

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ ГІДРОМЕХАНІКИ

на правах рукопису

Малюга Володимир Сергійович

УДК 532.5

СТОКСОВІ ТЕЧІЇ В СКІНЧЕНОМУ ЦИЛІНДРІ

01.02.05 - механіка рідини, газу та плазми

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на одбуття вченого ступеня  
кандидата фізико - математичних наук

Київ - 1997





Дисертація є рукописом

Робота виконана в Інституті гідромеханіки НАН України.

- Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук  
В.В.Мелешко
- Науковий консультант - доктор фізико-математичних наук  
О.М.Гомілко
- Офіційні опоненти - доктор фізико-математичних наук,  
професор М.Я.Барняк  
кандидат фізико-математичних наук  
В.О.Горбань
- Провідна установа - Київський університет  
ім. Т.Г.Шевченка

Захист відбудеться "26" Червня 1997р. о" 14.00  
на засіданні спеціалізованої ради Д 01.04.01 в Інституті гідромеханіки  
НАН України за адресою: 252057, Київ, вул. Желябова, 8/4.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту гідромеханіки  
НАН України.

Автореферат роіслано "22" Травня 1997р.

Вчений секретар  
спеціалізованої ради  
доктор технічних наук

С.І.Кривль

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В останні роки увагу багатьох дослідників привертає вивчення проблем перемішування рідини. Ці проблеми тісно пов'язані з явищами так званої хаотичної та регулярної адвекції частинок пасивної домішки, а також лагранжової турбулентності, тобто складного хаотичного руху лагранжових частинок рідини за досить простого регулярного ейлерового поля швидкості. Такі дослідження, як правило, присвячено розгляду згаданих проблем стосовно до течій у двовимірних областях [P.N.Shankar, A.M.J.Davis, J.M.Ottino, H.Aref]. Таке спрощення не дає можливості описати деякі явища, обумовлені саме тривимірністю реальної області течії.

Відзначимо наступні аргументи на користь вивчення кінематичних структур, що мають місце в стаціонарних течіях, а також особливостей і ефективності перемішування саме у скінченному циліндрі. Оскільки циліндр є тілом обертання, в ньому можуть бути розташовані різноманітні тверді вставки, за допомогою обертання яких обуджується рідина, що заповнює циліндр. Така судина з тривимірними вставками, що мають складну форму та обертаються, є найбільш поширеною та найбільш природньою геометрією міксерів. Аналогічні пристрої знаходять застосування під час перемішування полімерів, де механічні властивості виробів мають залежати від якості перемішування складових частин. Оскільки поле швидкості стаціонарного двовимірного потоку є гамільтоновим, то звідси випливає, що кожна частинка рідини має лише один ступінь свободи, тобто здійснює рух своєю визначеною лінією течії. Що ж до тривимірних стаціонарних течій, то у загальному випадку система має три ступені свободи і, отже, хаотичний рух лагранжових частинок рідини стає можливим навіть за стаціонарного поля швидкості.

Останнім часом, у зв'язку з проблемами суспензії [Дж.Хашпель, Г.Бреннер] та хаотичного перемішування в'язкої рідини [Ottino], зріс інтерес до досліджень розв'язків стаціонарних рівнянь Стокса. Розгляд цих рівнянь є корисним також при розробці наближених методів розв'язання повних рівнянь Нав'є-Стокса. Всі задачі даної роботи було розв'язано в рамках наближення Стокса.

Наведені вище аргументи спричинили розгляд саме тих задач, котрі склали дану дисертаційну роботу. Порівняння з відомими експериментальними [R.R.Roger, R.G.Hussey, 1982] та чисельними [A.M.J.Davis, 1991] даними проведено для задачі обтікання одного тонкого кільцевого диска в необмеженій області потоком, що набігає з нескінченності. Було

одержано хорошу збіжність експериментальних та розрахункових результатів.

Розвинутий у роботі підхід, що базується на методі суперпозиції та теорії гідродинамічних потенціалів, дає можливість, на відміну від суто чисельних методів розв'язання граничних задач, одержати аналітичний розв'язок для компонент швидкості та тиску, що значно знижує витрати на виконання комп'ютерних розрахунків і, отже, дає можливість розв'язувати більш складні задачі.

Метою роботи є розвиток аналітично-чисельних методів розв'язання рівнянь Стокса стосовно скінченної циліндричної області; вивчення кінематичних властивостей тривимірної стоксової течії, зокрема, особливостей вихорових структур; дослідження загальних механізмів та якості перемішування рідини в періодичних течіях.

#### Наукова новина.

Розвинуто математичні методи, що дозволяють одержати вирази компонент поля швидкості повзучих течій у скінчених циліндричних порожнинах та у скінчених циліндрах з твердими вставками.

Досліджено властивості розв'язку рівнянь Стокса та знайдено асимптотичний закон невідомих коефіцієнтів розв'язку.

Побудовано чисельний алгоритм, що дозволяє на основі одержаного поля швидкості досліджувати властивості стоксових течій у скінченому циліндрі.

Досліджено кінематичні властивості стаціонарного руху частинок рідини, зокрема, поблизу кутів скінченого циліндра.

Виконано якісний та кількісний аналіз перемішування рідини в періодичних течіях, знайдені границі регулярних та хаотичних зон течії.

Проаналізовано вплив твердих вставок на структуру стаціонарної течії та перемішування рідини в циліндрі.

Сформульовано критерій оцінки точності чисельних обрахунків в періодичних потоках, що базується на властивості обільшення чутливості до чисельних похибок при наближенні до області хаотичного руху.

Достовірність одержаних результатів гарантується використанням строгих математичних методів, що забезпечують необхідну точність, а також порівнянням чисельних результатів з експериментальними та чисельними даними, що були одержані іншими авторами.

Практична цінність роботи полягає у розвитку методів побудови аналітичного розв'язку, розробці чисельного алгоритму та дослідженні особливостей кінематики перемішування у скінченому циліндрі, що є найбільш поширеною геометрією міксерів. Отримані результати можуть бути застосовані при розробці технологій перемішування полімерів.

Особистий внесок дисертанта полягає в одержанні аналітичного розв'язку задачі Стокса методом суперпозиції для скінченної циліндричної порожнини та методом потенціалу простого шару для скінченного циліндра в осесиметричними твердими вставками;

дослідженні кінематичних властивостей течій, що мають місце у скінченному циліндрі, вихорових структур, а також особливостей перемішування;

розробці комп'ютерних алгоритмів та програм, виборі придатних та найефективніших чисельних методів;

формулюванні критеріїв оцінки точності чисельного дослідження періодичних течій.

Апробація результатів. Результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на семінарах відділу вихорових рухів Інституту гідромеханіки НАН України під керівництвом доктора фіз.-мат. наук В.В.Мелешка (1992р., 1995р., 1996р.), на XVII і XVIII наукових конференціях молодих вчених Інституту механіки НАН України (Київ, 1992р., 1993р.), на науковому семінарі "Проблеми механіки" Київського національного університету ім.Т.Г.Шевченка під керівництвом члена-кореспондента НАН України А.Т.Улітка, академіка НАН України В.Т.Грінченка (1996р.), на Третньому міжнародному конгресі в промисловій та прикладній математики (Гамбург, 1995р.), на республіканському науковому семінарі в гідромеханіці Інституту гідромеханіки НАН України під керівництвом академіка НАН України В.Т.Грінченка (1996р.).

Публікації. Матеріали дисертиції опубліковані в семи роботах.

Результати дисертації використані при виконанні Інститутом гідромеханіки бюджетної науково-дослідної теми "Моделювання гідродинаміки перемішування в природних умовах та перспективних технологіях".

Структура та обсяг дисертації.

Дисертаційну роботу складають вступ, три розділи, висновки, список літератури та три доданки. Її викладено на 128 сторінках машинописного тексту, що містять 35 малюнків і 4 таблиці. Список літератури містить 96 найменувань.

## ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У вступі розкрито сутність і актуальність досліджуваної проблеми, подано короткий огляд літератури та сучасного стану питання, сформульовано цілі дисертаційної роботи, викладено зміст роботи за розділами.

У першому розділі розглянуто стаціонарну осесиметричну течію в циліндричній порожнині, що обдужується рухом бічної поверхні. Саме на цьому прикладі детально описано математичні методи, що використовуються задля одбуття аналітичного розв'язку, та досліджено властивості одержаного розв'язку. Таку задачу можна розглядати як перший крок до вивчення більш складних тривимірних рухів рідини в циліндрі, у тому числі за наявності твердих вставок.

В межах обраної моделі Стокса постановка задачі складається з рівнянь Стокса та неперервності

$$\nabla^2 \vec{V} = \nabla p, \quad (\nabla \cdot \vec{V}) = 0 \quad (1)$$

та граничних умов

$$V_\rho(1, z) = 0, \quad V_z(1, z) = 1, \quad z \in [-h, h], \quad (2)$$

$$V_\rho(\rho, \pm h) = 0, \quad V_z(\rho, \pm h) = 0, \quad \rho \in [0, 1]$$

де  $h$  — половина висоти циліндра. Крім того на бічній поверхні циліндра може бути задано обертання. Заради безрозмірювання усі лінійні розміри віднесено до радіусу циліндра, а також використано заміну

$$t = \frac{V_{bound}}{a} \tilde{t}, \quad V = \frac{\tilde{V}}{V_{bound}}, \quad p = \frac{a}{\mu V_{bound}} \tilde{p},$$

де  $a$  — радіус циліндра,  $V_{bound}$  — швидкість границі,  $t, V, p$  — безрозмірні час, швидкість та тиск. У такому двовимірному випадку  $V_\rho = V_\rho(\rho, z)$ ,  $V_z = V_z(\rho, z)$ ,  $p = p(\rho, z)$  можна ввести функцію течії  $\Psi$ ,

$$V_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi(\rho, z)}{\partial z}, \quad V_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi(\rho, z)}{\partial \rho} \quad (3)$$

та ввести рівняння Стокса (1) для компонент  $V_\rho, V_z$  до одного рівняння для функції течії

$$\varepsilon^4 \Psi = 0, \quad \varepsilon^2 = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (4)$$

Розв'язок рівняння четвертого порядку можна побудувати як суму розв'язків однорідного  $\varepsilon^2 \Psi = 0$  та неоднорідного  $\varepsilon^2 \Psi = F(\rho, z)$  рівнянь другого порядку, де права частина  $F(\rho, z)$  є загальним розв'язком однорідного рівняння. З урахуванням парності функції  $\Psi$  ( $\Psi(\rho, z) = \Psi(\rho, -z)$ ) розв'язок може бути подано у вигляді :

$$\Psi = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\gamma_k I_1(\gamma_k)} \left[ -x_{1k} \frac{I_0(\gamma_k)}{I_1(\gamma_k)} \cdot \rho I_1(\gamma_k \rho) + x_{2k} \rho^2 I_0(\gamma_k \rho) \right] \cos(\gamma_k z) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n \cosh(h\mu_n) J_0(\mu_n)} \left[ y_{1n} \left( h \cdot \tanh(h\mu_n) - \frac{1}{\mu_n} \right) \cosh(\mu_n z) + y_{2n} \left( \frac{\cosh(\mu_n z)}{\mu_n} - z \cdot \sinh(\mu_n z) \right) \right] \rho J_1(\mu_n \rho), \quad (5)$$

де  $x_{1k}, y_{1k}, x_{2k}, y_{2k}$  — невідомі коефіцієнти,  $J_0(z), J_1(z), I_0(z), I_1(z)$  — функції Бесселя та модифіковані функції Бесселя першого роду,  $\gamma_k = (2k - 1)\pi/2h, k = 1, 2, \dots, \mu_n$  — корені функції Бесселя  $J_1(\mu_n) = 0$ . Диференціюючи (5) можна одержати вирази для поля швидкостей.

З першої та четвертої граничних умов (2) випливає, що  $x_{1k} = x_{2k} = x_k, y_{1k} = y_{2k} = y_k$ , де  $x_k, y_k$  — нові позначення невідомих. Розклавши в третій граничній умові компоненту швидкості  $V_\rho$  за повною та ортогональною на інтервалі  $[0, 1]$  в вагою  $\rho$  системою функцій  $J_1(\mu_n \rho), n = 1, 2, \dots$ , а в другій граничній умові компоненту  $V_z$  за системою  $\cos(\gamma_k z), k = 1, 2, \dots$ , повною та ортогональною на  $[0, h]$ , одержимо нескінчену систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка дозволяє визначити невідомі коефіцієнти розв'язку в умови його задоволення граничним умовам.

$$x_k t(\gamma_k) - 4\gamma_k^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n y_n}{(\mu_n^2 + \gamma_k^2)^2} = 2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

$$y_n \frac{\Delta(h\mu_n)}{\cosh^2(h\mu_n)} - 4 \frac{\mu_n^2}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k x_k}{(\gamma_k^2 + \mu_n^2)^2} = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

де функції  $t(\gamma) = 2 \frac{I_0(\gamma)}{I_1(\gamma)} + \gamma - \gamma \frac{I_0^2(\gamma)}{I_1^2(\gamma)}, \Delta(\mu) = \sinh \mu \cosh \mu + \mu$ .

Шляхом застосування перетворення Мелліна та теореми про лишки у роботі доведено майже цілком регулярність системи (6), у тому розумінні, що властивість цілком регулярності може порушуватись лише для скінченної кількості номерів  $k$ . За досить великих значень параметра  $h$  система (6) буде цілком регулярною. На основі цих тверджень доведено існування та єдиність обмеженого розв'язку системи (6).

Шляхом використання перетворення Мелліна та застосування його властивостей доведено асимптотичний закон для невідомих

$$x_k = \frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4} + O(k^{-1}), \quad y_k = \frac{4\pi}{\pi^2 - 4} + O(k^{-1}), \quad k \rightarrow \infty \quad (7)$$

Значення констант в асимптотичного закону (7) забезпечує виконання граничних умов у кутових точках циліндра. Вони також дають можливість знайти більш точний чисельний розв'язок системи (6) за меншого числа невідомих.

З використанням асимптотичного закону невідомих (7) доведено коректність використання одержаного поля швидкості поблизу поверхні циліндра, тобто показано, що функції  $V_\rho$ ,  $V_z$  є неперервними в обмеженій області, що складається з внутрішності та поверхні циліндра, й задовольняють граничним умовам задачі (2).

Відзначимо, що задія чисельних розрахунків в околиці границі слід використовувати співвідношення з покращеною обіжністю рядів, де виділено головні частини рядів шляхом використання (7) та асимптотичних розкладів функцій, що входять до виразів поля швидкості.

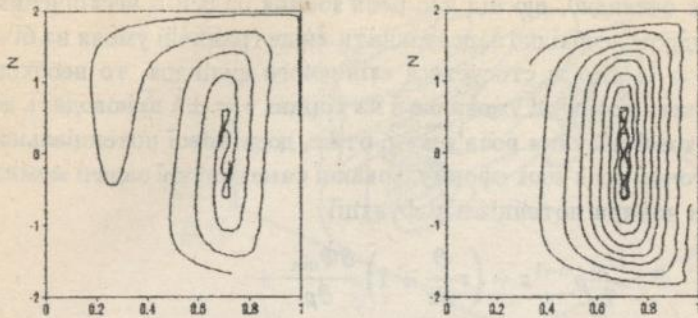
На основі чисельних розрахунків описано кінематичні властивості стаціонарної осесиметричної течії в циліндрі. Зокрема показані траєкторії частинок рідини за значень параметра  $h = 1$  та  $h = 2$ , що виявляють структуру потоку в обмеженій циліндричній області.

Запропоновано наступний алгоритм чисельного вивчення перемішування рідини. Інтенсивність перемішування досліджено в допомогою змінювання числа  $N_a$  ( $N_a$  — відношення кількості областей циліндра, що зайняті поміченими в початковий момент часу частинками рідини (бралося 10000 точок), до всієї кількості областей, на які було розбито циліндр (500 областей)) за часом. Стаціонарність потоку говорить про те, що пляма рідини має розмиватись в процесі такого руху в області, обмеженій поверхнями течії, котрі у початковий момент часу торкались границі плями. Таким чином, число  $N_a$  не досягає значення 1, а його граничне значення, якщо  $t \rightarrow \infty$ , залежить від об'єму рідини, що міститься між описаними вище поверхнями течії.

Процес деформації рідкої поверхні (мал. 1) дає можливість більш детально уявити картину течії. Окрім основного поля потоку видно також невеликі відокремлені зони циркулюючих течій. Така картина спостерігається за досить великих значень параметра  $h$  (у наведеному прикладі  $h = 2$ ).

У другому розділі розглянуто тривимірну задачу про стаціонарний та періодичний за часом рух рідини у скінченному циліндрі. Замість одного рівняння в частинних похідних четвертого порядку для функції течії  $\Psi$  розв'язано систему з трьох рівнянь в частинних похідних другого порядку з трьома невідомими функціями  $V_\rho$ ,  $V_\theta$ ,  $V_z$ , котрі залежать від усіх трьох координат циліндричної системи координат.

Рух рідини описують рівняння Стокса (1). Розглядаючи довільне поле швидкості (з умовою  $\int_S \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0$ , де  $S$  — поверхня циліндра), поділимо цю задачу на дві частини — симетричну та антисиметричну по  $z$  — залежно від парності чи непарності по  $z$  розв'язку  $V_z(\rho, \theta, z)$ .



Малюнок 1: Процес деформації рідкої лінії (початкова позиція  $0.1 \leq r \leq 0.9$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $z = 0$ )

Для симетричної задачі граничні умови мають вигляд:

$$\begin{aligned} V_\rho(1, \theta, z) &= f_1(\theta, z), \\ V_\theta(1, \theta, z) &= f_2(\theta, z), \quad \theta \in [0, 2\pi], z \in [-h, h] \\ V_z(1, \theta, z) &= f_3(\theta, z), \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} V_\rho(\rho, \theta, \pm h) &= \pm g_1(\rho, \theta), \\ V_\theta(\rho, \theta, \pm h) &= \pm g_2(\rho, \theta), \quad \rho \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi] \\ V_z(\rho, \theta, \pm h) &= g_3(\rho, \theta). \end{aligned}$$

Окрім граничних умов на розв'язок слід також накласти вимогу періодичності за координатою  $\theta$  в періодом  $2\pi$ . Це дає можливість в загальному випадку подати поле швидкості у вигляді рядів Фур'є за координатою  $\theta$ . Для визначеності візьмемо

$$\begin{aligned} V_\rho &= V_{\rho 0} + \sum_{m=1}^{\infty} V_{\rho m} \cos(m\theta), \\ V_\theta &= \sum_{m=1}^{\infty} V_{\theta m} \sin(m\theta), \\ V_z &= V_{z0} + \sum_{m=1}^{\infty} V_{zm} \cos(m\theta), \end{aligned} \tag{9}$$

де  $V_{\rho 0}, V_{z0}$  — компоненти швидкості осесиметричної задачі.

Метод розв'язання системи рівнянь Стокса описано Дж.Халпелем, Г.Бренером на прикладі течії в нескінченному круговому циліндрі. Він полягає в побудові розв'язку як суми однорідного та частинного неоднорідного розв'язків. При цьому функція  $p$  — тиск є гармонічною, що

допускає визначити в загальному вигляді праві частини неоднорідних рівнянь. Однак очевидно, що під час розв'язання задачі в нескінченним круговим циліндром необхідно задовольнити лише граничні умови на бічній поверхні  $\rho = 1$ . Що ж стосується скінченного циліндра, то необхідність задовольнити граничні умови ще й на торцах  $z = \pm h$  призводить до введення додаткової частини розв'язку і, отже, додаткової потенціальної функції. Остаточно розв'язок сформульованої симетричної задачі можна записати через чотири потенціальні функції

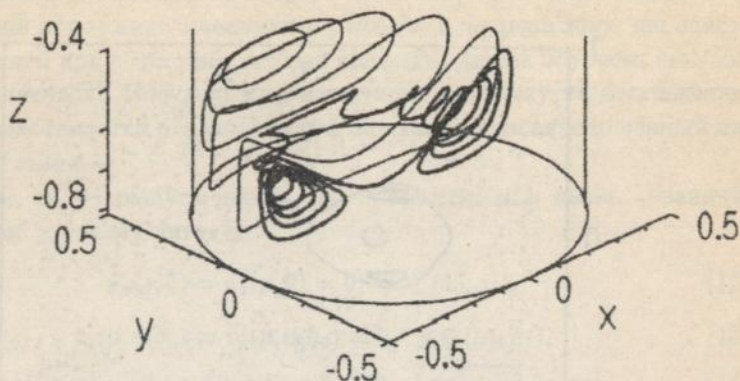
$$\begin{aligned}
 V_{\rho m} &= \frac{D_m}{2} \rho^{m-1} z + \left( z \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right) \frac{\partial \Psi_{0m}}{\partial \rho} + \\
 &+ \rho \frac{\partial^2 \Psi_{1m}}{\partial \rho^2} + \frac{\partial \Psi_{2m}}{\partial \rho} + \frac{m}{\rho} \Psi_{3m}, \\
 V_{\theta m} &= -\frac{D_m}{2} \rho^{m-1} z - \frac{m}{\rho} \left( z \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right) \Psi_{0m} - \\
 &- m \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \Psi_{1m} \right) - \frac{m}{\rho} \Psi_{2m} - \frac{\partial \Psi_{3m}}{\partial \rho}, \\
 V_{zm} &= C_m \rho^m + z \frac{\partial^2 \Psi_{0m}}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Psi_{1m}}{\partial z} \right) + \frac{\partial \Psi_{2m}}{\partial z},
 \end{aligned} \tag{10}$$

де  $\Psi_{jm} \cos(m\theta)$  — гармонічні функції, що мають вигляд

$$\begin{aligned}
 \Psi_{0m} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_{1nm}}{\mu_{nm}^2 J_m(\mu_{nm}) \sinh(h\mu_{nm})} J_m(\mu_{nm}\rho) \sinh(\mu_{nm}z), \\
 \Psi_{1m} &= \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x_{1km}}{\beta_k^2 I_m(\beta_k)} I_m(\beta_k \rho) \sin(\beta_k z), \\
 \Psi_{2m} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x_{2km}}{\beta_k I_m(\beta_k)} I_m(\beta_k \rho) \sin(\beta_k z) + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_{2nm}}{\mu_{nm} J_m(\mu_{nm}) \sinh(h\mu_{nm})} J_m(\mu_{nm}\rho) \sinh(\mu_{nm}z), \\
 \Psi_{3m} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x_{3km}}{\beta_k I_m(\beta_k)} I_m(\beta_k \rho) \sin(\beta_k z) + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_{3nm}}{\mu_{nm} J_m(\mu_{nm}) \sinh(h\mu_{nm})} J_m(\mu_{nm}\rho) \sinh(\mu_{nm}z),
 \end{aligned} \tag{11}$$

де  $\beta_k = k\pi/h$ , а  $\mu_{nm}$  задовольняє рівнянню  $J_m(\mu_{nm}) = 0$ ,  $m = 1, 2, \dots$

Розкладаючи задані на границі функції за системою тригонометричних функцій  $\sin(m\theta)$ ,  $\cos(m\theta)$  на інтервалі  $[0, 2\pi]$ , перші три співвідношення (8) за повною та ортогональною на інтервалі  $[-h, h]$  системою тригонометричних функцій  $\sin(\beta_k z)$ ,  $\cos(\beta_k z)$ , суму та різницю четвер-



Малюнок 2: Кутові кінематичні структури за  $h/a = 1.6295$

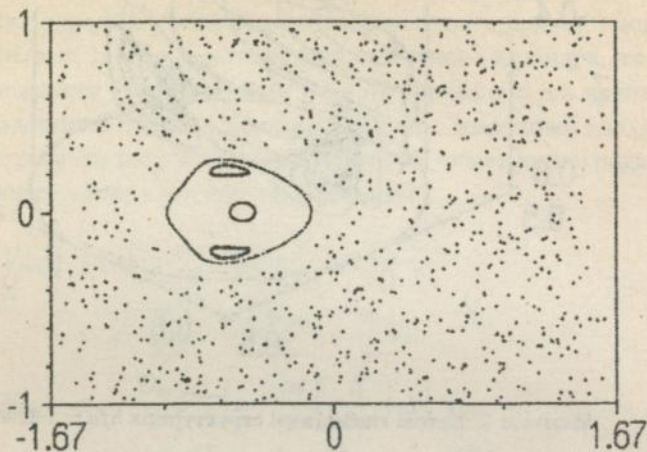
того і п'ятого рівнянь (8) в ряди Діні, а останнє рівняння (8) в ряд Фур'є-Бесселя за координатою  $\rho$ , можна одержати нескінчену систему лінійних алгебраїчних рівнянь для двох послідовностей невідомих  $x_{1km}, y_{1km}$ . Інші чотири послідовності невідомих виражені через  $x_{1km}, y_{1km}$ .

Аналогічним чином одержано також розв'язок антисиметричної задачі, де властивості парності по  $z$  невідомих функцій замінено на протилежні.

Розглянуто питання про існування вихорів у скінченному циліндрі, де бічна поверхня  $\rho = 1$  і нижня торцева поверхня  $z = -h$  є нерухомими, а верхня торцева поверхня рухається в сталю швидкістю  $u$  у додатньому напрямку осі  $X$ . Як показують результати чисельних розрахунків, в циліндрі подібно до прямокутника кількість "великих" вихорів збільшується при зростанні значення  $h$ . Крім того спостерігається й дивовижна наближеність координат вихорових центрів в прямокутнику та в циліндрі в площині  $y = 0$ .

Що ж стосується куткових кінематичних структур, то в циліндрі вони якісно відрізняються від тих, що розглядалися іншими авторами у прямокутнику. Пова площиною  $y = 0$  (мал. 2) частинки рідини одієюють рух навколо осі спіраллю, зсуваються вздовж вихорової осі. В площині  $y = 0$  особливими точками будуть вже не центри вихорів Моффата, як це має місце в прямокутнику, а фокуси.

У цьому розділі увагу також приділено дослідженню процесів перемішування в періодичній (квазістаціонарній) течії, що має місце у скінченному циліндрі, де верхня границя рухається в додатньому напрямку осі



Малюнок 3: Перетин Пуанкаре в площині  $y = 0$

$X$  в сталю швидкістю протягом півперіоду  $T/2$ , а потому нижня границя рухається у зворотньому напрямку також на протязі півперіоду. Встановимо значення параметрів  $h/a = 1/1.67$ , а  $D = UT/2a = 6.24$ , де  $U$  — швидкість руху торцевих сторін,  $a$  — радіус циліндра. При дослідженні процесів перемішування вплив нестационарних ефектів, викликаних перемиканням режимів руху границь, має бути незначним за умови  $Re \ll 4D$ . Дослідження хаотичних (де рідина перемішується найінтенсивнішим шляхом) та регулярних режимів руху частинок рідини у такій періодичній течії проведено за допомогою перетину Пуанкаре (мал. 3).

Критерій точності чисельних обчислень, придатний для даної задачі, ґрунтується на наступній властивості. Якщо наближувати початкові умови від центру області регулярного руху до її границі, траєкторія набуває все більшої чутливості до чисельних похибок, а обудження, спричинені ними породжують руйнування границі області КАМ. При збільшенні числа доданків рядів, що складають поле швидкості, до 40 точність розрахунків стає задовільною.

У третьому розділі розглянуто стаціонарний осесиметричний рух рідини довкола трьох тонких кільцевих дисків, розташованих усередині скінченого циліндра. Математичний розв'язок такої задачі можна побудувати у вигляді суперпозиції загальних розв'язків двох граничних

задач, а, саме, розв'язку, що описує осесиметричне поле швидкості у циліндричній порожнині, наведеного у Розділі I, та розв'язку, що описує поле швидкості при обтіканні системи кільцевих дисків потоком, що набігає з нескінченості. Побудові математичного розв'язку та дослідженню фізичних властивостей згаданої задачі обтікання присвячено перший параграф цієї глави.

Нехай  $a_0, a_1$  — радіуси дисків,  $h_0$  — відстані між ними. Граничні умови подані у такому вигляді

$$v_\rho(\rho, 0) = v_z(\rho, 0) = 0, \quad \rho \in (a_0, a_1), \quad (12)$$

$$v_\rho(\rho, \pm h_0) = v_z(\rho, \pm h_0) = 0, \quad \rho \in (a_0, a_1), \quad (13)$$

$$v_\rho(\rho, z) \rightarrow 0, \quad v_z(\rho, z) - v^\infty \rightarrow 0, \quad (\sqrt{\rho^2 + z^2} \rightarrow \infty). \quad (14)$$

Згідно з теорією гідродинамічних потенціалів розв'язок крайової задачі будемо шукати у вигляді потенціалу простого шару

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{x}) &= - \int_{S_\eta} \vec{u}^k(\vec{x}, \vec{\eta}) d_k(\vec{\eta}) dS_\eta, \\ p(\vec{x}) &= - \int_{S_\eta} q^k(\vec{x}, \vec{\eta}) d_k(\vec{\eta}) dS_\eta, \quad k = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (15)$$

де  $S_\eta$  — поверхня тіла, що обтікається потоком,  $\vec{\eta}$  — точки цієї поверхні,  $d_k$  — густини потенціалу, невідомі функції, визначені на поверхні,  $\vec{u}^k, q_k$  — основний сингулярний розв'язок.

Остаточно швидкість і тиск поля течії повз три диски можна подати у такому вигляді

$$v_\rho(\rho, z) = \sum_{j=1}^3 [v_{1j}(\rho, z) - (1 - \delta_{1j})v_{1j}(\rho, -z)],$$

$$v_z(\rho, z) = v^\infty + \sum_{j=1}^3 [v_{2j}(\rho, z) + (1 - \delta_{1j})v_{2j}(\rho, -z)], \quad (16)$$

$$p(\rho, z) = \sum_{j=1}^3 [p_j(\rho, z) - (1 - \delta_{1j})p_j(\rho, -z)],$$

де

$$v_{ij}(\rho, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{a_0}^{a_1} d_j(r) G_{ij}(\rho, z; r) dr, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3, \quad (17)$$

$$p_j(\rho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{a_0}^{a_1} d_j(r) P_j(\rho, z; r) dr, \quad j = 1, 2, 3, \quad (18)$$

де

$$G_{11}(\rho, z; r) = \frac{rz}{\rho\sqrt{(\rho+r)^2 + z^2}} \left\{ K(\nu) - \frac{r^2 - \rho^2 + z^2}{(\rho-r)^2 + z^2} E(\nu) \right\},$$

$$G_{12}(\rho, z; r) = \frac{1}{\rho\sqrt{(\rho+r)^2 + (z-h_0)^2}} \left\{ [\rho^2 + r^2 + 2(z-h_0)^2] K(\nu_1) - \left[ (\rho+r)^2 + (z-h_0)^2 \left( 1 + \frac{r^2 + \rho^2 + (z-h_0)^2}{(\rho-r)^2 + (z-h_0)^2} \right) \right] E(\nu_1) \right\},$$

$$G_{13}(\rho, z; r) = G_{11}(\rho, z-h_0; r),$$

$$G_{21}(\rho, z; r) = \frac{2r}{\sqrt{(\rho+r)^2 + z^2}} \left\{ K(\nu) + \frac{z^2}{(\rho-r)^2 + z^2} E(\nu) \right\},$$

$$G_{22}(\rho, z; r) = -\frac{z-h_0}{\sqrt{(\rho+r)^2 + (z-h_0)^2}} \left\{ K(\nu_1) - \frac{\rho^2 - r^2 + (z-h_0)^2}{(\rho-r)^2 + (z-h_0)^2} E(\nu_1) \right\},$$

$$G_{23}(\rho, z; r) = G_{21}(\rho, z-h_0; r); \quad (19)$$

$$P_1(\rho, z; r) = \frac{2rz}{\sqrt{(\rho+r)^2 + z^2}} \frac{E(\nu)}{(\rho-r)^2 + z^2},$$

$$P_2(\rho, z; r) = -\frac{1}{\sqrt{(\rho+r)^2 + (z-h_0)^2}} \left\{ K(\nu_1) - \frac{\rho^2 - r^2 + (z-h_0)^2}{(\rho-r)^2 + (z-h_0)^2} E(\nu_1) \right\},$$

$$P_3(\rho, z; r) = P_1(\rho, z-h_0; r), \quad (20)$$

де

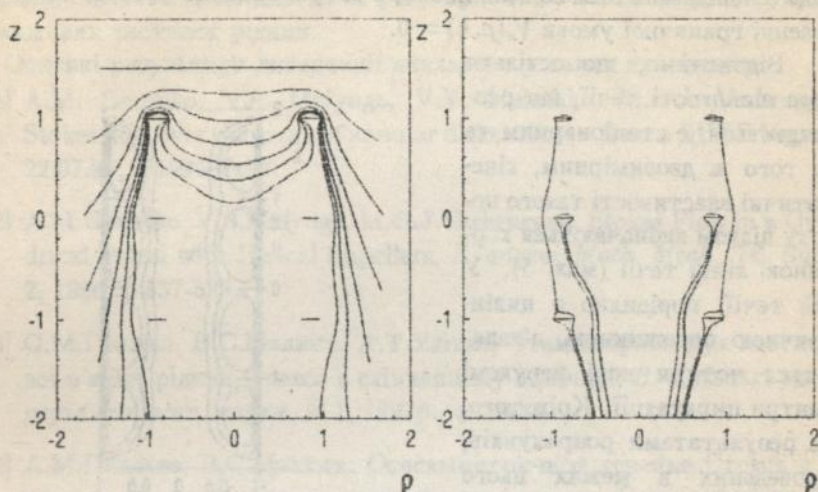
$$\nu_1 = \nu(\rho, z-h_0; r).$$

$K(\nu)$ ,  $E(\nu)$  — повні еліптичні інтеграли відповідно першого та другого роду.

Задоволення граничних умов (12), (13) в співвідношеннях (16), (17), (19) призводить до лінійних інтегральних рівнянь першого роду, що мають три невідомі функції  $d_j(r)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , ядра яких мають логарифмічну сингулярність, за  $\rho - r \rightarrow 0$ .

З метою перетворення інтегральних рівнянь в лінійні алгебраїчні рівняння було вжито розклад невідомих густин за поліномами Чебишева  $T_m$  першого роду на інтервалі  $[a_0, a_1]$ . Це призводить до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь для трьох послідовностей невідомих сталих коефіцієнтів  $d_{1,l}$ ,  $d_{2,l}$ ,  $d_{3,l}$ , що є коефіцієнтами розкладу невідомих функцій. Ця система має вигляд

$$\frac{\pi}{8}(1 + \delta_{l0})(\delta_{l0} \ln 2 + \frac{1 - \delta_{l0}}{l})d_{i,l} + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^3 \sum_{m=0}^{\infty} d_{j,m} \int_{a_0}^{a_1} \int_{a_0}^{a_1} \left[ Q_{i,j}(\rho, r) - \right. \\ \left. - \delta_{i,j} \ln \frac{a_1 - a_0}{2|\rho - r|} \right] \hat{T}_i(\rho) \hat{T}_m(r) dr d\rho = -v^{\infty} (1 - \delta_{i2}) \delta_{l0} \pi, \quad (21)$$



Малюнок 4: Деформація рідкої лінії, що набігає на три кільцеві диски за  $h_0 = 1$ ,  $\alpha_0 = 0.76$ ,  $\alpha_1 = 0.96$  а)  $0 \leq t \leq 5.2$ , б)  $t = 19.6$

$$i = 1, 2, 3, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

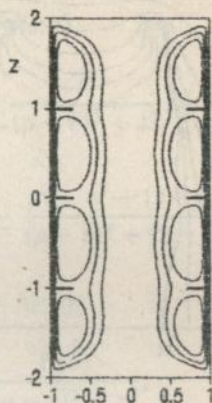
Зауважимо, що розраховані в цій роботі значення сили опору при обтіканні одного кільцевого диску збігаються з експериментальними та розрахунковими даними інших авторів [R.R.Roger, R.G.Hussey (1982), A.M.J.Davis, (1991)], що використовували задля їх здобуття чисельні методи розв'язання проблеми. Мал. 4 ілюструє процес деформації рідкої лінії, що набігає на диски разом з потоком. Існують частинки рідини, котрі минають крайні диски з внутрішнього боку, а середній диск — з зовнішнього.

У другому параграфі цього розділу розглянуто стаціонарну Стоксову течію у скінченому циліндрі з трьома кільцевими дисками. Бічна поверхня циліндра рухається з сталою швидкістю, інші поверхні — нерухомі. Відповідну граничну задачу формулюють рівняння Стокса (1) та граничні умови (2) на поверхні циліндра та (12), (13) на поверхні дисків.

Завдяки лінійності рівнянь (1) розв'язок граничної задачі (1), (2), (12), (13) може бути побудовано у вигляді суперпозиції розв'язку осесиметричної задачі для циліндричної порожнини та задачі про обтікання трьох кільцевих дисків (16). Щодо співвідношень (16), необхідно зазначити, що стала задана величина  $v^\infty$ , яка в задачі про обтікання кільцевих дисків

визначала значення швидкості потоку на нескінченості, має бути в даній задачі невідомою сталою величиною, в котрій виникає потреба при задоволенні граничної умови  $V_z(\rho, h) = 0$ .

Відзначимо, що оскільки поле швидкості течії, що розглядається, є стаціонарним та до того ж двовимірним, кінематичні властивості такого потоку цілком визначаються картиною ліній течії (мал. 5). У цій течії, порівняно в циліндричній порожнині, в'являються чотири нові нерухомі центри циркуляції. Крім того, за результатами розрахунків, проведених в межах цього розділу, можна зробити висновок, що присутність внутрішніх вставок прискорює процес перемішування пасивної домішки в рештою рідини.



Малюнок 5: Лінії течії в циліндрі з трьома кільцевими дисками за  $h = 2$ ,  $h_0 = 1$ ,  $a_0 = 0.72$ ,  $a_1 = 0.92$

У висновках сформульовано основні результати роботи:

1. Розвинуто метод суперпозиції для розв'язання групи тривимірних задач Стокса у скінченому циліндрі.
2. На основі методу суперпозиції та теорії гідродинамічних потенціалів розроблено аналітично-чисельний алгоритм ефективного розв'язання граничних задач для рівнянь Стокса у скінченому циліндрі з твердими тонкими коаксіальними кільцевими дисками, що моделюють один тип реального імперера.
3. Побудовано аналітичний розв'язок задачі Стокса у скінченій циліндричній порожнині з довільними граничними умовами та у скінченому циліндрі з трьома кільцевими дисками.
4. Досліджено кінематичні властивості вихорових течій поблизу кутових кінців скінченого циліндра, що суттєво відрізняються від вихорів Моффата поблизу нерухомих плоских кутів.
5. На основі аналітичних розв'язків та проведених чисельних обчислень досліджено структуру квазістаціонарної течії Стокса у скінченому циліндрі за періодичних рухів торцевих поверхонь. За допомогою перетину Пуанкаре визначено зони хаотичного та регулярного рухів індивідуальних (лагранжових) частинок рідини.

6. Сформульовано критерій точності розв'язання задачі Стокса для періодичних течій, що мають як регулярні так і хаотичні зони руху лагранжових частинок рідини.

Основні результати дисертації викладено у таких публікаціях:

- [1] A.M. Gomilko, V.S. Malyuga, V.V. Meleshko, M.G.J. Verbruggen; Stokes flow over the array of annular disks. 27с. — Деп. в ДНТБ України 22.07.96, N1594-Ук96.
- [2] A.M.Gomilko, V.S.Malyuga, M.G.J.Verbruggen, Stokes Flow in a Cylindrical Vessel with Helical Impellers, *Z. angew. Math. Mech.*, **76**, Suppl. 2, 1996, p.537-538
- [3] О.М.Гомілко, В.С.Малюга, А.Т.Улітко; Стационарный рух нестисливої в'язкої рідини Стокса в скінченному циліндрі. *В. Київськ. ун-ту, серія фіз.-мат. науки*, N 1, 1997р., с. 30-38
- [4] А.М.Гомілко, В.С.Малюга; Осесимметричное течение Стокса в конечном цилиндре с тремя кольцевыми дисками. *Гидромеханика*, **71**, 1997г., с. 24-29
- [5] В.С.Малюга; Адвекция частиц идеальной жидкости в поле вихревой пары в цилиндре. *Тр. XVII Науч. конф. мол. ученых Ин-та механики АН Украины*, Киев 19-22 мая 1992г. — Киев-1992. Ч.2. — с. 113-117 — Деп. в УкрИНТЭИ 7.07.92, N1022-Ук92, РЖ, 1993, 1Б317ДЕП.
- [6] В.С.Малюга; Хаотическая и регулярная адвекция частиц идеальной жидкости в поле точечного вихря в произвольном секторе круга. *Тр. XVIII Науч. конф. мол. ученых Ин-та механики АН Украины*, Киев 18-21 мая 1993г. — Киев-1993. Ч.2. — с. 84-88 — Деп. в ГНТБ Украины 16.08.93, N1765-Ук93, РЖ, 1994, 2Б12ДЕП.
- [7] В.В.Мелешко, В.С.Малюга; Хаотична та регулярна адвекція частинок ідеальної рідини в полі вихрової пари в циліндрі. *Доповіді АН України*, N 6, 1993р., с.59

Малюга В.С. Стоксовыые течения в конечном цилиндре (рукопись).

Диссертація на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.05 механика жидкости, газа и плазмы, Ин-т гидромеханики НАН Украины, Киев, 1997.

Защищаются 7 научных работ, содержащих теоретические исследования особенностей стационарных и периодических течений несжимаемой

жидкости в цилиндре, а также обтекания тонких кольцевых дисков в безграничной области. С использованием метода суперпозиции и теории гидродинамических потенциалов получены аналитические выражения для функции тока осесимметричного течения и поля скорости. Изучена кинематика стационарных течений, в частности угловых вихревых структур, и кинематика перемешивания в периодическом (квазистационарном) течении путем адвекции частиц жидкости. Исследованы режимы регулярного и хаотического движений жидкости. Сформулирован критерий точности численных расчетов в хаотических областях.

Malyuga V.S. Stokes flows in a finite cylinder.

Thesis for Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree, speciality 01.02.05 - mechanics of fluid, gas and plasma, Ins. of Hydromechanics of NAS of Ukraine, Kyiv, 1997.

7 articles have been published in the reference to this topic. Based on the superposition method and the theory of hydrodynamic potentials the analytical solution for the stream function of axisymmetrical flow and the velocity field has been obtained. The kinematics of steady flows, particularly corner eddy structures, and the kinematics of mixing in the periodic flow has been studied. Both regular and chaotic fluid motion regimes have been studied. Accuracy criterion for numerical computations in the chaotic domains is formulated.



1.30.153

**АВ 37.857**

Підписано до друку 05.05.97. Формат 60x84/16  
Палір друк. Умовн.-друк. аркуш. 1,0.  
Об.-вид. аркуш. 1,0. Тираж 100. Замовл. 3/97

---

Надруковано в ІГМ НАН України  
252057, Київ - 57, вул. Желябова, 8/4