НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

БЛАЩАК Наталія Іванівна

ПРО ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

01.01.02 — диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 1997

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі звичайних диференціальних рівнянь Інституту математики НАН України

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, ПЕЛЮХ Г.П.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор КОРЕНІВСЬКИЙ Д.Г.

доктор фізико-математичних наук, професор САМОЙЛЕНКО В.Г.

Провідна установа: Чернівецький державний університет імені Ю. Федьковича

Захист дисертації відбудеться "27" травня 1997 року о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради Д.01.66.02 при Інституті математики НАН України за адресою:
252601 Київ - 4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці інституту.

Автореферат розіслано "18" квітня 1997 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради А.Ю. ЛУЧКА

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Диференціально-функціональні рівняння широко застосовуються в багатьох областях сучасної науки. Особливо численні застосування знайшли такі рівняння в фізиці, біології, економіці і теорії автоматичного регулювання. Це, очевидно, і мало велике значення для активного розвитку самої теорії таких рівнянь, який спостерігається в останні десятиріччя.

Насьогодні існує велика кількість робіт, в яких досліджено багато задач для різних класів диференціально-функціональних рівнянь. Серед них помітне місце займають роботи М.В. Азбелєва, Р. Беллмана, Р. Драйвера, К.Л. Кука, Д.І. Мартинюка, Ю.О. Митропольського, А.Д. Мишкіса, А.М. Самойленка, Дж. Хейла, О.М. Шарковського та інших математиків. При цьому переважна більшість досліджень присвячена вивченню питань існування різного роду розв'язків (неперервно-диференційовних, аналітичних, періодичних та ін.). В першу чергу це стосується звичайних диференціально-функціональних рівнянь.

Дуже часто дослідження диференціально-функціональних рівнянь суттєво ускладнюється в порівнянні з дослідженням відповідних рівнянь без відхилень аргументів і приводить до принципових відмінностей. Особливо це стосується диференціально-функціональних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу. Наприклад, введення в рівняння невідомої функції з аргументами, що відхиляються, може привести до порушення єдиності розв'язку задачі Коші. Для диференціально-функціональних рівнянь гіперболічного типу, зокрема, з двома незалежними змінними, найменш вивченими є питання існування обмежених на R^2(періодичних) розв'язків. Оскільки дуже часто при дослідженні подібних задач не вдається скористатись відомими методами, то доводиться розробляти нові способи їх розв'язання. Звідси випливає актуальність і важливість задачі про встановлення умов існування обмежених на R^2(періодичних) розв'язків для нових класів диференціально-функціональних рівнянь з частинними похідними і розробка методів їх побудови, що є основною задачею, яка досліджується в дисертації.

Мета роботи. Метою даної роботи є встановлення умов існування обмежених на R^2 (періодичних) розв'язків для деяких гіперболічних систем з двома незалежними змінними і лінійними відхиленнями аргументів та розробка методів їх побудови.

Методика дослідження. Застосовуються методи якісної теорії диференціальних, функціональних рівнянь та методи функціонального аналізу.

Наукова новизна. Основні результати, які визначають наукову новизну і виносяться на захист, наступні:

1. Побудовано представлення розв'язків крайової періодичної задачі для лінійного гіперболічного рівняння в певних просторах функцій.
2. Одержано достатні умови існування розв'язків задачі Коші для нелінійних гіперболічних рівнянь і систем з лінійними відхиленнями аргументів.
3. Доведено існування обмежених на R^2 (періодичних) розв'язків лінійних гіперболічних систем з двома незалежними змінними і лінійними відхиленнями аргументів.
4. Розроблено метод побудови обмежених на R^2 (періодичних) розв'язків систем нелінійних диференціально-функціональних рівнянь гіперболічного типу.
5. Досліджено структуру множини розв'язків деяких нових класів звичайних нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з лінійних-

ним відхиленням аргументу.

Теоретичне і практичне значення. Робота носить теоретичний характер. Розроблені в дисертації методи дослідження та побудови обмежених (періодичних) розв'язків можна застосовувати як при дослідженні спеціальних питань теорії диференціально-функціональних рівнянь, так і при розв'язанні конкретних прикладних задач.

Апробація роботи. Результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на семінарах відділу звичайних диференціальних рівнянь Інституту математики НАН України; в школі-семінарі "Нелінійні крайові задачі математичної фізики та їх застосування", 10-14 жовтня 1996 р., м. Кам'янець- Подільський; на П'ятій Міжнародній науковій конференції ім. академіка М.П. Кравчука, 16-18 травня 1996 р., м. Київ; на Всеукраїнській конференції "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування", 15-18 травня 1996 р., м. Чернівці.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1 - 6].

Структура та об'єм дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, двох розділів, розбитих на 9 параграфів, та списку цитованої літератури з 60 назв і викладена на 101 сторінці.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі наводиться огляд літератури по тематиці дисертації, обгрунтовується актуальність теми, формулюються задачі дослідження та описуються основні результати автора.

В першому розділі дисертації вивчаються питання існування періодичних розв'язків деяких задач для диференціальних рівнянь гіперболічного типу.

В §1.1 розглядається лінійна періодична крайова задача виду

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x,t), \qquad (x,t) \in [0;\pi] \times R, \qquad (1)$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t \in R, \qquad (2)$$

$$u(x,t+T) = u(x,t), \qquad (x,t) \in [0;\pi] \times R. \qquad (3)$$

За допомогою операторів

$$(S_1 g)(x,t) = -\frac{1}{2}\int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau,$$

$$(S_2 g)(x,t) = -\frac{1}{2}\int_x^\pi d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau,$$

відшукання класичного періодичного розв'язку задачі (1)-(3) зводиться до побудови такого розв'язку для різницевого рівняння

$$b(t+\pi) + b(t) = \frac{1}{4}\int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)d\tau, \qquad (4)$$

де функція $b(t)$ має бути двічі диференційовною і задовольняти умову $b(t) = b(\pi - t)$. Оскільки саме існування періодичного розв'язку рівняння (4), а також його представлення у значній мірі залежать від властивостей правої частини, то для дослідження останнього (а, отже, і задачі (1) - (3)) були визначені простори функцій A_k, $k = 1,2,3$, які відповідають періодам T_k:

$$T_1 = 2\pi(2p-1)/q, \quad q - \text{парне}, \quad (2p-1,q) = 1,$$

$$A_1 = \{u : u(x,t) = u(\pi - x,t) = u(x,t+T_1)\};$$

$$T_2 = 2\pi(2p-1)/q, \quad q - \text{непарне}, \quad (2p-1,q) = 1,$$

$$A_2 = \{u : u(x,t) = u(\pi - x,t) = u(x,t+T_2/2)\};$$

$$T_3 = 2\pi r/q, \quad r - \text{парне}, \quad q - \text{непарне}, \quad (r,q) = 1,$$

$$A_3 = \{u : u(x,t) = u(\pi - x,t) = -u(x,t+T_3/2)\}.$$

Досліджуючи задачу (1)-(3) в цих просторах функцій, показано (теореми 1.1.2, 1.1.3), що для кожної неперервної і обмеженої на $[0;\pi] \times R$

разом із першою похідною за t функції $g(x,t)$, що належить простору $A_1(A_2)$, вона має розв'язок, який представляється у вигляді

$$(R_1g)(x,t) = \frac{1}{2}(S_1g + S_2g) + \frac{1}{8}\int_0^\pi d\xi \sum_{j=0}^{2p-2}(-1)^j \int_{t+x-\xi}^{t+x+\xi} g(\xi, \tau + j\pi)d\tau +$$

$$+\frac{1}{8}\int_0^\pi d\xi \sum_{j=0}^{2p-2}(-1)^j \int_{t-x+\pi-\xi}^{t-x+\pi+\xi} g(\xi, \tau + j\pi)d\tau.$$

Аналогічно побудовано представлення розв'язків задачі (1)-(3) в просторі функцій A_3(теорема 1.1.4).

Питання про існування $T_2(T_3)$ – періодичного розв'язку задачі (1)-(3), коли функція $g(x,t)$ є $T_2(T_3)$ – періодичною за t і не є, взагалі кажучи, $T_2/2$ – періодичною (антиперіодичною) за t, досліджене недостатньо. Тому в §1.1 встановлюються деякі додаткові умови, які повинна задовольняти функція $g(x,t)$, щоб існував розв'язок задачі (1)-(3) в цих випадках. Доведена, зокрема, наступна теорема.

Теорема 1.1.5. Нехай функція $g(x,t)$ є неперервною і обмеженою на $[0,\pi] \times R$ разом із похідною за t і належить простору A'_3, де

$$A'_3 = \{u: \ u(x,t) = u(\pi - x, t) = u(x, t + T_3),$$
$$\sum_{j=0}^{2r-1}(-1)^j u(x, t + j\pi) = 0\}.$$

Тоді задача (1)-(3) має T_3 – періодичний за t розв'язок.

Використовуючи побудовані в §1.1 оператори, які є представленням розв'язку задачі (1)-(3), в §1.2 одержано достатні умови існування неперервного T – періодичного розв'язку ($T = T_1, T_2, T_3$) (теореми 1.2.1, 1.2.2) нелінійної періодичної крайової задачі

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} = f(x,t,u), \quad (x,t) \in [0,\pi] \times R, \\ &u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t \in R, \\ &u(x,t+T) = u(x,t), \quad (x,t) \in [0,\pi] \times R. \end{aligned} \tag{5}$$

Важливе місце в теорії гіперболічних рівнянь займають дослідження задачі Коші, яка розглядається в §1.3 для нелінійного хвильового рівняння з лінійними відхиленнями аргументів виду

$$
\begin{gathered}
u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t, u(x,t), u_t(x,t), u_x(x,t), u(\mu_1 x + k_1, \lambda_1 t + \\
+ l_1), u_t(\mu_2 x + k_2, \lambda_2 t + l_2), u_x(\mu_3 x + \\
+ k_3, \lambda_3 t + l_3)), \qquad x \in [0, l], \qquad t \in R, \qquad (6) \\
u(0,t) = \nu(t), \quad u_x(0,t) = \mu(t), \quad t \in R,
\end{gathered}
$$

де $0 < \mu_i \leq 1$, $0 \leq k_i \leq l - l\mu_i$, $l_i \in R$, λ_i, $i = 1,2,3$, — довільні цілі числа($\lambda_i \neq 0$); $f(x,t,u,u_t,u_x,v,y,z)\colon [0,l] \times R \times R \times R \times R \times R \times R \times R \to R$, $\nu(t), \mu(t)\colon R \to R$ — деякі задані функції. Основним результатом цього параграфа є теорема 1.3.1 про існування неперервного T - періодичного за t розв'язку системи інтегральних рівнянь виду

$$
\begin{gathered}
u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\nu(t - x/a) + \nu(t + x/a)\Big) + \frac{a}{2}\int\limits_{t-x/a}^{t+x/a} \mu(\tau)d\tau - \\
- \frac{1}{2a}\int\limits_0^x d\eta \int\limits_{t+(\eta-x)/a}^{t+(x-\eta)/a} F[u, u_t, u_x, v, y, z](\eta, \tau)d\tau, \\
u_t(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\nu'(t - x/a) + \nu'(t + x/a)\Big) + \\
+ \frac{a}{2}\Big(\mu(t + x/a) - \mu(t - x/a)\Big) - \\
- \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \sum_{i=0}^{1} (-1)^i F[u, u_t, u_x, v, y, z]\left(\eta, t + (-1)^i \frac{x - \eta}{a}\right) d\eta, \qquad (7) \\
u_x(x,t) = \frac{1}{2a}\Big(\nu'(t + x/a) - \nu'(t - x/a)\Big) + \\
+ \frac{1}{2}\Big(\mu(t + x/a) + \mu(t - x/a)\Big) - \\
- \frac{1}{2a^2}\int\limits_0^x \sum_{i=0}^{1} F[u, u_t, u_x, v, y, z]\left(\eta, t + (-1)^i \frac{x - \eta}{a}\right) d\eta,
\end{gathered}
$$

який при деяких додаткових умовах є розв'язком задачі Коші (6)(теорема 1.3.2).

Системи диференціально-функціональних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу розглядаються в четвертому параграфі першого розділу. Зокрема, у цьому параграфі одержано умови існування (теорема 1.4.1) неперервно-диференційовного розв'язку задачі Коші виду

$$u_t(t,x) + \Lambda u_x(t,x) = f(t,x,u(t,x),u(\lambda t,x),u(\lambda t,\mu x)),$$

$$u(0,x) = \varphi(x),$$

де $\Lambda = diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, λ_i, $i = 1,\ldots,n$,—дійсні числа, $\lambda,\mu \in R(\lambda,\mu \neq 0)$, t,x належать деякій замкнутій області $\overline{D}$, $f(t,x,v_1,v_2,v_3)\colon \overline{D}\times R^n \times R^n \times \times R^n \to R^n$, $\varphi(x)$ — задана неперервно-диференційовна функція, $u(t,x)$— невідома вектор-функція.

Другий розділ дисертації присвячений дослідженню питань існування обмежених на R^2 (періодичних) розв'язків гіперболічних систем з двома незалежними змінними і лінійними відхиленнями аргументів. Так в першому параграфі цього розділу розглядається система лінійних диференціально-функціональних рівнянь виду

$$u_t(t,x) = Au(t,x) + Bu_x(t,x) + Cu(\lambda t + a, \mu x + b) + f(t,x), \qquad (8)$$

де λ, a, μ, b — дійсні сталі, A, B, C — постійні $(n\times n)$-матриці, $f(t,x)\colon R\times \times R \to R^n$.

Припускаючи виконаними наступні умови:

1) власні значення λ_i, $i = 1,\ldots,n$, матриці A задовольняють умову $Re\lambda_i \neq 0$;

2) λ — довільне дійсне число($\lambda \neq 0$), $0 < |\mu| \leq 1$;

3) $\frac{2L}{\alpha}(|B| + |C|) < 1$, де L, α — деякі додатні сталі;

4) вектор-функція $f(t,x)$ неперервна за t, належить класу C^∞ за x і

$$\sup_{(t,x)\in R^2}\left|\frac{\partial^i f(t,x)}{\partial x^i}\right| \le K, \quad i=0,1,\ldots,$$

де K — деяка додатна стала,

доведено (теорема 2.1.1), що система рівнянь (8) має обмежений на R^2 розв'язок, що є неперервно-диференційовним за t і належить класу C^∞ за x. Показано також, що при деяких додаткових умовах цей розв'язок буде періодичним.

В §2.2 аналогічні питання (існування обмежених на R^2(періодичних) розв'язків) розглядаються для системи лінійних диференціально-функціональних рівнянь з частинними похідними нейтрального типу

$$u_t(t,x) = Au(t,x) + Bu_x(t,x) + Cu(\lambda t + a, \mu x + b) +$$
$$+ Du_t(\lambda t + a, \mu x + b) + f(t,x),$$

де λ, a, μ, b — дійсні сталі, A, B, C, D — постійні $(n\times n)$-матриці, $f(t,x)\colon R\times R\to R^n$.

Оскільки в попередніх параграфах розглядались системи лінійних диференціально-функціональних рівнянь, то виникає природне питання — чи можна отримати аналогічні результати у випадку, коли система диференціально- функціональних рівнянь з лінійними відхиленнями аргументів є нелінійною. Зауважимо, що дослідження багатьох питань для таких систем суттєво ускладнюється. Зокрема, при дослідженні нелінійних систем гіперболічного типу з двома незалежними змінними не вдається скористатись методикою та результатами попередніх параграфів розділу. В силу цього особливий інтерес представляє собою задача про розробку методів побудови обмежених на R^2(періодичних) розв'язків таких систем, яка розглядається в третьому і четвертому параграфах розділу. Так в §2.3 для системи нелінійних диференціально-функціональних рівнянь виду

$$u_t(t,x) + \Lambda u_x(t,x) = Au(t,x) +$$
$$+ f(t,x,u(t,x),u(\lambda t + a, x), u(t, \mu x + b), u(\lambda t + a, \mu x + b)), \qquad (9)$$

де $\Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, λ_i, $i = 1, \dots, n$,—дійсні числа, $A = diag(a_1, \dots, a_n)$, $a_i = const$, $i = 1, \dots, n$, λ, μ, a, b—довільні дійсні числа $(\lambda, \mu \neq 0)$, $t \in R$, $x \in R$, $f(t,x,v_1,v_2,v_3,v_4)\colon R \times R \times R^n \times R^n \times R^n \times R^n \to R^n$ і $u(t,x)$— невідома вектор-функція, доведена наступна теорема.

Теорема 2.3.1. Нехай виконуються умови:

1) $Re\, a_i > 0$, $i = 1, \dots, p$, $\quad Re\, a_j < 0$, $j = p+1, \dots, n$;

2) вектор-функція $f(t,x,v_1,v_2,v_3,v_4)$ та її частинні похідні

$$\frac{\partial^{i_1+i_2} f(t,x,v_1,v_2,v_3,v_4)}{\partial x^{i_1} \partial v_j^{i_2}}, \quad i_1 + i_2 = 1, \quad j = 1,2,3,4,$$

є неперервними за всіма своїми змінними і при $t \in R$, $x \in R$, $v_1 \in R$, $v_2 \in R$, $v_3 \in R$, $v_4 \in R$ маємо

$$\sup |f(t,x,0,0,0,0)| = N,$$
$$\sup \left| \frac{\partial^{i_1+i_2} f(t,x,v_1,v_2,v_3,v_4)}{\partial x^{i_1} \partial v_j^{i_2}} \right| \leq \ell,$$

де N, ℓ — деякі додатні сталі і

$$|f(t,x,v_1,v_2,v_3,v_4)| \overset{\text{def}}{=} \max_{1 \leq j \leq n} |f_j(t,x,v_1,v_2,v_3,v_4)|;$$

3) вектор-функція $f(t,x,v_1,v_2,v_3,v_4)$ та її частинні похідні першого порядку за x, v_1, v_2, v_3, v_4 задовольняють умови Ліпшіца

$$|f(t,x,\widetilde{v_1},\widetilde{v_2},\widetilde{v_3},\widetilde{v_4}) - f(t,x,\widetilde{\widetilde{v_1}},\widetilde{\widetilde{v_2}},\widetilde{\widetilde{v_3}},\widetilde{\widetilde{v_4}})| \leq$$
$$\leq \ell(|\widetilde{v_1} - \widetilde{\widetilde{v_1}}| + |\widetilde{v_2} - \widetilde{\widetilde{v_2}}| + |\widetilde{v_3} - \widetilde{\widetilde{v_3}}| + |\widetilde{v_4} - \widetilde{\widetilde{v_4}}|),$$

$$\left| \frac{\partial^{i_1+i_2} f}{\partial x^{i_1} \partial v_j^{i_2}}(t,x,\widetilde{v_1},\widetilde{v_2},\widetilde{v_3},\widetilde{v_4}) - \frac{\partial^{i_1+i_2} f}{\partial x^{i_1} \partial v_j^{i_2}}(t,x,\widetilde{\widetilde{v_1}},\widetilde{\widetilde{v_2}},\widetilde{\widetilde{v_3}},\widetilde{\widetilde{v_4}}) \right| \leq$$

$$\leq \ell(|\widetilde{v_1} - \widetilde{\widetilde{v_1}}| + |\widetilde{v_2} - \widetilde{\widetilde{v_2}}| + |\widetilde{v_3} - \widetilde{\widetilde{v_3}}| + |\widetilde{v_4} - \widetilde{\widetilde{v_4}}|),$$

де $(t, x, \widetilde{v_1}, \widetilde{v_2}, \widetilde{v_3}, \widetilde{v_4}), (t, x, \widetilde{\widetilde{v_1}}, \widetilde{\widetilde{v_2}}, \widetilde{\widetilde{v_3}}, \widetilde{\widetilde{v_4}}) \in R \times R \times R^n \times R^n \times R^n \times R^n$.

Тоді при достатньо малому ℓ існує неперервно-диференційовний і обмежений на R^2 розв'язок системи рівнянь (9).

При доведенні теореми суттєво використовується лема 2.3.1, яка має місце для системи рівнянь виду

$$u_t(t, x) + \Lambda u_x(t, x) = Au(t, x) + \varphi(t, x), \tag{10}$$

де $\varphi(t, x): R \times R \to R^n$.

Лема 2.3.1. Нехай виконуються умови:

1) $Re\, a_i > 0,\ i = 1, \dots, p, \quad Re\, a_j < 0,\ j = p+1, \dots, n;$

2) вектор-функція $\varphi(t, x)$ є неперервною за t і належить класу C^1 за x при $t \in R$, $x \in R$, і

$$\sup_{t\in R, x\in R} |\varphi(t, x)| = N_1 < \infty, \quad \sup_{t\in R, x\in R} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x)\right| = N_2 < \infty.$$

Тоді функції

$$u_i(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} G_{ij}(t - \tau)\varphi_j(\tau, \lambda_j(\tau - t) + x)d\tau, \quad i = 1, \dots, n,$$

де

$$G(t) = \begin{cases} -diag(e^{A_1 t}, 0), & \text{при } t < 0, \\ diag(0, e^{A_2 t}), & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

$$A_1 = diag(a_1, \dots, a_p), \quad A_2 = diag(a_{p+1}, \dots, a_n),$$

представляють собою неперервно-диференційовний і обмежений на R^2 розв'язок системи рівнянь (10).

В §2.4 обмежений на R^2 розв'язок системи диференціально-функціональних рівнянь виду

$$u_t(t, x) = \Lambda u_x(t, x) + Au(t, x) + \\ + f(t, x, u(t, x), u(\lambda t, \lambda x)), \tag{11}$$

де Λ, A — постійні $(n \times n)$ - матриці, λ — деяке дійсне число, вектор-функція $f(t,x,u,v)\colon R \times R \times R^n \times R^n \to R^n$ є неперервною за всіма змінними, $u(t,x)$ — невідома вектор-функція, шукаємо у вигляді

$$u(t,x) = y(ax+bt) = y(s),$$

де $s = ax + bt$, a, b —деякі додатні дійсні сталі такі, що $det(bE - a\Lambda) \neq 0$. Це приводить до побудови обмеженого на всій осі розв'язку деякої системи звичайних диференціально-функціональних рівнянь, що є, взагалі кажучи, не менш складним завданням. Однак в розглядуваному випадку одержана система рівнянь має вигляд

$$y'(s) = \widetilde{A}y(s) + \tilde{f}(t,s,y(s),y(\lambda s)), \tag{12}$$

де $\widetilde{A} = (bE - a\Lambda)^{-1}A$, $\tilde{f}(t,s,y,v) = (bE-a\Lambda)^{-1}f(t,a^{-1}(s-bt),y,v)$, і для неї має місце така теорема.

Теорема 2.4.1. Нехай виконуються умови:

1) власні значення λ_i, $i = 1,\ldots,n$, матриці $\widetilde{A}$ такі, що $Re\lambda_i \neq 0$;

2) $0 < |\lambda| \leq 1$;

3) вектор-функція $\tilde{f}(t,s,y,v)$ є неперервною за всіма змінними і задовольняє умови

$$\sup_{(t,s)\in R^2} |\tilde{f}(t,s,0,0)| = M,$$
$$\left|\tilde{f}(t,s,y'',v'') - \tilde{f}(t,s,y',v')\right| \leq \ell\left(|y''-y'| + |v''-v'|\right),$$

де M, ℓ — деякі додатні сталі, (t,s,y'',v''), $(t,s,y',v') \in R\times R\times R^n\times R^n$.

Тоді при достатньо малому ℓ система рівнянь (12) має єдиний обмежений при t, $s \in R$ розв'язок.

Як і у випадку системи (11), дуже часто дослідження багатьох задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними зводиться до дослідження різних класів диференціально-функціональних рівнянь виду

$$x'(t) = F(t.x(t), x(\varphi(t)), x'(t), x'(q(t))),$$

де $F(t,x,y,u,v)$, $\varphi(t)$, $q(t)$ —деякі задані функції своїх аргументів і $x(t)$ — невідома функція. Тому в заключному параграфі дисертації проводиться окреме дослідження широкого класу систем нелінійних диференціально-функціональних рівнянь виду

$$x'(\lambda t + a) = Ax(\lambda t + a) + Bx'(t) + \\ + f(t, x(t), x(\lambda t + a), x'(t), x'(\lambda t + a)), \tag{13}$$

де $t \in R$, A, B—дійсні постійні $(n \times n)$-матриці, вектор-функція $f(t,x,y,z,v)$: $R \times R^n \times R^n \times R^n \times R^n \to R^n$ є неперервною за всіма змінними і T-періодичною за t, λ—ціле додатне число, a—дійсна стала.

Припускаючи, що власні значення λ_i, $i = 1, \dots, n$, матриці A задовольняють умови

$$\begin{aligned} Re\lambda_j(\Lambda_1) > 0, \qquad j=1,\dots,p, \\ Re\lambda_j(\Lambda_2) < 0, \qquad j=p+1,\dots,n, \end{aligned} \tag{14}$$

для системи (13) отримані достатні умови існування і єдиності T - періодичного розв'язку.

Теорема 2.5.1. Нехай виконуються умови:

а) матриця B невироджена і $|B^{-1}| + \frac{2L}{\alpha}|A| < 1$, де L, α — деякі додатні сталі;

б) $\sup\limits_{t \in R} |f(t,0,0,0,0)| = N < \infty$;

в) вектор-функція $f(t,x,y,z,v)$ задовольняє умову Ліпшіца

$$|f(t,x_1,y_1,z_1,v_1) - f(t,x_2,y_2,z_2,v_2)| \le$$

$$\le l(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| + |v_1 - v_2|),$$

де $l = const > 0$, $(t,x_1,y_1,z_1,v_1), (t,x_2,y_2,z_2,v_2) \in R \times R^n \times R^n \times R^n \times R^n$.

Тоді при достатньо малому l існує єдиний неперервний T-періодичний розв'язок $v = v(t)$ системи рівнянь (13).

За допомогою заміни змінних

$$x(t) = z(t) + v(t) \tag{15}$$

дослідження властивостей розв'язків системи (13), що знаходяться в околі періодичного розв'язку $v(t)$, зводиться до дослідження системи рівнянь виду

$$z'(\lambda t + a) = Az(\lambda t + a) + Bz'(t) +$$
$$+F(t, z(t), z(\lambda t + a), z'(t), z'(\lambda t + a)), \tag{16}$$

де $F(t, z(t), z(\lambda t + a), z'(t), z'(\lambda t + a)) = f(t, z(t) + v(t), z(\lambda t + a) +$

$$+v(\lambda t + a), z'(t) + v'(t), z'(\lambda t + a) + v'(\lambda t + a)) -$$
$$-f(t, v(t), v(\lambda t + a), v'(t), v'(\lambda t + a)).$$

Для системи рівнянь (16) доведені наступні теореми.

Теорема 2.5.2. Нехай виконуються умови теореми 2.5.1, (14), і $a \geq 0$. Тоді при достатньо малому l система рівнянь (16) має $(n-p)$-параметричне сімейство розв'язків $z = z(t, c)$, визначених при $t \in [0, +\infty)$ і таких, що задовольняють умову

$$\lim_{t \to +\infty} |z(t, c)| = 0.$$

Теорема 2.5.3. Нехай виконуються умови теореми 2.5.1, (14), і $a \leq 0$. Тоді при достатньо малому l система рівнянь (16) має p-параметричне сімейство розв'язків $z = \overline{z}(t, c)$, визначених при $t \in (-\infty, 0]$ і таких, що задовольняють умову

$$\lim_{t \to -\infty} |\overline{z}(t, c)| = 0.$$

Із (15) і теорем 2.5.2, 2.5.3 безпосередньо випливають твердження про існування сімейств розв'язків системи рівнянь (13), що визначені при $t \in [0, +\infty)$ $(t \in (-\infty, 0])$ і задовольняють умову
$\lim\limits_{t \to +\infty} |x(t) - v(t)| = 0$ $(\lim\limits_{t \to -\infty} |x(t) - v(t)| = 0)$.

Крім цього, в §2.5 доведено (теорема 2.5.4), що система рівнянь (13) має розв'язки $x(t)$, які визначені при $t \in (0, t_*]$, $t_* > 0$, і задовольняють умову

$$\lim_{t \to 0} |x(t) - v(t)| = 0.$$

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ І ВИСНОВКИ

1. Побудовано представлення розв'язків крайової періодичної задачі для лінійного гіперболічного рівняння в певних просторах функцій.

2. Одержано достатні умови існування розв'язків задачі Коші для нелінійних гіперболічних рівнянь і систем з лінійними відхиленнями аргументів.

3. Доведено існування обмежених на R^2 (періодичних) розв'язків нелінійних гіперболічних систем з двома незалежними змінними і лінійними відхиленнями аргументів і розроблено метод побудови таких розв'язків.

4. Досліджено структуру множини розв'язків деяких нових класів звичайних нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з лінійним відхиленням аргументу.

Основні результати дисертації опубліковано в наступних роботах:

1. Блащак Н.І. Про періодичні розв'язки нелінійного хвильового рівняння з лінійними відхиленнями аргументів // Тези доп. П'ятої міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука (Київ, 16-18 трав. 1996 р.). - Київ, 1996. - С. 35.

2. Блащак Н.І., Громяк М.І. Побудова операторів для відшукання періодичних розв'язків лінійної і нелінійної гіперболічної задачі. - Київ, 1996. - 46 с. - (Препринт / НАН України. Ін-т математики; 96.6).

3. Блащак Н.І. Про періодичні розв'язки систем диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку з лінійними відхиленнями аргументів // Тези доп Всеукр. конф. "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування" (Чернівці, 15-18 трав. 1996 р.). – Київ, 1996. – С. 20.

4. Блащак Н.І., Пелюх Г.П. Про періодичні розв'язки систем нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з лінійно перетвореним аргументом та їх властивості. – Київ, 1996. – 18 с. – (Препринт / НАН України. Ін-т математики; 96.19).

5. Блащак Н.І. Про обмежені розв'язки систем нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з частинними похідними // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения: Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1996. – С. 44-45.

6. Блащак Н.І. До питання про періодичні розв'язки диференціальних рівнянь другого порядку гіперболічного типу // Доп. НАН України. – 1997. – N4.– С. 12-15.

7. Блащак Н.І., Пелюх Г.П. Про обмежені на R^2 розв'язки одного класу систем нелінійних рівнянь з частинними похідними і лінійними відхиленнями аргументів // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. – С. 29-33.

Блащак Н.И. О периодических решениях дифференциальных уравнений гиперболического типа.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности: 01.01.02. – дифференциальные уравнения. Институт математики НАН Украины, Киев, 1997.

Защищаются результаты теоретических исследований, изложенные в

диссертации и опубликованные в 7 работах.

Построены представления решений краевой периодической задачи для линейного гиперболического уравнения в определенных пространствах функций, установлены достаточные условия существования решений задач Коши для нелинейных гиперболических уравнений и систем с линейными отклонениями аргумента, предложен метод построения ограниченных на R^2(периодических) решений систем нелинейных гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными и линейными отклонениями аргумента, исследована структура множества решений некоторых новых классов обыкновенных дифференциально-функциональных уравнений.

Blashchak N.I. About the periodic solutions for the differential equations of the hyperbolic type.

Thesis for Ph. D. degree of phisical and mathematical sciences on speciality 01.01.02. differential equations. Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, 1996.

The results of defended thesis were published in 7 papers.

Representations of the solutions of the periodic boundary value problem to the linear hyperbolic equation in the certain spaces of functions are constracted. The sufficient conditions of the existence of solutions of the initual value problems for nonlinear hyperbolic equations and systems with linear transformed arguments are obtained. The method of constracted of the bounded on R^2(periodic) solutions for the system of the nonlinear hyperbolic equations with two independent variables and with the linear transformed arguments is proposed. The structure of a set of solutions for certain new classes of the ordinary differential-functional equations is investigated.

Ключові слова: гіперболічне рівняння, крайова задача, початкова задача, обмежений розв'язок, періодичний розв'язок, лінійне відхилення аргументу.

Бл.

Підп. до друку 15.04.97. Формат 60×84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,16. Ум. фарбо-відб. 1,16. Обл.-вид. арк. 0,8.
Тираж 100 пр. Зам. 70 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601, Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3.