Національна академія наук України
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова

На правах рукопису

ДОНЕЦЬ Георгій Панасович

УДК 519.1

ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

01.05.01 — теоретичні основи інформатики та кібернетики (математична кібернетика)

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

Київ 1997

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України.

Науковий консультант: член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук,
професор ШОР Н. З.

Офіційні опоненти: член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук,
професор АНДОН П. І.,

член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук,
професор ЛЕТИЧЕВСЬКИЙ О. А.,

доктор фізико-математичних наук,
професор ПЕРЕПЕЛИЦЯ В. А.

Провідна організація: Київський національний університет
імені Тараса Шевченка.

Захист відбудеться «23» травня 1997 р. 11⁰⁰ год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.39.02 при Інституті кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України за адресою:

252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40.

З дисертацією можна ознайомитися в науково-технічному архіві інституту.

Автореферат розісланий «21» квітня 1997 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради СИНЯВСЬКИЙ В. Ф.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Теорія графів є порівняно молодою наукою, та за роки свого майже шестидесятирічного існування вона зуміла проникнути в різні галузі теорії та пр ктики, де на відміну від класичного аналізу неперервних величин на перший план висуваються міркування та побудози дискретно-комбінаторного характеру.

На цей час кількість важливих практичних та теоретичних задач самого різноманітного конкретного змісту і самої різної міри складності, які зводяться до задач та проблем чистої теорії графів, росте так швидко, що для їх розв'язання не вистачає традиційних методів. Єдиний вихід - навчитися розв'язувати ці задачі, використовуючи з одного боку найновіші досягнення та ідеї теоретичної математики, а з іншого боку потужну обчислювальну техніку.

Спроби цілком підвести теорію графів під які-небудь розділи математичних дисциплін, що вже склалися (алгебра, комбінаторна топологія, математична логіка) виявилися неспроможними. Правда, апарат алгебри нерідко вдається використати тут не тільки як обчислювальний засіб, а як знаряддя дослідження, але при вивченні графів дуже велику роль відіграє чисто комбінаторне мистецтво, яке недостатньо охоплене алгебраїчною наукою.

Застосування методів теорії чисел для дослідження графів носило випадковий характер. Найчастіше теорія чисел залучалася до різного роду кодування (нумерації) графів. Розв'язування широкого кола прикладних задач пов'язано з розташуванням об'єктів тієї чи іншої природи в елементах певної структури. Необхідність в подібних діях виникає при розташуванні обладнання в цехах, при розміщенні елементів радіоелектронної апаратури, при розташуванні програм або даних в пам'яті ЕОМ. Всі ці задачі моделюються задачами оптимізації на перестановках, на графах або на матрицях.

За останні три десятиріччя появилися чимало робіт, які присвячені розв'язуванню задач нумерації графів, гіперграфів та упорядкуванню матриць. В них в залежності від конкретної області досліджень розглядались різні класи графів та різноманітні критерії оптимальності. В загальному випадку більшість задач оптимальної нумерації для графів та матриць є *NP*-повними, тому для них не існує ефективних алгоритмів точного розв'язку. В цій ситуації є актуальним дослідження окремих випадків задач нумерації, поставлених для обмежених класів графів. При цьому важливі як пошук випадків задач, що мають поліноміальний розв'язок, так і з'ясування межі тих спрощень або обмежень, за яких вони залишаються *NP*-повними.

В теорії нумерації графів за останній час виник напрямок, в якому сама нумерація використовується для оптимального представлення графів та його структурних властивостей. З'явилося поняття числового графа, серед яких найбільше поширення набули арифметичні графи (*A*-графи), за які йшла мова в працях Ю.Г.Григорьяна, Л.М.Адонца, Г.К.Манояна. З'явилися відповідні праці й українських математиків З.М.Асельдерова, Ю.І.Неженцева. Але всі зазначені праці обмежувалися дослідженням окремих властивостей *A*-графів і мали недостатнє теоретичне обгрунтування. У зв'язку з цим актуальною є проблема фундаментального дослідження *A*-графів, їх представлення структурних особливостей і задач, які в них виникають. Необхідність в цьому стала більше очевидною після того, як виявилося, що ряд алгоритмів на *A*-графах мають кращі характеристики, ніж на звичайних графах.

Інший напрямок застосування теорії чисел, започаткований П.Хівудом, полягає в зведенні деяких задач теорії графів до розв'язування систем рівнянь в скінченних полях. Однією з таких проблем є проблема розфарбування плоских графів, більше відома як гіпотеза чотирьох фарб.

У 1977 р. американські математики К.Аппель і В.Хакен опублікували доведення цієї гіпотези, яке займало більше 800 сторінок друкованого тексту з додатком програми для ЕОМ, за допомогою якої було одержано доведення. Повторити розрахунки, щоб підтвердити справедливість їх доведення, за минулі роки нікому ще не вдалося. Більше того, за цей час цим авторам було стільки виказано дорікань за недоліки і помилки в доведенні, що з недавніх пір ця проблема в математичній літературі знову стала згадуватися як гіпотеза, тобто науковий світ не визнав це доведення.

Тому гіпотеза чотирьох фарб, яка приваблює увагу математиків протягом останнього століття, продовжує бути актуальною темою для досліджень. Свого часу їй віддали належне українські математики О.О.Зиков, Н.З.Шор, В.Г.Візинг. Ця проблема має також важливе і практичне значення, бо до цих пір не розроблені алгоритми розфарбування планарних графів, які б вигідно відрізнялись від випадкового переліку варіантів.

М е т а р о б о т и полягає в розробці, обгрунтуванні та застосуванні теоретико-числових методів, теорії груп, теорії кодування та теорії розв'язування систем рівнянь в скінченних полях для розв'язування таких задач теорії графів: 1) дослідження структури і основних властивостей арифметичних графів, створення алгоритмів їх оптимального кодування; 2) дослідження гіпотези чотирьох фарб, знаходження необхідних та достатніх умов її розв'язання, побудова алгоритмів розфарбування планарних графів в чотири кольори.

Н а у к о в а н о в и з н а р о б о т и. Досліджено широкий підклас арифметичних графів - натуральні графи (*NA*-графи); для них і інших класів побудовано оптимальне представлення; доведено ряд положень про властивості *A*-графів, зокрема:

- уперше розроблено спосіб оптимального кодування фактороїдів та набору ланцюгів у класі *NA*-графів та зроблено повний перелік всіх таких представлень;

- уперше знайдено необхідні та достатні умови зв'язності *A*-графів з двома та трьома твірними;

- уперше побудовано оптимальне кодування для однорідних дерев першого та другого рангів у класі *A*-графів; створено і застосовано метод дослідження *A*-графів за допомогою побудови спеціального графа несуміжностей $H(u)$;

- створено та застосовано метод дослідження однорідних *NA*-графів за допомогою побудови спеціального графа розкладання твірних $R(n)$; доведено, що цей граф для парної кількості вершин є результатом радіального гомоморфізму від $R(n)$ для непарної кількості вершин з тим же кардинальним числом;

- доведено, що універсальне кодування для *A*-графів є розв'язком задачі з теорії чисел про різниці;

- доведено, що алгоритми пошуку вглиб і в ширину на *A*-графах мають кращі показники, ніж подібні алгоритми на звичайних графах.

Досліджено систему рівнянь П.Хівуда, виведені і досліджені для плоских тріангуляцій система рівнянь в полі F_2 та система нерівностей в полі F_3, які адекватно відображають проблему чотирьох фарб:

- залежно від структурних особливостей плоскої тріангуляції знайдені необхідні та достатні умови існування розв'язку системи рівнянь в полі F_2;

- знайдені умови існування коефіцієнтів характеристичного полінома системи рівнянь, не тотожньо рівних $0 (\mathrm{mod}\ 2)$, та вказано спосіб побудови розв'язку системи на основі таких коефіцієнтів;

- для кожної області, на які плоска тріангуляція розбивається гамільтоновим циклом, побудовано розв'язок системи нерівностей в полі F_3 у вигляді періодичної функції від натурального аргументу;

- на основі теоретичних результатів розроблено та запропоновано два нових алгоритми розфарбування планарних графів у чотири кольори; перший з них реалізує тільки один розв'язок, а другий знаходить всі розв'язки проблеми чотирьох фарб.

Достовірність одержаних результатів перевірена на різних теоретичних семінарах з теорії графів. Теоретичні положення дисертації сформульовані у вигляді лем і теорем, які повністю доведені і частково проілюстровані рисунками та підтверджені на прикладах.

Методи дослідження. В роботі використані методи теорії груп, алгебри, теорії кодування, теорії графів, комбінаторного аналізу та методи розв'язування систем порівнянь по довільному модулю.

Практичне значення. Результати, наведені в дисертації, можуть бути використані для створення ефективних алгоритмів на графах, якщо при цьому скористатися способом їх представлення у вигляді A-графів. Запропоновані алгоритми розфарбування планарних графів у чотири кольори вигідно відрізняються від існуючих, де застосовується випадковий перелік усіх варіантів, тим, що в них іде планомірний відсів варіантів.

Апробація результатів роботи. Основні ідеї, положення і результати досліджень були представлені на конференціях, наукових семінарах, симпозіумах, математичних школах: Республіканському семінарі "Теорія оптимальних розв'язків" Наукової ради з проблеми "Кібернетика" АН УРСР (Київ, 1983, 1986, 1988-1996), науковій конференції з дискретної математики (Молдова, Ваду-луй-воде, 1984), Всесоюзній конференції з теорії графів (Рига, 1985), I та II Всесоюзних школах-семінарах з дискретної математики (Грузія, Пассанаурі, 1983; Батумі, 1984), на наукових математичних семінарах кафедри кібернетики Київського національного університету ім. Т.Г.Шевченка (кер. проф. І.М.Ляшенко), Інституту математики НАН України, на щорічних школах-семінарах з дискретної математики та теорії графів (Одеса, 1986-1995, кер. проф. О.О.Зиков).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в двох монографіях та 22 наукових статтях, перелік яких наведено в списку літератури.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, двох частин, висновків, списку використаної літератури, що містить 82 найменування. Загальний обсяг роботи складає 261 сторінку машинописного тексту та 35 рисунків.

ЗМІСТ РОБОТИ

Вступ. Аналізується стан проблеми, обгрунтовується актуальність, практична і теоретична цінність досліджуваної тематики, виділяється коло основних задач і мета дослідження. Сформульовано основні наукові положення, що виносяться до захисту, наведена коротка анотація дисертації з двох частин.

Частина 1. Арифметичні графи та їх властивості. В цій частині вивчаються властивості графів, що допускають спеціальне представлення у вигляді арифметичних графів, які походять від числових графів.

Означення 1. *Числовим графом* називається трійка $G = (X,U,F)$, де $X = \{x_1,x_2,\dots,x_n\}$, $U = \{u_1,u_2,\dots,u_p\}$ - множини дійсних чисел, а F - функція двох змінних. Елементи множини X називаються *вершинами*, елементи U - *твірними*, пара вершин (x_i,x_j) утворює *ребро*, якщо $F(x_i,x_j) \in U$.

Накладаючи різні обмеження на множини X,U та на функцію F, можна отримувати *кодування графа*, яке відображає ті чи інші властивості цього графа. На відміну від звичайного представлення графів, де всі операції зводяться до пошуку елемента в множині даних, тут основні операції зводяться до обчислень функції F.

Означення 2. Числовий граф, у якого $X \in \mathbb{N}$, $F(x_i,x_j) = x_i+x_j$, називається *арифметичним графом* (A-графом). Арифметичний граф, у якого $X = \mathbb{N}_n$, називається *натуральним арифметичним графом* (NA-графом).

Представлення графів у класі *NA*-графів (або *A*-графів) є один із способів його кодування. *NA*-граф можна представити за допомогою *матриці твірних* $A(G)$, в якій $a_{ij} = i + j$, якщо $i + j \in U$, а всі інші елементи рівні 0 $(1 < i,j < n)$. Множині твірних повного *NA*-графа відповідає відрізок натурального ряду $(3,4,\ldots,2n - 1)$, множина довільного *NA*-графа є підмножиною цього ряду. Будь-якому $u \in U$ в матриці твірних відповідають ненульові елементи, кількість яких рівна

$$r_n(u) = 2\left\lfloor \frac{n - |n + 1 - u|}{2} \right\rfloor . \qquad (1)$$

Твірна $u' = 2n + 2 - u$, для якої має місце $r_n(u) = r_n(u')$, називається двоїстою до u. Для довільного *A*-графа пара (X,U) визначає його кодування. Воно буде мінімальним, якщо для інших кодувань (X',U') справедливо $|U| < |U'|$.

Означення 3. *Шириною A-графа* при кодуванні (X,U) називається число

$$B(G) = \max_{i,j} |x_i - x_j| . \qquad (2)$$

Мінімальне кодування, при якому ширина *A*-графа найменша, називається *досконалим*.

Очевидно, що мінімальне кодування *NA*-графів є досконалим, бо їх ширина є постійна величина $B(G) = n - 1$. Для досконалого кодування ланцюга достатньо двох твірних.

Теорема 1. Для того, щоб зв'язний ланцюг був представлений у класі *NA*-графів за допомогою двох твірних, необхідно і достатньо, щоб коди його парних вершин складали зростаючу арифметичну прогресію, а коди непарних вершин - спадну арифметичну прогресію, причому обидві прогресії мали спільну різницю.

Для досконалого кодування ланцюгів ця різниця повинна мати значення $d = 1$, або 2. Набір ланцюгів за певних умов допускає досконале кодування за допомогою двох твірних. Завдання в тому, щоб знайти спосіб такого кодування і зробити їх повний перелік.

Означення 4. *Специфікацією* n-вершинного набору з m ланцюгів, де α_i - кількість ланцюгів, що мають l_i вершин $(i = 1,2,\ldots,k)$, називається множина $L = \left[l_1^{\alpha_1}, l_2^{\alpha_2}, \ldots, l_k^{\alpha_k} \right]$, яка задовольняє двом рівнянням

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = m, \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i l_i = n. \qquad (3)$$

Нехай $\lambda = \left[\frac{n}{d}\right]$, а d приймає значення $2m$, $2m - 1$, або $2m - 2$.

Для $d = 2m$ всі досконалі кодування набору ланцюгів L можна одержати, розв'язуючи m рівнянь:

$$i + j \equiv (2q + 1)(\mathrm{mod}\ 2m), \quad (q = 0,1,\ldots,m - 1). \qquad (4)$$

При цьому довжини ланцюгів будуть рівні $2\lambda + 2$, $2\lambda + 1$, або 2λ, а їх кількість залежить від конкретного значення q. Твірні мають вигляд $u_1 = 2q + 2m\lambda + 1$, $u_2 = u_1 + 2m$.

Для $d = 2m - 1$ необхідно розв'язати $2m$ рівнянь:

$$i + j \equiv q[\mathrm{mod}(2m - 1)], \quad (q = 1,2,\ldots,2m - 1). \qquad (5)$$

При цьому довжини ланцюгів будуть рівні $2\lambda + 2$, $2\lambda + 1$, 2λ і один ланцюг довжиною $\lambda + 1$, або λ. Твірні рівні $u_1 = q + (2m-1)\lambda$, $u_2 = u_1 + 2m - 1$. Для $d = 2m - 2$ всі досконалі кодування одержимо від розв'язання $m - 1$ рівнянь:

$$i + j \equiv 2q[\mathrm{mod}(2m - 2)], \quad (q = 1,2,\ldots,m - 1). \qquad (6)$$

Довжини ланцюгів повинні бути рівними $2\lambda + 2$, $2\lambda + 1$, 2λ, $\lambda + 1$ і λ, а твірні $u_1 = 2q + \lambda(2m - 2)$, $u_2 = u_1 + 2m - 2$. Загальний підсумок всіх випадків дає

Теорема 2. Набір із m ланцюгів може бути представлений у класі n-вершинних NA-графів за допомогою двох твірних тільки в тому разі, якщо він має специфікацію

$$L = \left[(2\lambda+2)^{\alpha_1}, (2\lambda+1)^{\alpha_2}, (2\lambda)^{\alpha_3}, (\lambda+1)^{\alpha_4}, (\lambda)^{\alpha_5}\right],$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$, а для α_4 та α_5 виконується одна із таких умов:

1) $\alpha_4 = \alpha_5 = 0$;

2) $\alpha_4 + \alpha_5 = 1$;

3) $\alpha_4 + \alpha_5 = 2$, при цьому $\alpha_4(\alpha_5)$ можуть бути рівними 2, якщо $n[\mathrm{mod}(2m - 2)] > m$ ($< m$).

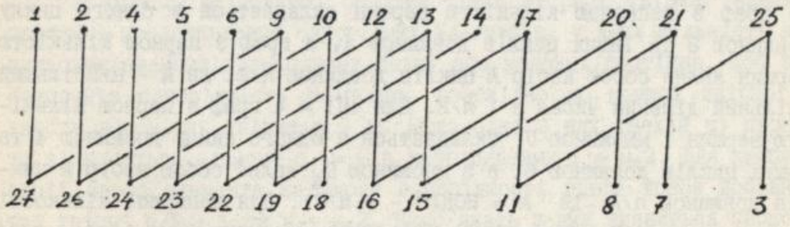

Рис.1. П'ять ланцюгів для n=27, U=(28,36).

На рис.1 представлені ланцюги специфікації $L = (8,7,6,4,3)$.

Для представлення циклів, або фактороїдів двох твірних уже недостатньо.

Теорема 3. Для того, щоб фактороїд був представлений у класі NA-графів за допомогою трьох твірних, необхідно і достатньо, щоб

а) для $n \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$ $U_1 = \{(n + 3)/2, n + 1, (3n + 2)/2\}$;

б) для парного n $U_2 = \{u, n + 1, n + u\}$, де u - непарне і $3 < u < n - 1$.

Як видно, не всі фактороїди можуть бути представлені за допомогою трьох твірних. Для чотирьох твірних доведені дві теореми.

Теорема 4. Для того, щоб NA-граф з непарною кількістю вершин ($n > 3$) представляв фактороїд за допомогою чотирьох твірних, необхідно і достатньо, щоб вони являли собою два типи однопараметричних множин:

$U_1 = \{u, 2(u - 1), n + u - 1, n + 2(u - 1)\}$, де u - непарне і $3 < u < (n + 1)/2$, та $U_2 = \{u, (n + u)/2, n + u, (3n + u)/2\}$, де $u \equiv - n (\mathrm{mod}\ 4)$ і $3 < u < n - 2$.

Теорема 5. Для того, щоб NA-граф з парною кількістю вершин представляв фактороїд за допомогою чотирьох твірних, необхідно і достатньо, щоб вони або утворювали для $n \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 6)$ множину $U_1 = \{(n + 5)/3, (2n + 4)/3, (4n + 2)/3, (5n + 1)/3\}$, або множину, залежну від двох параметрів $U_2 = \{u, v, n + u, n + v\}$, де u, v - непарні числа і $3 < u < v < n - 1$.

Останні три теореми визначають умови існування представлення фактороїдів. Підставляючи необхідні значення параметрів u та v, можна одержати всі множини U, що відповідають цим фактороїдам. Доведено ряд тверджень про структуру цих графів.

Нехай $u = 2s + 1$, $v = 2r + 1 (r > s)$. Для $|U| = 3$ доведено, що граф з непарною кількістю вершин складається з одного циклу довжиною 3 та інших циклів довжиною 4, а граф з парною кількістю вершин являє собою набір k циклів довжиною n/k, де k - найбільший спільний дільник чисел s і $n/2$. Для $|U| = 4$ граф з парною кількістю вершин і множиною U_1 складається з одного циклу довжиною 4 та інших циклів довжиною 6, а з множиною U_2 являє собою набір k циклів довжиною n/k, де $k = \text{НСД}(r - s, n/2)$. Для непарної кількості вершин множина U_1 представляє один цикл довжиною $(n + 1)/k - 1$ та інші цикли довжиною $(n + 1)/k$, де $k = \text{НСД}[s, (n + 1)/2)]$.

На рис.2 зображений фактороїд для $n = 17$.

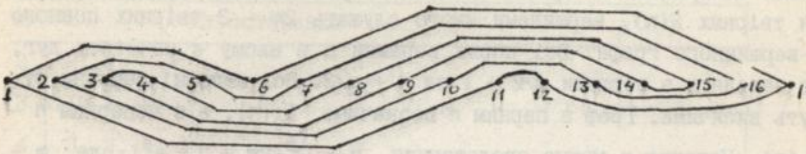

Рис.2. Фактороїд, $U = \{7,23.29\}$

Якщо зафіксувати значення параметра u в множині U і перейти до двоїстих твірних, то одержимо двоїсту множину твірних U'. Коли u пробігає всі свої значення, одержимо множину множин твірних $\{U\}$. Доведено, що для трьох твірних $\{U\} = \{U'\}$, тобто множина множин самодвоїста при відповідності параметрів $u = n + 2 - u'$. Для чотирьох твірних з непарною кількістю вершин графа має місце $\{U_1\} = \{U_2'\}$ при відповідності параметрів $u = n + 4 - 2u'$. З парною кількістю вершин множина множин залежить від двох параметрів, і для неї $\{U\} = \{U'\}$ при відповідності параметрів $u = n - v' + 2$, $v = n - u' + 2$.

На основі одержаних результатів можна визначити параметри, за яких граф являє собою гамільтонів цикл. Функція Ейлера $\varphi(Z)$ визначається для всіх цілих Z як число додатніх чисел, які не перевищують Z і взаємно прості з ним. Для $|U| = 3$ з непарним n не існує представлень гамільтонового циклу , а з парним n число таких представлень дорівнює $\varphi(n/2)$. Для $|U| = 4$ з парним n число представлень гамільтонового циклу дорівнює числу взаємно простих пар чисел $(r - s, n/2)$, коли $s > 1$ і $r < n/2 - 1$, а для непарних n це число рівне $\varphi[(n + 1)/2]/[1 + (n + 1)/2 (\mathrm{mod}\ 2)]$.

У зв'язку з деякими особливостями матриці твірних виникає проблема представлення однорідних NA-графів, у яких кількість ненульових елементів в кожному рядку або колонці постійна. Щоб забезпечити однорідність NA-графа, необхідно до кожної твірної u ввести допоміжну твірну $n + u$. Якщо одна з них (нехай u) парна, то з'являється елемент $a_{ii} = 0$ з координатами $i = u/2$. Для компенсації цього елемента за умови однорідності графа треба добавити дві твірні $u/2 + 1$ та $n + u/2$. Якщо якась з них виявиться парною, то процес добавляння твірних буде тривати до тих пір, доки він або зациклиться, або всі нові твірні будуть непарними. Для вивчення однорідних NA-графів вводиться орієнтований граф розкладання твірних $R(n)$, вершинами якого служать $2n - 3$ твірних повного n-вершинного графа. Всі парні вершини u в ньому є початком дуг, що заходять в вершини $u/2 + 1$ та $n + u/2$. Всі непарні вершини будуть висячими. Граф з парним n позначимо $R_0(n)$, а з непарним n - $R_1(n)$. Непарне n можна представити $n = 2^{\beta}(2m + 1) + 1$, де m - кардинальне число графа $R(n)$. Тоді $R_1(n) = R_1(m,\beta)$.

Означення 5. Радіальним гомоморфізмом $Gr(R_1(n))$ графа $R_1(n)$ називається граф, одержаний внаслідок послідовних операцій:

1) видалення всіх висячих вершин;

2) перенумерація всіх інших вершин за правилом $y_i = x_i/2 + 1$.

Доведено, що при $\beta > 1$ $Gr(R_1(m,\beta)) = R_1(m,\beta-1)$. Це дає змогу вивчати структуру тільки тих графів $R_1(n)$, у яких $\beta = 1$, тобто $n = 4m + 3$. Всі інші графи отримаємо, виконуючи обернені до радіального гомоморфізму дії.

Означення 6. Вагою елемента i на множині підстановок S_m називається число

$$\lambda(i) = \left\lfloor \log_2\left(\frac{m}{2i-1}\right)\right\rfloor + 2. \tag{6}$$

Всі компоненти графа $R_1(n)$ по дугах допускають часткове упорядкування вершин, де мінімальними елементами є висячі вершини, але немає найменших елементів. Позначимо $\mu(a)$ найбільший непарний множник цілого числа a серед тих, на які воно розкладається. Структуру графів розкладання описує

Теорема 6. Граф розкладання твірних $R_1(4m + 3)$ складається з $p + 1$ компонент, одна з них є ланцюг довжиною 3, а інші компоненти містять рівно один контур. Число p дорівнює числу циклів у перестановці $f_m \in S_m$, $f_m = \{i \Rightarrow [\mu(m + i)/2]\}$, а довжина кожного контуру рівна сумі вагів елементів відповідного циклу в f_m.

Перестановки f_m можна будувати за індукцією. Для $m = 2,3$ це очевидні перестановки (2,1) та (1,3,2). Далі для довільного f_m треба дотримуватися такої послідовності дій:

1) переписати всі, крім першого, елементи f_{m-1};

2) записати елемент m;

3) записати перший елемент f_{m-1}.

У табл. 1 наведені відповідні перестановки для всіх чисел $m < 10$.

Таблиця 1

m	Перестановки
2	2, 1
3	1, 3, 2
4	3, 2, 4, 1
5	2, 4, 1, 5, 3
6	4, 1, 5, 3, 6, 2
7	1, 5, 3, 6, 2, 7, 4
8	5, 3, 6, 2, 7, 4, 8, 1
9	3, 6, 2, 7, 4, 8, 1, 9, 5
10	6, 2, 7, 4, 8, 1, 9, 5,10, 3

У табл. 2 наведені відповідні цикли та позначена індексом вага кожного елемента.

Таблиця 2

m	Цикли перестановок та вага елементів
2	$(1^3,2^1)$
3	$(1^3)(2^2,3^1)$
4	$(1^4,3^1,4^1)(2^2)$
5	$(1^4,2^2,4^1,5^1,3^2)$
6	$(1^4,4^1,3^2,5^1,6^1,2^3)$
7	$(1^4)(2^3,5^1)(3^2)(4^2,6^1,7^1)$
8	$(1^5,5^1,7^1,8^1)(2^3,3^2,6^1,4^2)$
9	$(1^5,3^2,2^3,6^1,8^1,9^1,5^2,4^2,7^1)$
10	$(1^5,6^1)(2^3)(3^3,7^1,9^1,10^1)(4^2)(5^2,8^1)$

Для перестановки f_m легко визначити цикли та вагу кожного елемента з таблиць. Кожен елемент l відповідає $\lambda(l)$ вершинам контуру в графі $R_1(n)$, і їх коди визначаються за формулами:

$$x_1 = 8l - 2;\ x_j = 2x_{j-1} - 2;\ j = 2,3,\dots,\lambda(l). \qquad (7)$$

Очевидно, що до контуру входять вершини, які є найбільшими елементами в частково упорядкованій множині вершин. Для парних n доведено залежність

$$Gr(R_1(4m + 3)) = R_0(2m + 2). \qquad (8)$$

На рис.3. відображено радіальний гомоморфізм для $m = 3$.

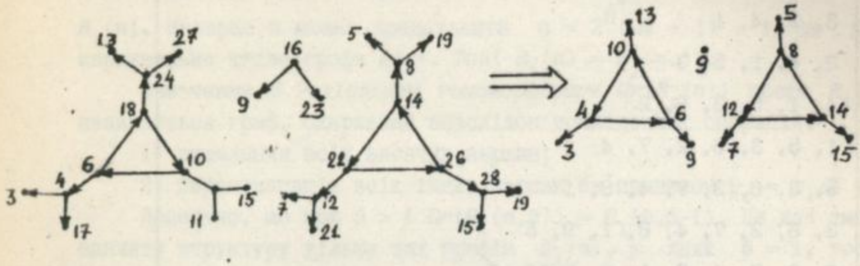

Рис.3. Радіальний гомоморфізм $Gr(R_1(15)) = R_0(8)$

Структура довільного графа $R(n)$ описується через параметри β і m. Для $\beta > 1$ граф $R_1(n)$ складається з $p + 1$ компоненти, де p визначається з відповідної перестановки f_m. Одна компонента – це бінарне дерево рангу β, а p компонент – це p контурів, довжина яких дорівнює сумарній вазі відповідних циклів перестановки f_m. Від кожної вершини контуру веде дуга до кореня бінарного дерева рангу β. Радіальний гомоморфізм веде до зменшення рангу цих дерев. Для непарних n найменший ранг дорівнює 1, а наступний гомоморфізм дає $R_0(2m + 2)$ для парного n.

Далі, добираючи твірну u для довільного графа, необхідно крім неї взяти твірну $n + u$ та ще всі твірні, які можна досягнути по дугах від вершин u і $n + u$ в графі $R(n)$. Ранг однорідності NA-графа дорівнює половині кількості всіх занятих при цьому вершин графа $R(n)$. Якщо u є вершиною контуру в графі $R(n)$, то необхідно залучити всі твірні, що входять до цієї компоненти. Так як фактороїд – однорідний граф степені 2, то для його побудови необхідно вибрати чотири твірні. Виняток становить твірна $u = n + 1$, яка не потребує доповнення. Тоді кількість всіх твірних буде на одну менше.

Одною з важливих характеристик NA-графа є його зв'язність. Доведено ряд тверджень про умови зв'язності NA-графів.

Означення 7. Інтервалом визначення $\beta(u)$ твірної $u \in U$ називається максимальний відрізок натурального ряду $[i,j]$, для якого $i + j = u$.

У загальному випадку $\beta(u) = [n - u + |n+1-u|, n - |n+1-u|]$.

Умова 1. Необхідна умова зв'язності NA-графа з m твірними

$$\bigcup_{i=1}^{m} \beta(u_i) = \mathbb{N}_n \tag{9}$$

Лема 1. Число компонент зв'язності NA-графа з двома твірними $U = \{u_1, u_2\}$ дорівнює

$$p = \left\lfloor \frac{u_2 - u_1}{2} \right\rfloor + 1 - u_1 u_2 (\text{mod } 2) + (u_1 - n - 1)\frac{[1 + \text{sgn}(u_1 - n - 1)]}{2} +$$

$$+ (n + 1 - u_2)\frac{[1 + \text{sgn}(n+1-u_2)]}{2}. \tag{10}$$

Умова 2. Необхідними умовами зв'язності NA-графа з m твірними є

$$\min_{1 \le i \le m} \{u_i\} < n + 1 \; ; \; \max_{1 \le i \le m} \{u_i\} > n + 1. \tag{11}$$

Як наслідок цієї умови та леми 1 є

Умова 3. Необхідною умовою зв'язності NA-графа з двома твірними $U = \{u_1, u_2\}$ є

$$n - 1 < u_1 < n + 1. \tag{12}$$

Співставимо цілому числу z $\delta(z) = 1 - z(\text{mod } 2)$. Основним результатом для характеристики зв'язності NA-графа з двома твірними є

Теорема 7. Число компонент зв'язності NA-графа з двома твірними $U = \{u_1, u_2\}$ дорівнює

$$p = \frac{|n + 1 - u_1| + |n + 1 - u_2| + \delta(u_1) + \delta(u_2)}{2}. \tag{13}$$

Якщо використати (1) у вигляді $r_n(u) = n - |n+1-u| - \delta(u)$, то звідси $p = n - [r_n(u_1) + r_n(u_2)]/2$.

Підставляючи значення $p = 1$ і розв'язуючи рівняння (13), одержимо результат, який підсумовує

Теорема 8. NA-граф з твірними $U = \{u_1, u_2\}$ зв'язний тоді і тільки тоді, коли U приймає значення $\{n, n+1\}$ або $\{n+1, n+2\}$ для довільних n, $\{n-1,n+1\}$ або $\{n+1,n+3\}$ для парних n і $\{n,n+2\}$ для непарних n.

Якщо граф задовольняє умові 2, то в ньому відсутні ізольовані вершини. Позначимо $r = u_2 - u_1$.

Лема 2. Число компонент зв'язності NA-графа, який задовольняє умові 2, з двома твірними дорівнює числу розв'язків рівняння

$$i + j \equiv u_1 (\mathrm{mod}\ r). \tag{14}$$

Доведено ряд тверджень про зв'язність NA-графів з трьома твірними $U = \{u_1,u_2,u_3\}$. Позначимо $r_1 = u_2 - u_1$, $r_2 = u_3 - u_2$ і $D = \text{НСД}(r_1,r_2)$.

Теорема 9. NA-граф з трьома твірними $U = \{u_1,u_2,u_3\}$ зв'язний тоді і тільки тоді, коли

а) $u_1 > n + 1$, $u_3 < n + 1$;

б) $u_3 - u_2 - u_1 - u_1(\mathrm{mod}\ 2) - u_2(\mathrm{mod}\ 2) - u_3(\mathrm{mod}\ 2) + 2 < 0$;

в) $D = 1$, або $D = 2$ з u_1 непарним.

Умова (а) це перенесена умова 2 для трьох твірних. При доведенні теореми використовується важлива

Лема 3. NA-граф з твірними $U = \{u_1,u_2,n + u_1,n + u_2\}$, для довільних $u_1 < u_2 < n + 1$ ізоморфний графу H з трьома твірними $V = \{u_2 - \Delta, n\ 2 + u_1 - \Delta, n + u_2 - \Delta\}$, де $\Delta = u_1 - 2 + u_1(\mathrm{mod}\ 2)$.

Для визначення числа компонент довільного NA-графа з трьома твірними важливим є параметр $\Delta u = u_3 - u_2 - u_1 + 1$. Якщо $\Delta u > 0$, то справедлива

Теорема 10. Число компонент зв'язності NA-графа з множиною $U = \{u_1,u_2,u_3\}$

$$p = \frac{|n+1-u_1|+|n+1-u_3|-u_2-u_1(\mathrm{mod}\ 2)-u_2(\mathrm{mod}\ 2)-u_3(\mathrm{mod}\ 2)}{2} + 2. \tag{15}$$

Якщо $\max(r_1,r_2)/\min(r_1,r_2)$ є цілим, то це число збільшується на

$$\left\lfloor \frac{2u_2-u_3+u_1+2-|u_3+u_1-2u_2|}{4} \right\rfloor - 1.$$

Для NA-графів, у яких $\Delta u < 0$, має місце

Теорема 11. Число компонент зв'язності NA-графа з трьома твірними

$$p = \frac{u_1 - u_3+|n+1-u_1|+|n+1-u_3|}{2} + \left\lfloor \frac{D - u_1(\mathrm{mod}\ 2)}{2} \right\rfloor + 1. \tag{16}$$

Останні два доданки визначають число розв'язків рівняння

$l + j \equiv u_1 (\mathrm{mod}\ D)$.

Не всі графи мають представлення в класі *NA*-графів, тому виникає проблема оптимального представлення (кодування) в класі *A*-графів. Нехай N означає максимальний код вершини графа, а n залишається кількістю його вершин.

Представлення дерев першого рангу, або зірок, показує, що при цьому кожна твірна може використовуватись лише один раз. Тому оптимальне представлення зірок зводиться до мінімізації N. Починаючи з $n = 4$, зірка не має представлення в класі *NA*-графів.

Теорема 12. В оптимальному представленні n-вершинних зірок в класі *A*-графів $N = 2n - 3$.

Для доведення цієї теореми на множині вершин $\{1,2,\dots,N\}$ вводиться спеціальний граф несуміжностей $H(u_1,u_2)$, який є *NA*-графом з двома твірними. Оптимальне кодування зірки одержується як результат побудови максимальної незалежної множини вершин графа $H(u_1,u_2)$. Для цього доводиться розв'язувати декілька порівнянь трьох типів:

$$4k - 1 + (2k - 1)\cdot t \equiv (n + 1)[\mathrm{mod}(2n - 4)], \tag{17}$$

$$k(t + 3) \equiv 0[\mathrm{mod}(n - 2)], \tag{18}$$

$$k(2t + 1) \equiv (n - 2)[\mathrm{mod}(2n - 4)]. \tag{19}$$

Розв'язуючи ці рівняння, одержуємо інформацію про структуру графа $H(u_1,u_2)$ для різних випадків, що дозволяє однозначно вибрати максимальну незалежну множину вершин. В результаті знаходимо всі оптимальні кодування зірок для довільного n та перераховуються всі такі кодування.

Наслідок. Число оптимальних кодувань n-вершинної зірки в класі *A*-графів дорівнює $n - n(\mathrm{mod}\ 2)$.

На рис.4. реалізоване оптимальне кодування для зірки.

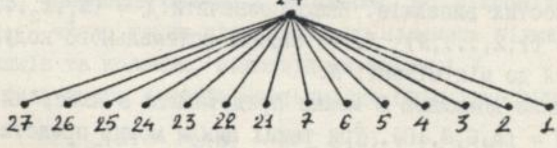

Рис.4. Зірка ($n = 15$)

Для кодування однорідних дерев другого рангу використовується відома задача теорії чисел

Задача про різниці. Для кожного $\rho > 2$ знайти послідовність чисел $x_\rho > x_{\rho-1} > \dots > x_1 = 1$, таких, що

1) для любих $1 < i,j < \rho$ ні одна різниця $|x_i - x_j|$ не повторюється;

2) x_ρ - мінімальне.

У загальному вигляді ця задача не розв'язана, але для $\rho < 11$ за допомогою ЕОМ знайдені всі такі числа. В дисертації наводиться таблиця з відповідними даними. Належним чином використовуючи розв'язки цієї задачі, отримано наступний результат.

Теорема 13. Ширина однорідного дерева другого рангу і степені ρ при оптимальному представленні в класі A-графів дорівнює

$$\max_{i,j}|x_i - x_j| = 3x_\rho - 1, \qquad (20)$$

де x_ρ - розв'язок задачі про різниці.

На рис.5. наведений приклад оптимального кодування такого дерева.

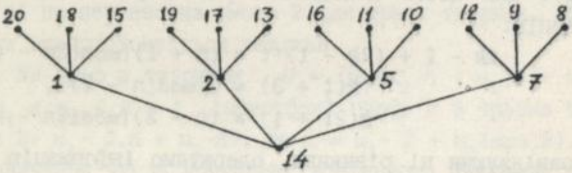

Рис.5. Однорідне дерево ($\rho = 4$, $n = 17$)

Враховуючи те, що $\min x_i = 1$, маємо $N = 3x_\rho$.

Як було зазначено раніше, для кількох циклів однакової довжини з парною кількістю вершин вдається представлення в класі NA-графів. Для одного циклу довільної довжини питання зводиться до кодування гамільтонового циклу, що теж вирішується позитивно в класі NA-графів. Для циклів непарної довжини це вже неможливо, за винятком простих випадків. Якщо позначити $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, де $x_n = N$, $Y = \{1,2,\dots,N\} \setminus X$, то задача оптимального кодування графа зводиться до мінімізації N.

Два цикли довжиною 3 можна представити в класі NA-графів за допомогою $U = \{4,6,8,10\}$. Три таких цикли можна представити тільки в класі A-графів двома множинами $X = \{1,2,3,4,5,6,10,11,12\}$ та $U = \{4,6,8,10,21,22,23\}$.

Аналогічне представлення мають і чотири таких цикли за допомогою множин $X = \{1,2,3,4,5,6,10,11,12,13,14,15\}$ та $U =$

= 4,6,8,10,22,24,26,28). Для більшого числа циклів оптимальне представлення в класі A-графів далеко не очевидне.

У кожному конкретному випадку можна добитися кодування вершин графа в класі A-графів. Для цього можна скористатися універсальними кодами, які придатні для любого графа. Так коди існують, і в них кожна твірна застосовується тільки один раз. Найпростішим таким кодом є $x_k = 2^{k-1}$ $(k = 1,2,\dots,n)$. Тоді множина твірних $U = \{u_{ij}\}$, де $u_{ij} = 2^{i-1} + 2^{j-1}$, якщо (x_i, x_j) - ребро графа. При цьому $N = 2^{n-1}$.

Дещо кращим універсальним кодом є послідовність, яка має назву чисел Фібоначчі. Початкові її члени $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ і далі $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$. Легко показати, що код $x_i = F_{i+1}$ $(i = 1,2,\dots,n)$ є універсальним кодом. Позначимо $a_1 = (1+\sqrt{5})/2$, $a_2 = (1-\sqrt{5})/2$. Ці числа зв'язують відношення $a_1 + a_2 = 1$, $a_1 a_2 = -1$. Загальний член послідовності $F_k = [a_1^k - (-1/a_2)^k]/\sqrt{5}$. Якщо $k \Rightarrow \infty$, то другий доданок в чисельнику прямує до нуля. Тому в цьому універсальному коді можна оцінити $N \approx a_1^{n+1}/\sqrt{5} \approx (1,65)^{n+1}/\sqrt{5}$, що краще від 2^{n-1}.

Задача про побудову оптимального універсального коду для A-графів ще не розв'язана, але вона має безпосереднє відношення до задачі про різниці.

Теорема 14. Розв'язок задачі про різниці є оптимальним універсальним кодом для будь-якого n-вершинного A-графа.

Для оцінки значення $x_n < N$ можна скористатися припущенням П.Ердеша і П.Турана, що $\max n = N + o(1)$, тобто $N > n^2$.

Розглянемо матрицю твірних $A = (a_{ij})$ на множині вершин $\{1,2,\dots,N\}$. Згідно з (1) $r_N(u)$ - число ненульових елементів матриці, що відповідають твірній u. Нехай $r_{N,Y}(u)$ - число таких елементів, які належать рядкам і колонкам, що відповідають множині Y; $r_{Y,Y}(u)$ - число таких елементів, що належать підматриці на перетині рядків та колонок, відповідних множині Y.

Для будь-якого A-графа мають місце співвідношення

$$r_{X,X}(u) = r_N(u) - 2r_{N,Y}(u) + r_{Y,Y}(u), \tag{21}$$

$$\sum_{u \in U} r_{X,X}(u) = 2m, \tag{22}$$

де m - число ребер графа.

Ці співвідношення дають змогу перевірити правильність представлення A-графів.

Теорема 15. Оптимальним представленням двох n-вершинних непарних циклів в класі A- рафів є пара множин:

$$X = \{1,2,\ldots,n,n+4,n+5,\ldots,2n+3\},$$
$$U = \{3,4,n+2,n+4,3n+4,3n+6,4n+4,4n+5\}. \qquad (23)$$

Маємо $N = 2n + 3$, $Y = \{n+1,n+2,n+3\}$, тому безпосередньо перевіряючи умови (21)-(22), переконуємось в справедливості теореми. Доведено, що для k n-вершинних непарних циклів оптимальним буде кодування, в якому перший та останній цикли кодуються, як перший цикл в (23), а всі інші - так, як другий цикл в (23).

Кожний довільний набір ланцюгів має свою специфікацію. Якщо вона відповідає умовам теореми 2, то набір допускає представлення в класі NA-графів. Задача оптимального кодування ланцюгів у класі A-графів зводиться до мінімізації кількості фіктивних додаткових вершин, які об'єднують кілька ланцюгів в один, і таких, що новий набір отримує специфікацію , яку можна представити в класі NA-графів. Ця задача зводиться до відомої задачі РОЗБИТТЯ, що розв'язується за псевдополіноміальний час.

Загальне оптимальне представлення довільних графів в класі A-графів зводиться до розв'язання NP-повної задачі ІЗОМОРФІЗМ ГРАФУ. Дійсно, в кожному окремому випадку треба знайти мінімальне N, для якого матриця твірних повного N-вершинного графа містить підматрицю, відповідну такому підграфу, який є ізоморфним заданому графу.

Всі відомі алгоритми на графах побудовані з врахуванням традиційних представлень графів. Те саме відноситься і до оцінки трудоємкості цих алгоритмів. У дисертації описується один із типових алгоритмів на графах - пошук в глибину, записаний для звичайних графів (алгоритм P) та для тих же графів, але представлених в класі NA-графів (алгоритм Q). Для їх порівняльної оцінки вводиться часова та ємкісна міра складності алгоритмів як функція від розміру вхідних даних. В основу цієї функції покладена логарифмічна функція

$$e(l) = \begin{cases} \lfloor \log_2 |l| \rfloor + 1, & l \neq 0; \\ 1, & l = 0, \end{cases} \qquad (24)$$

де l - ціле число.

Внаслідок дослідження і підрахунків одержані такі числові оцінки алгоритмів:

$$t(P) = e(n)(20n + 3m - 9) + C\,n_1 + C\,m_2, \qquad (25)$$

$$t(Q) = e(n)(18n + 9m - 9) + C\,n_3 + C\,m_4. \qquad (26)$$

Тут C_i - константи, причому $C_1 > C_3$ і $C_2 > C_4$. Визначені також ємкісні оцінки алгоритмів:

$$V(P) = 4e(n)(n + m); \quad V(Q) = e(n)(2n + p), \qquad (27)$$

де p - потужність множини твірних *NA*-графа.

Порівнюючи оцінки, можна зробити висновок, що в обчислювальному розумінні алгоритм Q ненабагато кращий від P, але по ємкісній оцінці він набагато кращий від P, тому що параметр p має середнє значення $4m/n$.

Аналогічні оцінки одержані і для найбільш поширених на графах операцій: 1) знайти найближчу вершину, суміжну з вершиною x; 2) перевірити, чи суміжні вершини x та y.

Порівняння алгоритмів виконано для графів, представлених у класі *NA*-графів. Ті самі оцінки з невеликими поправками мають місце і для *A*-графів.

Треба зазначити, що ці оцінки одержані для алгоритмів, які мають однакову будову, незалежну від структури вихідних даних. Але структура даних *NA*-графів(або *A*-графів) дозволяє будувати алгоритми, що якісно відрізняються від алгоритмів, розрахованих на традиційні способи розміщення даних. Знаючи, наприклад, три твірні, які достатні для зв'язності *NA*-графа, можна видати безпосередньо кінцевий результат алгоритму пошуку в глибину. Але в загальному випадку це потребує додаткових досліджень.

Частина 2. Задача розфарбування плоских графів. У цій частині досліджується проблема чотирьох фарб та пропонуються два алгоритми розфарбування плоских графів.

Розглядається правильно розфарбована на множині кольорів $Z = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ плоска тріангуляція G, тобто всякі дві її суміжні вершини мають різні кольори. Підграф G_{st} на множині всіх вершин кольорів $s, t \in Z$ $(s \neq t)$ називається біхроматичним. Число компонент зв'язності та цикломатичне число такого графа позначимо $p(G_{st})$ та $\lambda(G_{st})$.

Означення 8. Частина правильно розфарбованої тріангуляції, обмеженої зовнішнім простим циклом, пофарбованим в два кольори, називається *мозаїкою* $M(s,t)$.

Для неї доведено ряд положень, що переносяться на всю тріангуляцію.

Лема 4. Для всякої мозаїки $M(s,t)$ справедливі рівності

$$\lambda(G_{st}) = p(G_{uv}), \tag{28}$$

$$p(G_{uv}) = \lambda(G_{st}) + 1, \tag{29}$$

де $\{s,t\} \cup \{u,v\} = Z$, а G_{st}, G_{uv} - максимальні підграфи мозаїки.

Нехай $m(G_{st})$ - число ребер біхроматичного графа G_{st}, а n - число всіх вершин плоскої тріангуляції.

Лема 5. Для правильно розфарбованої плоскої тріангуляції справедливі рівності

$$m(G_{st}) + m(G_{uv}) = n - 2, \tag{30}$$

$$[p(G_{st}) - \lambda(G_{st})] + [p(G_{uv}) - \lambda(G_{uv})] = 2, \tag{31}$$

де $\{s\} \cup \{t\} \cup \{u\} \cup \{v\} = Z$, а G_{st}, G_{uv} - максимальні підграфи плоскої тріангуляції.

Розфарбування плоскої тріангуляції чотирма фарбами зводиться до розв'язання системи рівнянь П.Хівуда:

$$\sum_{l \in M_y} x_l \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3),\ y \in K, \tag{32}$$

$$x_l^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3),\ l = 1,2,\ldots,2n - 4, \tag{33}$$

де M_y - множина трикутних граней, інцидентних вершині y, а K - множина всіх вершин плоскої тріангуляції.

Розглянемо будь-який розв'язок системи і знайдемо величину

$$g = (-1)^{\varepsilon} = \prod_{l=1}^{2n-4} x_l . \tag{34}$$

В залежності від значення ε розфарбування називається парним або непарним. Якщо позначити X^+ - вектор додатніх розв'язків системи (32)-(33), а X^- - вектор від'ємних розв'язків, то з властивостей мозаїки можна вивести рівняння

$$|X^+| + |X^-| = 2n - 4,$$

$$|X^+| - |X^-| = 4l. \tag{35}$$

Звідси витікає, що $\varepsilon \equiv 0 (\mathrm{mod}\ n)$ і справедлива

Теорема 16. Парність розфарбування плоскої тріангуляції чотирма кольорами є величина постійна і порівнянна з кількістю її вершин.

Задача чотирьох фарб еквівалентна розбиттю множини ребер плоскої тріангуляції на три класи таким чином, що кожній трикутній грані буде належати точно одне ребро з кожного класу. Нехай будь-яка плоска тріангуляція має n вершин, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{2n-4}\}$ - множина всіх трикутних граней, $R = \{r_1, r_2, \dots, r_{3n-6}\}$ - множина всіх ребер, $r(a)$ - ребра грані a. Якщо співставити кожному ребру r_i змінні x_i, y_i, що приймають значення на множині $\{0,1\}$, то можна записати таку систему відношень:

$$\sum_{i \in r(a)} x_i \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2),\ a \in A, \tag{36}$$

$$\sum_{i \in r(a)} y_i \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2),\ a \in A, \tag{37}$$

$$x_i y_i \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2),\ i \in I = \{1, 2, \dots, 3n - 6\}. \tag{38}$$

Розв'язок системи (36)-(38) розбиває R на три класи, що не перетинаються:

$$x_i \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2),\ y_i \neq x_i;$$

$$x_i \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2),\ y_i \neq x_i;$$

$$x_i \equiv y_i \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2).$$

Лінійна система (36) еквівалентна рівнянню

$$P(\bar{x}) = \prod_{a \in A} \Big(\sum_{i \in r(a)} x_i \Big) \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2) \quad x = \{x_i\}_{i=1}^{3n-6}.$$

Поліном $P(\bar{x})$ в полі F_2 характеристики 2 після підстановок типу $x_i^2 = x_i$ та приведення подібних членів запишем у вигляді суми одночленів, кожен з яких представляє добуток деякої підмножини змінних x_i. Відповідний поліном запишем так:

$$P(x) = \sum_{\mu \in K} M_\mu (\mathrm{mod}\ 2),$$

де M_μ - одночлен виду $\prod_{i \in \mu} x_i$, μ - підмножина множини індексів I, а K - сукупність μ, для яких M_μ входить в розклад $P(x)$ з ненульовими коефіцієнтами.

Лема 5. Для того щоб система (36)-(38) мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб знайшлись такі $\mu_i \in K$, щоб $\mu_1 \cap \mu_2 = \emptyset$.

На основі цієї леми та ряду тверджень доводяться дві теореми.

Теорема 17. Система (36)-(38) має розв'язок тоді і лише тоді, коли існує таке доповнення до часткового графа без непарних циклів, яке також не містить непарні цикли.

Двоїстий граф G^* до плоскої тріангуляції G є однорідним плоским графом степені 3.

Теорема 18. Система (36)-(38) має розв'язок тоді і лише тоді, коли двоїстий граф G^* має два досконалі паросполучення, які не мають спільних ребер.

Всяка плоска чотиризв'язна тріангуляція має гамільтонів цикл, який розбиває площину на дві області R_1 та R_2. Пронумеруємо ребра гамільтонового циклу за годинниковою стрілкою. Трикутна грань, якій належать ребра 1 та 2, називається опорним трикутником. Спочатку розглядається лінійний випадок, коли двоїстий граф до кожної з областей є ланцюгом (рис.6). На відміну від системи

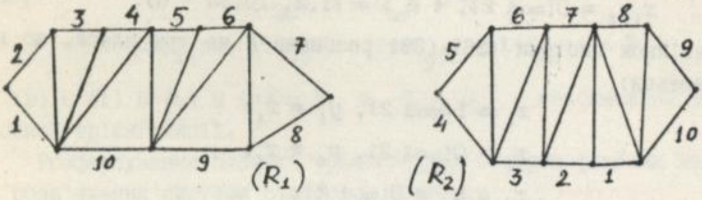

Рис.6. Дві області плоскої тріангуляції.

(36)-(38) кожному ребру гамільтонового циклу співставимо пару змінних x_i, y_i, а внутрішнім ребрам - z_i (z'_i). Починаючи з опорного трикутника, внутрішні ребра природним чином упорядковуються. З системи (36)-(38) випливають рівності в полі F_2:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= x_1 + x_2 + 1, & z'_1 &= y_1 + y_2 + 1, \\
z_2 &= x_1 + x_2 + x_3, & z'_2 &= y_1 + y_2 + y_3, \\
z_3 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 1, & z'_3 &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 1, \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
z_8 &= x_7, & z'_8 &= y_7.
\end{aligned} \qquad (39)
$$

Цій системі рівнянь відповідає певна послідовність ребер гамільтонового циклу $S = (1,2,3,4,10,5,6,9,8,7)$. Позначимо S_i (S'_i) суму перших i членів послідовності змінних x (або y) відповідно з S. Тоді система (39) перетвориться в систему

$$1 + x_i y_i = 1,$$
$$S_2 + S_2' + S_2 S_2' = 1,$$
$$1 + S_3 S_3' = 1,$$
$$S_4 + S_4' + S_4 S_4' = 1, \qquad (40)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$S_8 + S_8' + S_8 S_8' = 1,$$
$$1 + S_9 S_9' = 1.$$

Добуток всіх рівнянь дає вирішуючий поліном

$$F_1(X,Y) \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2). \qquad (41)$$

Кожній парі (X,Y), що задовольняє (41), відповідає правильне розфарбування вершин графа в області R_1 без урахування області R_2. Так як x_7 та y_7 не входять в систему рівнянь (40), то в області R_2 це приводить до утворення двох послідовностей $P = (4,5,6,3)$ та $Q = (9,10,8,1,2)$, яким відповідає подібна до (40) система рівнянь та вирішуючий поліном $F_2(X,Y)$. Об'єднуючи два поліноми і підставляючи скрізь $x_i^2 = x_i$, одержимо вирішуючий поліном для всього графа

$$F_1(X,Y)\cdot F_2(X,Y) \equiv F\ (X,Y) \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2). \qquad (42)$$

Позначимо $P_i(P_i')$, $Q_i(Q_i')$ суму перших i змінних x (або y), що відповідають послідовностям P та Q. Розглянемо циклічний добуток $C = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)\times\dots\times(x_n + x_1)$. Доведено, що $C \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$, якщо $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$. Позначимо $a + b + 1 = \overline{a + b}$. Якщо C містить λ множників з запереченнями, то $C \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$ для $\lambda \equiv (n + 1)(\mathrm{mod}\ 2)$. Нехай треба знайти коефіцієнт $A(G)$ члена полінома (42), який не містить двоїстих змінних y_i. Із системи (40) визначимо

$$A(G) = S_2 S_4 \dots S_8 P_2 P_4 Q_2 Q_4, \qquad (43)$$

тобто $A(G)$ є добуток всіх парних сум змінних. Якщо позначити $x(i)$ змінну, яка має i-й номер в послідовності S, то

$$S_{2k-2} S_{2k} = S_{2k-2}\overline{[x(2k-1) + x(2k)]}.$$

Те саме має місце для послідовностей P та Q. Таким чином, $A(G)$ являє собою добуток множників і деякі з них утворюють циклічні вирази. Всі множники, за винятком тих, що відповідають опорним трикутникам, мають заперечення. Назвемо такі множники поміченими.

$$A(G) = (\overline{x_8 + x_1})(x_1 + x_2)(\overline{x_3 + x_4})(x_4 + x_5) \times$$
$$\times (\overline{x_5 + x_{10}})(x_{10} + x_9)(\overline{x_9 + x_6})(x_6 + x_3). \qquad (44)$$

За винятком перших двох множників інші утворюють циклічний вираз. Оскільки $\lambda \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$, то $A(G) \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$. Але якщо $A(G)$ містить хоча б один циклічний вираз, у якого непарна кількість множників із запереченням, то $A(G) \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$.

Отже, якщо $A(G) \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$, то розв'язок системи (36)-(38) має вигляд:

1) всі $y_l \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$;

2) $x_{l_1} \neq x_{l_2}$ для множників (44) типу $(x_{l_1} + x_{l_2})$;

3) $x_{j_1} = x_{j_2}$ для множників (44) типу $(\overline{x_{j_1} + x_{j_2}})$.

Якщо коефіцієнт при наборі прямих змінних тотожньо рівний нулю, то треба знаходити коефіцієнти при наборі змінних y_l. Розглянемо набір $y_{l_1}, y_{l_2}, \ldots, y_{l_k}$. Нехай в S змінним цього набору відповідають місця з номерами $s_1<s_2<\ldots<s_k$, а в P та Q - місця з номерами $p_1<p_2<\ldots<p_l$ та $q_1<q_2<\ldots<q_m$ ($l>0$, $m>0$, $l+m = k$).

Означення 9. Набір змінних $y_{l_1}, y_{l_2}, \ldots, y_{l_k}$ називається правильним, якщо для його номерів місць в послідовностях S, P та Q виконується умова

$$s_l \equiv p_l \equiv q_l \equiv (l+1)(\mathrm{mod}\ 2). \qquad (45)$$

Лема 6. Якщо набір змінних $y_{l_1}, y_{l_2}, \ldots, y_{l_k}$ неправильний, то в поліномі (42) коефіцієнти при наборі цих змінних тотожньо рівні нулю.

Кожному заданому правильному набору двоїстих змінних співставимо геометричний образ G_k^* графа G, який утворюється після стягування G по ребрах гамільтонового циклу $(l_1, l_2, \ldots, l_k)$, при цьому кратні внутрішні ребра зберігаються. Знайдемо $A(G_k^*)$ за формулою (43), де кожен множник $x_{j_1} + x_{j_2}$ буде мати стільки заперечень, скільки інцидентних внутрішніх ребер по mod 2 в G_k^* спільній вершині ребер J_1 та J_2. Це правило виконувалось і для G.

Доведено, що $C(y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_k}) = \bar{x}_{i_1} \cdot \bar{x}_{i_2} \cdot \ldots \cdot \bar{x}_{i_k} \cdot A(G_k^*)$.

Теорема 19. Система (36)-(38) має розв'язок тоді і лише тоді, коли знайдеться такий правильний набір змінних $y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_k}$ ($k > 0$), що в виразі $A(G_k^*)$ будуть відсутні циклічні добутки з непарним числом заперечень.

Якщо умови цієї теореми виконуються і знайдено відповідний набір змінних, коефіцієнти при яких тотожньо відмінні від нуля, то розв'язок системи (36)-(38) знаходиться просто.

Теорема 20. Якщо $C(y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_k}) \neq 0 \pmod 2$, то розв'язок системи (36)-(38) має вигляд:

1) $y_{i_1} = y_{i_2} = \ldots = y_{i_k} \equiv 1 \pmod 2$;

2) всі інші $y_i = 0 \pmod 2$;

3) $x_{i_1} = x_{i_2} = \ldots = x_{i_k} \equiv 0 \pmod 2$; (46)

4) $x_{j_1} \neq x_{j_2}$ для множників $A(G_k^*)$ типу $(x_{j_1} + x_{j_2})$;

5) $x_{j_1} = x_{j_2}$ для множників $A(G_k^*)$ типу $(\overline{x_{j_1} + x_{j_2}})$.

У загальному випадку, коли гамільтонів цикл розбиває площину на дві області R_1 та R_2, двоїстим графом до кожної з цих областей буде дерево, степінь розгалуження якого дорівнює 3 (рис.7 а,б).

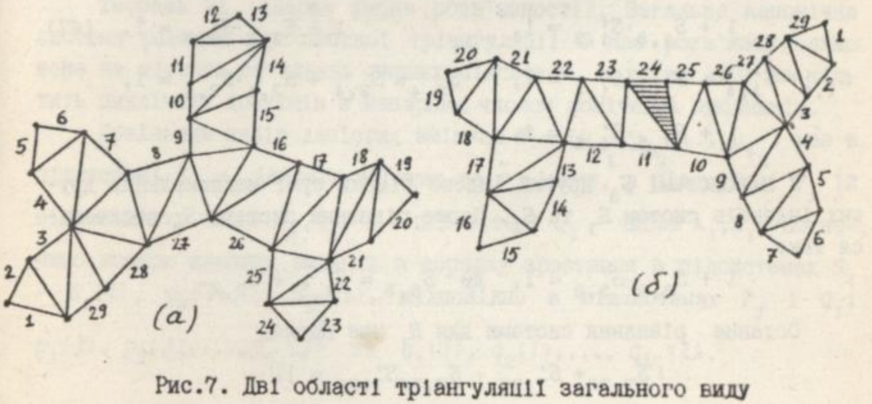

Рис.7. Дві області тріангуляції загального виду

Пронумеруємо ребра гамільтонового циклу за годинниковою стрілкою. Області R_1 відповідає система рівнянь, яка складається аналогічно системі (39) або (40). Як видно, вся система розбивається на кілька підсист м, які поступово об'єднуються. Позначимо їх S_i, тоді вся система схематично виглядає як дерево d_1 (рис.8,а), де вершини степені 3 зображають трикутні грані, які називаються граничними для двох підсистем.

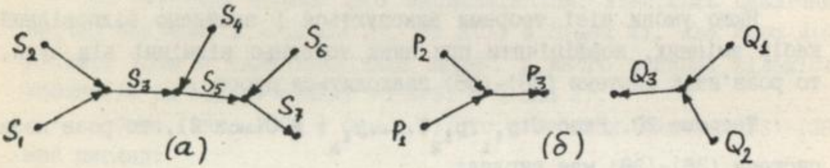

Рис.8. Схема об'єднання підсистем

Підсистема S_1 включає змінні з номерами (1,2,3,29,28), підсистема S_2 - (5,6,4,7). Їх об'єднання, а також ребра 8,27 (номера власних змінних) утворюють підсистему S_3, і т. д., доки не отримаємо підсистему S_7, яка є остаточною, бо включає всі змінні. Порядок об'єднання неоднозначний. Ті підсистеми, яким в дереві відповідає висяча вершина, називаються незалежними. Позначимо S_{ij} (S'_{ij}) суму перших j прямих (двоїстих) змінних незалежної підсистеми S_i. Тоді перші дві підсистеми мають вигляд

$$1 + x_i y_i = 1,$$

$$S_{1,2}+ S'_{1,2} + S_{1,2}\cdot S'_{1,2} = 1, \qquad S_{2,2}+ S'_{2,2} + S_{2,2}\cdot S'_{2,2} = 1,$$

$$1 + S_{1,3}\cdot S'_{1,3} = 1, \qquad 1 + S_{2,3}\cdot S'_{2,3} = 1, \quad (47)$$

$$S_{1,4}+ S'_{1,4} + S_{1,4}\cdot S'_{1,4} = 1, \qquad S_{2,4}+ S'_{2,4} + S_{2,4}\cdot S'_{2,4} = 1,$$

$$1 + S_{1,5}\cdot S'_{1,5} = 1.$$

У підсистемі S_3 другий індекс рівний сумі максимальних других індексів систем S_1 та S_2. Перше рівняння системи S_3 запишеться так:

$$1 + S_{3,9}\cdot S'_{3,9} = 1, \text{ де } S_{3,9} = S_{1,5} + S_{2,4}.$$

Останнє рівняння системи для R_1 має вигляд

$$S_{7,28}+ S'_{7,28} + S_{7,28}S'_{7,28} = 1,$$

де $S_{7,28}$ рівне сумі всіх прямих змінних, за винятком x_{24}. В області R_2 трикутна грань з ребром 24 розбиває область на 2 частини, схематичне зображення яких дає рис.8,б у вигляді дерев d_2 та d_3. Рівняння для цих областей складають підсистеми P_i та Q_j, а відповідні суми змінних також мають подвійні індекси.

Означення 10. Підсистема рівнянь називається парною або непарною, якщо вона складається з відповідного числа змінних.

Об'єднання всіх підсистем в області R_1 приводить до утворення послідовності ребер S, а в області R_2 - двох послідовностей P та Q. Перемножуючи рівняння системи для всіх областей та спрощуючи вирази підстановкою $z^k = z$, одержимо вирішуючий поліном

$$\mathfrak{Z}(X,Y) \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2). \qquad (48)$$

Загальна система рівнянь має розв'язок тоді і тільки тоді, коли хоча б один коефіцієнт цього полінома тотожньо не рівний нулю. Частину полінома, яка не містить двоїстих змінних, позначимо $A(G)$.

Лема 7. Якщо плоска тріангуляція містить хоча б одне об'єднання парних підсистем, то $A(G) \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$.

Як і для лінійного випадку вираз $A(G)$ можна отримати у вигляді добутку двочленів, більшість з яких помічена. Цей вираз визначається послідовностями S, P та Q. Об'єднання в пари відповідає порядку об'єднання в підсистеми, а кожна пара має стільки заперечень, скільки знаходиться між відповідними ребрами гамільтонового циклу внутрішніх ребер.

Теорема 21. (Перша умова розв'язності). Загальна канонічна система рівнянь для плоскої тріангуляції G має розв'язок, якщо вона не містить об'єднань парних підсистем, а вираз $A(G)$ не містить циклічних добутків з непарним числом помічених множників.

Довільний набір двоїстих змінних $N = (y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_k})$ має в підсистемі S_i ν_i власних змінних та $\tilde{\nu}_i$ інших, в підсистемі P_j їй відповідають числа $\eta_j, \tilde{\eta}_j$, а в підсистемі Q_l - числа $\lambda_l, \tilde{\lambda}_l$. Позначимо номери власних змінних в порядку зростання в підсистемах S_i - $s_1(i), s_2(i), \ldots, s_{\nu_i}(i)$, відповідно в підсистемах P_j і Q_l: $p_1(j), p_2(j), \ldots, p_{\eta_j}(j)$ та $q_1(l), q_2(l), \ldots, q_{\lambda_l}(l)$.

Означення 11. Набір двоїстих змінних $N = \{y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_k}\}$ називається правильним, якщо для будь-якого r в кожній підсистемі виконуються умови

$$\tilde{\nu}_t + s_r(t) \equiv \tilde{\eta}_j + p_r(j) \equiv \tilde{\lambda}_l(l) + q_r(l) \equiv (r + 1)(\mathrm{mod}\ 2). \quad (49)$$

Для довільної підсистеми S_t позначимо $\rho(S_t)$ - кількість всіх її змінних. Тоді індексом цієї підсистеми відносно набору N називається величина

$$ind(S_t) = [1 + \rho(S_t) + \nu_t + \tilde{\nu}_t](\mathrm{mod}\ 2). \quad (50)$$

Так само визначаються індекси будь-якої підсистеми відносно N.

Лема 8. Якщо в поліномі $\mathfrak{F}(X,Y)$ коефіцієнт при наборі двоїстих змінних $N = \{y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_k}\}$ тотожньо не рівний нулю, то

набір N є правильним;

для будь-яких двох підсистем, що об'єднуються, добуток їх індексів рівний нулю.

Теорема 22. (Друга умова розв'язності). Загальна канонічна система рівнянь для плоскої тріангуляції G має розв'язок в тому і тільки у тому випадку, коли знайдеться набір двоїстих змінних N, що задовольняє умові леми 8, і такий, що вираз $A(G_k^*)$ для гомоморфного образу G не містить циклічних добутків з непарним числом помічених множників.

Якщо такий набір знайдеться, то розв'язок дає

Теорема 23. Якщо $C(N) \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$, то один із розв'язків загальної канонічної системи рівнянь можна отримати підставляючи в $A(G_k^*)$ наступні значення:

1) якщо $y_t \in N$, то $y_t = 1$, $x_t = 0$;

2) $y_t = 0$, якщо $y_t \notin N$;

3) $x_{j_1} = x_{j_2}$ для множників $(\overline{x_{j_1} = x_{j_2}})$;

4) $x_{j_1} = x_{j_2}$ для множників $(x_{j_1} = x_{j_2})$.

Загальний розв'язок системи дає

Теорема 24. Для того щоб канонічна система була розв'язною, необхідно і достатньо, щоб множина ребер гамільтонового циклу допускала розбиття на три підмножини μ_1, μ_2, μ_3, які взаємно не перетинаються і такі, що

тільки одна з них може бути пустою;
кожна з них є правильним набором.

Проблема чотирьох фарб зводиться до розв'язування системи нерівностей в полі F_3. Пронумеруємо ребра гамільтонового циклу дотримуючись порядку трикутних граней, починаючи з опорного трикутника. Лінійний випадок зображений на рис.9,а (область R_1).

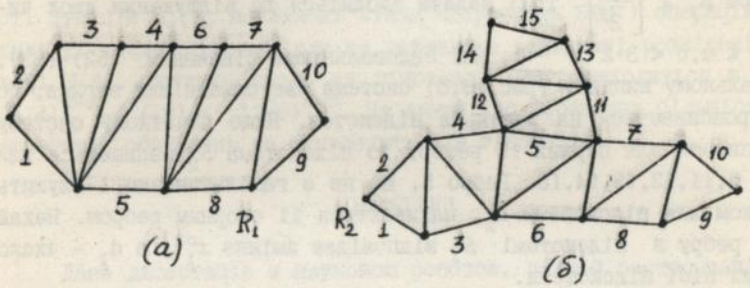

Рис.9. Нумерація ребер для систем нерівностей

Кожному ребру співставимо змінну x_i, яка приймає значення на множині {-1,0,1}. Відповідна система має вигляд

$$\left.\begin{array}{ll}
x_1 - x_2 & \neq 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 & \neq 0 \\
x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & \neq 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots & \\
x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + \ldots + x_8 + x_9 & \neq 0 \\
x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + \ldots + x_8 - x_9 - x_{10} & \equiv 0
\end{array}\right\} \pmod 3 \qquad (51)$$

Нехай $\bar{\alpha} = (x,(-1)^{\alpha_7},(-1)^{\alpha_6},\ldots,(-1)^{\alpha_0},0)^T$, а $\bar{\beta} = (x,(-1)^{\beta_7},(-1)^{\beta_6},\ldots,(-1)^{\beta_0},0)^T$. Тоді (51) можна записати у вигляді матричного рівняння

$$X = A\cdot\bar{\alpha}. \qquad (52)$$

Визначник $|A| \neq 0 \pmod 2$, тому система (52) має $3\cdot 2^{n-2}$ розв'язків. Нехай $\alpha_i = \left\lfloor \dfrac{u}{2^i} \right\rfloor$.

Теорема 25. Розв'язком системи (52) є вектор X, у якого $x_1 = 1 - \alpha_{n-2}$, $x_i = (-1)^i\cdot(\alpha_{n-i} - \alpha_{n-i-1})$, $(i = 1,2,\ldots,n-1)$.

Для області R_2 має місце аналогічна система

$$P \cdot A \cdot P^{-1} \cdot X = \overline{\beta}, \qquad (53)$$

де P - перестановочна матриця, яка відповідає порядку змінних в області R_2.

За теоремою 25 її розв'язком буде вектор X, залежний від параметра $\beta_j = \left[\frac{v}{2^j}\right]$. Тоді задача зводиться до відшукання двох чисел $0 < u, v < 3 \cdot 2^{n-2} - 1$, які задовольняють рівнянням (52)-(53). У загальному випадку (рис. 9,б) система має складніший вигляд, бо вона розбивається на декілька підсистем. Якщо початкову систему S_1 записати для перших 10 ребер, то підсистема S_2 запишеться для ребер 5,11,12,13,14,15. Ребро 5, що не є гамільтоновим і служить початком для підсистеми S_2, називається її опорним ребром. Нехай цьому ребру в підсистемі S_l відповідає змінна $x_l^{оп}$, а n_l - число змінних цієї підсистеми.

Теорема 26. Розв'язком загальної системи нерівностей є вектор X, у якого компоненти початкової системи S_1 знаходяться за формулами теореми 25, а компоненти, що відповідають підсистемі S_l $(l > 1)$, за формулами

$$x_{j+i+1} = x_l^{оп} - 1 + \alpha_{p(l)} + (\alpha_{p(l)-i} - \alpha_{p(l)-i-1}) \cdot (-1)^i,$$

$$x_{j+n_l} = x_l^{оп} + \alpha_{p(l)} - n_l + 1 + (-1)^{n_l} \cdot \alpha_{p(l)-n_l+1}, \qquad (54)$$

де $i = 0,1,\ldots,n_l - 2$; $j = \sum_{k=1}^{l-1} n_k$; $p(l) = n + l - j - 2$.

На основі теоретичних результатів відносно систем рівнянь та нерівностей пропонуються два алгоритми розфарбування плоских тріангуляцій, для яких побудований гамільтонів цикл.

Перший алгоритм складається з декількох етапів. На кожному k-му етапі $(k > 0)$ розглядаються всі правильні набори двоїстих змінних $N = \{y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_k}\}$ і визначається кількість помічених множників у виразі $A(G_k^*)$. Перевірка кожного набору вимагає $O(n)$ операцій. Число наборів для заданого k оцінюється зверху величиною $C_{k/2}^k$. На практиці максимальне значення k не перевищує кількості опорних трикутників. Цей алгоритм знаходить перший розв'язок задачі. Його можна поліпшити, якщо пронумерувати ребра гамільтонового циклу у порядку появи відповідних змінних в системі рівнянь області R_1.

Другий алгоритм складається з $(n-2)$-х етапів і видає всі розв'язки задачі. На k-му етапі порівнюють $x_k(\bar{\alpha})$ з $x_k(\bar{\beta})$. Оскільки $\alpha_i(u)$ та $\beta_j(v)$ періодичні функції, то на площині (u,v) кожне порівняння виділяє множину прямокутників, де ці змінні співпадають. Перетин таких прямокутників для всіх етапів - це ті точки (u,v), які утворюють множину розв'язків задачі. Із-за періодичності функцій α_i,β_j початкові етапи потребують $O(n^2)$ операцій. Надалі їх число зростає, але не перевищує кількості розв'язків задачі $f(n)$. Останнє число за гіпотезою [20] знаходиться в межах $(5/4)^{n-3} < f(n) < (11/8)^{n-3}$. На даний час переважна більшість результатів обчислень не суперечить цій гіпотезі.

ВИСНОВКИ

Дана дисертація є науковою роботою, в якій застосовані теоретико-числові методи для дослідження двох фундаментальних проблем теорії графів: 1) задачі оптимального представлення графів в класі A-графів та в підкласі NA-графів і створення на їх основі структурних особливостей ефективних алгоритмів на графах; 2) задачі розфарбування плоских графів та побудові досконаліших алгоритмів її розв'язання.

Наукова та практична цінність дисертаційної роботи:

1. Уперше розроблено спосіб оптимального кодування фактороїдів та набору ланцюгів в класі NA-графів та зроблено повний перелік всіх таких кодувань; уперше побудоване оптимальне кодування однорідних дерев першого та другого рангу в класі A-графів.

2. Створено та застосовано метод дослідження однорідних NA-графів за допомогою побудови спеціального графа розкладання твірних $R(n)$ і доведено, що цей граф для парного n є результатом радіального гомоморфізму від $R(n)$ для непарного n з тим же кардинальним числом. Створено та застосовано метод дослідження A-графів за допомогою побудови допоміжного графа несуміжностей $H(u)$.

3. Уперше знайдено необхідні та достатні умови зв'язності NA-графів з двома та трьома твірними.

4. Уперше застосовано розв'язок задачі з теорії чисел про різниці для оптимального кодування однорідних дерев другого рангу

та побудови універсальних кодів A-графів.

5. Доведено, що алгоритми пошуку вглиб і в ширину на A-графах мають кращі показники, ніж подібні алгоритми на звичайних графах.

6. Виведено та досліджено систему рівнянь, що описує проблему чотирьох фарб в полі F_2 для плоскої тріангуляції, де змінні відповідають ребрам гамільтонового циклу. Знайдені необхідні та достатні умови існування розв'язку системи в цьому полі.

7. Знайдено умови існування коефіцієнтів характеристичного полінома системи рівнянь, не тотожних $0 (\mathrm{mod}\ 2)$, та вказано спосіб побудови розв'язку цієї системи завдяки таким коефіцієнтам.

8. Досліджена система нерівностей в полі F_3 відносно змінних гамільтонового циклу, для кожної з двох областей знайдено розв'язок системи у вигляді періодичної функції від натурального аргумента.

9. Запропоновано два алгоритми розфарбування плоскої тріангуляції в чотири кольори, які є самими досконалими на даний час.

Основні положення дисертації опубліковані в таких працях:

1. Асельдеров З.М., Донец Г.А. Представление и восстановление графов. - Киев.: Наук. думка, 1991. - 178 с.

2. Асельдерова И.М., Донец Г.А. Оптимальное кодирование циклов и однородных деревьев // Теория и практика разработки и внедрения интегрированных АСУ. - Киев: Ин-т кибернетики им.В.М.Глушкова АН УССР, 1988. - С.87-94.

3. Донец Г.А. О разрешающих полиномах плоских насыщенных графов // Теория оптимальных решений. - Киев: Ин-т кибернетики АН УССР, 1968.- Вып.2. - С.34-41.

4. Донец Г.А. О числе раскрасок некоторых C-графов. Часть 1 // Теория оптимальных решений. - Киев: Ин-т кибернетики АН УССР, 1968.- Вып.4. - С.23-29.

5. Донец Г.А. О числе раскрасок некоторых C-графов. Часть 2 // Там же.- Вып.5. - С.33-41.

6. Донец Г.А. О нижней границе числа вершин плоских критических графов // Кибернетика. - 1971. - №4. - С.76-85.

7. Донец Г.А. Теория графов // Энциклопедия кибернетики.- 1972. - С.96.

8. Донец Г.А. Комбинаторный подход к проблеме раскраски плоских графов // Математические методы исследования и оптимизации систем. - Киев: Ин-т кибернетики АН УССР, 1971.- С.23-28.

9. Донец Г.А. Об одной вершинной функции для некоторых T-графов // Там же.- С.14-19.

10. Донец Г.А. Об одном подходе к проблеме раскраски плоских графов. Часть 1 // Кибернетика. - 1972. - №4. - С.22-26.

11. Донец Г.А. Об одном подходе к проблеме раскраски плоских графов. Часть 2 // Там же.- №6. - С.16-19.

12. Донец Г.А. О раскраске T-графов // Математические методы исследования и оптимизации систем. - Киев: Ин-т кибернетики АН УССР, 1973. - С.18-22.

13. Донец Г.А. О свойствах раскрашенных плоских триангуляций //Управляемые системы. - Новосибирск. - 1973. - 11.- С.55-60.

14. Донец Г.А. О графах, задаваемых аналитическим способом // Теория оптимальных решений. - Киев: Ин-т кибернетики им.В.М.Глушкова АН УССР, 1987. - С.20-27.

15. Донец Г.А. Об оптимальном кодировании однородных деревьев в арифметических графах // Методы решения экстремальных задач и смежные вопросы. - Киев: Ин-т кибернетики им.В.М. Глушкова АН УССР, 1989. - С.74-80.

16. Донец Г.А., Неженцев Ю.И. Об оптимальном кодировании циклов и наборов сетей в арифметических графах // Теория оптимальных решений.- Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова АН УССР, 1990. - С.73-80.

17. Донець Г.О., Неженцев Ю.I. Арифметичні графи та їх представлення // Доп. АН УРСР. Сер.А. - 1990. - №11. - С.5-8.

18. Донец Г.А., Шор Н.З. О задаче четырех красок // Математика сегодня. - Киев: Вища шк., 1983. - С.34-55.

19. Донец Г.А., Шор Н.З. Алгебраический подход к проблеме раскраски плоских графов. - Киев: Наук. думка, 1981.- 143 с.

20. Донец Г.А, Шор Н.З. Алгебраический подход к исследованию задачи о четырех красках // Теория оптимальных решений.- Киев: Ин-т кибернетики АН УССР.- 1967.- Вып.1.- С.23-29.

21. Донец Г.А. Отображение множества решений задачи раскраски плоских графов на n-мерный единичный куб // Оптимизация и ее приложения. - Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, - 1997. - С.36-41.

Донец Г. А. Теоретико-числовой подход к решению некоторых задач теории графов. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.05.01 - теоретические основы информатики и кибернетики (математическая кибернетика), Институт кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, Киев, 1997. Защищается 21 научная работа, в которых исследуются задачи оптимального представления арифметических графов (задачи нумерации графов), а также проблема раскраски плоских графов. Получено оптимальное кодирование для многих классов графов и перечислены все такие классы. Исследовыны две системы равенств и одна система неравенств в полях F_2 и F_3, которые адекватно отражают проблему четырех красок. Предложены два алгоритма раскраски плоских графов.

G.A.Donets. The theoretikal-numerikal approach to solution of some problems of the graph theory. Doktor of sciences thesis (physics and mathematics), specialization 01.05.01 - theoretical foundations of informatics and cybernetics (mathematical cybernetics). V.M.Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 1997. The 21 scientific works are defended dealing with the investigation of the problems of optimal representation of arithmetical graphs (the problems of enumeration of graph vertices) and the problem of colouring of planar graphs. The optimal coding for various classes of graphs is obtained and all these classes are enumerated. In the fields F_2 and F_3 two systems of equalities and one system of inequalities are studied which adequately reflect the four colour problem. Two algorithms for the planar graphs colouring are advanced.

Ключові слова:
арифметичний граф, натуральний арифметичний граф, оптимальний код, гамільтонів цикл, фактороїд, розфарбування графів, підсистема рівнянь по модулю, вирішуючий поліном, плоский граф, алгоритм.

Підп. до друку 28.03.97. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк. Ум. друк. арк. 2,09. Ум. фарбо-відб. 2,21. Обл.-вид. арк. 2,0. Зам. 134. Тир. 100 прим.

Редакційно-видавничий відділ з поліграфічною дільницею
Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України
252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40