НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
інститут механіки ім С.П. Тимошенка

На правах рукопису

ЛУКІН Олександр Миколайович

РОЗВИТОК МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПРИ РОЗРАХУНКАХ ПЛАСТИНОК НА СТАТИЧНЕ ТА ДИНАМІЧНЕ НАВАНТАЖЕННЯ

01.02.04 - механіка деформованого твердого тіла

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ 1997

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Харківському державному автомобільно-дорожньому технічному університеті

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук, професор Зозуля Володимир Васильович

Офіційні опоненти: доктор **фізико-математичних наук, Коханенко Юрій Васильович**

кандидат **фізико-математичних наук, доцент Калайда Олексій Феофілович**

Провідна установа- Харківський політехнічний університет

Захист відбудеться "24" червня 1997 р. о 10^{00} годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.03.03 при Інституті механіки ім. С.П.Тимошенка Національної академії наук України за адресою: 252057, Київ, вул. Нестерова, 3.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Інституту механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України (Київ, вул. Нестерова, 3).

Автореферат розіслано "19" травня 1997 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
доктор технічних наук, професор І.С.Чернишенко

Загальна характеристика роботи.

Дисертаційна робота присвячена розвитку методу граничних інтегральних рівнянь при розрахунках пластинок різноманітної форми на статичне та динамічне навантаження.

Актуальність та ступінь досліджeності тематики дисертації. Сучасний розвиток науки і техніки висуває підвищені вимоги до досліджень роботи конструкцій та їх елементів на міцність. Це важливо і для тонкостінних елементів - пластинок та оболонок.

При розв'язанні задач механіки, математичної фізики та інших широко застосовуються чисельні методи. Одним з найефективніших та сучасніших з них є метод граничних інтегральних рівнянь. Цей чисельний метод приваблює до себе увагу дослідників тому, що зменшує на одиницю порядок задачі, що розв'зується. Це стає можливим тому, що апроксимувати потрібно лише границю тіла, а не все тіло, як в випадку, наприклад, застосування методу скінченних елементів. Метод граничних інтегральних рівнянь добре себе зарекомендував і при розрахунках тонкостінних елементів конструкцій.

На цей час, відомо більше десяти модифікацій цього методу. Найбільш поширені пряме та непряме формулювання методу,та гібридна схема, яка поєднує граничноелементну та скінченноелементну методології.

Більшість дослідників, які займаються розвитком методу граничних інтегральних рівнянь прийшли до висновку, що найбільш привабливою є пряме формулювання методу, де невідомими являються параметри, які мають конкретне фізичне значення.

Застосуванням до розрахунку пластинок методу граничних інтегральних рівнянь займались багато вчених. Найбільш фундаментальними є роботи Ю.П.Артюхіна, П.Бенерджі, К.Бреббія, К.Васідзу, Є.С.Венцеля, Ю.В.Верюжського, Григоренко Я.М., Гузя О.М., Зозулі В.В., Хуторянського Н.М., D.E.Beskos, C.V.Camp, J.A.Costa, F.Hartmann, P.Filippi, J.T.Katsikadelis, M.Kitahara, G.D.Manolis, C.P.Providakis, V.Sladek, J.Sladek, M.Stern, M.Tanaka, M.Veble, J.Vivoli, Q.Zhang та інших.

Розрахунок пластинок при статичному та динамічному навантаженні є складною задачею. При розв'язанні її методом граничних інтегральних рівнянь, як правило, застосовують квадратурні формули для обчислення ядер. Але, такий підхід не є ефективним, як по точності, так і по витратах машинного часу. Також при цьому виникають складності з інтегруванням вздовж головних елементів, тому що ядра граничних інтегральних рівнянь мають сингулярності (особливості) різних типів. Більш раціональним є застосування методу граничних інтегральних рівнянь з використанням аналітичного інтегрування ядер вздовж граничних елементів.

Дослідники, які займаються застосуванням методу граничних інтегральних рівнянь, зустрічаються з різноманітними проблемами, однією з яких є обчислення інтегралів на головних граничних елементах від фундаментальних функцій. Це зв'язано з присутністю особливостей в ядрах граничних інтегральних рівнянь.

При досліджені двомірних тіл виникають особливості – $O(1/r^2)$, $O(1/r)$ або $O(\ln r)$. Інтеграли, які мають такі особливості, треба розуміти як невласні, як головне значення по Коші або як кінцева частина по Адамару. Регуляризація інтегралів, що мають особливості є нетривіальною задачею, якою займаються багато дослідників. Найбільш впливовий вклад до рішення цієї проблеми внесли Ж.Адамар, К.Бреббія, О.М.Гузь, В.В.Зозуля, В.В.Іванов, В.Д. Купрадзе, С.Г.Міхлін, Н.І. Мусхелішвілі, З.Т.Назарчук, А.Н.Тіхонов, M.Bonnet, M.Guiggiani, N.I. Ioakimidis, G.Krishnasamy, Y.Liu, F.Rizzo, K.C.Toh та інші.

Треба підкреслити, що для регуляризації інтегралів з особливостями найпоширинішими є чисельні методи, але, як було показано в роботах О.М.Гузя та В.В.Зозулі найкращі результати дає застосування аналітичного інтегрування фундаментальних рішень, що мають особливості. Майже усі дослідники, що застосовують метод граничних інтегральних рівнянь користуються лише традиційними чисельними методами, що дає нераціональні алгоритми розрахунку пластинок.

Разом з статичною задачею згинання пластинок багато робіт присвячено розв'язанню динамічної задачі, яка є більш складною. При розглядані динамічної задачі необхідно користуватися методами теорії функцій комплексної перемінної, операційним обчисленням та інше.

Ще однією проблемою при динамічному розрахунку пластинок є задача визначення їх власних коливань. На теперішньому розвитку методу є основні три шляхи рішення цієї проблеми:

- метод перебору частот при застосуванні стандартної процедури рішення задач динаміки;

- застосування лише граничних елементів з використанням фундаментальних рішень динамічної задачі;

- гібридна схема, яка об'єднує граничноелементну та скінченноелементну методології з застосуванням тільки фундаментальних рішень статики.

Більшість вчених вважіє останній шлях найраціональнішим з точки зору використання машинного часу та точності результатів розрахунків. Він і використовується в роботі.

Таким чином, наведений вище огляд свідчить, що застосуванням методу граничних інтегральних рівнянь до розрахунку пластинок на статичні та динамічні навантаження займались багато вчених, але всі вони застосовували чисельні методи інтегрування ядер интегральних рівнянь, що є не раціональною схемою. Грунтуючись на цьому факті і була сформульована мета даної дисертації.

<u>Метою роботи</u> є розвиток методу граничних інтегральних рівнянь при застосуванні його до розрахунку пластинок, що включає:

- розробку методів розв'язання задачі згинання пластинок при дії статичних та динамічних навантажень, з максимальним застосуванням аналітичного інтегрування вздовж граничних елементів;
- аналіз особливостей ядер та розробку методів регуляризації інтегралів з особливостями, що виникають при чисельній реалізації методу граничних інтегральних рівнянь;
- розробка алгоритмів та текстів програм для знаходження зусиль та параметрів напружено-деформованого стану пластинки;
- розробку програм для знаходження власних коливань пластинок методом, де разом з граничними використовуються і скінченні елементи ;
- дослідження напружено-деформованого стану пластинки різноманітної форми методом граничних інтегральних рівнянь.

<u>Наукова новизна та значущість результатів роботи.</u>

Полягає в розвитку методу граничних інтегральних рівнянь при застосуванні його до розрахунку пластинок різноманітної форми при статичному та динамічному навантаженні. Новим є ефективний метод регуляризації інтегралів, що мають особливості. Цей метод базується на формулах Гріна та Гаусса-Остроградського і може бути застосований до всіх задач, які розв'язуються методом граничних інтегральних рівнянь. Використовуючи аналітичні методи інтегрування ядер, що мають особливості різного порядку одержані аналітичні вирази для интегралів від фундаментальних рішень згинання пластинок на головних та другорядних граничних елементах. Відповідні алгоритми реалізовано у вигляді програм для персонального комп'ютера. Отримані чисельні результати, що доводять високу точність методу рішення та ефективність з точки зору використання машинного часу.

Всі результати по розвитку методу граничних інтегральних рівнянь при застосуванні його до пластинок складної форми при дії статичних та динамічних навантажень отримані вперше.

Достовірність одержаних в роботі результатів та висновків забеспечується застосуванням обгрунтованих методів розв'язання, розробкою надійних алгоритмів чисельної реалізації, проведенням машинних експериментів, порівнянням чисельних результатів з результатами, що одержані іншими методами розв'язання тестових зразків при статичному та динамічному навантаженні. Результати всіх розрахунків якісно узгоджуються з вже відомими результатами.

Теоретичне значення та практична цінність одержаних в роботі результатів полягають:

- у розробці методики та алгоритму задачі про згинання пластинок складної форми при статичному та динамічному навантаженні;
- у аналізі основних крайових задач, що з'являються при розрахунках пластинок методом граничних інтегральних рівнянь;
- у одержанні аналітично проінтегрованих фундаментальних розв'язків, як на головних, так і на другорядних граничних елементах;
- розробці ефективного методу регуляризації інтегралів, які мають особливості, що базується на формулах Гріна та Гаусса-Остроградського, який може бути застосований до всіх задач, де використовується метод граничних інтегральних рівнянь;
- у розробці ефективних алгоритмів та програм розрахунку пластинок складної форми при статичному та динамічному навантаженні;

- у дослідженні напружено-деформованого стану пластинки різноманітної форми методом граничних інтегральних рівнянь.

Реалізація та впровадження результатів, одержаних в дисертації. Наукові дослідження виконувались в рамках робіт, передбачених програмами та планами НДР Харківського державного автомобільно-шляхового технічного університету, а також проектів, що фінансуються Міністерством будівництва України. Результати, отримані в дисертаційній роботі, увійшли до звіту держбюджетної дослідної темі N0195U016074 "Розробка та застосування методу граничних інтегральних рівнянь до рішення пластин складної форми". За допомогою розробленої методики було розрахово декілька прогонів плитних мостів при проектуванні їх у Харківському Промтранспроекті. Результати роботи також можуть застосовуватись при розрахунках перекрить будинків та інших споруд, елементів конструкцій автомобілів і тракторів та в багатьох інших галузях.

Апробація роботи.

Основні результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на наукових конференціях викладачів шляхо-будівного факультету Харківського державного автомобільно-шляхового технічного університету (1995, 1996 р.р.), на розширеному засіданні кафедри будівної механіки ХДАШТУ (1996 р.). В завершеному вигляді дисертаційна робота обговорювалась на семінарі відділу динаміки та стійкості суцільних середовищ Інституту механіки НАН України (керівник академік НАН України Гузь О.М.) та семінарі кафедри міцності машин Харківського Політехничного університету (керівник професор Львов Г.І.)

Публікації. По результатам дисертації опубліковано 4 наукові роботи. Основний зміст роботи відображено в публікаціях [1-4].

Структура роботи. Дисертаційна робота складається з вступу, чотирьох розділів, висновків та списку літератури. Робота викладена на 153 сторінках, включаючи 34 рисунка та 12 таблиць. Бібліографічний список налічує 140 назв.

Короткий зміст роботи.

<u>У вступі</u> подано огляд публікацій по темі дисертації, сформульована мета роботи та визначено її місце в ряді виконаних раніше досліджень, відзначено актуальність та новизну, теоретичне значення та практичну цінність роботи, а також коротко викладаються основні результати і обгрунтовується їх достовірність. Сформульовані положення, що виносяться на захист. Коротко подається зміст роботи за розділами.

<u>У першому розділі</u> наведені основні положення класичної теорії пластинок. За допомогою теореми взаємності робот одержані формули типу тотожності Сомільяно

$$w(x) = \int_{\partial\Omega}[v_n(y)W(y,x) + m_n(y)\Theta(y,x) - \theta_n(y)M(y,x) - w(y)V(y,x)]dS + \qquad (1)$$
$$- \int_{\Omega}p(y)W(y,x)d\Omega + \sum_{k=1}^{K}(q_c W^c(y,x) - M^c(y,x)w_c), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial\Omega$$

$$\theta_n(x) = \int_{\partial\Omega}[v_n(y)W_n(y,x) + m_n(y)\Theta_n(y,x) - \theta_n(y)M_n(y,x) - w(y)V_n(y,x)]dS + \qquad (2)$$
$$- \int_{\Omega}p(y)W_n(y,x)d\Omega + \sum_{k=1}^{M}(q_c W_n^c(y,x) - M_n^c(y,x)\partial_n w_c), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial\Omega$$

За невідомі прийняті прогиб w, кут повороту серединної площини по нормалі θ_n, нормальний згинаючий момент m_n та узагальнена перерізуюча сила v_n, що діють в цій площині.

Ядрами цих інтегральних представлень є фундаментальні розв'язки В разі розрахунків зусиль в пластинці на яку діє статична нагрузка фундаментальним рішенням, відносно прогибів є функція

$$W(y,x) = r^2 \ln r \,/\, (8\Pi D), \qquad \text{где } r = |y - x| \qquad (3)$$

Для динамічної задачі

$$w(r) = \frac{1}{8D\lambda^2}\left(H_0^{(1)}(\lambda r) - H_0^{(1)}(i\lambda r)\right) \qquad (4)$$

де $H_0^{(1)}$ – функція Ханкеля першого роду нульового порядку.

Приводиться вивід фундаментального розв'язку для прогибу при динамічному навантаженні.

Інші фундаментальні розв'язки знаходяться як похідні в напрямку нормалі та дотичної.

<u>У другому розділі</u> застосовується метод граничних інтегральних рівнянь до пластинок при статичному навантаженні. Використовуючи оператори диференцювання по нормалях до (3) знайдені інші фундаментальні розв'язки, проведено їх аналіз з точки зору особливостей, коли $x \to y$:

$$
\begin{aligned}
&W(y,x) \simeq r^2 \ln r \to 0, && \theta(y,x) \simeq r \ln r \to 0,\\
&M(y,x) \simeq \ln r \to -\infty, && V(y,x) \simeq r^{-1} \to \infty,\\
&W_n(y,x) \simeq r \ln r \to 0, && \theta_n(y,x) \simeq \ln r \to \infty,\\
&M_n(y,x) \simeq r^{-1} \to \infty, && V_n(y,x) \simeq r^{-2} \to \infty.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

З (5) можна бачити, що при $x \to y$ $W(y,x)$, $\theta(y,x)$ и $W_n(y,x)$ неперервні, $M(y,x)$ и $\theta_n(y,x)$ мають інтегровані особливості. Ядра $V(y,x)$ і $M_n(y,x)$ мають сингулярні, а $V_n(y,x)$ гіперсингулярні особливості. Інтеграли з сингулярними особливостями розглядаються як головні значіння по Коші, інтеграли з гіперсингулярними особливостями - як кінцеві частини по Адамару.

Застосовуючи властивості потенціалів на границі записані основні рівняння методу

$$
\begin{aligned}
&1/2\, w(x) = W(v_n,x,\partial\Omega) + \theta(m_n,x,\partial\Omega) - M(\theta_n,x,\partial\Omega) - V(w,x,\partial\Omega) +\\
&\qquad + W(p,x,\Omega)\,, \qquad\qquad \forall\, x \in \partial\Omega\\
&1/2\, \theta_n(x) = W_n(v_n,x,\partial\Omega) + \theta_n(m_n,x,\partial\Omega) - M_n(\theta_n,x,\partial\Omega) - V_n(w,x,\partial\Omega) +\\
&\qquad + W_n(p,x,\Omega)\,, \qquad\qquad \forall\, x \in \partial\Omega
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Аналіз основних крайових задач показав, що система (6) може трансформуватись в інтегральні рівняння Фредгольма першого роду, сингулярні або навіть гіперсингулярні інтегральні рівняння.

Також в цьому розділі розглянуто регуляризацію інтегралів з особливостями. При розробці методики застосовувались формули Гріна та Гаусса-Остроградського. При цьому інтеграли розглядаються з точки зору узагальнених функцій.

Розглядається загальний випадок, що зустрічається не тільки при застосуванні методу граничних інтегральних рівнянь до пластинок, але й при застосуванні його до інших задач механіки деформованого твердого тіла, теорії пружності та інших. В загальному випадку ядра граничних інтегральних рівнянь з особливостями мають вигляд

$$\frac{(y_i-x_i)^l(y_j-x_j)^m}{r^k}, \quad (i,j = 1,2,3),$$

де $l,m\geq 0$, $k\geq 2$ та приймають значення незалежно одне від одного.

Одним з головних результатів цих досліджень є формула

$$J_k^{l,m} = \text{F.P.} \int_{\partial\Omega_n} \varphi(y)\Delta\frac{1}{r(y)}dS = \tag{7}$$

$$= \frac{1}{1-(k-3)(k-3-2l-2m)} \int_{B_n} \left\{\varphi(y)\partial_n\frac{1}{r(y)} - \frac{1}{r(y)}\partial_n\varphi(y)\right\}dB$$

$$+\int_{\partial\Omega_n} \frac{(y_i-x_i)^{l-2}(y_j-x_j)^{m-2}}{r^{k-2}}\left\{l(l-1)(y_j-x_j)^2+m(m-1)(y_i-x_i)^2\right\}dS,$$

яка дозволяє регуляризувати інтеграли з особливостями не тільки при застосуванні метода граничних елементів до пластин, а і для інших тіл та задач, що розв'язуються цим методом. Тестові приклади показують співпадання з відомими результатами.

<u>У третьому розділі</u> розглянуто застосування чисельної реалізації методу граничних інтегральних рівнянь - метод граничних елементів до розрахунків задач згинання пластинок від статичного навантаження.

Контур пластинки $\partial\Omega$ поділений на N криволінейних граничних елементів $\partial\Omega_n$, Границя апроксимується прямолінійними граничними елементами довжиною $2\Delta_n$ замість криволінійних. Функції $w(x)$, $\theta_n(x)$, $m_n(x)$ и $v_n(x)$ постійні на кожному елементі. Тоді интегральні представлення (6) аппроксимируються відношеннями

$$1/2\, w(x_m) = \sum_{k=1}^{N}[v_n(y_k)W(x_m,y_k) + m_n(y_k)\Theta(x_m,y_k) - \theta_n(y_k)M(x_m,y_k) -$$

$$- w(y_k)V(x_m,y_k)]dS + \int_{\Omega} p(y)W(y,x_m)d\Omega + \sum^{K}[q_c w_c], \quad \forall\, x \in \Omega_n$$

$$1/2\,\theta_n(x) = \sum_{k=1}^{N}[v_n(y_k)W_n(x_m,y_k) + m_n(y_k)\theta_n(x_m,y_k) - \theta_n(y_k)M_n(x_m,y_k) - \tag{8}$$

$$- w(\mathbf{y}_k)V_A(\mathbf{x}_m,\mathbf{y}_k)]dS + \int_\Omega p(\mathbf{y})W_n(\mathbf{y},\mathbf{x}_m)d\Omega + \sum^{K} [q_c \partial_n w_c], \quad \forall\, \mathbf{x} \in \Omega_n$$

Або в матричній формі (8) мають вигляд

$$1/2 \{ X_A \} = [A_S] \{ X_B \} + [B_\Omega] [P] \qquad (9)$$

Всі дослідники, що розв'язують проблему згинання пластинок методом граничних елементів застосовують чисельне інтегрування вздовж граничних елементів. Але це не є кращий розв'язок проблеми. В роботах О.М.Гузя та В.В.Зозулі доведено, що при застосуванні прямолінійних граничних елементів фундаментальні розв'язки можуть бути проінтегровані аналітично. Застосовуючи систему координат, що поєднана з головним граничним елементом, знайдені ці аналітичні вирази. Це дає можливість більш ефективно розв'язувати систему (9). Економія машинного часу на складання системи лінійних алгебраічних рівнянь при розрахунках з застосуванням виразів з аналітично проінтегрованими ядрами (фундаментальними розв'язками) порівняно з традиційним методом (за допомогою квадратурних формул інтегрування) в 2 - 7 разів.

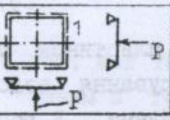
Також знайдені аналітичні розв'язки для зусиль у середині пластинки.

Приводиться багато прикладів, що стверджують ефективність аналітичного інтегрування порівняно з традиціоним чисельним (Див. таблицю 1,2 та рис.1а,2а,1б,2б). Розрахунок Т-образної пластинки при рівномірно-розподіленим навантаженні теж показав точні результати. Наприкінці розділу приводиться приклад розрахунку прогонів плитного мосту (Рис. 3а,3б), де зрівнюються результати, які отримані за допомогою методу граничних елементів, експеримента та енергетичного методу.

<u>У четвертому розділі</u> розглянуто розрахунок пластинок методом граничних елементів від динамічного навантаження. Постановлена динамічна задача з застосуванням перетворювань Лапласа та Фур'є. При описанні процесів що установились застосовують перетворення Фур'є, або при періодичних коливаннях - ряди Фур'є. Якщо процеси перехідні, тоді застосовують перетворення Лапласа. Шлях розв'язку задач динаміки з використанням перетворювань Лапласа та Фур'є є найбільш раціональним для багатьх проблем динаміки.

Застосовуючи процедуру, що східна з розв'язком статичної задачі

Таблиця I

СХЕМА ТА ГРАНИЧНІ УМОВИ	ЧИСЛО ГЭ	ТОЧКИ	НЕВІДОМІ НА ГРАНИЦІ				Δt	Δw_{max}
			Δw	$\Delta\theta_n$	ΔM_n	ΔV_n		
	20	1	—	0.947	—	0.813	3.29	0.845
	36	1	—	0.987	—	0.977	4.22	0.938
	44	1	—	0.994	—	0.991	4.65	0.955

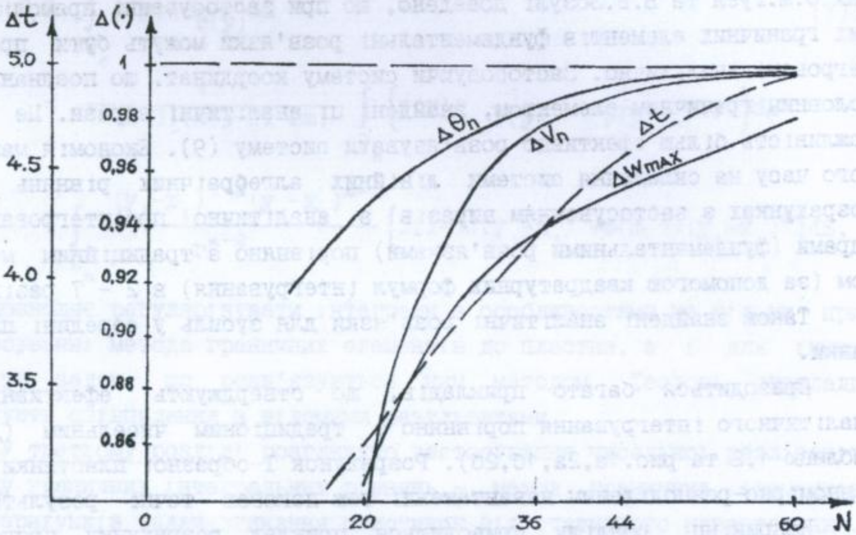


Рис. I а

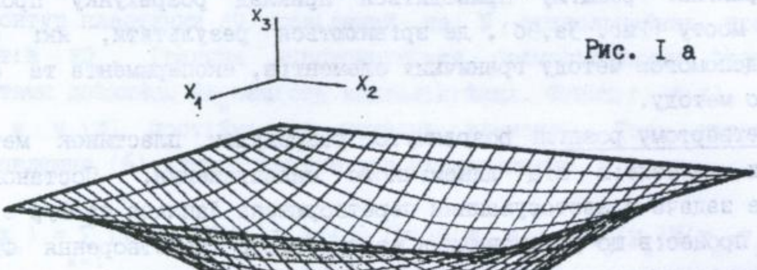
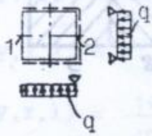


Рис. I б

Таблиця 2

СХЕМА ТА ГРАНИЧНІ УМОВИ	ЧИСЛО ГЕ	ТОЧКИ	НЕВІДОМІ НА ГРАНИЦІ				Δt	Δw_{max}
			Δw	$\Delta\theta_n$	ΔM_n	ΔV_n		
	20	1	0.947	0.995	—	—	4.17	0.936
		2	—	0.937	—	0.817		
	36	1	0.980	0.998	—	—	4.20	0.976
		2	—	0.984	—	0.973		
	44	1	0.993	0.999	—	—	4.46	0.983
		2	—	0.992	—	0.995		

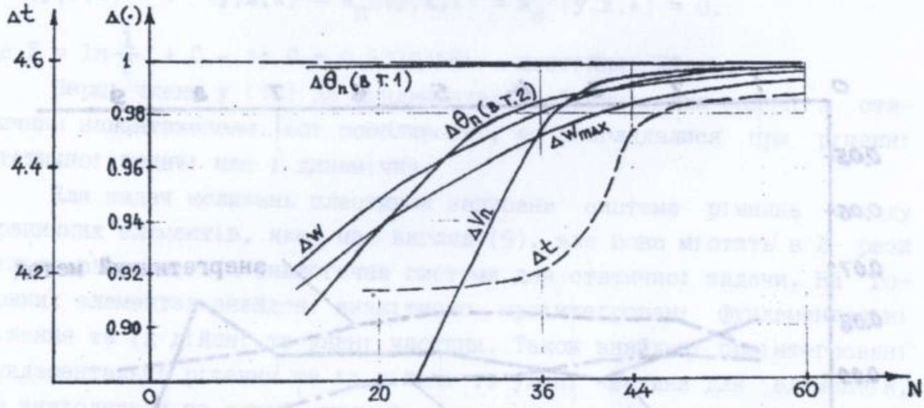


Рис. 2 а

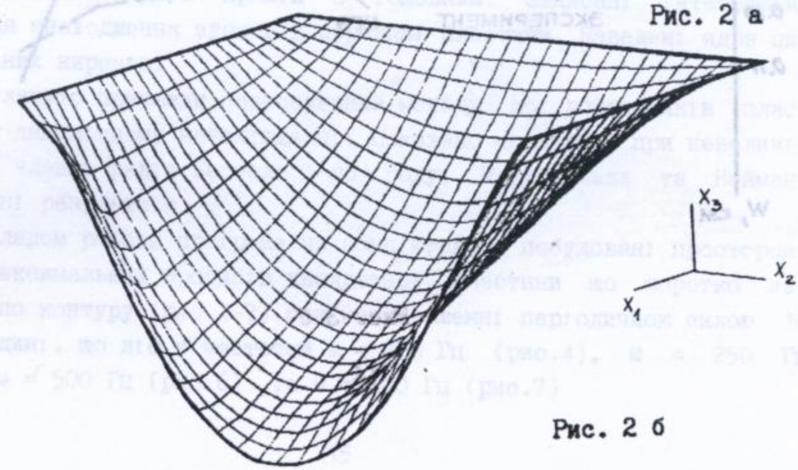


Рис. 2 б

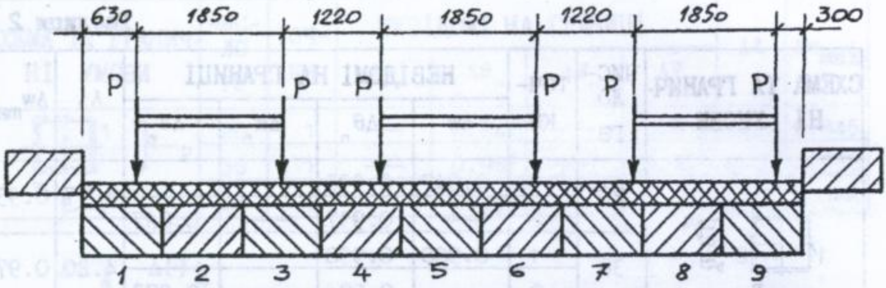

630
1850
1220
1850
1220
1850
300
P
P
P
P
P
P
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Рис. 3 а

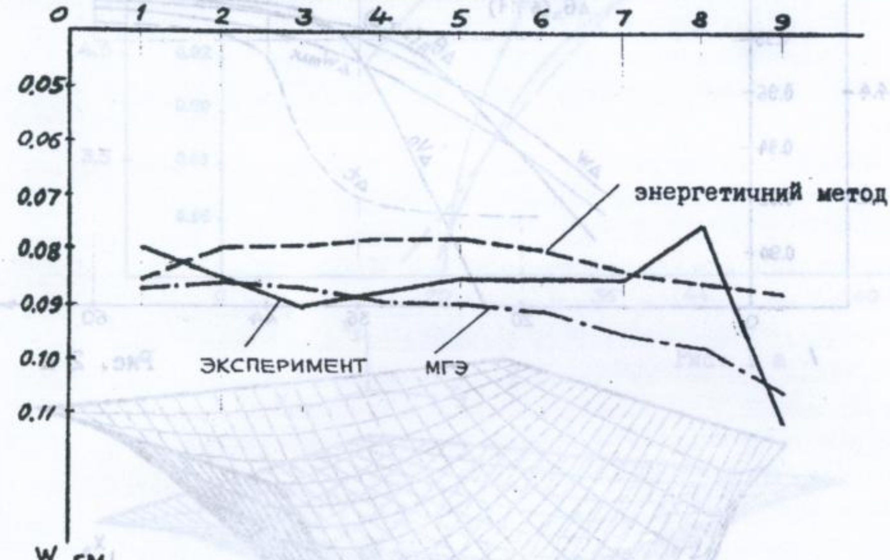

0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
0,05
0,06
0.07
0.08
0.09
0.10
0.11
W, см
энергетичний метод
ЭКСПЕРИМЕНТ
МГЭ

Рис. 3 б

знайдені інші фундаментальні рішення, які є похідними від (4). Ці розв'язки розділені на дійсні та уявні частини цих фундаментальних розв'язків.

Проведений аналіз засвідчив, що особливості маємо лише в дійсних частинах фундаментальних рішень:

$$
\begin{aligned}
W^{Re}(y,x,\lambda) &= \frac{1}{8\Pi D} r^2 \ln r + \frac{r^2}{8\Pi D} Z + O(r^6 \ln r),\\
M^{Re}(y,x,\lambda) &= -\frac{1}{8\Pi}\{(1-\nu)(1+2\ln r)+2\nu\} - \frac{Z}{4\Pi}(1+\nu) + O(r^4 \ln r),\\
\theta_n^{Re}(y,x,\lambda) &= -\frac{1}{8\Pi D}(1+2\ln r) - \frac{Z}{4\Pi D} - O(r^4 \ln r), \qquad (10)\\
V_n^{Re}(y,x,\lambda) &= \frac{1+\nu}{4\Pi r^2} + O(r^2 \ln r),\\
\theta^{Re}(y,x,\lambda) &= V^{Re}(y,x,\lambda) = W_n^{Re}(y,x,\lambda) = M_n^{Re}(y,x,\lambda) = 0,
\end{aligned}
$$

де $Z = \ln\frac{\lambda}{2} + C - 1$; $C = 0.57721566$ - постійна Ейлера.

Перші члени у (10) це фундаментальні функції для задачі з статичним навантаженням. Всі особливості, що розглядалися при рішенні статичної задачі має і динамічна.

Для задач коливань пластинок записана система рівнянь методу граничних елементів, яка має вигляд (9), але вона містить в 2 рази більше рівнянь, ніж аналогічна система для статичної задачи. На головних елементах знайдені аналітично проінтегровані фундаментальні рішення та їх дійсні та уявні частини. Також знайдені проінтегровані фундаментальні рішення та їх дійсні та уявні частини для елементів, що знаходяться на одній прямій з головним. Записані інтегральні вирази для знаходження зусиль в середині пластини. Наведені ядра цих інтегральних виразів.

Розглянуто приклади застосування методу до розрахунків пластинок при динамічному навантаженні. Показано що навіть при невеликій кількості членів рядів Бесселя 1-го роду, Макдональда та Неймана маємо точні результати.

Прикладом роботи програми на комп'ютері є побудовані просторові графіки максимальних прогибів квадратної пластини що жорстко закріплина по контуру (рис.4-7) при навантаженні періодичною силою 10 кН в середині, що діє з частотой ω = 200 Гц (рис.4), ω = 250 Гц (рис.5), ω = 500 Гц (рис.6) та ω = 600 Гц (рис.7)

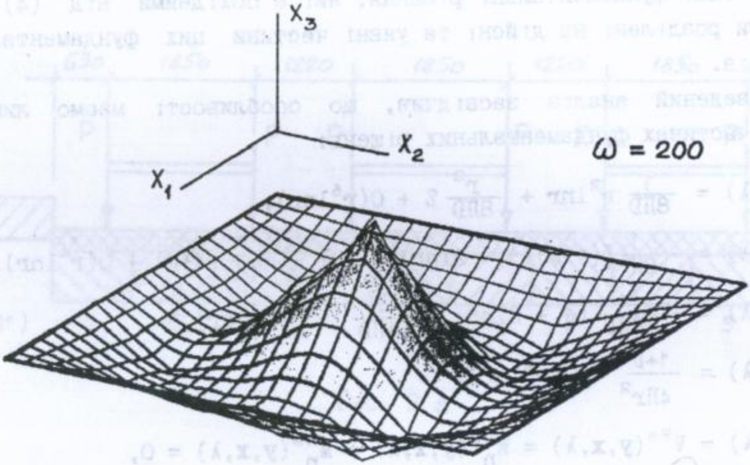


Рис. 4

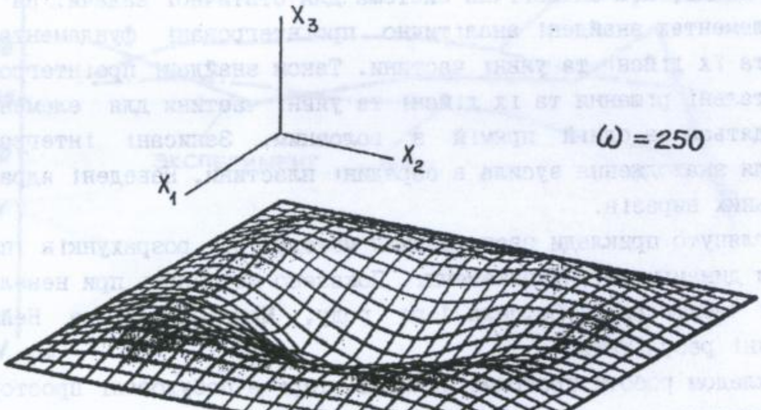


Рис. 5

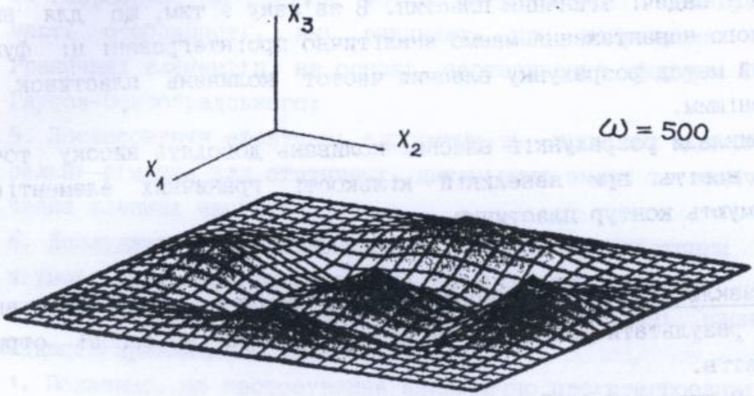


Рис. 6

Рис. 7

В цьому ж розділі розглянуто задачу власних коливань пластинок. При цьому застосовується гібридна схема, що по'єднує методи граничних та скінченних елементів. Використовуються фундаментальні функції статичної задачі згинання пластин. В зв'язку з тим, що для випадку статичного навантаження маємо аналітично проінтегровані ці функції, вибраний метод розрахунку власних частот коливань пластинок є ще ефективнішим.

Приклади розрахунків власних коливань доводять високу точність методу навіть при невеликій кількості граничних елементів, що апроксимують контур пластинки.

В заключній частині дисертації подаються в загальному вигляді основні результати роботи та висновки, зроблені на основі отриманих результатів.

I. В дисертаційній роботі розглянуто метод граничних інтегральних рівнянь при розрахунках пластинок різноманітної форми при дії статичних та динамічних навантажень. При цьому:

1. Поставлена та розв'язана статична задача згинання пластин з застосуванням аналітично проінтегрованих вдовж граничних елементів фундаментальних розв'язків;
2. Розв'язана динамічна задача з максимальним застосуванням результатів рішення статичної задачі та аналітичним інтегруванням фундаментальних функцій вздовж головних граничних елементів;
3. Розв'язана задача визначеня власних коливань пластинок;
4. Розроблена методика регуляризації інтегралів, що мають особливості різноманітних типів, що зустрічаються при використанні методу граничних інтегральних рівнянь;
5. Розроблені ефективні алгоритми та програми для визначення невідомих параметрів напружено-деформованого стану всередині пластинки.

II. Основні результати роботи полягають в:

1. Одержані основних рівнянь методу граничних інтегральних рівнянь та методу граничних елементів для пластинок при статичному та динамічному навантаженні;
2. Аналізі основних крайових задач, що виникають при розра-

хунках пластин;

3. Знайдені аналітично проінтегровані фундаментальні розв'язки для статичної та динамічної задач на головних елементах;

4. Розроблено ефективний метод регуляризації інтегралів, що мають особливості, які виникають при розрахунках методом граничних елементів, на основі застосування формул Гріна та Гаусса-Остроградського;

5. Застосовуючи ефективні алгоритми та програми одержані чисельні рішення для статичних, динамічних задач та задач визначення власних частот;

6. Досліджено напружено-деформований стан пластинки різноманітної форми методом граничних інтегральних рівнянь.

III. На основі отриманих результатів зроблені висновки та рекомендації прикладного характеру:

1. Показано, що застосування аналітично проінтегрованих фундаментальних розв'язків для задач згинання пластинок більш раціонально ніж традиційним методом з використанням чисельного інтегрування вздовж граничного елементу;

2. Показано, що застосування формул Гріна та Гаусса-Остроградського до обчислення інтегралів, що мають особливості, веде до їх регуляризації. Застосування такої методики регуляризації може бути впроваджено до інших задач, що розв'язуються методом граничних елементів;

3. Показано, що максимальне застосування при розв'язку динамічної задачи згинання пластин результатів статичної задачі веде до більш легкого шляху рішення динамічної задачи з точки зору регуляризації особливостей;

4. Доведено, що всі особливості фундаментальних розв'язків знаходяться тільки в їх дійсній частині;

5. Встановлено, що для пластинок простої форми (випуклих многокутників) достатньо 40 граничних елементів, які апроксимують границю.

Основний зміст дисертаційної роботи викладено в наступних працях :

1. О расчете пластин методом граничных интегральных уравнений//Доклады НАН Украины, N4, 1996, с.39-44.(Співавтор В.В.Зозуля);

2. О расчете пластин методом граничных элементов//Доклады НАН Украины, N12, 1996, с.60-67.(Співавтор В.В.Зозуля);

3. Расчет пластин методом граничных элементов//Прикладная механика, 1997.-33, N3.- с.79-83 (Співавтор В.В.Зозуля).

4. Трубы под насыпями автомобильных дорог. М., 1988.-52 с. (ОИ/ЦБНТИ Минавтодора РСФСР; вып.6. Автомобильные дороги). (Співавтори Лукин Н.П., Щуко С.А.)

Lukin A.N. The development of a boundary integral equation method by for analysis of plates under static and dinamic loads.
Dissertation for the Candidate of Physical and Mathematical Sciences Degree in Speciality 01.02.04 - mechanics of a deformable solid, S.P.Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, 1997.
Four papers containing the investigation on the development of the boundary integral equation method to plates. The application of the boundary integral equation method for arbitrary shape plates under the static and dynamical loading are considered.

Лукин А.Н. Развитие метода граничных интегральных уравнений при расчете пластинок на статическую и динамическую нагрузки.
Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 - механика деформируемого твердого тела, Институт механики им. С.П.Тимошенко Национальной академии наук Украины, Киев, 1997.
Защищаются 4 научные работы, которые содержат исследования по развитию метода граничных интегральных элементов при расчете пластинок. Рассмотрено применение метода граничных интегральных уравнений к пластинам произвольной формы при действии статической и динамической нагрузки.

Ключові слова граничний елемент, граничне інтегральне рівняння, фундаментальне рішення, інтеграл з особливістю, власне значіння пластинки, дійсна та уявна частини фундаментального рішення.

Підп. до друку 06.05.97 р.
Формат А5.
Папір ксероксний 70 г/м^2
Ум.-друк. арк. 0,84
Тираж 100 прим.
Замовлення № 1798

ТОВ Курсор, м. Харків, пр. Театральний 11/13, тел. (0572) 47-71-74

Підп. до друку 08.06.17 р.
Формат А5.
Папір ксероксний 70 г/м
Ум.друк.арк. 0,54
Тираж 100 прим.
Замовлення № 1790