

Державний університет «Львівська політехніка»

На правах рукопису

УДК 621.317.

Дудикевич Тарас Валерійович

РЕКОНСТРУКЦІЯ РОЗПОДІЛУ ПИТОМОЇ ЕЛЕКТРИЧНОЇ ПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ТЕХНІЧНИХ ТА БІОМЕДИЧНИХ ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ

Спеціальність 05.11.05 - прилади та методи вимірювання
електричних та магнітних величин

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

**дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук**

Львів 1997



Науковий керівник:

— доктор технічних наук,
професор, заслужений
винахідник України

Стадник Богдан Іванович

Офіційні опоненти:

— доктор фізико- математичних
наук, професор

Попов Богдан Олександрович

— доктор технічних наук,
старший науковий співробітник

Бунь Ростислав Адамович

Провідна організація: Наукове-виробниче підприємство по радіоелектронній медичній апаратурі (м.Львів)

Захист відбудеться "27" серпня 1997 р. о 14⁰⁰ годині на засіданні спеціалізованої ради Д 04.06.11 у Державному університеті "Львівська політехніка" (290646, Львів-13, вул. С. Бандери, 12, ауд. 225 головного корпусу).

Відгуки на автореферат у двох примірниках, завірені печаткою, просимо надсилати на адресу: 290646, Львів-13, вул. С. Бандери, 12, Державний університет "Львівська політехніка", вченому секретарю ради Д 04.06.11.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Державного університету "Львівська політехніка" (вул. Професорська, 1).

Автореферат розісланий "24" травня 1997 р.

Вчений секретар спеціалізованої
ради, к.т.н., с.н.с.

Я.Т. Луцик

Загальна характеристика роботи

АКТУАЛЬНІСТЬ ТЕМИ. На цей час томографічні системи, які базуються на різних фізичних принципах, успішно використовуються в медицині та промисловості. Це в першу чергу рентгенівські, ультразвукові системи, та такі, що базуються на явищі ядерного магнітного резонансу (ЯМР).

Проте ці системи мають ряд очевидних недоліків. По-перше, це шкідливість для пацієнтів та обслуговуючого персоналу, яка унеможливує часту повторюваність томографічних вимірювань. Кількість рентгенівських і ЯМР- томограм для однієї людини в певний проміжок часу строго регламентована. По-друге, це низька продуктивність, як правило, дуже дорогого та габаритного обладнання. Низька продуктивність цього обладнання обумовлена низькою швидкодією механічних елементів сканування, які містяться у всіх вищезгаданих системах. Лише процес збору даних для однієї томограми триває від декількох секунд до декількох десятків хвилин. Цей недолік принципово виключає можливість зображування динамічної активності всередині людського організму та технічних системах в реальному часі. З допомогою таких томографічних систем в медицині можна отримувати лише статичні томограми органів, які не змінюють або мало змінюють свою форму під час збору томографічних даних. Таким чином, життєдіяльність серцево-судинної та дихальної систем не може бути прослідкована використовуючи класичні томографічні системи. В промисловості різні модифікації деяких з цих томографічних систем використовуються лише для неруйнівної діагностики, тобто знову ж таки там, де досліджувані зразки не міняють свою форму та фізичні параметри в часі та на даний момент практично не мають застосування для моніторингу розподілу речовин при швидкозмінних процесах.

Тому інтенсивно іде пошук нових шляхів створення високопродуктивних малогабаритних та дешевих засобів, придатних для динамічної візуалізації внутрішньої структури досліджуваних об'єктів в реальному або квазіреальному часі.

З огляду на це перспективним видається томографічний метод, в якому інформативним параметром є питомий електричний опір, а мета вимірювання полягає у знаходженні його розподілу в площинних перерізах біологічних та промислових об'єктів. Ця галузь томографічних вимірювань називається резистивною томографією. Суть методу резистивної томографії полягає у знаходженні розподілу питомого електричного опору або питомої електричної провідності всередині біологічного та промислового об'єкта за вимірюваннями струму і напруги, зробленими лише на його поверхні. Час збору даних для однієї томограми обмежується лише швидкодією електронних пристроїв і не перевищує, як правило, 50ms. Струм порядку кількох десятків або

сотень мікроампер, що використовується для збору даних, є безпечним для людського організму, не руйнує та не збуджує тканин і забезпечує достатнє співвідношення сигнал-шум. Сама томографічна система містить в собі лише струмопідвідні електроди, персональний або спеціалізований комп'ютер та пристрій збору даних, розміри якого не перевищують розмірів звичайного відеомагнітофону. Таку переносну систему легко можна розмістити в дослідницькій лабораторії, на промисловому об'єкті або біля ліжка хворого.

Таким чином, резистивна томографія, будучи використаною в медицині, здатна забезпечити широкий діапазон повторюваних фізіологічних вимірювань в клінічних та лабораторних умовах і є придатною для візуалізації швидкозмінних циклічних процесів всередині людського організму. Резистивні томографічні системи можуть також знайти широке застосування в промисловості для моніторингу розподілу хімічних речовин в трубопроводах, циліндричних змішувачах та сепараторах в реальному часі, причому математичні моделі для різних застосувань будуть універсальними.

Процес реконструкції питомої електричної провідності з лише поверхневих даних струму та напруги є в резистивній томографії набагато складнішим і менш дослідженим, ніж в альтернативних томографічних методах. Ця галузь томографії все ще знаходиться у фазі швидкого розвитку і тому її практичне застосування вимагає розв'язку ряду специфічних проблем, а саме розробки ефективних швидкодіючих алгоритмів реконструкції питомої електричної провідності в площинних перерізах досліджуваних об'єктів.

МЕТОЮ РОБОТИ є аналіз загальних закономірностей побудови резистивних томографічних систем (РТС), уточнена постановка задачі реконструкції та розробка методів і алгоритмів розв'язання як прямої задачі резистивної томографії, тобто побудови моделі неоднорідного провідного тіла, так і зворотної задачі, тобто задачі реконструкції питомої електричної провідності за результатами вимірювань поверхневих струмів та напруг.

ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ Згідно з поставленою метою задачами дослідження є:

- аналіз загальних закономірностей побудови РТС, оцінка їх швидкодії та просторової роздільної здатності;
- уточнена постановка задачі реконструкції, формулювання прямої та зворотної задачі реконструкції;
- розробка математичного апарату для моделювання розподілу потенціалу в площинних перерізах провідних об'єктів при заданих розподілі питомої електричної провідності всередині перерізу та значенні підведеного до певних точок поверхні об'єкту струму;
- розробка методів реконструкції питомої електричної провідності в площинних перерізах провідних об'єктів за

вимірюваннями струму та напруги, зробленими лише на поверхні;

— дослідження розробленої математичної моделі та формування рекомендацій для конструювання РТС;

— аналіз похибок реконструкції питомої електричної провідності.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕНЬ. В дисертаційній роботі використовувався спектр методів наближених обчислень, а саме метод сіток та метод скінчених елементів (FEM) для розв'язання диференційного рівняння Лапласа в часткових похідних з граничними умовами Неймана, ітераційні та прямі методи розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), квазіньютонівський регуляризований метод Левенберга-Марквардта для розв'язання нелінійної задачі безумовної мінімізації.

НАУКОВА НОВИЗНА проведених досліджень така:

— проведено постановку задачі реконструкції питомої електричної провідності з поверхневих даних струму та напруги, на її основі сформульовано пряму і зворотну задачі резистивної томографії;

— для 16-ти електродної конфігурації системи збору даних проаналізовано чутливість та просторову роздільну здатність системи;

— розроблено модель неоднорідного провідного тіла без внутрішніх джерел струму з відомими розподілом питомої електричної провідності всередині тіла та підведеним до його поверхні струмом;

— запропоновано алгоритми та розроблено і досліджено програмне забезпечення для розрахунку розподілу електричного потенціалу в площинних перерізах моделі з використанням методу сіток та методу скінчених елементів для розв'язання диференціального рівняння Лапласа з граничними умовами Неймана;

— запропоновано алгоритми та розроблено і досліджено програмне забезпечення для реконструкції розподілу питомої електричної провідності в площинних перерізах провідних об'єктів за результатами вимірювань поверхневих струмів та напруг з використанням квазіньютонівського регуляризованого методу Левенберга-Марквардта для розв'язання задачі безумовної мінімізації квадратичного функціоналу;

— проведено аналіз похибок реконструкції питомої електричної провідності.

ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ, ЩО ВИНОСЯТЬСЯ НА ЗАХИСТ:

— теоретичні засади побудови резистивних томографічних систем;

— модель неоднорідного провідного тіла без внутрішніх джерел струму з відомим розподілом провідності та підведеним до його поверхні струмом;

— методи розрахунку розподілу електричного потенціалу в

площинних перерізах моделі;

— метод реконструкції розподілу питомої електричної провідності в площинних перерізах провідних об'єктів за вимірюванням підведеного до поверхні тіла струму та спричиненого ним розподілу поверхневих напруг;

— аналіз похибок реконструкції питомої електричної провідності з поверхневих значень струму та напруги.

ПРАКТИЧНА ЦІННІСТЬ РОБОТИ полягає в наступному:

— на основі запропонованих алгоритмів розв'язання прямої та зворотної задач резистивної томографії створено повний комплекс програмного забезпечення для РТС;

— на основі дослідження математичної моделі вироблені рекомендації по конструюванню РТС;

— розроблені числові алгоритми можуть бути використані для розв'язку інших задач, що описуються подібними математичними залежностями.

РЕАЛІЗАЦІЯ. Результати роботи використані на Науково-виробничому підприємстві по радіоелектронній медичній апаратурі (м. Львів) при виконанні робіт по визначенню набряків мозку з використанням 16-електродної системи для вимірювання електричного імпедансу в режимі моніторингу, а також при дослідженні секреторної активності слизової оболонки шлунка за допомогою зондування середовища високочастотним струмом і знімання потенціалів з 8-ми електродів.

АПРОБАЦІЯ РОБОТИ. Основні результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на наступних конференціях:

— VI Українській конференції "Моделювання та дослідження стійкості систем", Київ, 1995р.;

— II Всеукраїнській конференції "Сучасні фізико—математичні дослідження молодих науковців вузів України", Київ, 1995р.

— Міжнародній науковій конференції "5th International Symposium on Temperature and Thermal Measurement in Industry and Science Tempmeko'93", Prague, 1994.

ПУБЛІКАЦІЇ З РОБОТИ. За темою дисертації опубліковано 6 робіт.

ОСОБИСТІЙ ВНЕСОК ЗДОБУВАЧА є основним на всіх етапах виконання досліджень і полягає в формулюванні завдань та безпосередньому виконанні всіх етапів роботи. В друкованих працях, опублікованих у співавторстві, автору належить участь в постановці задач, розробка методів та комп'ютерне моделювання.

СТРУКТУРА ТА ОБ'ЄМ РОБОТИ. Дисертаційна робота складається з вступу, чотирьох розділів, висновків, переліку літератури та додатків. Обсяг дисертації 105 сторінок машинописного тексту, вона містить 30 рисунків.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У вступі обґрунтована актуальність роботи, сформульована мета та задачі досліджень, наведена наукова новизна дисертації та основні положення, що виносяться на захист. Представлені відомості про апробацію роботи та публікації.

У першому розділі проаналізовано існуючі засоби та методи візуалізації внутрішньої структури біологічних та технічних об'єктів. Сюди належать ультразвукова ехо-локація, рентгенівська томографія та томографія на явищі ядерного магнітного резонансу. Наведені типові області застосування цих томографічних методів.

Проведено аналіз спільних недоліків цих методів візуалізації, таких як низька швидкодія, як правило, дорогого та габаритного обладнання, шкідливість для пацієнта та обслуговуючого персоналу, складність інтерпретації отриманих зображень.

Обґрунтовано доцільність вибору резистивного методу для візуалізації внутрішньої структури біологічних та технічних об'єктів. Наведені переваги методу в порівнянні з традиційними методами візуалізації: висока швидкодія, низька вартість, екологічність. Показано, що реконструкція розподілу питомої електричної провідності, зокрема в медичній діагностиці, повинна забезпечити добру контрастність зображення, оскільки існує відчутна різниця між значеннями питомого електричного опору різних тканин.



Рис 1. Площинний переріз круглого об'єкту з розміщеними на його поверхні електродами

Наведена структурна схема та основні компоненти резистивної томографічної системи: набір струмо-підвідних електродів, система збору томографічних даних, спеціалізований або персональний

комп'ютер з пристроєм відображення.

Наведено стратегію сканування об'єкту 16-ти електродною системою збору томографічних даних, яка використовує по два сусідні електроди для підведення струму та вимірювання напруги. До двох сусідніх електродів, для прикладу, 1 та 16 (рис. 1) підводиться струм заданого значення, всі інші пари сусідніх електродів 2-3, 3-4, ..., 14-15 використовуються для вимірювання поверхневих напруг. Вимірювання напруг між електродами 15-16 та 1-2 не проводяться, оскільки це пов'язане з певними труднощами внаслідок неконтрольованого спаду напруги на електродах. Далі струм підводиться по чергово до кожної з пар сусідніх електродів і виконуються відповідні вимірювання різниць потенціалів. Для цієї стратегії в подальшому розроблялися відповідні математичні моделі та алгоритми реконструкції питомої електричної провідності.

При такій стратегії для заданої кількості електродів N всього може бути зроблено лише

$$n = \frac{N(N-3)}{2} \quad (1)$$

незалежних вимірювань поверхневих напруг. В випадку 16-ти електродної системи $n = 104$. В подальшому лише *найбільше* n значень питомої електричної провідності в межах перерізу можуть бути реконструйовані для даної кількості струмопідвідних електродів.

Задача реконструкції питомої електричної провідності з поверхневих даних струму та напруги в резистивній томографії принципово відрізняється від задачі реконструкції в існуючих томографічних методах за рахунок специфіки розповсюдження струму в провідному об'єкті. В той час як, практично можна говорити про прямолінійне розповсюдження рентгенівського випромінення та наближено акустичних хвиль у досліджуваних середовищах, процес поширення струму в провідному середовищі є принципово не прямолінійним і, крім того, тут йдеться скоріше про розподіл струмових потоків в реальному тримірному об'єкті. В даній дисертаційній роботі буде зроблене припущення, що розподіл струмових потоків поза досліджуваним площинним перерізом є мізерно малим в порівнянні з розподілом в межах перерізу і буде розглядатися двомірна задача реконструкції провідності.

Таким чином, значний досвід реконструкції зображень з поверхневих даних, накопичений в класичних галузях томографії, не може бути використаним в резистивній томографії. Реконструкція розподілу питомої електричної провідності в двомірних перерізах провідних об'єктів з поверхневих даних струму та напруги вимагає розробки спеціальних методів та алгоритмів.

Дана галузь томографії знаходиться в фазі початкового розвитку, і, незважаючи на певну кількість праць, все ще не вироблений загальний

підхід до побудови точних та швидкодіючих методів та алгоритмів реконструкції провідності. Тому створення вітчизняних засобів резистивної томографії вимагає розробки методів, алгоритмів та пакетів прикладних програм для реконструкції провідності для технічних та біомедичних вимірювальних систем.

У другому розділі математично описана модель неоднорідного

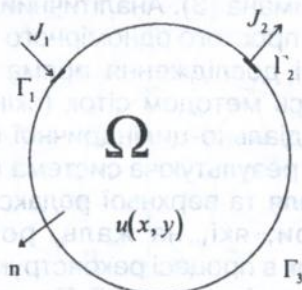


Рис. 2. Модель неоднорідного провідного тіла

провідного тіла Ω (рис. 2), обмеженого границею Γ з розподілом питомої електричної провідності $\gamma(x, y)$, яке не має внутрішніх джерел струму. Підведений до поверхні тіла струм J спричиняє розподіл потенціалу $u(x, y)$ всередині тіла. Сумарний потік густини струму J через поверхню об'єкту є рівним нулю.

Струм, підведений до поверхні тіла через два електроди, прикладені в точках Γ_1 та Γ_2 , спричиняє розподіл потенціалу $u(x, y)$, що описується узагальненим рівнянням Максвелла

$$\nabla \cdot (\gamma(x, y) \nabla u(x, y)) = 0. \quad (2)$$

Умова рівності нулю потоку струму через поверхню тіла дозволяє сформулювати наступні граничні умови

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n} = +J_1 \quad \text{на вхідному електроді (частина контуру } \Gamma_1)$$

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} = -J_2 \quad \text{на вихідному електроді (частина контуру } \Gamma_2) \quad (3)$$

$$\int_{\Gamma_3} \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{на решті точок контуру (контур } \Gamma_3),$$

де n позначає одиничну зовнішню нормаль до поверхні тіла.

Приведено формулювання та математична постановка прямої та зворотної задачі резистивної томографії. Пряма задача полягає в знаходженні розподілу електричного потенціалу всередині та на поверхні об'єкту за заданими значеннями розподілу питомої електричної провідності всередині об'єкту та струму, підведеного до поверхні об'єкту. Пряма задача включає в себе розв'язання диференціального рівняння Лапласа (2) в частинних похідних з граничними умовами Неймана (3). Аналітичний розв'язок цієї задачі неможливий за винятком простого одномірного випадку.

На початковому етапі дослідження пряма задача резистивної томографії розв'язувалась методом сіток (скінченних різниць) для правильної двомірної радіально-циліндричної сітки з розбиттям на $60 \cdot 64 = 3840$ елементів, а результуюча система лінійних алгебраїчних рівнянь методами Зейделя та верхньої релаксації по лініях. Проте, виявилися два фактори, які, на жаль, роблять недоцільним використання методу сіток в процесі реконструкції, тобто при рішенні зворотної задачі резистивної томографії. По-перше, проблематично вибрати вдалу економічну сітку. Правильна радіально-циліндрична сітка є значно згущеною всередині перерізу об'єкту і розрідженою на його поверхні і, як наслідок, забезпечує вищу точність різницевої схеми в центральній частині перерізу, в той час як більш важливою є точність в приграничній області. Крім того ця сітка призводить до значної різниці площ елементів на поверхні і в центрі перерізу. По-друге, ще раз підтвердився відомий факт, що метод скінченних різниць погано пристосований для розв'язку задач з неоднорідним або анізотропним розподілом параметрів. Так, для всіх протестованих сіток виявилось, що, коли провідність у двох сусідніх елементах відрізняється більше ніж у 5 разів, різницева схема, а отже й ітераційний процес, розходяться.

Тому надалі було використано метод скінченних елементів для розв'язання рівняння (2) з граничними умовами (3). Для цього площинний переріз об'єкту розбито на 104 трикутні елементи як показано на рис. 3. Для методу скінченних елементів наведена варіаційна постановка задачі та кусково-лінійні базові функції на трикутних елементах.

Матриця результуючої системи лінійних рівнянь є симетричною та позитивно визначеною. Цей факт дозволяє її розклад на множники вигляду $A = L \cdot L^T$ методом Холеського, де L - нижня трикутна матриця.

Перевагами розкладу Холеського є чисельна стійкість та найвища серед різних способів розкладу матриць швидкодія, він вимагає виконання лише $n^3/6$ операцій множення та ділення.

Для коректного розв'язання прямої задачі проведена оцінка точності

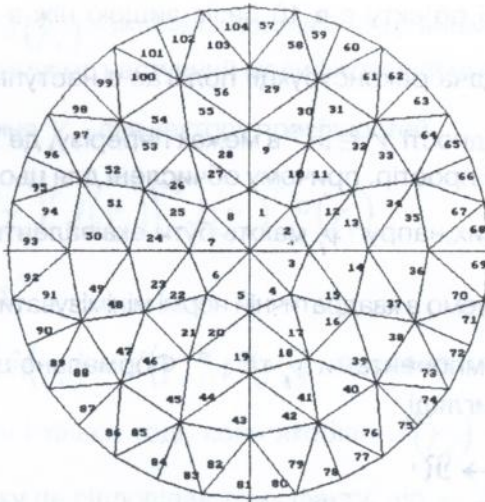


Рис. 3. Розбиття перерізу на 104 трикутні елементи

моделювання розподілу електричного потенціалу методом скінченних елементів за принципом Рунге. Показано, що для мінімального числа 104-х елементів похибка моделювання на різних контурах рисунку 3 є різною, вона зростає від середини до краю перерізу. Для зменшення цієї похибки побудовані ще три сітки з більшою кількістю елементів і порівнювались значення електричного потенціалу в спільних вузлових точках. Для кількості елементів 640 забезпечена похибка моделювання в межах 1%, що цілком достатньо.

Наведені результати моделювання розподілу електричного потенціалу в графічному та числовому вигляді.

У третьому розділі розроблений математичний апарат реконструкції питомої електричної провідності за вимірними на поверхні об'єкту значеннями різниць потенціалів.

На основі дослідження математичної моделі неоднорідного провідного тіла показано, що задача реконструкції провідності з поверхневих даних струму та напруги є фізично дуже погано обумовленою. Причиною цього явища є те, що великі зміни питомої електричної провідності в перерізі об'єкту можуть привести до зовсім незначних змін електричного потенціалу на поверхні перерізу. І, що найгірше, справедливе і зворотне твердження, а саме, незначні зміни у вхідних даних алгоритму реконструкції, спричинені похибками вимірювання струму та напруги на поверхні об'єкту та похибками в наближених математичних обчисленнях, можуть привести до великих неконтрольованих похибок в реконструйованому розподілі провідності. Крім того, дослідження моделі показали, що чутливість значень електричних потенціалів на поверхні до зміни провідності елементів в

приграничному шарі об'єкту ϵ в 10 разів вищою ніж в центральній області.

Математично задача реконструкції полягає в наступному: знайти такий розподіл провідності $\gamma \in \mathbb{R}^n$ в межах перерізу, де \mathbb{R}^n позначає n -мірний евклідовий простір, причому обчислені для цього розподілу значення поверхневих напруг v_i мають бути еквівалентні виміряним v_i^m . Для цього спробуємо в квадратичній нормі мінімізувати суму різниць між відповідними компонентами v_i та v_i^m . Формально це може бути записати у такому вигляді

дано $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{знайти } \min_{\gamma \in \mathbb{R}^n} f(\gamma) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (v_i(\gamma) - v_i^m)^2, \quad (4)$$

де "1/2" додано виходячи із зручності подальших викладок. Позначимо також для зручності $v_i(\gamma) - v_i^m$ через $f_i(\gamma)$, яка в свою чергу є i -тою компонентою вектор-функції $F(\gamma) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тоді задача (4) може бути записана у векторній формі

$$\min_{\gamma \in \mathbb{R}^n} f(\gamma) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (f_i(\gamma))^2 = \frac{1}{2} F(\gamma)^T F(\gamma). \quad (5)$$

Для розв'язання використано квазіньютонівський метод Левенберга-

Марквардта. На кожній ітерації для функції $f(\gamma) = \frac{1}{2} F(\gamma)^T F(\gamma)$ будувалась наступну квадратичну модель

$$\begin{aligned} \hat{m}_c(\gamma_c + s) &= \\ &= \frac{1}{2} F(\gamma_c)^T F(\gamma_c) + \left(J(\gamma_c)^T F(\gamma_c) \right)^T + \frac{1}{2} s^T \left(J(\gamma_c)^T J(\gamma_c) \right) s, \quad (6) \end{aligned}$$

де s - довільний ненульовий приріст, γ_c - поточне значення вектору

провідностей, $J(\gamma_c)$ - якобіан в поточній точці. Мінімізуючи квадратичну модель (6) отримуємо наступний модифікований ньютонівський крок та нове наближення γ_+ для вектору провідностей

$$s^N = -\left(J(\gamma_c)^T J(\gamma_c)\right)^{-1} J(\gamma_c)^T F(\gamma_c) \quad (7)$$

$$\gamma_+ = \gamma_c + s^N. \quad (8)$$

Так як $\nabla^2 \hat{m}(\gamma_c) = J(\gamma_c)^T J(\gamma_c)$, то дана модель позитивно визначена тоді і тільки тоді, коли якобіан $J(\gamma_c)$ не вироджений. В даному випадку це відповідає тому факту, що $\gamma_c + s^N$ є єдина точка мінімуму для $\hat{m}_c(\gamma)$.

Оскільки функція F не задана аналітично, а сама є результатом обчислювальної процедури, то якобіан в даному випадку буде шукається на кожній ітерації по скінченно-різницевиx апроксимаціях по різниці вперед. При цьому j -й стовбець апроксимувався по формулі

$$(A_k)_{\cdot j} = \frac{F(\gamma_k + h_k e_j) - F(\gamma_k)}{h_k}, \quad j = 1, \dots, n \quad (9)$$

де e_j позначає j -ий одиничний вектор і $h_k \approx 10^{-5} \div 10^{-7}$.

Ускладнення наведеної вище ітераційної схеми виникає, коли внаслідок поганої обумовленості задачі якобіан моделі $J(\gamma_c)$ майже вироджений в поточній точці γ_c . В цьому випадку буде неможливо обчислити модифікований ньютонівський крок

$$s^N = -\left(J(\gamma_c)^T J(\gamma_c)\right)^{-1} J(\gamma_c)^T F(\gamma_c),$$
 оскільки гессіан моделі

$J(\gamma_c)^T J(\gamma_c)$ буде теж майже виродженим.

Для виявлення цієї ситуації застосовано метод оцінки числа обумовленості матриць. Якщо якобіан моделі є виродженим або число його обумовленості більше, ніж $(\text{masheps})^{-1/2}$, де mahseps позначає

машинне епсилон для заданого формату чисел з плаваючою комою, то квадратична модель (5) збурювалась так, що

$$\hat{m}_c(\gamma_c + s) = \frac{1}{2} F(\gamma_c)^T F(\gamma_c) + \left(J(\gamma_c)^T F(\gamma_c) \right)^T s + \frac{1}{2} s^T H(\gamma_c) s \quad (10)$$

де $H(\gamma_c)$ позначає гессіан моделі,

$$H(\gamma_c) = J(\gamma_c)^T J(\gamma_c) + (n \cdot \text{masheps})^{1/2} \left\| J(\gamma_c)^T J(\gamma_c) \right\|_1 \cdot I$$

де I — одинична діагональна матриця, а множник перед I — параметр регуляризації, і далі шукався ньютонівський крок в точку мінімуму цієї збуреної моделі за формулою

$$s^N = -H(\gamma_c)^{-1} \cdot J(\gamma_c)^T F(\gamma_c) \quad (11)$$

Для використаного 80-бітного формату long double чисел з плаваючою комою masheps приблизно дорівнює 10^{-19} . Дослідження моделі показали, що число обумовленості якобіану моделі, як правило, більше 10^9 , а число обумовленості незбуреного гессіану порядку 10^{17} .

Збурення моделі покращує її обумовленість, проте може навіть суттєво погіршити здатність моделі апроксимувати реальну задачу. Звідси робимо висновок про доцільність такого мінімального збурення, яке б робило модель надійно добре обумовленою, проте не більше ніж це потрібно. Саме цю властивість має використана методика збурення квадратичної моделі (5), оскільки доведено, що число обумовленості таким чином модифікованої матриці є величина порядку $(\text{masheps})^{-1/2}$.

Тестування розробленого методу показало, що число обумовленості таким чином збуреного гессіану ніколи не перевищує 10^9 , тобто він справді є добре обумовленим і гарантовано позитивно визначеним. Тоді для отримання кроку в напрямі нового наближення розв'язуємо лінійну систему (11) шляхом розкладу Холеського і подальшою зворотною підстановкою.

Проаналізовано швидкодію ітераційного процесу. Зазначено, що, на жаль, метод є повільним і на звичайних персональних ком'ютерах не може бути використаним для реконструкції провідності в реальному масштабі часу. Одною з альтернатив в цій ситуації є брати лише одну ітерацію квазіньютонівського алгоритму. Це має ту очевидну перевагу, що апроксимація якобіану моделі при заданому початковому наближенні може бути обчислена наперед і зберігатися у дисковому файлі. Більше

того, матричне перемноження $J(\gamma_c)^T J(\gamma_c)$, регуляризація цієї матриці згідно із запропонованою методикою, її розклад Холеського, а також

перемноження на $J(\gamma_c)^T$, тобто три перші тривалі математичні операції в знаходженні модифікованого ньютонівського кроку (7) можуть теж бути

виконаними заздалегідь і збережені у файлі.

Позначимо отриману в результаті цього реконструкційну матрицю через $R = -(J(\gamma_c)^T J(\gamma_c))^{-1} J(\gamma_c)^T$. Тоді знаходження кроку в напрямі

нового наближення будемо шукати за формулою

$$s^1 = -R \cdot (F(\gamma^{(0)}) - V^M) \quad (12)$$

де $F(\gamma^{(0)})$ - вектор наперед обчислених значень різниць поверхневих напруг при заданому початковому наближенні провідності $\gamma^{(0)}$. Ця операція перемноження матриці на вектор вимагає виконання лише n^2 операцій множення і стільки ж додавання. Очевидно, що платою за це є втрата точності реконструкції, важливішою, проте, тут є здатність алгоритму вже на першій ітерації відслідковувати тенденцію зміни провідності в порівнянні з однорідним розподілом, який, як правило, задається в ролі початкового наближення.

Наведені ситуації, коли використання лише одного кроку квазіньютонівського алгоритму є оправданим.

У четвертому розділі наведені результати реконструкції розподілу питомої електричної провідності з допомогою розроблених алгоритмів. Для цього використано три тестові моделі з різними розподілами провідності та різними початковими наближеннями. На рис. 4 наведений результат реконструкції розподілу провідності для випадку, коли на всіх

#_max=53 max_value=4.861
#_min=55 min_value=2.913

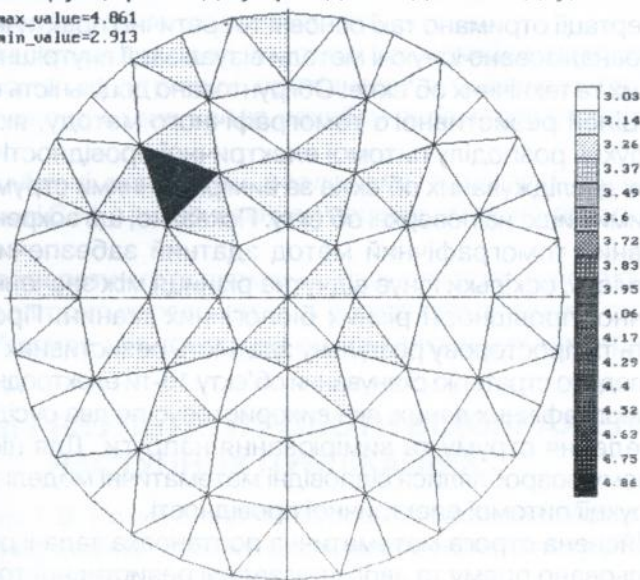


Рис. 4. Результат реконструкції провідності

елементах провідність була заданою 3 См/м за винятком 53-го елемента, на якому вона рівна 5 См/м. Початкове наближення приймалось рівним 1 См/м.

Проаналізовані джерела та природа похибки реконструкції та вплив на цю похибку проведеної регуляризації гессіану моделі.

На кожній ітерації оцінювались середня за модулем та максимальна на елементі похибки реконструкції провідності за формулами:

$$\delta_{\max} = \max_{1 \leq i < n} \left| \frac{\gamma_i^r - \gamma_i^{(s)}}{\gamma_i^r} \right| \cdot 100\% \quad (13)$$

$$\delta_{avr} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\gamma_i^r - \gamma_i^{(s)}}{\gamma_i^r} \right| \cdot 100\%, \quad (14)$$

де γ_i^r позначає дійсне значення провідності на i -тому елементі, а $\gamma_i^{(s)}$ - значення провідності на елементі на s -ій ітерації. Для розподілу на рис. 4 середня похибка рівна 1%, а максимальна — 4%.

Досліджено стійкість та швидкість збіжності ітераційного процесу. Як правило, для досягнення достовірного розв'язку цілком достатньо 10-15 ітерацій.

ВИСНОВКИ ПО РОБОТІ.

В дисертації отримано такі основні теоретичні і практичні результати:

1. Проаналізовано існуючі методи візуалізації внутрішньої структури біологічних та технічних об'єктів. Обґрунтовано доцільність використання для цих цілей резистивного томографічного методу, який полягає в реконструкції розподілу питомої електричної провідності в площинних перерізах досліджуваних об'єктів за вимірюваннями струму та напруги, зробленими лише на поверхні об'єкту. Показано, що зокрема в медицині резистивний томографічний метод здатний забезпечити достатню контрастність, оскільки існує відчутна різниця між значеннями питомої електричної провідності різних біологічних тканин. Проаналізовано чутливість та просторову роздільну здатність резистивних томографів.

2. Наведено стратегію сканування об'єкту 16-ти електродною системою збору томографічних даних, яка використовує по два сусідні електроди для підведення струму та вимірювання напруги. Для цієї стратегії в подальшому розроблялися відповідні математичні моделі та алгоритми реконструкції питомої електричної провідності.

3. Здійснена строга математична постановка задачі реконструкції. Сформульовано пряму та зворотну задачі резистивної томографії, що дало можливість в подальшому розробити ефективні алгоритми їх розв'язку.

4. Розроблено модель неоднорідного провідного тіла без внутрішніх джерел струму. Розрахунок розподілу електричного потенціалу в площинних перерізах моделі проводився методами скінченних різниць та скінченних елементів. Показано, що метод скінченних різниць є непридатним для даної задачі. Для методу скінченних елементів сконструйовано три сітки з різною мірою згущення та спільними вузловими точками. Проаналізовано точність моделювання розподілу електричного потенціалу з їх використанням, необхідний обсяг оперативної пам'яті та швидкодію. Зокрема при розбитті перерізу на 640 елементів досягнена похибка моделювання в межах 1%.

5. На підставі дослідження розробленої моделі неоднорідного провідного тіла показано, що задача реконструкції питомої електричної провідності є фізично дуже погано обумовленою, що унеможлиблює застосування типових методів розв'язку.

6. Створено кількісний алгоритм реконструкції розподілу питомої провідності в площинних перерізах провідних об'єктів на основі розв'язання задачі безумовної мінімізації квадратичного функціоналу квазіньютонівським ітераційним методом типу Левенберга-Марквардта. Дослідження алгоритму показали, що гессіан задачі на кожній ітерації близький до виродження, що робить неможливим знаходження надійного розв'язку. Використано та адаптовано до потреб даної задачі методику регуляризації гессіану задачі на основі оцінки його числа обумовленості. Запропоновано методику внесення в гессіан такого мінімального збурення, при якому він вже є достатньо добре обумовленим і забезпечується належна швидкість збіжності.

7. Проаналізовано джерела та природу похибки реконструкції розподілу питомої електричної провідності в перерізах провідних об'єктів. Досліджено вплив на цю похибку параметру регуляризації гессіану моделі.

8. Всі розроблені алгоритми реалізовані в вигляді програм на алгоритмічній мові C++ з використанням переваг об'єктно-орієнтованого програмування.

9. Створено теоретичну та практичну базу для подальшого розвитку та дослідження алгоритмів реконструкції провідності при інших стратегіях сканування об'єкту та для конструювання резистивних томографічних систем.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ ВІДОБРАЖЕНІ В НАСТУПНИХ ПУБЛІКАЦІЯХ:

1. Дудикевич Т.В. Резистивна томографія в медицині. Автоматика, вимірювання та керування. //Вісник Державного університету „Львівська політехніка“ № 283, 1994, ст. 16-21.

2. Дудикевич Т.В. Моделювання розподілу електричного потенціалу в середині біологічних об'єктів при резистивних томографічних

вимірюваннях. //Вимірювальна техніка та метрологія. Міжвідомчий науково-технічний збірник, Львів, 1995, ст. 60-62.

3. Дудикевич Т.В. Метод зворотного проектування для моніторингу процесів у реальному часі в електричній імпедансній томографії. // Автоматика, вимірювання та керування. Вісник Державного університету „Львівська політехніка“ № 305, 1996, ст. 108-110.

4. Дудикевич Т.В. Математичні аспекти резистивної томографії. // Збірник праць 2-ї Всеукраїнської конференції молодих вчених. Математика. 16-18 травня 1995р. Депоновано 04.09.1995, №2034, УК95, ст. 161-166.

5. Дудикевич Т.В., Дудикевич А.Т. Моделювання розподілу електричного потенціалу всередині біологічних об'єктів при резистивних томографічних вимірюваннях. //Тези доповідей 6-тої Української конференції „Моделювання та дослідження стійкості систем“, 15-19 травня 1995, Київ, ст. 41.

6. The Measurement System for the Temperature Field in Gaseous Enviroment. M.Dorozovets, T.Dudykevich, A.Kuzii, B.Stadnyk. //5th International Symposium on Temperature and Thermal Measurement in Industry and Science Tempmeko'93, Prague, 1994.

АНОТАЦІЯ

Дудикевич Т.В. Реконструкція розподілу питомої електричної провідності для технічних та біомедичних вимірювальних систем. Рукопис дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.11.05 - прилади та методи вимірювання електричних та магнітних величин, Державний університет “Львівська політехніка”, Львів, 1997.

В дисертаційній роботі розроблені теоретичні основи побудови резистивних томографічних систем. Побудована модель площинного перерізу неоднорідного провідного тіла без внутрішніх джерел струму та з підведеним до поверхні перерізу струмом. Для визначення розподілу електричного потенціалу в перерізі використано метод скінченних елементів. Реконструкція розподілу питомої електричної провідності в перерізі об'єкту визначалась шляхом розв'язання задачі безумовної мінімізації квадратичного функціоналу квазіньютонівським регуляризованим методом Левенберга-Марквардта. Досліджені похибки реконструкції розподілу провідності. Розроблені алгоритми реалізовані в комплексі програмних засобів. Вироблені рекомендації по проектуванню резистивних томографічних систем.

Ключові слова: резистивна томографія, вимірювальні системи, математичне моделювання, провідне тіло, безумовна оптимізація, реконструкція провідності, медична діагностика, похибка реконструкції.

АННОТАЦИЯ

Дудыкевич Т.В. Реконструкция распределения удельной электрической проводимости для технических и биомедицинских измерительных систем. Рукопись диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.11.05 - приборы и методы измерения электрических и магнитных величин, Государственный университет "Львівська політехніка", Львов, 1997.

В диссертационной работе разработаны теоретические основы построения резистивных томографических систем. Построена модель плоскостного сечения неоднородного проводящего тела без внутренних источников тока с подведенным к поверхности сечения током. Для определения распределения электрического потенциала применен метод конечных элементов. Распределение удельной электрической проводимости в сечении объекта определялось решением задачи безусловной оптимизации квадратичного функционала квазиньютоновским регуляризированным методом Левенберга-Марквардта. Исследована погрешность реконструкции проводимости. Разработанные алгоритмы реализованы в комплексе программных средств. Выработаны рекомендации по проектированию резистивных томографических систем.

Ключевые слова: резистивная томография, измерительные системы, математическое моделирование, проводящее тело, безусловная оптимизация, реконструкция проводимости, медицинская диагностика, погрешности реконструкции.

ABSTRACT

Dudykevych T.V. Reconstruction of Distribution of Electrical Conductivity for Technical and Biomedical Measuring Systems. Manuscript of dissertation for the title of Candidate of Technical Sciences obtaining in the speciality 05.11.05 - devices and technics of measurements of electrical and magnetic magnitudes. Lviv State Polytechnical University, Lviv, 1997.

Theoretical backgrounds of electrical impedance tomography systems building are developed in the dissertation. A model of plane cross section of non-uniform conductive object without internal sources of current and with external sources of current, attached to the cross section boundary is built. For distribution of electrical potential determination the method of finite elements used. Distribution of electrical conductivity on the cross section is determined as a solution of the problem of unconstrained optimization by quasi-Newton regularised Levenberg-Marquardt method. There has been analyzed conductivity reconstruction error. The developed algorithms were programmed and software package obtained. Recommendations for design of electrical impedance tomography systems were produced.

Key words: electrical impedance tomography, measurement systems, mathematical method, conductive object, unconstrained optimization, conductivity reconstruction, medical diagnostic, reconstruction errors.

436481

T.A

AB 37.863

ABSTRACT

Гідписано до друку 21.05.97р. Формат 60x84/16.

Обсяг 1 друк. арк. Зам. № 0038. Тир. 100.

Львів. Видавничий дім «СОВА»