КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

УДК 512.552.1

МАЩЕНКО Людмила Зіновіївна

НАПІВДОСКОНАЛІ КІЛЬЦЯ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

01.01.06 — алгебра та теорія чисел

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1997

Дисертацією є рукопис

Робота виконана у Київському державному університеті ім. Тараса Шевченко.

Науковий керівник : *доктор фізико-математичних наук, професор Кириченко В.В.*

Офіційні опоненти : *доктор фізико-математичних наук, професор Міхальов О.В. (Росія).*

кандидат фізико-математичних наук, доцент Комарницький М.Я.

Провідна установа : *Харківський державний університет*

Захист відбудеться 17 червня 1997 року о 14-й годині на засіданні спеціалізованої ради Д 01.01.01 при Київському університеті ім. Тараса Шевченка за адресою : *252127 Київ-127, проспект Академіка Глушкова 6, механіко-математичний факультет.*

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці університету за адресою *м. Київ, вул. Володимирська, 58.*

Автореферат розісланий "15" травня 1997 року.

Вчений секретар
спеціалізованої ради — Овсієнко С.А.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертація присвячена вивченню властивостей напівдосконалих кілець, які пов'язані з будовою різних типів сагайдаків цих кілець.

Теорія кілець бере свій початок, з одного боку з спроб узагальнення поняття комплексного числа, а з іншого боку дуже важливою для розвитку цієї теорії була теорія алгебраїчних чисел, побудована Дедекіндом і Кронекером.

Теорії скінченновимірних алгебр присвячено роботи Веддербарна, Моліна, Е.Картана, Фробеніуса та багатьох інших.

Новий етап розвитку теорії кілець було започатковано працями Артіна, Е.Нетер, Брауера, Кете, Асано, Накаями та інших, які розглядали кільця з умовами обриву ланцюгів ідеалів.

В 1968 р. Л.А.Скорняков ввів важливий клас напівланцюгових кілець, який містить клас однорядних кілець Кете та клас узагальнено однорядних кілець Накаями.

Напівланцюгові кільця є напівдосконалими кільцями.

Напівдосконалі кільця було введено в 1960 році американським математиком Бассом.

В 1972 році в зв'язку з задачами теорії зображень П.Габріель ввів поняття сагайдака скінченновимірної алгебри. В.В.Кириченко переніс це поняття на випадок напівдосконалих кілець і ввів поняття первинного сагайдака напівдосконалого кільця. Методи теорії сагайдаків виявились дуже корисними в структурній теорії кілець.

Вперше поняття сагайдака напівдосконалого кільця було застосовано для характерізації нетерових напівланцюгових кілець. В цьому випадку сагайдаки повністю характеризують такі кільця.

Більш складні класи напівдосконалих кілець вже не завжди повністю характеризуються будовою сагайдаків, но в багатьох випадках властивості сагайдаків дають важливу інформацію про будову кілець. Так, наприклад, сагайдаки спадкових напівдосконалих напівдистрибутивних кілець завжди ациклічні, а сагайдаки нетерових напівпервинних напівдосконалих нерозкладних кілець сильно зв'язні.

В роботах В.В.Кириченка, П.П.Костюкевича, В.В.Могильової, З.П.Халецької, Ю.В.Яременка та інших методи теорії сагайдаків застосовувались для вивчення бірядних та багатորядних кілець, спадкових та напівспадкових кілець, напівпервинних та слабопервинних кілець.

Мета роботи. Одержати теореми розкладу для різних класів напівдосконалих кілець, вивчити будову сагайдаків квазіфробеніусових кілець та будову ідемпотентних ідеалів напівдосконалих кілець, дати опис горенштейнових напівмаксимальних трикутних та (0,1)-кілець.

Методи досліджень. Основу досліджень складають методи теорії сагайдаків та методи теорії кілець і модулів.

Наукова новизна. В роботі отримано такі нові результати :

- вивчено будову ідемпотентних ідеалів напівдосконалих кілець, які задовольняють умові Накаями;
- вивчено будову нетерових напівдосконалих напівдистрибутивних кілець, в яких кожен нерадикальний ідеал є ідемпотентним;
- одержано тереми розкладу для різних класів напівдосконалих кілець;
- доведено, що сагайдак квазіфробеніусова кільця сильно зв'язаний;

- вивчено будову напівмаксимальних горенштейнових трикутних та (0,1)-кілець та їх сагайдаків.

Теоретична та практична цінність дисертації полягає в розвитку методів теорії сагайдаків в структурній теорії кілець. Вони можуть бути використані для подальших досліджень в цій теорії. Всі одержані в дисертації результати мають загально-теоритичний характер і їх прямого практичного використання не передбачається.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідались на міжнародній науковій конференції, присвяченій 100-річчю з дня народження М.Г.Чеботарьова (Казань, 1994); п'ятій міжнародній конференції ім.ак.М.Кравчука (Київ, 1996); міжнародній конференції "Representation theory and computer algebra" (Київ, 1997).

Нумерація теорем, тверджень, наслідків в авторефераті співпадає з їх нумерацією в дисертації.

Публікації. По темі дисертації опубліковано п'ять наукових робіт, список яких наведено в кінці автореферату.

Об'єм і структура роботи : Загальний обсяг дисертації становить 101 сторінку машинопису. Дисертація складається із вступу та 13 підрозділів. Список використаних джерел містить 35 найменувань.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовано актуальність проблематики дисертації, наводиться короткий огляд робіт за темою дисертації, характеризується зміст роботи і її основні результати.

Дисертаційна робота складається з вступу та трьох глав.

У вступі обгрунтовано актуальність теми дисертації та викладено її зміст.

У першій главі наводяться необхідні для нас ідомості з теорії кілець і модулів та теорії сагайдаків.

Всі кільця, що розглядаються в дисертації, асоціативні з $1 \neq 0$.

Під модулями, якщо не оговорено протилежне , розуміємо унітарні праві модулі.

В першому параграфі дається означення напівдосконалого кільця і викладаються критерії напівдосконалості кільця.

Другий параграф присвячено викладенню теорії проективних накрить.

В третьому параграфі даються загальне означення сагайдака напівдосконалого кільця, побудованого по ідеалу, означення первинного сагайдака напівдосконалого кільця та означення сагайдака Пірса. Наводяться приклади, які ілюструють ці поняття.

В четвертому параграфі розглядаються досконалі кільця, які також вперше введені Бассом. Добре відомо, що кільце є досконалим тоді і тільки тоді, коли воно є напівдосконалим і радикал Джекобсона цього кільця є Т-нільпотентним справа і зліва.

Відмітимо такі результати.

ТЕОРЕМА 4.5. Досконале справа напівпервинне кільце А є напівпростим артиновим кільцем. Навпаки, напівпросте артинове кільце є досконалим напівпервинним кільцем.

НАСЛІДОК 4.8. Радикал Джекобсона і первинний радикал досконалого справа кільця співпадають.

НАСЛІДОК 4.9. Якщо А нетерове справа і досконале справа кільце, то PQ(A) одержується з Q(A) заміною всіх стрілок, що йдуть з однієї вершини до іншої (можливо співпадаючей з початковою) однією стрілкою.

Друга глава дисертації присвячена теоремам розкладу досконалих та напівдосконалих кілець в прямий добуток нерозкладних кілець.

Термін "сагайдак", згідно з термінологією Габрієля, означає скінченний орієнтований граф.

П'ятий параграф присвячено викладанню основних фактів про сагайдаки. При цьому широко використовується теорія матриць з невід'ємними коефіцієнтами.*

Позначимо через $1,\dots,s$ вершини сагайдака Q і припустимо, що існує рівно t_{ij} стрілок між вершинами i та j. Через $[Q]$ будемо позначати матрицю суміжності сагайдака Q :

$$[Q] = \begin{pmatrix} t_{11} \dots t_{1s} \\ \dots\dots\dots\dots \\ t_{s1} \dots t_{ss} \end{pmatrix} .$$

ОЗНАЧЕННЯ 5.1. Матриця $B\in M_n(R)$ називається ***перестановочно звідною***, якщо існує перестановочна матриця P така, що

$$P_t^T B P_t = \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} ,$$

де B_1 і B_2 - квадратні матриці порядку меньшого ніж n. В протилежному випадку матриця називається ***перестановочно незвідною***.

ОЗНАЧЕННЯ 5.2. Скінчений орієнтований граф (сагайдак) називається ***сильно зв'язним***, якщо є орієнтований путь між будь-якими його вершинами.

---

* Ф.Р.Гантмахер, Теория матриц М : Наука, 1967.- 575 с.

ТВЕРДЖЕННЯ 5.1. * Сагайдак Q сильно зв'язаний тоді і тільки тоді, коли його матриця суміжності [Q] перестановочна незвідна.

Відмітимо, що при перенумерації τ вершин сагайдака Q матриця [Q] переходить в матрицю $P_\tau^T[Q]P$.

ТВЕРДЖЕННЯ 5.2. Існує перестановочна матриця P така, що

$$P^T[Q]P = \begin{bmatrix} B_1 & B_{12} & \dots & B_{1t} \\ 0 & B_2 & \dots & B_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_t \end{bmatrix},$$

де матриці $B_1,\dots,B_t$ - перестановочно незвідні.

ТВЕРДЖЕННЯ 5.5. Сагайдак Q є ациклічним тоді і тільки тоді, коли існує перестановочна матриця P така, що

$$P^T[Q]P = \begin{bmatrix} 0 & * & & * & * \\ 0 & 0 & \dots & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ТВЕРДЖЕННЯ 5.8. Нехай Q - сильно зв'язаний сагайдак і максимальне додатне власне число матриці [Q] дорівнює одиниці. Тоді сагайдак Q співпадає з простим циклом C_n. Навпаки, якщо C_n - простий цикл, то максимальне додатне власне число матриці $[C_n]$ дорівнює одиниці.

---

* Lankaster P., .Theory of matrices, Academic Press, New York - London, 1969, 320 p.p.

ОЗНАЧЕННЯ 5.9. Нумерацію вершин сагайдака Q будемо називати ***стандартною***, якщо матриця [Q] має вигляд

$$[Q] = \begin{bmatrix} B_1 & * & \dots & * & * \\ 0 & B_2 & \dots & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_{t-1} & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & B_t \end{bmatrix},$$

де матриці $B_1,\dots,B_t$ перестановочно незвідні, та координати додатніх власних векторів $\vec{z_1},\dots,\vec{z_t}$ лінійно впорядковані за величиною.

ОЗНАЧЕННЯ 5.10. Сагайдак будемо називати ***правильним***, якщо будь-яка нумерація його вершин є стандартною.

ТВЕРДЖЕННЯ 5.11. Правильний зв'язаний сагайдак Q є сильно зв'язаним сагайдаком.

В шостому параграфі доводиться теорема розкладу для напівдосконалих кілець, яка базується на властивостях сагайдака Піроа та дається два варіанти теореми Веддербарна-Артина.

Нехай $B = [\Gamma(A)]$ - матриця суміжності сагайдака Піроа напівдосконалого кільця A, причому нумерація вершин сагайдака $\Gamma(A)$ стандартна. Тому

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & * & & * & * \\ 0 & B_2 & \dots & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_{t-1} & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & B_t \end{bmatrix} \quad (*)$$

де матриці $B_1, \ldots, B_t$ перестановочно незвідні, та координати додатніх власних векторів $\vec{z_1}, \ldots, \vec{z_t}$, які відповідають максимальним додатнім власним значенням матриць $B_1, \ldots, B_t$ лінійно впорядковані за величиною.

ТЕОРЕМА 6.1. Нехай A - напівдосконале кільце і $B = [\Gamma(A)]$ має вигляд (*). Тоді існує розклад $1 \in A$ в суму попарно ортогональних ідемпотентів : $1 = g_1 + \ldots + g_t$ такий, що

$$A = \bigoplus_{i,j=1}^{t} g_i A g_j$$

двосторонній пірсовський розклад, де $g_i A g_j = 0$ $(j<i)$ і матриці суміжності сагайдаків $\Gamma(A_i)$ кілець $A_i = g_i A g_i$ співпадають з B_i $(i = 1, \ldots, t)$.

ТЕОРЕМА 6.3. Наступні умови рівносильні для напівдосконалого кільця A :

(1) сагайдак $\Gamma(A)$ є незв'язним об'єднанням точок;

(2) кільце A ізоморфно скінченному прямому добутку повних матричних кілець над тілами.

ТЕОРЕМА 6.4. Наступн умови еквівалентні для нетерова справа напівдосконалого кільця A :

(1) сагайдак $Q(A)$ є незв'язним об'єднанням точок;

(2) кільце A ізоморфно скінченному прямому добутку повних матричних кілець над тілами.

Відмітимо наступний результат з сьомого параграфу.

НАСЛІДОК 7.3. Досконале кільце A єдиним чином розкладається у скінченний прямий добуток кілець $A_1, \ldots, A_m$ із зв'язними первинними сагайдаками.

Основним результатом восьмого параграфу є теорема 8.1., яка формулюється для довільного (не обов'язково напівдосконалого) кільця.

ТЕОРЕМА 8.1. Наступні умови рівносильні для кільця A з T-нільпотентним первинним радикалом :

(a) кільце A нерозкладне;

(b) фактор-кільце A/I^2 нерозкладне.

У дев'ятому параграфі розглядаються ідемпотентні ідеали напівдосконалих кілець.

ОЗНАЧЕННЯ 9.4. Будемо казати, що кільце A задовільняє лівій умові Накаями для ідеалів, якщо для довільних ідеалів J_1 і J_2 кільця A з рівності $J_1 + RJ_2 = J_2$ випливає, що $J_1 = J_2$.

ТЕОРЕМА 9.3. Нехай напівдосконале кільце A задовільняє лівій умові Накаями для ідеалів. Тоді кожний ідемпотентний ідеал J має вигляд $J = fAf$, де f - ідемпотент, центральний за модулем радикала Джекобсона R кільця A.

Нагадаємо, що s означає число попарно неізоморфних нерозкладних проективних модулів над напівдосконалим кільцем A.

ТЕОРЕМА 9.4. Нехай напівдосконале кільце A задовільняє лівій умові Накаями для ідеалів і нехай кожен нерадикальний ідеал є ідемпотентним. Тоді $s \leq 2$.

ТЕОРЕМА 9.6. Нехай A нетерове справа нерозкладне напідосконале напівдистрибутивне кільце. Якщо кожен нерадикальний ідеал кільця A є ідемпотентним, то кільце A нетерове напівланцюгове кільце і сагайдак $Q(A)$ кільця A містить не більш двох вершин. Навпаки, якщо сагайдак напівланцюгового нерозкладного нетерова кільця містить не більш двох вершин, то кожен нерадикальний ідеал цього кільця є ідемпотентним.

В десятому параграфі надається означення частково впорядкованої множини, в'язки, наведені приклади комутативної та некомутативної в'язки.

Результатом §10 є твердження 10.2.

ТВЕРДЖЕННЯ 10.2. В'язка $J(A)$ усіх ідемпотентних ідеалівнапівдосконалого кільця A, яке задовольняє лівій умові Накаями для ідеалів, відносно операції додавання ізоморфна напівструктурі усіх підмножин множини з S елементів відносно операції об'єднання.

Метою третьої глави є опис горенштейнових напівмаксимальних трикутних та (0,1)-кілець та вивчення сагайдаків квазіфробеніусових кілець.

Одиннадцятий параграф присвячен напівмаксимальним кільцям. Напівдосконале напівдистрибутивне (справа) кільце будемо називати SPSD (SPSDR) - кільцем.

ТЕОРЕМА 11.1. * Наступні умови рівносильні для нетерова справа напівпервинного напівдосконалого кільця A:

(а) кільце A є SPSD-кільцем;

(б) кільце A є прямим добутком напівпростого артинова кільця та напівмаксимального кільця.

ТЕОРЕМА 11.2. ** Наступні умови рівносильні для напівпервинного напівдосконалого нетерова кільця A:

(а) кільце A є SPSDR-кільцем;

(б) кільце A є прямим добутком напівпростого артинова кільця та напівмаксимального кільця.

Наступна теорема дає опис напівмаксимальних кілець.

---

* Кириченко В.В., Хибина Н.А. Полусовершенные полудистрибутивные кольца //Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры.-Киев : Ин-т математики, 1993.-с.457-480.

** Кириченко В.В., Пащенко З.П. О полупервичных полусовершенных кольцах дистрибутивно-представленческого типа //Алгебраические исследования, сборник статей, Институт математики НАН Украины, Киев, 1995 г.- с.66-76.

ТЕОРЕМА 11.3. * Довільне напівмаксимальне кільце ізоморфно скінченому прямому добутку первинних кілець вигляду :

$$A = \begin{bmatrix} \mathcal{O} & \pi^{\alpha_{12}}\mathcal{O} \dots & \pi^{\alpha_{1n}}\mathcal{O} \\ \pi^{\alpha_{21}}\mathcal{O} & \mathcal{O} & \pi^{\alpha_{2n}}\mathcal{O} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \pi^{\alpha_{n1}}\mathcal{O} & \pi^{\alpha_{n2}}\mathcal{O} \dots & \mathcal{O} \end{bmatrix},$$

де $n > 1$, $\mathcal{O}$ - дискретно нормоване кільце з простим елементом π, α_{ij} - цілі раціональні числа, причому $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для усіх i,j,k ($\alpha_{ii} = 0$ при $i=1...n$). Таке кільце нетерове з двох сторін.

У дванадцятому параграфі дається опис горенштейнових трикутних та (0,1)-кілець.

ТЕОРЕМА 12.1. * Наступні умови рівносильні для напівмаксимального первинного зведеного кільця A :

(а) кільце A - горенштейнове;

(б) існує підстановка $i \to \sigma(i)$ чисел $1,...,n$ така, що $\alpha_{ik} + \alpha_{k\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$ для будь-якого i.

ТЕОРЕМА 12.2. Будь-яке трикутне горенштейнове кільце $A = \{(\alpha_{ij}), \mathcal{O}\}$ еквівалентно в сенсі Моріти кільцю вигляду

---

* Завадский А.Г., Кириченко В.В. Модули без кручения над первичными кольцами //Зап.науч. семинаров ЛОМИ АН СССР.- 1976.-57.-с.100-116.

$$A_k = \begin{pmatrix} \mathfrak{O} & \mathfrak{O} & \mathfrak{O} \\ \pi^k\mathfrak{O} & \mathfrak{O} & \mathfrak{O} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \pi^k\mathfrak{O} & \pi^k\mathfrak{O} & \mathfrak{O} \end{pmatrix},$$

де $k>1$.

Навпаки, кільце A_k є горенштейновим кільцем при довільному $k>1$.

ТЕОРЕМА 12.3. Будь-яке зведене горенштейнове (0,1)-кільце A ізоморфно кільцю $H_m(\mathfrak{O})$ або кільцю $G_{2m}(\mathfrak{O})$. Навпаки, кільця $H_m(\mathfrak{O})$ та $G_{2m}(\mathfrak{O})$ є горенштейновими (0,1)-кільцями.

ТЕОРЕМА 12.4. Сагайдак горенштейнового трикутного (*), або (0,1)-кільця (**) є бірядним. В випадку (*) - це простий цикл з петлями в кожній вершині або простий цикл. В випадку (**) це або простий цикл з матрицею суміжності C_n або бірядний сагайдак, що задається блочною матрицею суміжності

$$\begin{pmatrix} C_{n/2} & C_{n/2} \\ C_{n/2} & C_{n/2} \end{pmatrix}$$

і який існує тільки для парних n.

В тринадцятому параграфі розглядаються квазіфробеніусові кільця. Основним результатом цього параграфу є наступна теорема.

ТЕОРЕМА 13.1. Сагайдак $Q(A)$ нерозкладного QF-кільця A сильно зв'язаний. Навпакі, для довільного сильно зв'язаного сагайдака Q існує скінченновимірна QF-алгебра A така, що $Q(A) = Q$.

РОБОТИ АВТОРА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Кириченко В.В., Мащенко Л. Колчаны квазифробениусовых колец // Алгебра и анализ. Тезисы докладов международной научной конференции посвященной 100-летию со дня рождения Н.Г.Чеботарева (5-11 июня 1994 г., г.Казань), 1994. С.49.

2. Мащенко Л. Сагайдаки горенштейнових кілець //П'ята Міжнародна конф. ім. ак. М. Кравчука, тез.доповід. -Київ,-1996.-с.277

3. Мащенко Л. Горенштейнові напівмаксимальні кільця //Київ,-Вісник Київського університету - 1996 - N2 с.41-52.

4. L.Z.Maschenko Semi-perfect rings in which every ideal is idempotent //Mathematychni Studii.-7, N2, -1997- p.p.131-134.

5. V.V.Kirichenko, L.Z.Maschenko, Yu.V.Yaremenko. Finite oriented graphs and structural ring theory // Representation theory and computer algebra,(Kyiv, March 18-23),-1997. p.p.23-24.

Ключові слова : кільце, модуль, сагайдак, первинний сагайдак, сильно зв'язний сагайдак, напівланцюгове кільце, напівдистрибутивне кільце, горенштейнове кільце, квазіфробениусове кільце.

Мащенко Л.З. Полусовершенные кольца и их свойства. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 - алгебра и теория чисел. Киевский университет имени Тараса Шевченко, Киев, 1997.

В диссертации получены теоремы разложения для различных классов полусовершенных колец. Доказано, что колчан квазифробениусова кольца сильно связен. Изучены идемпотентные идеалы полусовершенных колец, удовлетворяющих условию Накаямы. Описаны нетеровы полусовершенные полудистрибутивные кольца, в которых каждый нерадикальный идеал идемпотентен. Изучены горенштейновы полумаксимальные треугольные и (0,1)-кольца и их колчаны.

Maschenko L.Z. Semi-perfect rings and their properties. The manuscript. Thesis of the dissertation for obtaining the degree of the candidate of sciences in physics and mathematics speciality 01.01.06 - algebra and number theory. Kyiv Taras Shevchenko University, Kyiv, 1997.

Decomposition theorems for various classes of semi-perfect rings are obtained in the dissertation. It was proved that the quiver of a quasi-Frobenius ring is strongly connected. Idempotent ideals of semi-perfect rings with Nakayama condition are investigated. Noetherian semi-perfect semi-distributive rings such that every their non-radical ideal is idempotent are described in the dissertation. Gorenstein semi-maximal triangular and (0,1)-rings and their quivers are studied.

Підп. до друку 12.05.97. Формат 60x84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 0,93. Ум. фарбо-відб. 0,93. Обл.-вид.арк. 0,7.
Тираж 100 пр. Зам. 80

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3