Чернівецький державний університет
ім. Ю.Федьковича

На правах рукопису

УДК 517.956.4

Дрінь Роман Ярославович

ДОСЛІДЖЕННЯ ЯКІСНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ РОЗВ'ЯЗКІВ ПАРАБОЛІЧНИХ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З НЕГЛАДКИМИ СИМВОЛАМИ

01.01.02 – диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Чернівці – 1997

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі крайових задач для рівнянь з частинними похідними (м. Чернівці) Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України.

Наукові керівники: доктор фіз.-мат.-наук, професор
Ейдельман Самуїл Давидович;

доктор фіз.-мат.-наук, професор
Івасишен Степан Дмитрович

Офіційні опоненти: доктор фіз.-мат.-наук, професор
Житарашу Микола Васильович;

кандидат фіз.-мат.-наук, доцент
Свердан Михайло Леонович

Провідна організація - Інститут математики НАН України

Захист відбудеться "27" червня 1997 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 07.01.04 в Чернівецькому державному університеті за адресою: 274012, Чернівці-12, вул. Університетська, 28, математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Чернівецького державного університету за адресою: м. Чернівці, вул. Л. Українки, 23.

Автореферат розіслано "18" травня 1997 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради А.М.Садов'як

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

АКТУАЛЬНІСТЬ ТЕМИ. Теорія псевдодиференціальних операторів (ПДО), яка в сучасній формі була створена в середині шістдесятих років, є предметом багатьох досліджень. Їх число значно збільшилося після того, як виявилося, що ПДО тісно зв'язані з трудними і важливими задачами аналізу і математичної фізики. Так, наприклад, ПДО особливо важливі в теорії еліптичних крайових задач і мікролокальному аналізі. На даний час досить широко розвинена теорія ПДО і псевдодиференціальних рівнянь (ПДР), яка викладена у всесвітньо відомих монографіях М.О.Шубіна, М.Тейлора, Ф.Трева і Л.Хермандера.

Серед нових рзділів цієї теорії заслуговує особливої уваги теорія ПДР з негладкими символами. Такі рівняння мають важливі застосування в теорії випдкових процесів. Теорія ПДО з негладкими символами тісно зв'язана з сучасною теорією фракталів, яка останнім часом бурхливо розвивається.

Лінійні параболічні псевдодиференціальні рівняння (ППДР) з негладкими символами були визначені С.Д.Ейдельманом і Я.М.Дрінем на початку сімдесятих років. Ними будувався і досліджувався фундаментальний розв'язок (ФР) задачі Коші для таких рівнянь. Зауважимо, що при цьому оцінки функції з оцінок ФР є степеневими, а не експоненціальними як для диференціальних рівнянь. Це підтвердив М.В.Федорюк, який знайшов точну асимптотику при $|x|\to\infty$ ФР задачі Коші для ППДР з сталим однорідним символом.

Важливу роль у дальшому рзвитку теорії ППДР з негладкими символами відіграли праці А.Н.Кочубея в яких він уперше звернув увагу на те, що ПДО з негладкими символами можуть трактуватись як гіперсингулярні інтегральні оператори (ГСІО). Це дало можливість при дослідженні задачі Коші для таких рівнянь використати добре розвинену теорію ГСІО. На цьому шляху А.Н.Кочубею вдалося побудувати і вивчити ФР задачі Коші, довести теореми про розв'язність задачі Коші, вказати на цікаві зв'язки одержаних результатів з теорією випадкових процесів.

В якісній теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними істотну роль відіграють методи, в основі яких лежить побудова спеціальних класів пробних функцій (суб- і суперрозв'язків, бар'єрів). Найглибші результати одержані цими методами в теорії еліптичних та параболічних рівнянь другого порядку, для розв'язків яких виконується принцип максимуму. Для рівнянь і систем рівнянь довільного порядку, для розв'язків яких не виконується принцип максимуму, техніка побудови і дослідження потрібних класів пробних функцій вимагає істотної модифікації. Дослідженням у цьому напрямку присвячені праці В.О.Кондратьєва та С.Д.Ейдельмана, в яких міститься різноманітна інформація про властивості невід'ємних розв'язків рівнянь і систем рівнянь будь-якого порядку і певної структури.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню якісних властивостей розв'язків ППДР та систем таких рівнянь.

МЕТА РОБОТИ. Метою роботи є поширення на окремі класи ППДР і систем ППДР (СППДР) з негладкими символами результатів якісної теорії параболічних рівнянь і систем рівнянь з частинними похідними. Зокрема, це розвиток і застосування вищезгаданого методу пробних функцій, одержання точних оцінок і, дуже бажано, асимптотики ФР задачі Коші, дослідження поведінки розв'язків при великих значеннях часової змінної (стабілізація і стійкість за Ляпуновим розв'язків, теореми типу Ліувілля).

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ. У дисертації використовуються методи перетворення Фур'є, теорії спеціальних функцій (зокрема вироджених гіпергеометричних функцій, функцій похибок), теорії ГСІО та теорії параболічних диференціальних рівнянь і систем рівнянь.

Для одержання оцінок для довільних $t>0$ ФР задачі Коші для СППДР використовується методика, розроблена в скалярному випадку А.Н.Кочубеєм. При описанні множини значень ПДО, визначених на класах припустимих пробних функцій, розроблена спеціальна методика, яка істотно модифікує відому для диференціальних рівнянь методику В.О.Кондратьєва і С.Д.Ейдельмана. Теореми про стабілізацію розв'язків задачі Коші для СППДР і деяких ППДР доводяться за допомогою модифікації методики, розробленої в диференціальному випадку С.Д.Ейдельманом, В.Д.Репніковим, Ф.О.Порпером, І.М.Валицьким.

НАУКОВА НОВИЗНА РОБОТИ. Вона полягає в:

- одержанні асимптотичного зображення при фіксованому $t>0$ і $|x|\to\infty$ ФР задачі Коші для рівняння дифузії з псевдодиференціальним доданком, побудованим за символом $|\sigma|$, $\sigma\in\mathbb{R}^n$, для випадку, коли $n=1,3$;
- описанні множини значень ПДО з негладкими однорідними симво-

лами порядку $\gamma\in(0,2)$;

- доведенні теореми про єдиність невід'ємних слабких розв'язків задачі Коші для рівняння дифузії з псевдодиференціальними доданками, побудованими за символами $|\sigma|^{\gamma_k}$, $\sigma\in\mathbb{R}^n$, $\gamma_k\in(0,2)$, $(k=1,\dots,m)$;

- виведенні точних оцінок у півпросторі $\Pi\equiv\{(t,x)\,|\,t>0,\ x\in\mathbb{R}^n\}$ фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші та її похідних для СПДР з сталим однорідним символом;

- знаходженні достатніх умов рівномірної на кожному компакті і рівномірної в усьому просторі $\mathbb{R}^n$ стабілізації розв'язків задачі Коші для СПДР з сталим однорідним символом;

- встановленні необхідних та достатніх умов точкової стабілізації розв'язків задачі Коші для одного ПДР з символом порядку $\gamma=1$ і невід'ємних розв'язків у випадку, коли порядок символа $\gamma\in(0,2)$ і число просторових змінних $n>1$;

- доведенні теореми про L_r-стійкість за Ляпуновим ($1\leqslant r\leqslant\infty$) тривіального розв'язку задачі Коші, а також теореми типу Ліувілля для розв'язків СПДР з сталим однорідним символом;

- одержанні формули та оцінок для ядра Пуассона крайової задачі в півпросторі по просторових змінних, у рівняння і крайову умову якої входять диференціювання по нормальній змінній та ПДО по дотичних змінних.

ТЕОРЕТИЧНА І ПРАКТИЧНА ЦІННІСТЬ РОБОТИ. Дисертація має теоретичний характер. Результати та розвинена в роботі методика можуть знайти застосування при дослідженні властивостей розв'язків і коректної розв'язності задачі Коші та крайових задач для лінійних і квазілінійних параболічних псевдодиференціальних рівнянь, у теорії випадкових процесів, у фізиці фрактальних середовищ.

НА ЗАХИСТ ВИНОСИТЬСЯ:

- теорема про асимптотичне зображення ФР задачі Коші для рівняння дифузії з псевдодиференціальним доданком;

- теорема про опис множини значень ПДО з негладкими однорідними символами порядку $\gamma\in(0,2)$, визначених на класах припустимих пробних функцій типу бар'єрних функцій;

- теорема про єдиність невід'ємного слабкого розв'язку задачі Коші для рівняння дифузії з псевдодиференціальними доданками;

- оцінки в півпросторі Π фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші та її похідних для СПДР з сталим однорідним символом;

- теореми про рівномірну на кожному компакті і рівномірну в усьому просторі $\mathbb{R}^n$ стабілізації розв'язків задачі Коші для СПДР з сталим однорідним символом;

– необхідні та достатні умови точкової стабілізації розв'язків задачі Коші для одного ПДР з символом порядку $\gamma=1$ і невід'ємних розв'язків у випадку, коли порядок символа $\gamma\in(1,2)$ і $n>1$;

– теорема про L_r-стійкість за Ляпуновим $(1\leqslant r\leqslant\infty)$ тривіального розв'язку задачі Коші і теорема типу Ліувілля для розв'язків СПДР з сталим однорідним символом;

– формула та оцінки для ядра Пуассона крайової задачі в півпросторі по просторових змінних, у рівняння і крайову умову якої входять диференціювання по нормальній змінній та ПДО по дотичних змінних.

Усі результати, що виносяться на захист, належать авторові.

АПРОБАЦІЯ РОБОТИ. Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на: науковому семінарі Чернівецького відділу Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України (керівник – доктор фіз.-мат. наук, професор Івасишен С.Д., 1994-1996 рр.); науковому семінарі математичного факультету Чернівецького державного університету ім. Ю.Федьковича (1996р.); Львівському міському науковому семінарі з диференціальних рівнянь (1996р.); Міжнародній математичній конференції, присвяченій пам'яті Ганса Гана (Чернівці, 1994 р.); Всеукраїнській науковій конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (Дрогобич, 1994 р.); Всеукраїнській конференції "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування" (Чернівці, 1996 р.); науковій конференції "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ, 1996 р.).

ПУБЛІКАЦІЇ. Основні результати дисертації опубліковані в 8 роботах, список яких подано в кінці автореферату. У спільних працях С.Д.Ейдельману належить постановка задачі та основні ідеї їх розв'язання.

СТРУКТУРА ТА ОБСЯГ РОБОТИ. Дисертація складається із вступу, списку використаних основних позначень і скорочень, трьох розділів, додатка і списку літератури. В кінці дисертації коротко наведені основні результати і висновки. Перший розділ містить три параграфи, другий і третій – по два. Повний обсяг роботи складає 137 сторінок. Список літератури містить 85 назв.

ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У вступі обгрунтовується актуальність теми дослідження, визначається мета дисертації, дається стислий огляд літератури по темі дисертації та коротко викладається зміст роботи.

Список основних позначень і скорочень містить ті позначення і скорочення, які є загальними для всієї дисертації.

У першому розділі дисертаційної роботи (§ 1-3) описуються класи рівнянь і систем рівнянь, які розглядаються в роботі, та наводяться результати, що стосуються ФР задачі Коші для таких класів рівнянь.

У § 1 наводиться означення матричних ГСІО і ПДО та доводиться, що ГСІО є продовженням ПДО з вузького класу на ширший клас функцій. Нехай $\Pi_T=\{(t,x)\,|\,t\in(0,T],\ x\in\mathbb{R}^n\}$, $\mathbb{K}_{r,s}$ - сукупність усіх матриць M розміру $r\times s$, елементами яких є дійсні числа, $|M|$ - норма матриці M, $[\gamma]$ - ціла частина числа γ, E - одинична матриця.

Об'єктом дослідження в дисертаційній роботі (який описаний у п.1.1) є розв'язки ППДР та СППДР з негладкими символами вигляду

$$\partial_t u(t,x) + (A_0 u)(t,x) + \sum_{k=1}^{m} (A_k u)(t,x)=0, \quad (t,x)\in\Pi_T, \qquad (1)$$

де A_k - матричний ПДО з символом $a_k : [0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{K}_{pp}$, $0\leqslant k\leqslant m$. Для одного рівняння $p=1$ і $\mathbb{K}_{11}=\mathbb{R}$.

Припускаються виконаними такі умови:

a_1) елементи матриць $a_k(t,\sigma)$, $t\in[0,T]$, $\sigma\in\mathbb{R}^n$, $0\leqslant k\leqslant m$, є неперервними, а також однорідними по σ порядку γ_k функціями, де числа γ_k такі, що $\gamma_k\geqslant 1$, $0\leqslant k\leqslant m$, причому $\gamma_1<\gamma_2<\ldots<\gamma_m<\gamma_0$;

a_2) система (1) рівномірно параболічна на $[0,T]$, тобто μ-корені многочлена $det(a_0(t,\sigma)+\mu E)$ задовольняють нерівність

$$Re\ \mu(t,\sigma)\leqslant-\delta|\sigma|^{\gamma_0}$$

для всіх $t\in[0,T]$ і $\sigma\in\mathbb{R}^n$ з деякою сталою $\delta>0$;

a_3) елементи матриць $a_k(t,\sigma)$, $t\in[0,T]$, $\sigma\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $0\leqslant k\leqslant m$, мають $N\geqslant 2n+2[\gamma_k]+1$ неперервних похідних по σ, для яких правильні оцінки

$$|\partial_\sigma^{\varkappa} a_k(t,\sigma)|\leqslant C_N|\sigma|^{\gamma_k-|\varkappa|},\quad |\varkappa|\leqslant N,\ t\in[0,T],\ \sigma\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}.$$

Зазначимо, що символи можуть бути негладкими при $\sigma=0$, тому при дослідженні розв'язків системи (1), взагалі кажучи, не можна застосувати стандартне числення ПДО, як це робилося для ПДР з гладкими символами. Перші результати про розв'язність задачі Коші для одного рівняння (1) були одержані С.Д.Ейдельманом і Я.М.Дріном. Однак повністю коректні, а в деяких випадках і остаточні, результати були одержані для одного рівняння А.Н.Кочубеєм, де вперше ПДО трактуються як ГСІО. У дисертаційній роботі ми дотримуємось такого ж трактування. При цьому символи ПДО, як правило, залежать лише від σ або лише від σ і часової змінної t.

Нехай γ-неціле додатне число, функції $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{K}_{p1}$ і $\Omega:[0,\infty)\times S^{n-1}\to\mathbb{K}_{pp}$ є неперервними і обмеженими, причому функція f має обмежені похідні до порядку $[\gamma]+1$. Вираз вигляду

$$(D_\Omega^\gamma f)(t,x)\equiv d^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}\Omega(t,h')(\Delta_h^l f)(x)|h|^{-(n+\gamma)}dh,\quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^n, \qquad (2)$$

де $l>\gamma$, d - деяка стала, яка залежить від чисел n, l, γ, визначає матричний ГСІО порядку γ з характеристикою Ω.

Покладемо в (2)

$$d=d_{n,l}(\gamma)\equiv\int_{\mathbb{R}^n}(1-e^{-i\sigma_1})^l|\sigma|^{-(n+\gamma)}d\sigma,\quad \sigma_1\equiv(\vec{e}_1,\sigma),\ \vec{e}_1\equiv(1,0,\ldots,0).$$

Лема 1.1. Нехай D_E^γ - матричний ГСІО порядку $\gamma>0$ з сталою характеристикою $\Omega=E$, тоді інтеграл

$$(D_E^\gamma f)(x)=d^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}E(\Delta_y^l f)(x)|y|^{-(n+\gamma)}dy,\quad x\in\mathbb{R}^n,\ \gamma>0 \text{ - неціле},$$

є абсолютно збіжним при $l>\gamma$ за умови, що функція f має обмежені похідні до порядку $[\gamma]+1$ включно. Цей інтеграл не залежить від вибору $l>\gamma$. При цьому операція D_E^γ є продовженням ПДО

$$F^{-1}_{\sigma\to x}[E|\sigma|^\gamma F_{x\to\sigma}[f]],$$

яка цією формулою визначена на просторі $S(\mathbb{R}^n)$.

У п. 1.2 є зауваження щодо $\gamma=2b$ парного і γ цілого непарного, а також випадку, коли функція f належить до ширшого, ніж $S(\mathbb{R}^n)$, класу гладких функцій.

У п. 1.3 розглянуто випадок, коли $\gamma\in(0,2)$, де ГСІО трактується як збіжний за Коші невластивий інтеграл, для регуляризації якого використовується різниця першого порядку:

$$(D_E^{\gamma}f)(x) \equiv \frac{1}{d_n(\gamma)} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int\limits_{\{\varepsilon\leqslant|h|\leqslant R\}} E(\Delta_h f)(x)\,|h|^{-(n+\gamma)}dh,\ x\in\mathbb{R}^n, \quad (3)$$

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ – неперервно диференційовна функція,

$$d_n(\gamma) = \begin{cases} \dfrac{\pi^{(n-1)/2}\,\Gamma((1+\gamma)/2)\Gamma(2-\gamma)\cos\gamma(\pi/2)}{\Gamma((n+\gamma)/2)\gamma(1-\gamma)} & \text{при } \gamma\neq 1,\\[2ex] \dfrac{\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma((n+1)/2)} \text{ при } \gamma=1. \end{cases}$$

Такі ГСІО використовуються у розділі 2, де описується множина значень ПДО з символом $|\sigma|^{\gamma}$, $\sigma\in\mathbb{R}^n$, $\gamma\in(0,2)$, визначених на спеціально підібраних класах пробних функцій. Вигляд пробних функцій зумовлений вивченою в § 2 асимптотичною поведінкою ФР задачі Коші, яка узгоджується і їх точною степеневою оцінкою.

Пункт 1.4 містить необхідні відомості про сферичні функції з праць С.Г.Самка.

У § 2 розглядається ФР задачі Коші для ПДР, які містять ПДО з символами, не залежними від просторових змінних. У п. 2.1 дається означення ФР задачі Коші для таких рівнянь і наводиться приклад.

Розглянемо задачу Коші для скалярного рівняння (1)

$$\partial_t u(t,x) + (A_0 u)(t,x) + \sum_{k=1}^{m}(A_k u)(t,x) = 0,\ (t,x)\in\Pi_T, \quad (4)$$

$$u(t,x)\Big|_{t=0} = \varphi(x),\ x\in\mathbb{R}^n. \quad (5)$$

Нехай виконуються умови α_1–α_3. Умова α_2 означає, що існує стала $\delta>0$ така, що для всіх $t\in[0,T]$ і довільних $\sigma\in\mathbb{R}^n$ виконується нерівність

$$Re\ a_0(t,\sigma) \geqslant \delta|\sigma|^{\gamma_0}.$$

Означення 2.1. ФР задачі Коші (4)–(5) називається функція

$G(t,\tau,x)$, $0\leqslant\tau<t\leqslant T$, $x\in\mathbb{R}^n$, така, що інтеграл

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,\tau,x-\xi)\varphi(\xi)d\xi, \quad (t,x)\in\Pi_{(\tau,T]}\equiv(\tau,T]\times\mathbb{R}^n,$$

є розв'язком рівняння (4), який задовольняє умову

$$u(t,x)\Big|_{t=\tau}=\varphi(x), \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

для будь-якого $\tau\in[0,T)$ і довільної гладкої фінітної функції φ.

Приклад. Для рівняння

$$(\partial_t + A_1)u = 0,$$

де A_1 – ПДО з символом $|\sigma|$, $\sigma\in\mathbb{R}^n$, яка трактується як ГСІО вигляду (3), де $E\equiv1$, $\gamma=1$, ФР задачі Коші визначається формулою

$$G(t,x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}}\ \frac{t}{(t^2+|x|^2)^{(n+1)/2}}, \quad (t,x)\in\Pi\equiv(0,\infty)\times\mathbb{R}^n.$$

У п. 2.2 одержана формула для ФР задачі Коші (4), (5), а у п. 2.3 наводяться оцінки ФР задачі Коші, які доведені А.Н.Кочубеєм. Основним результатом § 2 є, отримане в п. 2.4, асимптотичне зображення ФР задачі Коші для рівняння дифузії з псевдодиференціальним доданком

$$\partial_t u(t,x)=a^2\Delta_x u(t,x)+bA_1u(t,x), \quad (t,x)\in\Pi_T, \quad \{a,b\}\in\mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{6}$$

Теорема 2.1. Для ФР задачі Коші для рівняння (6) при $n=1$ і $n=3$ правильні відповідно асимптотичні зображення

$$G_1(t,x,a,b) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\ exp\left\{\frac{b^2t^2-x^2}{4a^2t}\right\}\ 2cos\frac{bx}{2a^2} +$$

$$+\frac{bt}{\pi(b^2t^2+x^2)}+\frac{1}{a\sqrt{t}}\,O(|z|^{-3}), \tag{7}$$

$$G_3(t,x,a,b)=\frac{1}{8\pi^{3/2}a^3t^{3/2}}\ exp\left\{\frac{b^2t^2-|x|^2}{4a^2t}\right\}\ cos\frac{b|x|}{2a^2} +$$

$$+\frac{bt}{\pi^2(b^2t^2+|x|^2)^2}+\frac{1}{a^2t|x|}\,O(|z|^{-4}), \tag{8}$$

які виконуються при

$$|x|>|b|t>0,\ |z|=\frac{\sqrt{b^2t^2+|x|^2}}{2a\sqrt{t}}\to\infty.$$

Із зображень (7) і (8) випливають такі наслідки:

1) головними членами асимптотичних рівностей (7) та (8) при великих значеннях $|x|$ та фіксованому t є відповідно функції

$$\frac{bt}{\pi(b^2t^2+x^2)}\ \text{та}\ \frac{bt}{\pi^2(b^2t^2+|x|^2)^2};$$

2) при $b<0$ функція $G_n(t,x,a,b)$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}^n$, $n\in\{1,3\}$, не є знакосталою;

3) при $b>0$ функція $G_n(t,x,a,b)$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}^n$, додатна.

Отже, при взаємодії локального (дифузія) та глобального (ПДО) факторів асимптотична поведінка ФР задачі Коші визначається нелокальним доданком. Головним членом знайденої асимптотики визначається клас припустимих пробних функцій, які використовуються у розділі 2 при доведенні теореми про єдиність невід'ємних розв'язків задачі Коші.

У § 3 виведені точні степеневі оцінки у півпросторі П ФР G задачі Коші для СППДР типу (1)

$$\partial_t u(t,x)+(A_0u)(t,x)=0,\ (t,x)\in\Pi. \tag{9}$$

Теорема 3.1. Нехай символ a_0 ПДО A_0 не залежить від t і задовольняє умови α_1-α_3, де $N\geqslant 2n+2[\gamma_0]+1$. Тоді ФР G задачі Коші для системи (9) має похідні $D_x^{\varkappa}G$, $|\varkappa|\leqslant N-2n-[\gamma_0]$, і $\partial_t G$, для яких правильні оцінки

$$|D_x^{\varkappa}G(t,\tau,x)|\leqslant C_{\varkappa}(t-\tau)\Big[(t-\tau)^{1/\gamma_0}+|x|\Big]^{-(n+\gamma_0+|\varkappa|)},$$

$$t>\tau\geqslant 0,\ x\in\mathbb{R}^n,\ |\varkappa|\leqslant N-2n-[\gamma_0]; \tag{10}$$

$$|\partial_t G(t,\tau,x)|\leqslant C\Big[(t-\tau)^{1/\gamma_0}+|x|\Big]^{-(n+\gamma_0)},\ t>\tau\geqslant 0,\ x\in\mathbb{R}^n. \tag{11}$$

Доведення цієї теореми проводиться розповсюдженням міркувань з праці А.Н.Кочубея на випадок СППДР. Для випадку $n=1$ нерівності (10) і (11) доведені в скалярному випадку іншим способом у праці С.Д.Ейдельмана і Я.М.Дріня.

<u>Другий розділ</u> дисертації присвячений розвиткові методу пробних функцій для ППДР.

При застосуванні методів теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними з праць В.О.Кондратьєва і С.Д.Ейдельмана для ПДР з негладкими символами виникає непроста задача про описання множини значень ПДО, визначених на спеціально підібраних класах пробних функцій.

У § 4 доведена теорема про множину значень ПДО з символами $|\sigma|^{\gamma_k}$, $\sigma\in\mathbb{R}^n$, $\gamma\in(0,2)$, $k\in\{1,\dots,m\}$, визначених на пробних функціях вигляду

$$\Phi(t,x;Q) \equiv t\left(|x|^2 + Q\right)^{-(n+\gamma)/2}, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^n,\ Q>0.$$

Вигляд сім'ї пробних функцій підказує асимтотичне зображення ФР задачі Коші для рівняння дифузії з псевдодиференціальним доданком, одержане у п. 2.4. Ця теорема дозволяє побудувати такі пробні функції, за допомогою яких вивчаються якісні властивості розв'язків широкого класу ПДР, зокрема доводяться теореми про єдиність невід'ємних розв'язків задачі Коші. При знаходженні множини значень ПДО, визначених на класах припустимих пробних функцій типу бар'єрних функцій, розроблена спеціальна методика, яка істотно модифікує відому для диференціальних рівнянь методику В.О. Кондратьєва і С.Д. Ейдельмана.

Спряжені операції до ГСІО

$$A_k u(t,x) \equiv \frac{1}{d_{n,1}(\gamma_k)} \lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ R\to\infty}} \iint\limits_{\{\varepsilon\leqslant|h|\leqslant R\}} |h|^{-(n+\gamma_k)}(u(t,x+h)-u(t,x))dh, \quad (12)$$

$$(t,x)\in\Pi_T,\ \gamma_k\in(0,2),\ k\in\{1,\dots,m\},$$

визначаються такими співвідношеннями:

$$A_k^* u(t,x) \equiv \frac{1}{d_{n,1}(\gamma_k)} \lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ R\to\infty}} \iint\limits_{\{\varepsilon\leqslant|h|\leqslant R\}} |h|^{-(n+\gamma_k)}(u(t,x-h)-u(t,x))dh, \quad (13)$$

$$(t,x)\in\Pi_T,\ \gamma_k\in(0,2),\ k\in\{1,\dots,m\}.$$

<u>Теорема 4.1.</u> Нехай Q – додатний параметр, $0<\gamma\leqslant\gamma_k<2$, $k\in\{1,\dots,m\}$ при $n\geqslant3$, $(\gamma,\gamma_k)\subset(0,2)$, $k\in\{1,\dots,m\}$ при $n=1$, $\gamma\in(0,1]$, $\gamma_k\in[1,2)$, $k\in\{1,\dots,m\}$ при $n=2$,

$$\Phi_n(t,x;Q)=t(|x|^2+Q)^{-\frac{n+\gamma}{2}},\ (t,x)\in\overline{\Pi}_T, -$$

пробна функція. Тоді

$$A_k^*\Phi_n(t,x;Q)=\Phi_n(t,x;Q)F_n(x;Q),\ (t,x)\in\Pi_T,$$

$$F_n(x;Q)=\frac{1}{d_{n,1}(\gamma_k)}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} F_n^{\varepsilon,R}(x;Q),$$

$$F_n^{\varepsilon,R}(x;Q)=\iint\limits_{\{\varepsilon\leqslant|h|\leqslant R\}}\frac{(|x|^2+Q)^{\frac{n+\gamma}{2}}-(|x-h|^2+Q)^{\frac{n+\gamma}{2}}}{(|x-h|^2+Q)^{\frac{n+\gamma}{2}}}\frac{dh}{|h|^{n+\gamma_k}},$$

та існують $Q_0>0$, $Q_1>Q_0$ такі, що функція $F_n(x;Q)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $Q\in[Q_0,Q_1]$, є неперервною і обмеженою.

У § 5 метод пробних функцій застосовується до доведення теореми про єдиність невід'ємного слабкого розв'язку задачі Коші для рівняння

$$Lu(t,x)\equiv-\partial_t u(t,x)+\sum_{k,j=1}^{n}\partial_{x_k}\partial_{x_j}(a_{kj}(t,x)u(t,x))-\sum_{k=1}^{n}\partial_{x_k}(a_k(t,x)u(t,x))+$$

$$+a_0(t,x)u(t,x)+\sum_{k=1}^{m}A_k(b_k(t,x)u(t,x))=0,\ (t,x)\in\Pi_T, \qquad (14)$$

де A_k – ПДО з символом $-|\sigma|^{\gamma_k}$, $\sigma\in\mathbb{R}^n$, $\gamma_k\in(0,2)$, $k\in\{1,\dots,m\}$, яка визначена співвідношенням (12).

Нехай виконується умова

β_1) $a_{k,j}$, a_k, a_0, b_k, – вимірні, обмежені сталою M, функції у шарі Π_T.

Означення 5.1. Локально інтегровна в Π_T функція u називається слабким розв'язком рівняння (14) у шарі Π_T, якщо для довільної нескінченно диференційовної і фінітної в Π_T функції Φ правильна інтегральна тотожність

$$\iint\limits_{\Pi_T}u(t,x)\Big[\partial_t\Phi(t,x)+\sum_{k,j=1}^{n}a_{k,j}(t,x)\partial_{x_k}\partial_{x_j}\Phi(t,x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n} a_k(t,x)\partial_{x_k}\Phi(t,x)+a_0(t,x)\Phi(t,x)+\sum_{k=1}^{n} b_k(t,x)A_k^*\Phi(t,x)\Bigg]dtdx=0,$$

де A_k^* визначені формулою (13).

Означення 5.2. Слабким розв'язком u задачі Коші для рівняння (14) з локально інтегровною початковою функцією φ називається слабкий в Π_T розв'язок рівняння (14), який для довільної нескінченно диференційовної і фінітної в $\mathbb{R}^n$ функції Φ задовольняє умову

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\Phi(x)dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\Phi(x)dx.$$

Лема 5.1. Нехай виконуються такі умови:

β_2) існують та неперервні з $\bar{\Pi}_T$ похідні $\partial_{x_k}\partial_{x_j}a_{kj}$, $\partial_{x_k}a_k$; функція a_0 неперервна в $\bar{\Pi}_T$;

β_3) функції b_k мають в $\bar{\Pi}_T$ неперервні по x похідні.

Тоді довільний класичний в Π_T розв'язок рівняння (14) є слабким розв'язком цього рівняння в Π_T; класичний розв'язок задачі Коші є слабким розв'язком задачі Коші.

Нехай виконується умова

$$\beta_4)\int\limits_0^T dt\int\limits_{\mathbb{R}^n}|u(t,x)|(1+|x|)^{-(n+\gamma)}dtdx<\infty.$$

Теорема 5.1. Нехай виконується умова β_1. Тоді довільний слабкий невід'ємний розв'язок u задачі Коші для рівняння (14), який задовольняє умову β_4 і нульову початкову умову, майже всюди в Π_T дорівнює нулеві.

Ця теорема є новою, бо єдиність невід'ємних розв'язків задачі Коші для ПДО лише в класах спадних при $|x|\to\infty$ функцій доведена А.Н.Кочубеєм. Методика доведення теорем єдиності невід'ємних розв'язків задачі Коші для ПДР запозичена з праць В.О.Кондратьєва і С.Д.Ейдельмана. Згідно з цією методикою дослідження складається з таких етапів: 1) знаходження асимптотичного зображення ФР задачі Коші для модельного рівняння; 2) визначення сім'ї припустимих пробних функцій і опис множини значень відповідних ПДО, визначених на цих функціях; 3) використання інтегральної тотожності, якою визначається слабкий розв'язок.

У третьому розділі за допомогою одержаних у § 3 оцінок Φ^{Π} задачі Коші для СПЩР з сталими однорідними символами знайдені умови стабілізації розв'язків задачі Коші (§ 6), доведена теорема про L_r-стійкість за Ляпуновим тривіального розв'язку задачі Коші, а також одна теорема типу Ліувілля для розв'язків СПЩР (§ 7).

Під стабілізацією розв'язку задачі Коші звичайно розуміється існування у нього певної границі (в тому чи іншому розумінні) при $t\to\infty$. Використовуються наступні означення.

Означення 6.1. Кажуть, що функція $u:\Pi\to\mathbb{K}_{p1}$ стабілізується до функції $v:\mathbb{R}^n\to\mathbb{K}_{p1}$ при $t\to\infty$:

1) рівномірно на кожному компакті простору $\mathbb{R}^n$, якщо $u(t,x)\xrightarrow[t\to\infty]{} v(x)$ рівномірно по $x\in\mathbb{K}$ для будь-якого компакту $\mathbb{K}\subset\mathbb{R}^n$ (рівномірна на кожному компакті стабілізація);

2) рівномірно в $\mathbb{R}^n$, якщо $u(t,x)\xrightarrow[t\to\infty]{} v(x)$ рівномірно по $x\in\mathbb{R}^n$ (рівномірна стабілізація).

Означення 6.2. Функція $u:\Pi\to\mathbb{R}$ стабілізується до сталої l в точці $x^0\in\mathbb{R}^n$, якщо $u(t,x^0)\xrightarrow[t\to\infty]{} l$ (точкова стабілізація).

У п. 6.2 і 6.3 розглядається питання про стабілізацію розв'язку задачі Коші для системи (9). Розв'язок такої задачі з обмеженою вимірною початковою функцією $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{K}_{p1}$ визначається інтегралом Пуассона

$$u(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,0,x-\xi)\varphi(\xi)d\xi,\quad (t,x)\in\Pi. \tag{15}$$

Позначимо через R_e один із координатних кутів простору $\mathbb{R}^n$, тобто множину точок $x\in\mathbb{R}^n$, координати яких задовольняють нерівності $\varepsilon_1x_1\geq0,\ldots,\varepsilon_nx_n\geq0$, $e=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)$ – фіксований вектор, компоненти якого набувають значень 1 або −1.

Через R_a^0 позначимо кут з вершиною в точці $a=(\varepsilon_1a_1,\ldots,\varepsilon_na_n)$, $a_i>0$, $i=1,\ldots,n$, що містить початок координат, ребра якого паралельні координатним осям. Нехай точка $b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)\in R_a^0$, $a\neq b$. Тоді через R_b^a позначимо кут, аналогічний R_a^0, що містить точку a. Якщо $a=b$, то кути R_a^0 і R_a^a є вертикальними.

Паралелепіпед $R_e\cap R_a^0$ позначимо через R_{ea}, $R_e\cap R_a^0\cap R_b^0$ – через R_{eab} і $A=\prod\limits_{i=1}^{n}a_i$ – об'єм паралелепіпеда R_{ea}.

Теорема 6.1. Нехай символ a_0 ПДО A_0 задовольняє умови з теореми 3.1, а початкова функція φ обмежена.

Якщо виконана одна з таких умов:

а) функція φ має кутові граничні середні, тобто існують скінченні границі послідовностей $\frac{1}{A}\int\limits_{R_{ea}}\varphi(\xi)d\xi$, коли $a_1,\ldots,a_n$ незалежно один від одного прямують до нескінченності, при цьому границя l однакова в усіх R_e;

б) усі елементи матричного символа a_0 є парними функціями аргументів $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$, а функція φ має центрально-симетричне середнє, тобто існує скінченна границя l послідовностей

$$\frac{1}{2A}\int\limits_{R_{ea}\cup R_{-ea}}\varphi(\xi)d\xi,$$

коли складові вектора a незалежно один від одного прямують до нескінченності, при цьому границя l однакова в усіх $R_e\cup R_{-e}$;

в) усі елементи матричного символа a_0 є парними функціями по кожній із змінних $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n$ окремо, а функція φ має граничне середнє, тобто

$$\frac{1}{2^n A}\int\limits_{-a_1}^{a_1}\ldots\int\limits_{-a_n}^{a_n}\varphi(\xi)d\xi,$$

коли $a_1,\ldots,a_n$ незалежно один від одного прямують до нескінченності, прямує до скінченної границі l, то функція (15) прямує до l при $t\to\infty$ рівномірно в кожній обмеженій кулі простору $\mathbb{R}^n$.

У п. 6.3 наведена одна теорема про рівномірну стабілізацію розв'язків СППДР (9).

Нехай $P(x,a)\equiv\{\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n|\forall j\in\{1,\ldots,n\}:|\xi_j-x_j|\leqslant a_j\}$ - паралелепіпед з центром в точці $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ і ребрами $a_j>0$, $1\leqslant j\leqslant n$; $a=(a_1,\ldots,a_n)$; $a^0\equiv\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}a_j$; $|P(x,a)|\equiv 2^n\prod\limits_{j=1}^{n}a_j$ - об'єм $P(x,a)$.

<u>Теорема 6.2.</u> Якщо початкова функція φ обмежена і має нульове рівномірне граничне середнє по паралелепіпедах $P(x,a)$, тобто

$$\frac{1}{|P(x,a)|}\int\limits_{P(x,a)}\varphi(\xi)d\xi\xrightarrow[a^0\to\infty]{}0$$

рівномірно по $x\in\mathbb{R}^n$, то розв'язок (15) системи (9), для якої виконуються умови з теореми 6.1, рівномірно стабілізується до 0.

У п. 6.4 доведена теорема про необхідну та достатню умову точкової стабілізації розв'язку задачі Коші

$$(\partial_t - D^\gamma)u(t,x) = 0,\ (t,x)\in\Pi, \tag{16}$$

$$u(t,x)\Big|_{t=0} \varphi(x),\ x\in\mathbb{R}^n, \tag{17}$$

де D^γ – ПДО з символом $|\sigma|^\gamma$, $\sigma\in\mathbb{R}^n$, $\gamma\geq 1$.

<u>Теорема 6.3.</u> Для стабілізації в точці $x^0\in\mathbb{R}^n$ до сталої l визначеного формулою (15) розв'язку u задачі (16), (17) з $\gamma=1$ необхідно й досить, щоб обмежена функція φ мала рівне l кульове граничне середнє в точці x^0, тобто

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{|(K(x^0,R)|} \int\limits_{K(x^0,R)} \varphi(\xi)\, d\xi = l,$$

де $K(x^0,R)$ – куля в $\mathbb{R}^n$ радіуса R з центром у точці x^0.

При доведенні теореми 6.3 використовується методика, яка розроблена для випадку диференціального рівняння і грунтується на тауберовій теоремі Н. Вінера.

Зауважимо, що теорема, аналогічна теоремі 6.3, для випадку, коли $\gamma>1$, доведена С.Д.Ейдельманом і Я.М.Дріном.

Пункт 6.5 містить теорему про необхідну та достатню умову точкової стабілізації невід'ємних розв'язків рівняння (16) з $\gamma\in(1,2)$. Такі розв'язки зображуються інтегралом Пуассона-Стілтьєса

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,0,x-\xi)\mu(d\xi),\ (t,x)\in\Pi, \tag{18}$$

де μ – міра, яка визначена на σ-алгебрі борельових множин простору $\mathbb{R}^n$ і така, що збігається інтеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{n+\gamma}{2}} \mu(d\xi).$$

<u>Теорема 6.4.</u> Для стабілізації при $t\to\infty$ і фіксованій точці $x=x^0\in\mathbb{R}^n$, $n>1$, інтеграла (18) до сталої l необхідно й досить, щоб

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\mu(K(x^0,R))}{|K(x^0,R)|} = l.$$

У п. 7.1 доведена теорема про стійкість за Ляпуновим тривіального розв'язку задачі Коші для системи (9) у класі P розв'язків, які зображуються інтегралом Пуассона у вигляді (15).

Для функцій $u:\Pi\to\mathbb{K}_{p1}$, вимірних по $x\in\mathbb{R}^n$ при кожному $t>0$, визначаються норми

$$\|u(t,\cdot)\|_r = \begin{cases} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^r dx\right)^{1/r}, \text{ якщо } 1\leqslant r<\infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |u(t,x)|, \text{ якщо } r=\infty. \end{cases}$$

Означення 7.1. Тривіальний розв'язок задачі Коші для системи (9) називатимемо L_r-стійким за Ляпуновим, $1\leqslant r\leqslant\infty$, якщо для довільного $\varepsilon>0$ існує таке $\delta>0$, що для всякого розв'язку $u\in P$ задачі Коші для системи (9) з початковою функцією φ такою, що $\|\varphi\|_r\leqslant\delta$, виконується нерівність $\|u(t,\cdot)\|_r\leqslant\varepsilon$ для будь-якого $t>0$.

Теорема 7.1. Нехай для системи (9) виконуються умови з теореми 3.1. Тоді тривіальний розв'язок задачі Коші для такої системи L_r-стійкий за Ляпуновим, $1\leqslant r\leqslant\infty$.

Пункт 7.2 містить одну з теорем типу Ліувілля для розв'язків СПІДР (9), які визначені в півпросторі $\Pi_{(-\infty,T]}$ і в кожному шарі $\Pi_{[t_0,T]}$, $t_0<T$, зображуються у вигляді

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,t_0,x-\xi)u(t_0,\xi)d\xi,\ (t,x)\in\Pi_{(t_0,T]}.$$

Клас таких розв'язків позначається через P_0.

Теорема 7.2. Нехай для системи (9) виконуються умови з теореми 3.1. Якщо розв'язок u такої системи належить до класу P_0 і задовольняє умову

$$\exists\ C>0\ \forall\ (t,x)\in\Pi_{(-\infty,T]}:\ |u(t,x)|\leqslant C,$$

то він є сталою вектор-функцією.

У додатку одержано формулу та оцінки для ядра Пуассона крайової задачі

$$\begin{gathered} \partial_t u(t,x) = a^2\partial^2_{x_n} u(t,x) + b(A_\gamma u)(t,x),\ (t,x)\in\Pi^+, \\ u(t,x)\Big|_{t=0} = 0,\ x\in\mathbb{R}^n_+, \qquad (19) \\ (Bu)(t,x)\Big|_{x_n=0} = A_\beta\partial_{x_n} u(t,x)\Big|_{x_n=0} = f(t,x'),\ (t,x')\in\Pi', \end{gathered}$$

де $\mathbb{R}^n_+ \equiv \{x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \,|\, x_n>0\}$, $\Pi^+ \equiv \{(t,x)\,|\,t>0,\ x\in\mathbb{R}^n_+\}$, $x' \equiv (x_1,\dots,x_{n-1})$, $\Pi' \equiv \{(t,x')\,|\,t>0,\ x'\in\mathbb{R}^{n-1}\}$; $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $b>0$; A_γ – ПДО з символом $-|\sigma'|^\gamma$, $\sigma'\in\mathbb{R}^{n-1}$, $\gamma\geq 1$; A_β – ПДО з символом $|\sigma'|^{-\beta}$, $\sigma'\in\mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}$, $0<\beta<n-1$.

Теорема D. Ядро Пуассона G задачі (19) визначається рівністю

$$G(t,x',x_n)=\frac{ab^{\frac{\beta-n+1}{\gamma}}}{2^{n-1}\pi^{n-\frac{1}{2}}}\,\frac{exp\left\{-\frac{x_n^2}{4a^2t}\right\}}{t^{\frac{n-1+\beta+2\gamma}{\gamma}}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|z'|^\beta exp\left\{-|z'|^\gamma-i(\tilde{x}',z')\right\}dz',$$

$$(t,x',x_n)\in\Pi^+,\quad \tilde{x}'\equiv x'(tb)^{-1/\gamma}.$$

Для похідних від функції G правильними є такі оцінки:

$$|\partial_t^{k_0}G(t,x',x_n)|\leqslant\frac{C}{t^{k_0+1/2}}\left(tb\right)^{-\frac{n-1+\beta}{\gamma}}exp\left\{-(1-k_0\varepsilon)\frac{x_n^2}{4a^2t}\right\}\times$$

$$\times\left[1+\frac{|x'|}{(tb)^{1/\gamma}}\right]^{-n+1-\beta-\gamma},$$

$$|\partial_{x'}^{k'}G(t,x',x_n)|\leqslant$$

$$\leqslant C\frac{\sqrt{2}\,a}{(2\pi)^{n-1/2}}\left(tb\right)^{-\frac{n-1+\rho+|k'|}{\gamma}}\left[1+\frac{|x'|}{(tb)^{1/\gamma}}\right]^{-n+1-\beta-\gamma-|k'|},$$

$$|\partial_{x_n}^{k_n}G(t,x',x_n)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C}{t^{\frac{1+k_n}{2}}}exp\left\{-(1-\varepsilon)\frac{x_r^2}{4a^2t}\right\}\left(tb\right)^{-\frac{n-1+\beta}{\gamma}}\left[1+\frac{|x'|}{(tb)^{1/\gamma}}\right]^{-n+1-\beta-\gamma},$$

$$(t,x)\in\Pi^+.$$

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ І ВИСНОВКИ

Знайдено асимптотичне зображення фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння дифузії з псевдодиференціальним доданком у випадку однієї і трьох просторових змінних. З цього зображення випливає, що при взаємодії локального (дифузія) та нелокального (псевдодиференціальний оператор) факторів асимптотична поведінка фундаментального розв'язку задачі Коші визначається нелокальним доданком.

Одержані точні степеневі оцінки , півпросторі $\Pi=\{(t,x)\,|\,t>0, x\in\mathbb{R}^n\}$ фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші та її похідних для системи параболічних псевдодиференціальних рівнянь і сталим однорідним символом. Ці оцінки є аналогами відомих оцінок (Λ_1) для параболічних систем диференціальних рівнянь.

Описані множини значень одного класу псевдодиференціальних операторів з негладкими символами, визначених на спеціальних сім'ях пробних функцій. Цим забезпечується застосування відомого в теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними методу пробних функцій до вивчення якісних властивостей розв'язків псевдодиференціальних рівнянь. Цей метод у дисертації застосовано до доведення теореми про єдиність невід'ємних слабких розв'язків задачі Коші для рівняння дифузії з псевдодиференціальними доданками.

Одержані оцінки у півпросторі П фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для системи параболічних псевдодиференціальних рівнянь із сталим однорідним символом застосовані до доведення теорем про рівномірну на кожному компакті і рівномірну в усьому просторі стабілізацію розв'язків задачі Коші для такої системи, теореми про L_r-стійкість за Ляпуновим ($1\leq r\leq\infty$) тривіального розв'язку задачі Коші, а також теореми типу Ліувілля для розв'язків указаної системи рівнянь.

Реалізована можливість застосування методики, яка розроблена для диференціальних рівнянь і грунтується на тауберових теоремах Н. Вінера, до знаходження необхідних та достатніх умов точкової стабілізації розв'язків задачі Коші для одного псевдодиференціального рівняння з символом порядку $\gamma=1$ і невід'ємних розв'язків у випадку, коли порядок символа $\gamma\in(1,2)$ і число просторових змінних $n>1$.

Одержана формула та оцінки для ядра Пуассона крайової задачі в півпросторі по просторових змінних, у рівняння і крайову умову якої входять диференціювання по нормальній змінній та псевдодиференціальні операції по дотичних змінних.

ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ДИСЕРТАЦІЇ ОПУБЛІКОВАНІ В ПРАЦЯХ:

1. Eidel'man S.D., Drin' R.Ya. About properties of the solutions of diffusion equations with the pseudodifferential summand // Доп. НАН України.- 1995.- № 5.- С.9.-12.
2. Eidel'man S.D., Drin' R.Ya. About the investigations of the action of the pseudodifferential operators over the special classes of test functions // Доп. НАН України.- 1997.- № 3.- С.32-37.
3. Дрінь Р.Я. Оцінка ядра Пуассона однієї параболічної псевдодиференціальної крайової задачі // Нелинейные краевые задачи математической физики: Сб науч. тр.- Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994.- С.72-73.
4. Дрінь Р.Я. Стабілізація розв'язків задачі Коші для систем параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. праць.- Київ: Ін-т математики НАН України, 1997.- № 14.- С.88-102.
5. Дрінь Р.Я., Ейдельман С.Д. Єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння дифузії з псевдодиференціальним доданком // Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана.- Чернівці: Рута, 1995.- С.78-88 (див. також Дрінь Р. Про единість розв'язку задачі Коші для рівняння дифузії з псевдодиференціальним доданком // Міжнародна математична конференція, присвячена пам'яті Ганса Гана (10-15 жовтня 1994 року, м. Чернівці) Тези доп.- Чернівці: Рута, 1994.- С.44.)
6. Дрінь Р.Я., Ейдельман С.Д. Властивості розв'язків деяких параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами // Всеукраїнська наукова конференція "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (25-27 січня 1994 р., м. Дрогобич): Тези доп.- К.: Ін-т математики АН України, 1994.- С. 53.
7. Drin' R.Ya. About the asymptotic representation of the Green function of the parabolic pseudodifferential equation // International Conference Nonlinear differential equations (Kiev, August 21-27, 1995). Book of abstracts.- Kiev, 1995.- P.39.
8. Ейдельман С.Д., Дрінь Р.Я. До якісної теорії псевдодиференціальних рівнянь // Наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу" (24-27 вересня 1996р., м. Івано-Франківськ): Тези доп.- Івано-Франківськ, 1996.- С.34.

Drin' R.Ya. Investigation of the qualitative properties of the solutions of the parabolic pseudodifferential equations with the nonsmooth symbols. Manuscript. Thesis for a degree of Candidate of Science (Ph.D) in Physics and Mathematics, speciality 01.01.02 - Differential Equtions, Chernivtsi State University, Chernivtsi, 1997.

The qualitative properties of the solutions of the parabolic pseudodifferential equations and its systems are investigated: the method of test functions is developed and applied, the exact estimations in the space t>0 and asymptotic approximation of the fundamental solution of the Cauchy boundary problem are proved, the behaviour of the solutions for the large values of time variable are investigated (stabilization and stability solutions by Liapunov, theorem of Liouville type).

Дринь Р.Я. Исследование качественных свойств решений параболических псевдодифференциальных уравнений с негладкими символами. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения. Черновицкий государственный университет. Черновцы. 1997.

Исследуются качественные свойства решений параболических псевдодифференциальных уравнений и их систем: развивается и применяется метод пробных функций, устанавливаются точные оценки в полупространстве $\{t>0\}$ и асимптотика фундаментального решения задачи Коши, исследуется поведение решений при больших значениях временной переменной (стабилизация и устойчивость по Ляпунову, теорема типа лиувилля).

КЛЮЧОВІ СЛОВА: системи параболічних псевдодиференціальних рівнянь, задача Коші, фундаментальний розв'язок задачі Коші, метод пробних функцій, стабілізація, стійкість, теорема Ліувілля, крайова задача, ядро Пуассона.

Подписано к печати 13.06.97.формат60/84.физ.печ.л.1,5
Усл.печ.л.1,39.Уч.изд.л.1,09.Зак.238.тир.100

Черновицкое областное управление статистики.
274018.Черновцы,Головна,249–а