Національна академія наук України
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова

На правах рукопису

КАСІЦЬКА Євгенія Йосипівна

УДК 519.21

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ЕМПІРИЧНИХ ОЦІНОК РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА СТОХАСТИЧНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ

01.05.01 — теоретичні основи інформатики та кібернетики
(математична кібернетика)

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ 1997

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано у відділі математичних методів дослідження операцій Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук КНОПОВ Павло Соломонович.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор ГУПАЛ Анатолій Михайлович,

кандидат фізико-математичних наук БАРДАДИМ Тамара Олексіївна.

Провідна організація: Київський національний університет ім. Тараса Шевченка.

Захист відбудеться «23» травня 1997 р. о 11 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.39.02 при Інституті кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України за адресою:

252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40.

З дисертацією можна ознайомитися в науково-технічному архіві інституту.

Автореферат розіслано «17» квітня 1997 року.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради СИНЯВСЬКИЙ В. Ф.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Задачі стохастичного програмування та стохастичної ідентифікації займають важливе місце в теорії оптимального керування і мають багато практичних застосувань. Такі задачі виникають в будь-якій галузі діяльності, де треба керувати об'єктом, підвладним випадковому впливу.

Задачі стохастичного програмування розглядаються в багатьох роботах як вітчизняних, так і зарубіжних авторів: Ю.М. Єрмоль'єва, Р. Ветса, Д.Б. Юдіна, Б.Т. Поляка, О. Шапіро, А. Кінга, Є.А. Нурмінського, А.М. Гупала, В.І. Норкіна та ін. Проблемам стохастичної ідентифікації присвячені роботи І.А. Ібрагімова, Р.З. Хасьмінського, А.С. Холево, О.Я. Дороговцева, М.М. Леоненка, О.В. Іванова, П.С. Кнопова та ін.

В дисертації досліджуються задачі стохастичного програмування та стохастичної ідентифікації, де розглядаються не випадкові величини, а стаціонарні випадкові процеси або однорідні випадкові поля. Такі задачі виникають при керуванні об'єктом з випадковим впливом, що змінюється у часі і просторі.

Мета роботи полягає у знаходженні достатніх умов слушності та асимптотичної нормальності емпіричних оцінок для деяких задач стохастичного програмування та ідентифікації.

Методика досліджень. Для дослідження емпіричних оцінок використовуються апарати асимптотичного стохастичного аналізу, функціонального аналізу та математичного аналізу.

Наукова новизна. У роботі розглядаються нові задачі стохастичного програмування та ідентифікації, в яких фігурують стаціонарні випадкові процеси або однорідні випадкові поля. Досліджуються нові задачі ідентифікації параметрів регресії, де регресійна модель визначається не умовним математичним очікуванням, а умовною медіаною.

Теоретична та практична цінність. Результати роботи носять теоретичний характер. Наведені достатні умови слушності та асимптотичної нормальності емпіричних оцінок для нових різновидів задач стохастичного програмування та ідентифікації. Робота має прикладне значення для теорії розпізнавання та керування. Отримані результати можуть використовуватися при дослідженні регресійних моделей з функцією критерію загального вигляду, що включає як частинні випадки знаходження оцінок максимальної правдоподібності, найменших квадратів, найменших модулів та ін.

Апробація роботи. Результати роботи доповідались на IV Міжнародній конференції з теорії ймовірностей та математичної статистики (Вільнюс, 1989), на VI радянсько-японському симпозіумі з теорії ймовірностей та математичної статистики (Київ, 1991), на VI Міжнародній конференції з стохастичного програмування (Удіна, 1992), на семінарі відділу математичних методів дослідження операцій Інституту кібернетики НАН України, на семінарі кафедри прикладної статистики факультету кібернетики Київського національного університету.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в роботах [1 - 10].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається із вступу, двох глав, висновку та переліку використаної літератури, що налічує 77 найменувань. Обсяг роботи - 103 сторінки машинописного тексту.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовується актуальність обраної теми, дається перелік основних наукових праць за цією тематикою, наводиться загальна характеристика дисертації та коротко викладається зміст роботи.

У першій главі "Емпіричні оцінки в задачах стохастичного програмування" у різних варіаціях досліджується задача стохастичного програмування, де під знаком математичного очікування стоїть функція двох аргументів: 1) параметра оптимізації; 2) випадкової функції. Глава складається з двох параграфів.

У першому параграфі глави розглядається проблема оптимізації з векторним параметром. Параграф включає в себе два пункти. У першому пункті досліджуються задачі оптимізації у загальному вигляді, у другому - задачі оцінки параметрів нелінійної регресії, до яких застосовуються отримані у першому пункті результати.

У другому параграфі першої глави розглядаються задачі оптимізації з параметром, що належить $C[0,1]^m$ - простору неперервних на паралелепіпеді $[0,1]^m = \{ \vec{x} = (x_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m : 0 \leq x_i \leq 1 , i = \overline{1,m} \}$ дійсних функцій, $m \geq 1$. У цьому параграфі теж два пункти. У першому пункті розглядається проблема в загальному вигляді, у другому - використання результатів першого пункту для оцінки непараметричних функцій регресії.

У другій главі "Властивості оцінок найменших квадратів параметрів лінійної регресії для однорідних гауссівських полів" досліджується задача стохастичної ідентифікації: оцінювання параметрів лінійної регресії першої компоненти векторного однорідного гауссівського поля на інші його компоненти. Глава включає два параграфи. У першому параграфі розглядається оцінка найменших квадратів за спостереженням поля на паралелепіпеді, у другому - за спостереженням поля на кулі.

У висновку коротко сформульовано основні результати роботи.

Глава І. Емпіричні оцінки в задачах стохастичного програмування

І.І. *Задачі оптимізації за векторним параметром*

І.І.1. Задачі у загальній постановці

Нехай $\{ \xi(t) = \xi(t,\omega) , t \in \mathbb{R} \}$ - вимірний стаціонарний у вузькому розумінні метрично транзитивний випадковий процес, визначений на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ і приймаючий значення в деякому метричному просторі $(Y, \mathfrak{B}(Y))$. Припустимо, що J - замкнена підмножина $\mathbb{R}^l$, $l \geq 1$. Задано невід'ємну функцію $f : J \times Y \to \mathbb{R}$, що задовольняє таким умовам: І) для будь-якого фіксованого $z \in Y$ функція $f(\vec{u},z)$, $\vec{u} \in J$, неперервна; 2) при кожному $\vec{u} \in J$ відображення $f(\vec{u},z)$, $z \in Y$, $\mathfrak{B}(Y)$ - вимірне. Є спостереження частини траєкторії процесу: $\{ \xi(t) , t \in [0,T] \}$, $T > 0$. Потрібно знайти вектори з J , за яких досягає мінімуму функція

$$F(\vec{u}) = Mf(\vec{u},\xi(0)) , \vec{u} \in J , \tag{I}$$

та мінімальне значення цієї функції. Ця проблема апроксимується задачею пошуку точок мінімуму та мінімального значення емпіричної функції

$$F_T(\vec{u}) = F_T(\vec{u},\omega) = \frac{1}{T}\int_0^T f(\vec{u},\xi(t))\,dt\ ,\ \vec{u}\in J\ , \qquad (2)$$

де мається на увазі інтеграл Лебега.

Т е о р е м а I.I. Припустимо, що виконані такі умови:

I) для всіх $c > 0$ $M\{\max\limits_{|\vec{u}|\leqslant c} f(\vec{u},\xi(0))\} < \infty$;

2) якщо множина J не обмежена, то при будь-якому $z \in Y'$, $P\{\xi(t) \in Y'$ для всіх $t \geqslant 0\} = 1$, маємо $f(\vec{u},z) \to \infty$, $|\vec{u}| \to \infty$;

3) існує єдиний вектор $\vec{u}_0 \in J$, який є точкою мінімуму функції (I).

Тоді для будь-яких $T > 0$ та $\omega \in \Omega'$, $P(\Omega') = 1$, знайдеться хоч один вектор $\vec{u}(T) = \vec{u}(T,\omega) \in J$, за якого функція (2) має мінімальне значення, причому для кожного $T > 0$ відображення $\vec{u}(T,\omega)$, $\omega \in \Omega'$, можна вибрати $\mathfrak{S}'$ - вимірним, де $\mathfrak{S}' = \{A \in \mathfrak{S} : A \subset \Omega'\}$. При будь-якому виборі функції $\vec{u}(T,\omega)$ (вимірність за ω не є обов'язковою) з ймовірністю 1

$$\vec{u}(T) \to \vec{u}_0\ ,\ F_T(\vec{u}(T)) \to F(\vec{u}_0)\ ;\ T \to \infty\ .$$

Т е о р е м а I.2. Припустимо, що траєкторії процесу $\xi(t)$ неперервні з ймовірністю 1 , функція f неперервна на $J \times Y$, $Mf(\vec{u},\xi(0)) < \infty$, $\vec{u} \in J$. Нехай $\vec{u}_0$ та $\vec{u}(T) = \vec{u}(T,\omega)$ - деякі точки мінімуму функцій (I) та (2) відповідно; $T > 0$, $\omega \in \Omega'$, $P(\Omega') = 1$; причому для будь-якого $T > 0$ відображення $\vec{u}(T,\omega)$, $\omega \in \Omega'$, $\mathfrak{S}'$ - вимірне. Нехай $\vec{u}(T) \to \vec{u}_0$, $T \to \infty$, за ймовірністю, та виконані наступні умови:

I) $\vec{u}_0$ - внутрішня точка множини J ;

2) існує такий замкнений окіл S точки $\vec{u}_0$, що при кожному $z \in Y$ функція $f(\vec{u},z)$, $\vec{u} \in S$, двічі неперервно диференційовна на S ;

3) $M\{\max\limits_{\vec{u}\in S} |\vec{\nabla} f(\vec{u},\xi(0))|\} < \infty$, де

$\vec{\nabla} f(\vec{u},z) = \left[\frac{\partial f}{\partial u_j} (\vec{u},z) \right]_{j=1}^{l}$, $\vec{u} = (u_j)_{j=1}^{l} \in S$, $z \in Y$;

4) для будь-якого $T > 0$ з ймовірністю 1

$$\int_0^T \max_{\vec{u} \in S} |\Phi(\vec{u},\xi(t))| \, dt < \infty , \text{ де } \Phi(\vec{u},z) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_k} (\vec{u},z) \right]_{j,k=1}^{l} ;$$

$|\cdot|$ - евклідова норма у векторному просторі матриць $l \times l$ з дійсними елементами;

5) функція $\Phi(\vec{u},z)$ неперервна в точці $\vec{u}_0$ рівномірно за $z \in Y'$, $P\{ \xi(t) \in Y'$ для всіх $t \geq 0 \} = 1$:
$\sup_{z \in Y'} | \Phi(\vec{u},z) - \Phi(\vec{u}_0,z) | \to 0$, $\vec{u} \to \vec{u}_0$;

6) $M|\Phi(\vec{u}_0,\xi(0))| < \infty$, причому матриця $A_0 = M\Phi(\vec{u}_0,\xi(0))$ невироджена;

7) процес $\xi(t)$ задовольняє умові сильного перемішування:
$\sup_{A \in \mathfrak{F}_{-\infty}^{t}, B \in \mathfrak{F}_{t+\tau}^{+\infty}} | P(A \cap B) - P(A)P(B) | = \psi(\tau) \to 0$, $\tau \to \infty$, де $\tau > 0$; $\mathfrak{F}_{-\infty}^{t} = \sigma\{ \xi(s) , s \in]-\infty,t] \}$ - σ - алгебра, породжена випадковими величинами $\xi(s)$, $s \in]-\infty,t]$; $\mathfrak{F}_{t+\tau}^{+\infty} = \sigma\{ \xi(s) , s \in [t+\tau,+\infty[\}$; причому $\psi(\tau) = O(\tau^{-1-\varepsilon})$, $\tau \to \infty$, де $\varepsilon > 0$;

8) при деякому $\delta > 4/\varepsilon$ $M|\vec{\nabla} f(\vec{u}_0,\xi(0))|^{2+\delta} < \infty$;

9) функція $\vec{\nabla} f(\vec{u}_0,z)$, $z \in Y$, неперервна;

10) матриця $g(0)$ невироджена, де $g(\lambda) = (g_{jk}(\lambda))_{j,k=1}^{l}$ - спектральна щільність процесу $\{ \vec{\nabla} f(\vec{u}_0,\xi(t)) , t \in \mathbb{R} \}$.

Тоді $\sqrt{T}(\vec{u}(T) - \vec{u}_0)$ збігається за розподілом до $N(\vec{0}, 2\pi(A_0)^{-1} g(0) (A_0)^{-1})$ - гауссівського розподілу в $\mathbb{R}^l$, $T \to \infty$.

Нехай також виконані умови

11) для деякого $\delta_1 > 4/\varepsilon$ $M(f(\vec{u}_0,\xi(0)))^{2+\delta_1} < \infty$;

12) $g_1(0) \neq 0$, де $g_1(\lambda)$ - спектральна щільність процесу $\{ f(\vec{u}_0,\xi(t)) , t \in \mathbb{R} \}$.

Тоді $\sqrt{T}(F_T(\vec{u}(T)) - F(\vec{u}_0))$ збігається за розподілом до $N(0,2\pi g_1(0))$ при $T \to \infty$.

Твердження, аналогічні теоремам 1.1 та 1.2, мають місце для стаціонарного у вузькому розумінні метрично транзитивного випадкового процесу з дискретним параметром $\{ \xi_i, i \in \mathbb{Z} \}$ та однорідного у вузькому розумінні випадкового поля $\{ \xi(\vec{t}), \vec{t} \in \mathbb{R}^m \}$ з неперервними траєкторіями, що задовольняє умові сильного перемішування, $m \geq 1$.

I.I.2. Ідентифікація параметрів нелінійної регресії - частинний випадок задачі стохастичного програмування

Із теореми I.I та її аналогів випливає сильна слушність оцінок найменших модулів параметрів нелінійної регресії для вимірних стаціонарних у вузькому розумінні метрично транзитивних випадкових процесів з неперервним або дискретним часом та однорідних у вузькому розумінні випадкових полів з неперервними траєкторіями, які задовольняють умові сильного перемішування.

Нехай $\{ (\vec{x}(t), \vec{y}(t)) , t \in \mathbb{R} \}$ - вимірний стаціонарний у вузькому розумінні метрично транзитивний випадковий процес, визначений на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{G}, P)$, із значеннями в $\mathbb{R}^{k+m}$; $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^k$, $\vec{y}(t) \in \mathbb{R}^m$, $t \in \mathbb{R}$; $k \geq 1$, $m \geq 1$. Позначимо $\|\vec{a}\|_1 = \sum_{j=1}^{k} |a_j|$, $\vec{a} = (a_j)_{j=1}^k \in \mathbb{R}^k$. Зробимо наступні припущення.

1. При кожному $j \in \{\overline{1,k}\}$ з ймовірністю 1

$$P\{ x_j(0) < f_j(\vec{\theta}, \vec{y}(0)) / \vec{y}(0) \} \leq 1/2 ;$$

$$P\{ x_j(0) \leq f_j(\vec{\theta}, \vec{y}(0)) / \vec{y}(0) \} \geq 1/2 ,$$

де $\vec{x}(0) = (x_j(0))_{j=1}^k$; $\vec{\theta} \in J$; J - замкнена підмножина $\mathbb{R}^l$, $l \geq 1$; $\vec{f} = (f_j)_{j=1}^k : J \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ - задана функція, така, що для будь-якого $\vec{z} \in \mathbb{R}^m$ відображення $\vec{f}(\vec{u}, \vec{z})$, $\vec{u} \in J$, неперервне, а при кожному $\vec{u} \in J$ функція $\vec{f}(\vec{u}, \vec{z})$, $\vec{z} \in \mathbb{R}^m$, вимірна.

2. $M\|\vec{x}(0)\|_1 < \infty$.

3. Для всіх $c > 0$ $M\{ \max\limits_{\|u\| \leq c} \|\vec{f}(\vec{u}, \vec{y}(0))\|_1 \} < \infty$.

4. Якщо множина J не обмежена, то при будь-якому $\vec{z} \in A$, $P\{ \vec{y}(t) \in A$ для всіх $t \geq 0 \} = 1$ маємо $\|\vec{f}(\vec{u}, \vec{z})\|_1 \to \infty$, $\|\vec{u}\| \to \infty$.

Позначимо $\vec{\eta} = (\eta_j)_{j=1}^k = \vec{x}(0) - \vec{f}(\vec{\theta}, \vec{y}(0))$. Нехай

$q_j(B,\vec{z})$, $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $\vec{z} \in \mathbb{R}^m$, - регулярний умовний розподіл випадкової величини η_j за умови $\vec{y}(0) = \vec{z}$, $j = \overline{1,k}$.

5. Для кожного $\vec{u} \in J$, $\vec{u} \neq \vec{\theta}$, знайдуться індекс $j_0 = j_0(\vec{u}) \in \{\overline{1,k}\}$ та множина $C = C(\vec{u}) \subset \mathbb{R}^m$, $P\{\ \vec{y}(0) \in C\ \} > 0$, такі, що при будь-якому $\vec{z} \in C$ число $\beta = f_{j_0}(\vec{u},\vec{z}) - f_{j_0}(\vec{\theta},\vec{z})$ не є медіаною розподілу $q_{j_0}(B,\vec{z})$, $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

Потрібно за спостереженням $\{\ (\vec{x}(t),\vec{y}(t))\ ,\ t \in [0,T]\ \}$ частини траєкторії процесу оцінити вектор $\vec{\theta}$, $T > 0$. Розглянемо оцінку найменших модулів, яка є точкою мінімуму функції

$$F_T(\vec{u}) = \frac{1}{T}\int_0^T \| \vec{x}(t) - \vec{f}(\vec{u},\vec{y}(t)) \|_1 \, dt \ ,\ \vec{u} \in J\ , \tag{3}$$

де мається на увазі інтеграл Лебега.

Т е о р е м а I.3. Якщо вірні припущення I - 5, то для будь-яких $T > 0$ та $\omega \in \Omega'$, $P(\Omega') = 1$, існує хоч одна точка мінімуму $\vec{\theta}(T) = \vec{\theta}(T,\omega)$ функції (3). При довільному її виборі з ймовірністю 1

$$\vec{\theta}(T) \to \vec{\theta}\ ,\ F_T(\vec{\theta}(T)) \to F(\vec{\theta})\ ;\ T \to \infty\ ,$$

де $F(\vec{u}) = M\| \vec{x}(0) - \vec{f}(\vec{u},\vec{y}(0)) \|_1$, $\vec{u} \in J$.

Аналогічні результати мають місце для процесу з дискретним часом та випадкового поля.

I.2. *Оптимізація за параметром-функцією*

I.2.I. Загальна постановка задач

Нехай $C[0,1]^m$, $m \geq 1$, - простір дійсних функцій, визначених та неперервних на $[0,1]^m$, з нормою

$$\|\alpha\| = \max_{\vec{t}\in[0,1]^m} |\alpha(\vec{t})|\ ,\ \alpha = \alpha(\vec{t}) \in C[0,1]^m\ .$$

Припустимо, що K - деяка компактна підмножина $C[0,1]^m$. Тоді знайдеться таке число c , що $\|\alpha\| \leq c$, $\alpha \in K$. Позначимо $I = [-c,c]$. Нехай $\xi = \xi(\omega)$ - випадковий елемент, заданий на повному ймовірнісному просторі $(\Omega,\mathfrak{F},P)$, із значеннями в деякому вимірному просторі $(Y,\mathfrak{A})$. Задана функція $f : [0,1]^m \times I \times Y \to \mathbb{R}$, яка задовольняє таким умовам: I) для будь-якого $y \in Y$ відображення $f(\vec{t},x,y)$, $\vec{t} \in [0,1]^m$,

$x \in I$, неперервне; 2) при всіх $\vec{t} \in [0,1]^m$, $x \in I$ відображення $f(\vec{t},x,y)$, $y \in Y$, $\mathfrak{A}$ - вимірне; 3) для кожної функції $\alpha \in K$ знайдеться така константа L, що $M|f(\vec{t},\alpha(\vec{t}),\xi)| \leq L$, $\vec{t} \in [0,1]^m$. Маємо незалежні спостереження $\{ \xi(\vec{i},\vec{n})$, $\vec{i} \in Z_+^m$, $\vec{i} \leq \vec{n} \}$ випадкового елемента ξ , $\vec{n} \in \mathbb{N}^m$, де

$Z_+^m = \{ \vec{i} = (i_j)_{j=1}^m : i_j \in Z , i_j \geq 0 , j = \overline{1,m} \}$,

$\mathbb{N}^m = \{ \vec{n} = (n_j)_{j=1}^m : n_j \in \mathbb{N} , j = \overline{1,m} \}$, а нерівність

$\vec{i} = (i_j)_{j=1}^m \leq \vec{n} = (n_j)_{j=1}^m$ означає $i_j \leq n_j$, $j = \overline{1,m}$. Задача полягає в знаходженні функцій з K , які є точками мінімуму функціонала

$$F(\alpha) = M \int_{[0,1]^m} f(\vec{t},\alpha(\vec{t}),\xi)\, d\vec{t} , \quad \alpha \in K , \tag{4}$$

та мінімального значення цього функціонала. Замінюємо її мінімізацією функціонала

$$F_{\vec{n}}(\alpha) = F_{\vec{n}}(\alpha,\omega) =$$

$$= \frac{1}{\prod_{j=1}^{m} n_j} \sum_{\vec{i} \leq \vec{n}} f(\vec{t}(\vec{i},\vec{n}),\alpha(\vec{t}(\vec{i},\vec{n})),\xi(\vec{i},\vec{n})) , \quad \alpha \in K , \tag{5}$$

де $\vec{n} = (n_j)_{j=1}^m$; $\vec{i} = (i_j)_{j=1}^m$; $\vec{t}(\vec{i},\vec{n}) = (i_j / n_j)_{j=1}^m$.

Т е о р е м а I.4. Припустимо, що виконані умови

I) існує така стала L , що для всіх $\vec{t} \in [0,1]^m$

$$M \{ \max_{\alpha \in K} (f(\vec{t},\alpha(\vec{t}),\xi))^4 \} \leq L ;$$

2) функція (4) має єдину точку мінімуму α_0 .

Тоді при будь-якому виборі точки мінімуму $\alpha_{\vec{n}} = \alpha_{\vec{n}}(\omega)$, $\vec{n} \in \mathbb{N}^m$, $\omega \in \Omega$, функції (5) маємо

$$P\{ \| \alpha_{\vec{n}} - \alpha_0 \| \to 0 , F_{\vec{n}}(\alpha_{\vec{n}}) \to F(\alpha_0) ; n_j \to \infty , j = \overline{1,m} \} = 1.$$

Аналогічне теоремі I.4 твердження має місце у тому випадку, коли замість випадкового елемента розглядається випадкове поле із змінною меншої вимірності, ніж m , а емпіричний функціонал має вигляд суми інтегралів по перерізу паралелепіпеда $[0,1]^m$.

I.2.2. Оцінка неперервної функції за наявними спостереженнями її значень

Із теореми I.4 випливає слушність оцінки найменших модулів неперервної функції за незалежними спостереженнями її значень у деяких точках.

Нехай K - компактна підмножина $C[0,1]^m$, $m \geq 1$; α_0 - фіксована невідома функція з K. Є спостереження

$$x(\vec{i},\vec{n}) = \alpha_0(\vec{t}(\vec{i},\vec{n})) + \xi(\vec{i},\vec{n}),\ \vec{i} \in Z_+^m,\ \vec{i} \leq \vec{n},$$

де всі позначення розглянуті вище, $\{\xi(\vec{i},\vec{n}),\ \vec{i} \leq \vec{n}\}$ - незалежні дійсні випадкові величини, задані на повному ймовірнісному просторі $(\Omega,\mathfrak{G},P)$ та задовольняючі таким умовам: I) величина $\xi(\vec{i},\vec{n})$ має однаковий розподіл за всіх $\vec{n} \in N^m$, $\vec{i} \leq \vec{n}$; 2) число 0 є єдиною медіаною розподілу $\xi(\vec{i},\vec{n})$; 3) $M(\xi(\vec{i},\vec{n}))^4 < \infty$. Потрібно оцінити функцію α_0. Розглянемо оцінку найменших модулів, яка є точкою мінімуму за $\alpha \in K$ функції

$$P_{\vec{n}}(\alpha) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{m} n_j} \sum_{\vec{i} \leq \vec{n}} |\, x(\vec{i},\vec{n}) - \alpha(\vec{t}(\vec{i},\vec{n}))\,| . \qquad (6)$$

Теорема I.5. Для будь-яких $\vec{n} \in N^m$, $\omega \in \Omega$ існує хоч одна точка мінімуму $\alpha_{\vec{n}} = \alpha_{\vec{n}}(\omega)$ функціоналу (6). При довільному виборі $\alpha_{\vec{n}}(\omega)$ з ймовірністю 1

$$\|\alpha_{\vec{n}} - \alpha_0\| \to 0,\ P_{\vec{n}}(\alpha_{\vec{n}}) \to M|\xi(\vec{0},\vec{1})|;\ n_j \to \infty,\ j = \overline{1,m};$$

де $\vec{0}$ та $\vec{1}$ - вектори з R^m, всі координати яких дорівнюють 0 та 1 відповідно.

Аналогічна теорема має місце, якщо неперервна на $[0,1]^m$ функція оцінюється за спостереженнями її значень у всіх точках, що є векторами, перша частина яких належить до розбиття заданого перерізу $[0,1]^m$, а друга - до перерізу, що є доповнюючим до заданого.

Глава 2. Властивості оцінок найменших квадратів параметрів лінійної регресії для однорідних гауссівських полів

Нехай $\{(x(\vec{t}),\vec{y}(\vec{t})),\ \vec{t} \in R^m\}$, $m \geq 2$, - однорідне гауссівське випадкове поле, задане на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{G}, P)$; $x(\vec{t}) \in \mathbb{R}$, $\vec{y}(\vec{t}) \in \mathbb{R}^l$, $\vec{t} \in \mathbb{R}^m$; $l \geqslant 1$. Далі будемо використовувати наступні припущення.

I. При кожному $\vec{t} \in \mathbb{R}^m$ з ймовірністю 1

$$M \{ x(\vec{t}) / \mathfrak{F} \} = (\vec{y}(\vec{t}))' \vec{\theta} ,$$

де $\mathfrak{F} = \sigma \{ \vec{y}(\vec{\tau}) , \vec{\tau} \in \mathbb{R}^m \}$; $\vec{\theta} \in \mathbb{R}^l$ - деякий фіксований вектор; штрих - символ транспонування.

2. Траєкторії поля $(x(\vec{t}), \vec{y}(\vec{t}))$ неперервні з ймовірністю 1.

Введемо позначення

$$\vec{y}(\vec{t}) = (y_j(\vec{t}))_{j=1}^{l} , \ \xi(\vec{t}) = x(\vec{t}) - (\vec{y}(\vec{t}))' \vec{\theta} , \ \vec{t} \in \mathbb{R}^m ;$$

$$a_j = My_j(\vec{0}) , \ j = \overline{1,l} ; \ \vec{a} = (a_j)_{j=1}^{l} ;$$

$$y_j^0(\vec{t}) = y_j(\vec{t}) - a_j , \ \vec{t} \in \mathbb{R}^m , \ j = \overline{1,l} ;$$

$$r_{jk}(\vec{t}) = My_j^0(\vec{t}) y_k^0(\vec{0}), \ j,k = \overline{1,l} , \ r(\vec{t}) = M\xi(\vec{t})\xi(\vec{0}) , \ \vec{t} \in \mathbb{R}^m .$$

3. Кореляційні функції задовольняють умовам

а) $c_{jk} = \int\limits_{\mathbb{R}^m} |r_{jk}(\vec{t})| \, d\vec{t} < \infty , \ j,k = \overline{1,l}$;

б) для будь-якої множини індексів $I \subset \{ \overline{1,m} \}$, $I \neq \{ \overline{1,m} \}$,

$$c_{jk}(I) = \int\limits_{\mathbb{R}^{N(I)}} |r_{jk}(\vec{\phi}(\vec{\tau}, I))| \, d\vec{\tau} < \infty , \ j,k = \overline{1,l} ,$$

де $N(I)$ - кількість елементів у множині I ; $\vec{\phi}(\vec{\tau}, I)$ - вектор з $\mathbb{R}^m$, у якого координати з індексами, що не належать до I , дорівнюють 0 , а координати з індексами з I дорівнюють у порядку зростання індексу координатам вектора $\vec{\tau}$;

в) $c = \int\limits_{\mathbb{R}^m} |r(\vec{t})| \, d\vec{t} < \infty$;

г) для кожного $I \subset \{ \overline{1,m} \}$, $I \neq \{ \overline{1,m} \}$,

$$c(I) = \int\limits_{\mathbb{R}^{N(I)}} |r(\vec{\phi}(\vec{\tau}, I))| \, d\vec{\tau} < \infty ,$$

де позначення введені таким же чином, як і в пункті б).

4. Матриця $(r_{jk}(\vec{0}))_{j,k=1}^{l}$ невироджена.

Позначимо $G(\vec{T}) = \{ \vec{t} = (t_i)_{i=1}^{m} \in \mathbb{R}^m : 0 \leqslant t_i \leqslant T_i$, $i = \overline{1,m} \}$. Тут і далі будемо вважати, що $\vec{T} = (T_i)_{i=1}^{m} \in \mathbb{R}^m$, $T_i > 0$, $i = \overline{1,m}$.

Нехай вірні припущення I, 2. Потрібно за спостереженням $\{ (x(\vec{t}),\vec{y}(\vec{t}))$, $\vec{t} \in G(\vec{T}) \}$ частини траєкторії поля оцінити вектор $\vec{\theta}$. Розглянемо оцінку найменших квадратів, яка є точкою мінімуму функції

$$F_{\vec{T}}(\vec{u}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{m} T_i} \int_{G(\vec{T})} (x(\vec{t}) - (\vec{y}(\vec{t}))'\vec{u})^2 \, d\vec{t} \, , \; \vec{u} \in \mathbb{R}^l . \qquad (7)$$

Позначимо $Q(\vec{T}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{m} T_i} \int_{G(\vec{T})} \vec{y}(\vec{t})(\vec{y}(\vec{t}))' \, d\vec{t}$.

Т е о р е м а 2.I. Якщо вірні припущення I, 2, 3а), 3в), 4, то для будь-яких $\vec{T}$ та $\omega \in \Omega(\vec{T})$, $P(\Omega(\vec{T})) \to 1$, $\prod_{i=1}^{m} T_i \to \infty$, функція (7) має єдину точку мінімуму

$$\vec{\theta}(\vec{T}) = \vec{\theta}(\vec{T},\omega) = (Q(\vec{T}))^{-1} \frac{1}{\prod_{i=1}^{m} T_i} \int_{G(\vec{T})} x(\vec{t})\vec{y}(\vec{t}) \, d\vec{t} \, , \qquad (8)$$

причому для кожного $\varepsilon > 0$

$$P \{ \omega \in \Omega(\vec{T}) : \| \vec{\theta}(\vec{T},\omega) - \vec{\theta} \| > \varepsilon \} \to 0 , \quad \prod_{i=1}^{m} T_i \to \infty .$$

Якщо ж вірні всі припущення I - 4, то з ймовірністю 1, починаючи з деяких значень T_i , $i = \overline{1,m}$, що залежать від ω , існує єдина точка мінімуму функції (7), яка визначається формулою (8), причому

$$P \{ \vec{\theta}(\vec{T}) \to \vec{\theta} \; ; \; T_i \to \infty , \; i = \overline{1,m} \} = 1 .$$

Т е о р е м а 2.2 . Нехай вірні припущення I, 2, 3а), 3в), 4. Тоді при будь-якому $\vec{v} \in \mathbb{R}^l$

$$\int_{\Omega(\vec{T})} e^{i\vec{v}'\vec{\Delta}(\vec{T},\omega)} \, dP \to e^{-\vec{v}'Q^{-1}HQ^{-1}\vec{v}/2} \; ; \; T_i \to \infty , \; i = \overline{1,m} ,$$

де $\vec{\Delta}(\vec{T}) = \vec{\Delta}(\vec{T},\omega) = \left(\prod_{i=1}^{m} T_i \right)^{1/2} (\vec{\theta}(\vec{T},\omega) - \vec{\theta})$;

$$Q = (r_{jk}(\vec{0}) + a_j a_k)_{j,k=1}^{l} ;$$

$$H = \Big[a_j a_k \int_{\mathbb{R}^m} r(\vec{t})\, d\vec{t} + \int_{\mathbb{R}^m} r(\vec{t}) r_{jk}(\vec{t})\, d\vec{t} \Big]_{j,k=1}^{l} .$$

Аналогічні твердження мають місце у тому випадку, коли поле спостерігається не на паралелепіпеді, а на кулі.

ВИСНОВКИ

1. У роботі розглянуто в загальному вигляді задачу стохастичного програмування з векторним параметром, у якій фігурує значення в деякій точці стаціонарного випадкового процесу або однорідного випадкового поля. Наведено достатні умови сильної слушності та асимптотичної нормальності емпіричних оцінок розв'язку цієї задачі.

2. Досліджено задачу ідентифікації параметрів нелінійної регресії однієї частини векторного стаціонарного процесу або однорідного поля на іншу. Сформульовано достатні умови сильної слушності узагальненої оцінки найменших модулів.

3. Досліджено деякі варіанти задачі стохастичного програмування з параметром-функцією. Знайдено достатні умови сильної слушності емпіричних оцінок розв'язків.

4. Розглянуто проблему ідентифікації для двох непараметричних регресійних моделей. Наведено достатні умови сильної слушності оцінок найменших модулів.

5. Досліджено задачу ідентифікації параметрів лінійної регресії першої компоненти векторного однорідного гауссівського поля на інші його компоненти. Сформульовано достатні умови існування, слушності та асимптотичної нормальності оцінок найменших квадратів.

У спільних роботах з П.С.Кноповим [1, 3] пошукувачем була досліджена асимптотична поведінка оцінок найменших квадратів, у роботах [6, 8, 9] доведені теореми про сильну слушність оцінок найменших модулів, у [4, 7, 10] показані збіжність та асимптотична нормальність емпіричних оцінок.

Основні положення дисертації опубліковані в таких працях:

1. Кнопов П.С., Касицкая Е.И. Асимптотические свойства оценок наименьших квадратов гауссовской регрессии для случайных полей // Кибернетика. - 1989. - № 5. - С. 64 - 68.

2. Касицкая Е.И. Свойства оценок наименьших квадратов для регрессии гауссовских однородных изотропных полей // Математические методы анализа и оптимизации сложных систем, функционирующих в условиях неопределенности. - Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР, 1989. - С. 22 - 27.

3. Кнопов П.С., Касицкая Е.И. Об асимптотическом поведении нелинейных параметров случайных функций // IV Междунар. конф. по теории вероятностей и мат. статистике: Тез. докл. - Вильнюс, 1989. - С. 65 - 70.

4. Касицкая Е.И., Кнопов П.С. Асимптотическое поведение эмпирических оценок в задачах стохастического программирования // Докл. АН СССР. - 1990. - 315, № 2. - С. 279 - 281.

5. Касицкая Е.И. Аппроксимация решения задачи стохастического программирования с помехой, являющейся однородным случайным полем // Математические методы принятия решений в условиях неопределенности. - Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР, 1990. - С. 23 - 27.

6. Касицкая Е.И., Кнопов П.С. О сходимости эмпирических оценок в задачах стохастической оптимизации // Кибернетика. - 1991. - № 2. - С. 104 - 107, 112.

7. Kasitskaya E.J., Knopov P.S. About one approach to the nonlinear estimating problem // Probability Theory and Mathematical Statistics. - Singapore: World Scientific, 1992. - P. 151 - 157.

8. Кнопов П.С., Касицкая Е.И. О некоторых задачах идентификации параметров нелинейной регрессии в дискретном случае // Кибернетика и вычисл. техника. - 1993. - Вып. 97. - С. 11 - 15.

9. Кнопов П.С., Касицкая Е.И. Метод наименьших модулей в моделях идентификации с дискретным временем // Там же. - 1994. - Вып. 101. - С. 80 - 86.

10. Knopov P.S., Kasitskaya E.J. Properties of empirical

estimates in stochastic optimization and identification problems // Annals of Operations Research. - 1995. - V. 56. - P. 225 - 239.

Е.И. Касицкая. Асимптотические свойства эмпирических оценок решений некоторых задач стохастического программирования и стохастической идентификации. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 0I.05.0I - теоретические основы информатики и кибернетики (математическая кибернетика), Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, I997.

Диссертация содержит ряд теорем о достаточных условиях состоятельности и асимптотической нормальности эмпирических оценок решений некоторых задач стохастического программирования и идентификации. Исследуются задачи с векторным параметром и параметром-функцией.

E.J. Kasitskaya

The Asimptotical Properties of the Empirical Estimates of the Solutions of some Stochastic Programming and Stochastic Identification Problems. Thesis for a degree of Candidate of Science (Ph.D.) in Physics and Mathematics, speciality 0I.05.0I - the Theoretical Fundamentals of Informatics and Cybernetics (Mathematical Cybernetics), Ukrainian National Academy of Science, Institute of Cybernetics, named after V.M.Glushkov, Kyiv, I997.

The thesis contains several theorems about the sufficient conditions for consistency and asymptotical normality of the empirical estimates of the solutions of some stochastic programming and identification problems. The problems with the vector parameter and the parameter-function are investigated.

Ключові слова:
задача стохастичного програмування, стохастична ідентифікація, емпірична оцінка, слушність оцінки, асимптотична нормальність, стаціонарний випадковий процес, однорідне випадкове поле, регресія.

ПІдп. до друку II.04.97. Формат 60x84/I6. ПапІр офс. Офс друк.
Ум. друк. арк. 0,70. Ум. фарбо-вІдб. 0,93. Обл.-вид.арк. 0,88.
Зам. I48. Тираж I00 прим.

РедакцІйно-видавничий вІддІл з полІграфІчною дІльницею
Інституту кІбернетики ІменІ В.М.Глушкова НАН УкраІни
252022 КиІв 22, проспект АкадемІка Глушкова, 40

estimates in stochastic optimization and identification problems // Annals of Operations Research. - 1995. - V. 56. - P. 225 - 239.

В.И. Норкин. Асимптотические свойства эмпирических оценок решений некоторых задач стохастического программирования и стохастической идентификации. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.01 - теоретические основы информатики и кибернетики (математическая кибернетика). Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, 1997.

Диссертация содержит ряд теорем о достаточных условиях состоятельности и асимптотической нормальности эмпирических оценок решений некоторых задач стохастического программирования и идентификации. Исследуются задачи с векторным параметром и параметром-функцией.

V.I. Norkin

The Asymptotical Properties of the Empirical Estimates of the Solutions of Some Stochastic Programming and Stochastic Identification Problems. Thesis for a Degree of Candidate of Science (Ph.D.) in Physics and Mathematics , speciality 01.05.01 - the Theoretical Fundamentals of Information and Cybernetics (Mathematical Cybernetics) . Ukrainian National Academy of Science, Institute of Cybernetics, named after V.M.Glushkov, Kyiv, 1997.

The thesis contains several theorems about the sufficient conditions for consistency and asymptotical normality of the empirical estimates of the solutions of some stochastic programming and identification problems. The problems with the vector parameter and the parameter-function are investigated.

Ключові слова