментального розв'язку рівняння з дельта-функцією у правій частині рівняння.

Інтерес до фундаментальних розв'язків різко зріс у зв'язку з виникненням та бурхливим розвитком методів граничних елементів / МГЕ/. Серцевину цих методів складає знання фундаментальних розв'язків відповідних рівнянь.

При застосуванні МГЕ до зонально-однорідних середовищ, записують відповідне ГІР до кожної однорідної зони та задоволняють умовам спряження на лініях розподілу зон. Якщо лінії розподілу - довгі відрізки, то доречно ввести спеціальні фундаментальні розв'язки, які задовольняють однорідним умовам спряження на внутрішній межі. При використанні такого розв'язку відпадає необхідність дискретизації цієї межи, що істотно знижує розмірність відповідної системи лінійних рівнянь.

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

Застосування МГЕ до анізотропних середовищ потребує знання відповідних фундаментальних розв'язків. Для плоскої задачі теорії пружності С.Г. Лехницьким методами ТФКЗ було знайдено фундаментальний розв'язок у випадку різних комплексних пружних сталих. Спираючись на цей результат, Г.Томлін у 1974 р. одержав повне розв'язання задачі для ортотропного випадку та застосував його у МГЕ.

С.Краучем був запропонований вариант МГЕ - метод розривних переміщень. Цей метод виявився ефективним для дослідження напруженого стану тіл, що мають тріщини. При цьому використовуються розривні розв'язки, отримані за допомогою фундаментальних розв'язків статичних плоских задач теорії пружності для ізотропних середовищ. Розповсюдження цього методу на анізотропні середовища потребує побудови відповідного розривного розв'язку. Виходячи з вищесказаного, можна сформулювати мету дослідження.

Мета даної роботи полягає у побудові фундаментальних розв'язків деяких двовимірних задач теорії пружності для неоднорідних та анізотропних середовищ і, таким чином, розширенні класу задач теорії пружності, що можуть бути розв'язані МГЕ.

Наукова новизна. У дисертаційній роботі запропоновано оригінальний підхід до знаходження оберненого перетворення Фур'є для дуже сингулярних зображень. У роботі введено один клас узагальненних функцій повільного зростання і отримано для нього обернене перетворення Фур'є. Використовуючи цей результат, у дисертаційній роботі побудовані методом інтегральних перетворень:

- фундаментальний розв'язок для задачі згину зонально-однорідної пластини з прямолінійним розподілом;

- фундаментальний розв'язок статичної задачі для зонально-однорідної пружної площини;

- фундаментальний розв"язок задачі згину анізотропної пластини;

- фундаментальні розв'язки статичних задач для анізотропних пружних площини та півплощини.

Достовірність наукових результатів забезпечується: точною постановкою задач та коректністю математичних методів, застосованих для їх розв'язання, можливістю зведення, при відповідних значеннях параметрів, до відомих результатів для однорідних, ізотропних та ортотропних середовищ.

Наукова та практична цінність роботи полягає у можливості застосування отриманих результатів у МГЕ для розв'язання широкого класу задач теорії пружності для неоднорідних та анізотропних середовищ. Результати роботи можуть бути використані у різних галузях машинобудування та гірничій механіці. Робота прийнята до використання у виробництві.

Апробація роботи. Результати роботи доповідались на: Другій Всесоюзній конференції "Механіка неоднорідних структур" /Львів, 1987р./, науковому семінарі в Інституті прикладних проблем механіки та математики /Львів,1987р./, наукових семінарах кафедри обчислювальної математики та звітних наукових конференціях Запорізького державного технічного університету /1980-1996 рр./, міжкафедральному тематичному семінарі за спеціальністю 05.02.07 - "Механіка деформівного твердого тіла" Запорізького державного технічного університету /1996р./.

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано 7 робіт.

Структура та об'єм роботи. Дисертаційна робота включає:

вступ, три розділи, підсумки. Вона містить 173 сторінки тексту і бібліографічний список, що складається з 75 найменувань літературних джерел.

З М І С Т Д И С Е Р Т А Ц І Ї

У вступі обгрунтована актуальність роботи, сформульована мета дослідження, наведено огляд робіт, зв'язаних з темою дисертації, викладено короткий зміст роботи, сформульовано положення, що виносяться на захист.

У першому розділі введено один важливий клас узагальнених функцій повільного зростання і для нього виконано обернене перетворення Фур'є. Якщо для побудови фундаментального розв'язку двовимірних еліптичних диференційних операторів зі сталими /кусково-сталими/ коефіцієнтами, який задовольняє однорідним крайовим умовам на лінії $X=0$, застосовується перетворення Фур'є за зміною Y, то у багатьох важливих випадках розв'язок у зображеннях має вигляд

$$\overline{U}(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{m}\left(c_k(x)(-i\lambda)\frac{e^{-a_k(x)|\lambda|}}{|\lambda|^k}+b_k(x)\frac{e^{-d_k(x)|\lambda|}}{|\lambda|^k}\right)$$

$a_k(x)\geq 0,\ d_k(x)\geq 0,\ \lambda$ – параметр перетворення Фур'є

Для знаходження оригіналу введено наступні регуляризації:

Під $reg\left[\frac{e^{-a|\lambda|}}{|\lambda|^{n+1}}\right]$ будемо розуміти узагальнені функції $Z_{n,a}(\lambda)\in L'$, що мають порядок не вище n, нескінчено диференційовані по параметру a, $\forall a\geq 0$, зодовільняють рівнянням $|\lambda|^{n+1}Z_{n,a}(\lambda)=e^{-a|\lambda|}$, $n=0,1,2,\ldots$ (1)

та умовам узгодженості $\frac{\partial Z_{n,a}(\lambda)}{\partial a} = -Z_{n-1,a}(\lambda)$, n=1,2,... (2)

$$\frac{\partial^2 Z_{n,a}(\lambda)}{\partial a^2} = \lambda^2 Z_{n,a}(\lambda),\ n=1,2,... \tag{3}$$

$$\frac{\partial Z_{0,a}(\lambda)}{\partial a} = -e^{-a|\lambda|} \tag{4}$$

У розділі побудовано загальний розв'язок (I) - (4) і одержано обернене перетворення Фур'є для цих розв'язків.

$$F^{-1}\left[Z_{n,a}(\lambda)\right](y) = \frac{(-1)^{m+1}}{m!}\left[\left(\ln\sqrt{a^2+y^2}+\gamma-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)a^{n-2m}\sum_{S=0}^{m}(-1)^{m-S}C_n^{2(m-S)}y^{2(m-S)}a^{2S} - arctg\frac{y}{a}\left[\frac{(-1)^m}{2}y^n + \right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(1+\left(-1\right)^{m+1}\right)+a^{n-2m}\sum_{S=1}^{m}(-1)^{m-S}C_n^{2(m-S)+1}a^{2S-1}y^{2(m-S)+1}\right]\right] + \frac{(-1)^n}{2\pi}\sum_{S=0}^{m}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=j}^{n-2S}\frac{c_{jk}(-1)^{S-j}}{(i)^j(j+2S)!(n-(k+2S))!}a^{n-(k+2S)}y^{j+2S} \tag{5}$$

C_{jk} - будь які сталі.

Формула (5) постійно використовується у наступних розділах роботи.

Другий розділ присвячений побудові фундаментальних розв'язків статичних задач двовимірної теорії пружности для зонально-однорідних тіл.

Насамперед була розглянута задача згину пластини.

$$D_i\Delta\Delta G(x,y,\xi,\eta) = \delta(x-\xi)\delta(y-\eta) \quad (i=1,2) \tag{6}$$

при умовах

$$\lim_{x\to+0} G = \lim_{x\to-0} G \tag{7}$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\partial G}{\partial x} = \lim_{x\to-0}\frac{\partial G}{\partial x} \tag{8}$$

$$\lim_{x\to+0} D_1\left[\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\nu_1\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right] = \lim_{x\to-0} D_2\left[\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\nu_2\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right] \tag{9}$$

$$\lim_{x\to+0} D_1\left[\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}+(2-\nu_1)\frac{\partial^3 G}{\partial x\partial y^2}\right] = \lim_{x\to-0} D_2\left[\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}+(2-\nu_2)\frac{\partial^3 G}{\partial x\partial y^2}\right] \tag{10}$$

де $D_i = \frac{E_i h_i^3}{12(1-\nu_i^2)}$ - жорсткості пластини,

E_i, ν_i - модулі пружності та коефіцієнти Пуассона.

Умови (7) - (10) - умови спряження на лінії розподілу середо-

вищ $X=0$. Ці умови виражають: неперервність прогинів, кутів нахилу, згинних моментів, узагальнених перерізуючих зусиль.

Застосувавши до (6) – (10) перетворення Фур'є по Y, скориставшись (5), одержуємо розв'язок (6) – (10)

$$G=\begin{cases}\dfrac{1}{8\pi D_1}\left[r^2\ln r-(y-\eta)^2\right]+\dfrac{S}{8\pi D_1\Delta}\left[\bar r^2\ln\bar r-(y-\eta)^2-4x\xi\left(\ln\bar r+\frac12\right)\right]+\\ +\dfrac{D_1-D_2+\nu_1D_1-\nu_2D_1}{2\pi\Delta}\left[\left((y-\eta)^2-(x+\xi)^2\right)(\ln\bar r-1)+2(x+\xi)(y-\eta)\operatorname{arctg}\dfrac{y-\eta}{x+\xi}\right],\\ \text{при } \xi\ge0,\ x\ge0;\\ \dfrac{D_1+D_2}{\pi\Delta}\left[r^2\ln r-(y-\eta)^2\right]+\dfrac{D_1-D_2+\nu_1D_1-\nu_2D_1}{\pi\Delta}\left[(x+\xi)(y-\eta)\operatorname{arctg}\dfrac{y-\eta}{\xi-x}+(x^2-\xi^2)\left(\ln r-\frac12\right)\right],\\ \text{при } \xi\ge0,\ x<0;\end{cases}\qquad(11)$$

де $r=((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)^{\frac12}$; $\bar r=((x+\xi)^2+(y-\eta)^2)^{\frac12}$,

$S=D_1^2+2D_1D_2-2\nu_1D_1^2+2\nu_2D_1D_2+\nu_1^2D_1^2-2\nu_1\nu_2D_1D_2-2\nu_1D_1D_2-3D_2^2+\nu_2D_2^2+\nu_1^2D_2^2$

Для $\xi<0$ розв'язок одержуємо з (11) одержуємо заміною x на $-x$, ξ на $(-\xi)$, D_1 на D_2 , D_2 на D_1 , ν_1 на ν_2 , ν_2 на ν_1.

На рисунках 1 та 2 зображено чинники, від яких залежить отриманий розв'язок

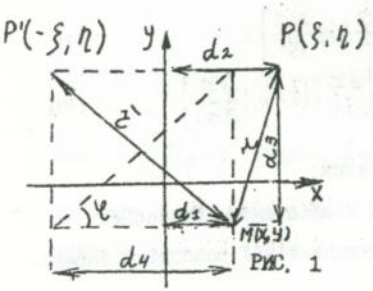


РИС. 1

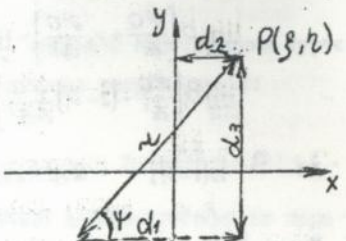


РИС. 2

При $D_1 = D_2 = D$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ з (11) одержуємо $G = \frac{1}{8\pi D}\left[r^2 \ln r - (y-\eta)^2\right]$. Якщо відкинути $-\frac{1}{8\pi D}(y-\eta)^2$, що задовольняє однорідному рівнянню (6), та умовам (7) – (10), отримуємо відомий фундаментальний розв'язок для задачі згину однорідної пластини.

Далі у розділі було розглянуто тестову задачу, що розв'язовувалась МГЕ, з використанням знайденого фундаментального розв'язку. Результати показали, що отриманий розв'язок може ефективно використовуватись.

Наступна задача, що розглядалася у цьому розділі, стосувалася побудови матриці фундаментальних розв'язків для зонально-однорідної пружної площини.

$$DL\left(\sigma,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}F_1\\F_2\end{pmatrix}\delta(x-\xi)\delta(y-\eta) \tag{12}$$

$$(D,\sigma) = \begin{cases}(D_1,\sigma_1) \text{ при } x>0\\(D_2,\sigma_2) \text{ при } x<0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} B\left(D,\sigma,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix} = \lim_{x\to 0} B\left(D,\sigma,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix} \tag{13}$$

де $L(\sigma,S,q) = \begin{pmatrix} S^2+\frac{1-\sigma}{2}q^2 & \frac{1+\sigma}{2}Sq \\ \frac{1+\sigma}{2}Sq & q^2+\frac{1-\sigma}{2}S^2 \end{pmatrix}$,

$$B(D,\sigma,S,q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ DS & D\sigma q \\ \frac{D(1-\sigma)}{2}q & \frac{D(1-\sigma)}{2}S \end{pmatrix}$$

$D=\dfrac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\sigma=\dfrac{\nu}{1-\nu}$, для плоскої деформації,

$D=\dfrac{E}{(1-\nu^2)}$, $\sigma=\nu$, для узагальненого плоского напруженого стану.

F_1, F_2 , – компоненти вектора сили, зосередженого у точці (ξ,η)

U, V , – переміщення у напрямку вісей OX і OY.

Умови (13) виражають неперервність переміщень та напружень на лінії розподілу середовищ.

Застосовуючи методику розв'язання задач (6) – (10) та позначивши

$\Gamma_{11}=U/F_1=1,F_2=0;\ \Gamma_{21}=V/F_1=1,F_2=0;\ \Gamma_{12}=U/F_1=0,F_2=1;\ \Gamma_{22}=V/F_1=0,F_2=1;$

одержуємо матрицю фундаментальних розв'язків.

$$\Gamma_{kk}=\begin{cases}-\dfrac{3-\sigma_1}{4D_1(1-\sigma_1)\pi}\ln r+(-1)^{k+1}\dfrac{(1+\sigma_1)(x-\xi)^2}{4D_1(1-\sigma_1)\pi r^2}+\dfrac{S_1\ln\bar r}{4D_1(1-\sigma_1)\pi\Delta}+\\ +(-1)^k\dfrac{S_2(x+\xi)^2}{4D_1(1-\sigma_1)\pi\Delta\bar r^2}-\dfrac{S_2x\xi\left[(x+\xi)^2-(y-\eta)^2\right]}{2D_1(1-\sigma_1)\pi\Delta\bar r^4}, \text{ при } \xi\ge0,\ x\ge0\\ \dfrac{S_7\ln r}{\pi\Delta}+(-1)^k\dfrac{S_3x(\xi-x)}{\pi\Delta r^2}+(-1)^k\dfrac{S_6\xi(\xi-x)}{\pi\Delta r^2}, \text{ при } \xi\ge0,\ x<0\end{cases}\qquad(14)$$

$$\Gamma_{ij}=\begin{cases}\dfrac{(1+\sigma_1)(x-\xi)(y-\eta)}{4(1-\sigma_1)\pi D_1r^2}+(-1)^{j+1}\dfrac{S_4}{\pi\Delta}arctg\dfrac{y-\eta}{x+\xi}-\dfrac{S_2(x-\xi)(y-\eta)}{4(1-\sigma_1)\pi\Delta D_1\bar r^2}+\\ +(-1)^{j+1}\dfrac{S_3x\xi(x+\xi)(y-\eta)}{(1+\sigma_2)\pi\Delta D_1\bar r^4}, \text{ при } \xi\ge0,\ x\ge0\\ \dfrac{S_5x(y-\eta)}{\pi\Delta r^2}+\dfrac{S_6\xi(y-\eta)}{\pi\Delta r^2}+(-1)^{j+1}\dfrac{S_4}{\pi\Delta}arctg\dfrac{y-\eta}{\xi-x}, \text{ при } \xi\ge0,\ x<0\end{cases}\qquad(15)$$

$k,i,j=1,2;\ i\ne j$

$\{\Delta,S_1,S_2,S_3,S_4,S_5,S_6,S_7\}\,(D_1,D_2,\sigma_1,\sigma_2)$

У випадку $\xi < 0$ розв'язок (12), (13) отримуємо з (14), (15) за допомогою замін: $D_1 \leftrightarrow D_2$, , $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$, $x \to -x$, $\xi \to -\xi$, $\eta \to -\eta$.
Одержані розв'язки залежать від чинників, зображених на рис.1 та 2. При рівності параметрів отримуємо відомі розв'язки для однорідної пружної площини.

Третій розділ присвячено задачам для анізотропних середовищ. Першою розв'язувалась задача побудови фундаментального розв'язку для згину анізотропної площини.

$$D_{11}\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+4D_{16}\frac{\partial^4 W}{\partial x^3\partial y}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}+4D_{26}\frac{\partial^4 W}{\partial x\partial y^3}+D_{22}\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}=\delta(x)\delta(y) \qquad (16)$$

$W(x,y)$ – прогин пластин, D_{ij} – жорсткості анізотропії, $\delta(x)\delta(y)$ - дельта-функція Дірака.
Таким чином, розглядається нескінчена анізотропна пластина, навантажена одиничним поперечним зосередженим навантаженням у точці $(0,0)$. Знаючи W, можна знайти усі характеристики згину.

Застосовуючи перетворення Фур'є і використовуючи (5), приходимо до висновку, що розв'язок (16) залежить від вигляду коренів рівняння $D_{11}P^4+4D_{16}P^3+2(D_{12}+2D_{66})P^2+4D_{26}P+D_{22}=0$.
Це рівняння може мати два варіанта коренів:

1. $\overline{P_{1,2}=\alpha_1\pm i\beta_1}$, $P_{3,4}=\alpha_2\pm i\beta_2$;
2. $P_{1,2}=\alpha+i\beta$, $P_{3,4}=\alpha-i\beta$;

де $\beta_1,\beta_2,\beta>0$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha\in R$.

P_i – обернені до комплексних параметрів згину С.Г. Лехницького
Розв'язок (16) має наступний вигляд.

Перший варіант коренів

$$W=\frac{1}{4\pi\beta_1\beta_2 Q D_{11}}\{\beta_2(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\beta_2^2-\beta_1^2-2\alpha_1\alpha_2)[\bar r_1^2\ln r_1+2\beta_1 x(y+\alpha_1 x)\Theta_1]+$$
$$+\beta_1(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\beta_1^2-\beta_2^2-2\alpha_1\alpha_2)[\bar r_2^2\ln r_2+2\beta_2 x(y+\alpha_2 x)\Theta_2]+2\beta_1\beta_2(\alpha_1-\alpha_2)* \quad (17)$$
$$*[\bar r_1^2\Theta_1-2\beta_1 x(y+\alpha_1 x)\ln r_1-\bar r_2^2\Theta_2+2\beta_2 x(y+\alpha_2 x)\ln r_2]\},$$

де $r_i=(x^2(\alpha_i^2+\beta_i^2)+2\alpha_i xy+y^2)^{\frac{1}{2}}$,

$$\bar r_i=(x^2(\alpha_i^2-\beta_i^2)+2\alpha_i xy+y^2)^{\frac{1}{2}},\ \Theta_i=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x\beta_i}+\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right).$$

$$Q_i=Q(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)$$

Другий варіант коренів.

$$W=\frac{1}{8\pi\beta^3 D_{11}}\left(x^2(\alpha^2+\beta^2)+2\alpha xy+y^2\right)\ln\left(x^2(\alpha^2+\beta^2)+2\alpha xy+y^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

Якщо у (18) покласти $\alpha=0$, $\beta=1$, то ми отримуємо відомий фундаментальний розв'язок для бігармонічного оператору.

Далі розглядалася задача побудови матриці фундаментальних розв'язків для анізотропної пружної площини.

Була розглянута плоска задача, за умови, XOY – площина пружної симетрії, а вісь OZ перпендикулярна до цієї площини

$$A\left(b_{11},b_{12},b_{22},b_{16},b_{26},b_{66},\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}F_1\\F_2\end{pmatrix}\delta(x)\delta(y) \quad (19)$$

$$A(b_{11},\dots,b_{66},S,q)=\begin{pmatrix}b_{11}S^2+2b_{16}Sq+b_{66}q^2 & b_{16}S^2+(b_{12}+b_{66})Sq+b_{26}q^2\\ b_{16}S^2+(b_{12}+b_{66})Sq+b_{26}q^2 & b_{66}S^2+2b_{26}Sq+b_{22}q^2\end{pmatrix}.$$

b_{ij} пружні сталі.

Для узагальненого плоского напруженого стану відповідні рівняння одержується з (19) заміною b_{ij} на $b_{ij}^*=b_{ij}-\frac{b_{i3}b_{j3}}{b_{33}}$.

Розв'язок задачі (19) залежить від коренів рівняння

$$(b_{11}b_{66}-b_{16}^2)P^4+2(b_{11}b_{26}-b_{16}b_{12})P^3+(b_{12}b_{22}+2b_{16}b_{26}-b_{12}^2-2b_{12}b_{66})P^2+$$
$$2(b_{16}b_{22}-b_{12}b_{26})P+(b_{66}b_{22}-b_{26}^2)=0$$

Це рівняння може мати два варіанти коренів, як і у задачі [16] У випадку узагальненого плоского напруженого стану ці корені обернені до комплексних пружних сталих С.Г.Лехницького.

Використовуючи методику розв'язання попередньої задачі, отримуємо розв'язок [19]

Перший варіант коренів

$$U=\frac{1}{D_1 2\pi\beta_1\beta_2}\left\{-F_1\left[\beta_2 H_1(\varphi_1-\bar{\varphi}_1)+\beta_2 H_2\ln r_1+\beta_1\bar{H}_2\ln\bar{r}_1\right]-F_2\left[\beta_2 H_3(\varphi_1-\bar{\varphi}_1)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\beta_2 H_4\ln r_1+\beta_1\bar{H}_4\ln\bar{r}_1\right]\right\} \qquad (20)$$

$$V=\frac{1}{2\pi\beta_1\beta_2 D_1}\left\{-F_1\left[\beta_2 H_3(\varphi_1-\bar{\varphi}_1)+\beta_2 H_4\ln r_1+\beta_1\bar{H}_4\ln\bar{r}_1\right]-F_2\left[\beta_2 H_5(\varphi_1-\bar{\varphi}_1)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\beta_2 H_6\ln r_1+\beta_1\bar{H}_6\ln\bar{r}_1\right]\right\} \qquad (21)$$

$$r_1(x,y)=\left(x^2(\alpha_1^2+\beta_1^2)+2\alpha_1 xy+y^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\varphi_1(x,y)=arctg\left(\frac{y}{x\beta_1}+\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right),$$

$$\bar{f}(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)=f(\alpha_2,\alpha_1,\beta_2,\beta_1),$$

$$\{H_1,H_2,H_3,H_4,H_5,H_6,D_1\}(b_{11},\dots,b_{66},\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$$

Другий варіант коренів

$$U = \frac{1}{4\pi D_2}\left\{F_1\left[-K_1 \ln r + \frac{m_{22}}{r^2}\right] + F_2\left[-K_4 \ln r + \frac{m_{26}}{r^2}\right]\right\} \tag{22}$$

$$V = \frac{1}{4\pi D_2}\left\{F_1\left[-K_4 \ln r + \frac{m_{26}}{r^2}\right] + F_2\left[-K_7 \ln r + \frac{m_{66}}{r^2}\right]\right\} \tag{23}$$

$$r = \left(x^2(\alpha^2+\beta^2) + 2\alpha xy + y^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$m_y = \left(K_j\alpha - K_i\beta\right)x^2 + K_j xy,$$

$$\{K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7, K_8, D_2\}(b_{11}, \ldots, b_{66}, \alpha, \beta).$$

З (20) – (23) були отримані компоненти тензора напружень. Матриця фундаментальних розв'язків знаходиться з (20) – (23) наступним чином:

$$\Gamma_{11}(x,y;\xi,\eta) = U(x-\xi, y-\eta)\Big/_{F_1=1, F_2=0};$$

$$\Gamma_{21}(x,y;\xi,\eta) = V(x-\xi, y-\eta)\Big/_{F_1=1, F_2=0};$$

$$\Gamma_{12}(x,y;\xi,\eta) = U(x-\xi, y-\eta)\Big/_{F_1=0, F_2=1};$$

$$\Gamma_{22}(x,y;\xi,\eta) = V(x-\xi, y-\eta)\Big/_{F_1=0, F_2=1}.$$

Далі у розділі, були побудовані матриці Грина для анізотропної півплощини з непересувним та вільним краєм.

Останньою розглядалася задача побудови розривних розв'язків для анізотропної пружної площини.

$$A\left(b_{11}, \ldots, b_{66}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

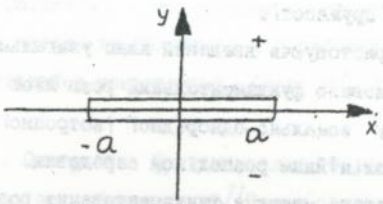
$$\begin{cases} U(x,+0) - U(x,-0) = B_1 \\ V(x,+0) - V(x,-0) = B_2 \\ \delta_y(x,+0) = \sigma_y(x,-0) \\ \tau_{xy}(x,+0) = \tau_{xy}(x,-0) \end{cases} \quad \text{при } y=0,\ x \in (-a,a) \tag{25}$$

B_1, B_2 – сталі.

Переміщення та напруження неперервні,

при $(x,y) \in R^2 \setminus [-a,a] \times \{0\}$ (26)

Напруження прямують до 0 при $x^2 + y^2 \to \infty$ (27)



Розглядаючи $U(x,y)$, $V(x,y)$, як узагальнені функції, позначаючи через $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ похідні в сенсі узагальнених функцій, а через $\tilde{\frac{\partial}{\partial x}}, \tilde{\frac{\partial}{\partial y}}$ звичайні похідні, використовуючи (24) – (26), приходимо до рівняння.

$$A\left(b_{11},\dots,b_{66}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} U(x,y) \\ V(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{66}B_1 + b_{26}B_2 \\ b_{26}B_1 + b_{22}B_2 \end{pmatrix} \frac{\partial \delta(l)}{\partial y} \tag{28}$$

$\delta(l)$ – дельта-функція, зосереджена на відрізку $(-a, a)$. Використовуючи знайдену матрицю фундаментальних розв'язків, з (28) отримуємо

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = -\int_{-a}^{a} \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(x-\xi, y)\, d\xi \begin{pmatrix} b_{66}B_1 + b_{26}B_2 \\ b_{26}B_1 + b_{22}B_2 \end{pmatrix} \tag{29}$$

З (29) було знайдено розв'язок задачі (24) – (27), а

також – компоненти тензора напружень.

При відповідних сталих цей розв'язок співпадає із знайденим Краучем для ізотропного випадку.

У підсумках результати роботи сформульовані у вигляді наступних висновків:

1. Введено один клас узагальнених функцій повільного зростання. Для функцій цього класу виконано обернене перетворення Фур'є. Цей результат дає можливість легко отримувати фундаментальні розв'язки для ряду задач теорії пружності.
2. Використовуючи введений клас узагальнених функцій, побудовано фундаментальний розв'язок для задачі згину зонально-однорідної ізотропної пластини з прямолінійним розподілом середовищ.
3. Побудована матриця фундаментальних розв'язків для зонально-однорідної пружної площини з прямолінійним розподілом середовищ.
4. Побудовано фундаментальний розв'язок для задачі згину анізотропної пластини.
5. Побудована матриця фундаментальних розв'язків для анізотропної пружної півплощини з непересувним краєм.
6. Побудована матриця фундаментальних розв'язків для анізотропної пружної площини.
7. Побудована матриця фундаментальних розв'язків для анізотропної пружної півплощини з вільним краєм.
8. Побудовано розривний розв'язок для анізотропної пружної площини.

Слід відмітити, що одержані фундаментальні розв'язки

виражені у замкненій формі через елементарні функції, їх використання у МГЕ виглядає перспективним.

Основний зміст дисертації опубліковано у наступних роботах:

1. Левада В.С., Левицкий И.А. Построение фундаментального решения для кусочно-однородных пластин с прямолинейным разделом.//Математическая физика.-1981.-вып. 31.-С. 87-92.

2. Левада В.С., Левицкий И.А. Построение матрицы фундаментальных решений для упругой кусочно-однородной плоскости с прямолинейным разделом. — Новые конструкционные материалы, эффективные методы их получения и обработки, повышения надежности деталей и конструкций.-Киев: УМК ВО, 1991. С. 124-126.

3. Левада В.С. Построение фундаментального решения для задачи изгиба анизотропной пластины.//Придніпровський науковий вісник. — 1997.-№4.-С. 17-19.

4. Левада В.С., Левицкий И.А. К расчету кусочно-однородных пластин с прямолинейным разделом.-Запорожье, 1983.- Деп. в Укр. НИИНТИ, № 1463-Ук-Д83. 7 с.

5. Левада В.С, К применению преобразования Фурье для построения фундаментального решения двумерного эллиптического дифференциального оператора. - Запорожье, 1987. - Деп. в Укр.НИИНТИ № 706-Ук-87. 10 с.

6. Левада В.С. Построение матрицы фундаментальных решений для анизотропной упругой плоскости.- Запорожье, 1996.- Деп. в ГНТБ Украины, № 475- Ук96. 13 с.

7. Левада В.С., Нагорный Ю.И., Попрыгина Т.Ф. Применение метода конечных и граничных элементов к решению прикладных задач теории упругости для неоднородных сред. — Ме-

ханика неоднородных структур: Тезисы докладов Второй Всесоюзной конференции.- Львов, 1987. с. 175.

У роботах, написаних у співавторстві , автору належить методика розв'язання задач, участь у їх постановці, розв'язуванні та аналізі результатів.

Summary

Levada V.S. Fundamental solutions of two-dimensional elasticity problems for anisotropic and nonhomogeneous mediums.

The dissertaion on scientific degree of candidate of technical sciences on specialities 05.02.07. -mechanice of deformable slid body, Zaporozhye, 1997.

Fundamental solution for zoned homogeneous elastic plane, fundamnetal solution for zoned homogeneous plate bending problem, fundamental solutions for anisotropic elastic plane and halfplane, fundamental solution for anisotropic plate bending problem, discontinuous solution for anisotropic elastic plane are obtained by methods of theory of distribution.

Аннотация

Левада В.С. Фундаментальные решения двумерных задач теорий упругости для анизотропных и неоднородных сред.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.02.07 – механика деформируемого твердого тела, Запорожский государственный технический университет, Запорожье, 1997.

С использованием аппарата теории обобщенных функций получены фундаментальные решения: для кусочно-однородной упругой плоскости, для задачи изгиба кусочно-однородной пластины, для анизотропных упругой плоскости и полуплоскости, для задачи изгиба анизотропной пластины. Получено разрывное решение для анизотропной упругой плоскости.

Ключові слова: узагальнена функція, дельта-функція, перетворення Фур'е, анізотропна пружна площина, згин, деформація, напружений стан.

Ав 37.454

Подписано к печати 4.04.97 Объем 1 п.л. Тираж 100 экз. Заказ № 306
330600 г.Запорожье, ЗГТУ, Типография, ул.Гоголя, 64