

ДНІПРОПЕТРОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

на правах рукопису

ШАМРОВСЬКИЙ ОЛЕКСАНДР ДМИТРОВИЧ

АСИМПТОТИКО-ГРУПОВИЙ АНАЛІЗ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ
ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

01.02.04 – Механіка деформівного твердого тіла

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Шаур.

20.05.97.

ДНІПРОПЕТРОВСЬК-1997



00742967 (Z)

Дисертація є рукопис.

Робота виконана на кафедрі програмного забезпечення та математичного моделювання Запорізької державної інженерної академії.

Офіційні опоненти - доктор фізико-математичних наук.

професор Андріанов І.В.

доктор фізико-математичних наук,

професор Селезов І.Т.

доктор фізико-математичних наук,

професор Смірнов С.О.

Провідна організація - Харківський політехнічний університет.

Захист відбудеться 26 червня 1997р. о 10 год.

на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 03.01.14 по захисту дисертацій на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук при Дніпропетровському державному університеті за адресою: 320050, м.Дніпропетровськ, пров. Науковий, 13, корп. 5, ауд. 57.

3 дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Дніпропетровського державного університету.

Автореферат розісланий 25 травня 1997р.

Вчений секретар

спеціалізованої вченої ради

кандидат технічних наук, доцент

Костирко В.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність проблеми. В теорії диференціальних рівнянь – як звичайних, так і у часткових похідних – значну роль відіграють два підходи. Один, що базується на застосуванні яких-небудь міркувань симетрії і математично пов'язаний з використанням апарату теорії груп; інший, побудований на спрощенні розглядаємих рівнянь і відомий як асимптотичний аналіз. Кожен з цих підходів має свої достоїнства та недоліки, демонструючи найбільші можливості у сполученні. **Предметом дослідження** дисертаційної роботи є створення синтетичного методу, сполучаючого методи теорії груп і асимптотичного аналізу. **Об'єктом**, на якому демонструються можливості методу, що пропонується, є різні варіанти диференціальних рівнянь теорії пружності.

Поява теорії груп пов'язана з проблемою пошуку у радикалах рішень алгебраїчних рівнянь степені, більшої ніж четверта. Однак результати, які одержані, у першу чергу, Е.Галуа, можна, з деякої точки зору, вважати негативними. Теорія груп вказала ті часткові випадки, коли вирішення рівнянь у радикалах є можливим; для усіх інших випадків була доведена неможливість такого вирішення.

Подальший розвиток теорії груп пов'язаний з ім'ям С.Лі, котрий розглядав проблему застосування цієї теорії до вирішення звичайних диференціальних рівнянь. І в цьому випадку були досягнуті, у першу чергу, важливі теоретичні результати із порівняно малими практичними результатами.

Сучасні дослідження у сфері застосування теорії груп до вирішення рівнянь математичної фізики пов'язані, у першу чергу, з ім'ям Л.В.Овсянікова. Однак знову були одержані, перш за все, теоретичні, а не практичні результати.

Обмеженість практичних застосувань теорії груп пов'язана, найчастіше, із відносною «бідністю» групи перетворювань, яка допускається

рівняннями, що розглядаються. Чим ширше група перетворювань, яка допускається, тим більші можливості застосування теорії груп до вирішення якихось задач. У зв'язку з цим Л.В.Овсяніковим було помічено, що спрощені рівняння, одержані завдяки застосуванню засобів асимптотичного аналізу, допускають, звичайно, більш широку групу перетворювань, ніж вихідні, неспрощені, рівняння. Це показує, що сполучення методів теорії груп та асимптотичного аналізу може дати кращі результати, ніж окреме застосування цих методів.

Л.І.Маневич запропонував вважати розширення групи перетворювань, що допускається, критерієм істинного спрощення, яке одержується при асимптотичному аналізі. Більш того, він запропонував вважати метою асимптотичного аналізу саме розширення групи перетворювань, оскільки це створює нові можливості для вирішення задач за допомогою спрощених рівнянь.

Однією з найбільш важливих сфер застосування методів асимптотичного аналізу є теорія пластин та оболонок. Методи асимптотичного аналізу застосовувались тут, спочатку, при вирішенні відповідних рівнянь. У останні десятиріччя з'явилося багато досліджень з метою обґрунтування, за допомогою тривимірних рівнянь теорії пружності, відомих рівнянь теорії пластин та оболонок, а також отримання якихось нових, більш точних, рівнянь.

Треба особливо виділити галузь вирішення динамічних задач теорії пластин та оболонок, зокрема, задач про розповсюдження нестационарних хвильових процесів. У цій галузі широке застосування знайшли, крім класичних рівнянь, рівняння типу Тимошенко. Головною особливістю цих рівнянь є їх гіперболічність, що відповідає скінченим швидкостям розповсюдження фронтів збурень усіх видів. Відомо, що на відміну від цього, класичні рівняння мають параболічний тип і задають нескінчену швидкість розповсюдження збурень.

При аналітичному вирішенні нестационарних хвильових задач за допомогою рівнянь типу Тимошенко, як правило, застосовуються інтеграль-

ні перетворювання. Однак, завдяки складності задач, тут виникають великі перешкоди, особливо при переході від одновимірних до двовимірних задач.

Використання ідей Л.І.Маневича щодо сумісного застосування методів теорії груп та асимптотичного аналізу дозволило створити ефективну методику вирішення нестационарних хвильових задач у рамках теорії типу Тимошенко з демонстрацією можливостей методики при вирішенні двовимірних задач, які не піддавались вирішенню іншими методами [15–18].

Подальший розвиток методики сумісного застосування теорії груп та асимптотичного аналізу вимагав, по-перше, додаткового теоретичного обґрунтування, і по-друге, розробки технології її застосування для менш очевидних випадків, ніж дослідження прифронтових зон.

Крім того, оскільки для рівнянь типу Тимошенко відсутні докази їх асимптотичної обґрунтованості, природним було використання нової теорії, для демонстрації її можливостей, до проблеми одержання асимптотично обґрунтованих динамічних рівнянь теорії пластин та оболонок на базі рівнянь теорії пружності.

Мета дисертаційної роботи складає наступне:

– побудова синтетичного методу, який об'єднує методи теорії груп та асимптотичного аналізу із демонстрацією можливостей цього методу на прикладах вирішення задач про випромінювання нестационарних пружних хвиль.

Основними задачами наукового дослідження є:

– побудова теоретичної бази для об'єднання методів теорії груп та асимптотичного аналізу;

– отримання, за допомогою запропонованого методу, асимптотично обґрунтованих варіантів динамічних рівнянь теорії пластин та оболонок на базі тривимірних рівнянь теорії пружності;

– вирішення конкретних задач про випромінювання нестационарних пружних хвиль у пластинках та оболонках із застосуванням як відомих, так і знов запропонованих рівнянь та порівняння результатів, які одержані згідно різних теорій.

Загальна методологія дослідження ґрунтується на вилученні основоположних понять теорії груп та асимптотичного аналізу, що й дозволяє знайти точки стикування цих двох теорій.

Суттєвим елементом дослідження є широке використання інформаційних комп'ютерних технологій для вирішення аналітичних задач. Найбільш важливою, у цьому смислі, є методика формального пошуку параметрів асимптотичного інтегрування у багатовимірних випадках, застосування якої можливо тільки при орієнтації на комп'ютер і дозволяє подолати комбінаторні проблеми, типові для багатовимірних випадків.

Аналітичне вирішення розглянутих конкретних задач із застосуванням рядів різних типів також орієнтоване на комп'ютери із метою кінцевої чисельної та графічної реалізації.

Наукова новизна роботи полягає у наступному:

– побудований синтетичний метод, який сполучає основні ідеї теорії груп та асимптотичного аналізу і дозволяє підвищити ступінь практичного застосування теорії груп та теоретичної обґрунтованості асимптотичного аналізу;

– за допомогою запропонованого методу побудовані більш точні варіанти двовимірних динамічних рівнянь теорії пластин та оболонок, які відрізняються від відомих тим, що швидкості розповсюдження фронтів хвиль усіх видів, згідно з цими рівняннями, є такими ж, як і згідно з тривимірними рівняннями теорії пружності;

– послідовне застосування асимптотико-групового аналізу дозволило вирішити ряд нестационарних задач про випромінювання пружних хвиль як на базі відомих, так і знову запропонованих рівнянь;

– проведений порівняльний аналіз отриманих рішень; показано, що рішення на основі запропонованих більш точних рівнянь демонструють ряд якісних ефектів, які не фіксуються відомими рівняннями та дозволяють більш глибоко вивчити картину розповсюдження нестационарних хвильових процесів у тонкому шарі.

Наукова та практична цінність. Головним результатом роботи є побудова методу асимптотико-групового аналізу, який може знайти використання до вирішення різноманітних задач, у яких застосовуються алгебраїчні та диференціальні рівняння, щонайменше, усіх, у яких застосовуються відомі раніш методи асимптотичного аналізу.

Завдяки сполученню з теорією груп запропонований метод значно полегшує розв'язання ряду принципів питань асимптотичного аналізу: пошук параметрів асимптотичного інтегрування; визначення асимптотично обґрунтованих границь застосування спрощених рівнянь, що одержуються; побудова рішень спрощених рівнянь; перевірка додержання усіх асимптотичних оцінок для побудованих рішень.

Побудовані більш точні динамічні рівняння пластин та оболонок можуть знайти застосування до розв'язання як теоретичних, так і практичних задач.

Був проведений асимптотичний аналіз не тільки новозапропонованих, але й відомих рівнянь теорії пластин та оболонок, що дозволило уточнити сфери обґрунтованого застосування цих рівнянь.

Вірогідність результатів та висновків забезпечується точністю математичних методів, які використовуються для аналізу, коректністю постановок задач, узгодженістю між отриманими результатами та відомими результатами інших авторів.

Апробація роботи. Основні результати дисертаційної роботи доповідались та дискутувались на III Всесоюзному з'їзді по теоретичній та прикладній механіці (1968р., Москва), на VII Всесоюзній конференції по теорії оболонок та пластинок (1969р., Дніпропетровськ), на 1-у Українсько-польському науковому семінарі по механіці матеріалів та конструк-

цій (1993р., Дніпропетровск), на міжнародній науково-практичній конференції «Сучасні проблеми геометричного моделювання» (1995р. Мелітополь), на міському семінарі по механіці м. Таллінна під керівництвом проф. Нігула У.К., на семінарі Інституту проблем механіки АН СРСР під керівництвом проф. Гольденвейзера О.Л., на семінарі Московського державного університету під керівництвом акад. Работнова Ю.Н., на семінарі Обчислювального Центру АН СРСР під керівництвом акад. Моїсеєва М.М., на семінарі Московського Інституту сталі та сплавів під керівництвом проф. Треногіна В.О., на семінарі Ленінградського державного університету під керівництвом проф. Товстика П.Е., на семінарі Ленінградського державного університету під керівництвом проф. Баранцева Р.Г., на семінарі Ленінградського педагогічного інституту під керівництвом проф. Матвєєва М.М., на семінарі Інституту Гідродинаміки СВ АН СРСР під керівництвом проф. Ібрагімова Н.Х., на семінарі Інституту Гідродинаміки СВ АН СРСР під керівництвом проф. Аніна Б.Д. У цілому дисертація доповідалась на наукових семінарах кафедр: програмного забезпечення та математичного моделювання Запорізької державної інженерної академії (1996р.), теоретичної механіки Дніпропетровського державного університету (1996р.), на семінарі Дніпропетровського державного університету під керівництвом акад. Мосаковського В.І. (1996р.); на семінарі Інституту гідромеханіки НАН України під керівництвом проф. Селєзова І.Т. (1997р.), на семінарі Київського державного університету під керівництвом член-кор. НАН України Улітки О.Ф., на семінарі Харківського політехнічного університету під керівництвом акад. Рвачова В.Л.

Публікації. По результатах виконаних досліджень опублікована 21 робота, у котрих відображений основний зміст дисертації.

Структура й обсяг дисертації. Робота складається із вступу, семи глав та заключення, містить 400 сторінок, 3 таблиці, 55 рисунків, список використаної літератури (116 найменувань).

ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У вступі дається стислий огляд розвитку методів теорії груп та асимптотичного аналізу стосовно до проблеми вирішень алгебраїчних та диференціальних рівнянь, обґрунтовується необхідність сумісного застосування цих теорій. Розглядаються актуальні динамічні задачі теорії пластин та оболонок. Формулюється мета дослідження та зазначаються перешкоди, з якими довелось зустрітись на шляху до цієї мети. Дано стислий перелік одержаних у дисертації результатів.

У першій главі метод асимптотико-групового аналізу демонструється на прикладі диференціальних рівнянь плоскої задачі теорії пружності для ортотропного середовища:

$$B_1 \partial_x^2 u + G \partial_y^2 u + (B_1 \mu_2 + G) \partial_x \partial_y v = 0 \quad (1.1)$$

$$B_2 \partial_y^2 v + G \partial_x^2 v + (B_2 \mu_1 + G) \partial_x \partial_y u = 0$$

Тут x, y – декартові координати; $\partial_x = \partial / \partial x$, $\partial_y = \partial / \partial y$; u, v – компоненти вектора переміщень; B_1, B_2 – жорсткості на розтягнення-стиснення, G – жорсткість на зсув; μ_1, μ_2 – коефіцієнти Пуасона; $B_1 \mu_2 = B_2 \mu_1$.

Ваги усіх величин, які містяться у рівняннях (1.1), – постійних коефіцієнтів, шуканих функцій та диференційних операторів – оцінюються однаковим способом – за допомогою перетворювань:

$$u = \delta^{\beta_1} u^*, v = \delta^{\beta_2} v^*, \partial_x = \delta^{\beta_3} \partial_x^*, \partial_y = \delta^{\beta_4} \partial_y^*, B_1 = \delta^{\beta_5} B_1^* \quad (1.2)$$

$$B_2 = \delta^{\beta_6} B_2^*, G = \delta^{\beta_7} G^*, B_1 \mu_2 + G = B_2 \mu_1 + G = \delta^{\beta_8} (B_1 \mu_2 + G)^*,$$

що приводять до співвідношень:

$$u^* \sim 1, v^* \sim 1, \partial_x^* \sim 1, \partial_y^* \sim 1, B_1^* \sim 1, B_2^* \sim 1, G^* \sim 1, (B_1 \mu_2 + G)^* \sim 1 \quad (1.3)$$

Перетворення (1.2) – це звичайні перетворення розтягнення, які відомі у теорії груп. У них застосується, як основа, формально введений малий параметр $\delta < 1$. Величина цього параметру не відіграє ніякої ролі,

він використовується із службовою метою, так само, як основа логарифмів, для переходу від мультиплікативних величин, які входять у рівняння (1.1), до адитивних величин β_1, \dots, β_8 . І так само, як при використанні логарифмів результат обчислень не залежить від вибраної основи, тут формальний параметр, як буде видно далі, не входить у кінечні результати.

Саме використання формального малого параметру дозволяє негайно зв'язати методи теорії груп із методами асимптотичного аналізу. З одного боку, перетворення (1.2) – це теоретико-групові перетворення, з іншого боку, із узгодженням з (1.3), – вони дозволяють виконати основну задачу асимптотичного аналізу – оцінку ваг величин, що входять у рівняння (1.1).

У першу чергу розглядається типова для теорії груп задача – пошук тих випадків, коли рівняння (1.1) інваріантні відносно перетворень (1.2). Ця задача вирішується тут елементарними алгебраїчними методами шляхом прирівнювання між собою показників степені δ , що відповідають різним доданкам кожного із рівнянь (1.1). У результаті виявляється, що ці рівняння допускають чотирипараметричну групу із перетвореннями:

$$u = \delta^{\gamma_1} u^*, v = \delta^{\gamma_1} v^*, \partial_x = \partial_x^*, \partial_y = \partial_y^*, B_1 = B_1^*, B_2 = B_2^*, G = G^* \quad (1.4)$$

$$B_1 \mu_2 + G = (B_1 \mu_2 + G)^*;$$

$$u = u^*, v = v^*, \partial_x = \delta^{\gamma_2} \partial_x^*, \partial_y = \delta^{\gamma_2} \partial_y^*, B_1 = B_1^*, B_2 = B_2^*, G = G^*$$

$$B_1 \mu_2 + G = (B_1 \mu_2 + G)^*;$$

$$u = u^*, v = v^*, \partial_x = \partial_x^*, \partial_y = \partial_y^*, B_1 = \delta^{\gamma_3} B_1^*, B_2 = \delta^{\gamma_3} B_2^*$$

$$G = \delta^{\gamma_3} G^*, B_1 \mu_2 + G = \delta^{\gamma_3} (B_1 \mu_2 + G)^*;$$

$$u = \delta^{\gamma_4} u^*, v = v^*, \partial_x = \partial_x^*, \partial_y = \delta^{-\gamma_4} \partial_y^*, B_1 = \delta^{-2\gamma_4} B_1^*$$

$$B_2 = \delta^{2\gamma_4} B_2^*, G = G^*, B_1 \mu_2 + G = (B_1 \mu_2 + G)^*.$$

Звідси видно, що будь-яке рішення рівнянь (1.1), що відповідає яким-небудь відносним вагам членів цих рівнянь, породжує чотирипара-

метричне сімейство рішень, які одержуються із вихідного за допомогою перетворювань (1.4) та дають ті ж самі відносні ваги доданків.

Вилучаючи $\gamma_1, \dots, \gamma_4$, переходимо до інваріантів:

$$I_i = \delta^{\alpha_i} I_i^*; \quad I_i^* \sim 1 \quad (i=1, \dots, 4), \quad (1.5)$$

де:

$$I_1 = \frac{u}{v} \sqrt[4]{\frac{B_1}{B_2}}; \quad I_2 = \frac{\partial_x}{\partial_y} \sqrt[4]{\frac{B_1}{B_2}}; \quad I_3 = \frac{G}{\sqrt{B_1 B_2}}; \quad I_4 = \frac{B_1 \mu_2 + G}{\sqrt{B_1 B_2}} \quad (1.6)$$

Таким чином, фактично при асимптотичному аналізі треба оцінювати не вихідні величини, що входять у рівняння, а інваріанти групи перетворювань, яка допускається рівняннями. При цьому, кількість величин, що оцінюються, зменшується на кількість допускаємих однопараметричних підгруп розтягувань. У даному випадку замість восьми вихідних величин оцінюються чотири інваріанти (1.6).

Оскільки частина із інваріантів I_1, \dots, I_4 містить змінні величини, зручніше перетворення (1.5) замінити на перетворення:

$$u = \delta^{\alpha_1} u^*, \quad v = v^*, \quad \partial_x = \delta^{\alpha_2} \partial_x^*, \quad \partial_y = \partial_y^*, \quad B_1 = B_1^*, \quad B_2 = B_2^* \quad (1.7)$$

$$G = \delta^{\alpha_3} G^*, \quad B_1 \mu_2 + G = \delta^{\alpha_4} (B_1 \mu_2 + G)^*$$

Перетворення (1.7) еквівалентні перетворюванням (1.5), однак перетворюються вже не інваріанти, а частина вихідних величин. Величини v , ∂_y , B_1 и B_2 не перетворюються, і є еталонами для тих величин, що перетворюються. При цьому співвідношення $I_i^* \sim 1$ ($i=1, \dots, 4$) із (1.5) зручніше подати у вигляді:

$$u^* \sim \sqrt[4]{\frac{B_2^*}{B_1^*}} v^*, \quad \partial_x^* \sim \sqrt[4]{\frac{B_2^*}{B_1^*}} \partial_y^*, \quad G^* \sim \sqrt{B_1^* B_2^*}, \quad (B_1 \mu_2 + G)^* \sim \sqrt{B_1^* B_2^*} \quad (1.8)$$

Знайдені інваріанти (1.4) групи розтягнень, що допускається, дозволяють вирішити допоміжну задачу – перехід від рівнянь (1.1) до другої їх форми, яка містить найменш можливу кількість параметрів-коефіцієнтів. Ця задача вирішується за допомогою замін:

$$U = \sqrt[4]{\frac{B_1}{B_2}} u, \quad V = v, \quad X = x, \quad Y = \sqrt[4]{\frac{B_1}{B_2}} y, \quad a = I_3, \quad b = I_4, \quad (1.9)$$

які приводять до рівнянь:

$$\partial_X^2 U + a \partial_Y^2 U + b \partial_X \partial_Y V = 0; \quad \partial_Y^2 V + a \partial_X^2 V + b \partial_X \partial_Y U = 0 \quad (1.10)$$

Для рівнянь (1.10) перетворення (1.7) приймають вид:

$$U = \delta^{\alpha_1} U^*, \quad V = V^*, \quad \partial_X = \delta^{\alpha_2} \partial_X^*, \quad \partial_Y = \partial_Y^*, \quad a = \delta^{\alpha_3} a^*, \quad b = \delta^{\alpha_4} b^* \quad (1.11)$$

Завдяки цим перетворенням повинні виконуватись співвідношення:

$$U^* \sim V^*, \quad \partial_X^* \sim \partial_Y^*, \quad a^* \sim 1, \quad b^* \sim 1 \quad (1.12)$$

Пошук параметрів асимптотичного інтегрування звичайно проводиться в узгодженні з їх фізичним змістом. Тут, замість цього, пропонується формальний метод, який дозволяє знаходити значення параметрів, на основі критерію мінімального спрощення, без попередніх припущень щодо властивостей рішення.

Розглянемо спочатку комбінований варіант. Нехай відомо, що $a \sim b < 1$. Задаючи, при цьому, $\alpha_3 = \alpha_4 = 1$ будемо розшукувати тільки α_1 та α_2 . У результаті перетворень (1.11) усі члени рівнянь (1.10) одержать множники у вигляді степенів δ , котрі, в узгодженні з (1.12), повністю оцінюють ваги цих членів. Не виписуючи перетворених рівнянь, випишемо тільки відповідні показники степені, розміщуючи їх у тому ж порядку, що й члени рівнянь:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2, \quad \alpha_1 + 1, \quad \alpha_2 + 1; \quad 0, \quad 2\alpha_2 + 1, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + 1 \quad (1.13)$$

Чим менший показник степені, тим більший (при $\delta < 1$) відповідний член. Співвідношенням $\alpha_1 + 2\alpha_2 = \alpha_1 + 1 \leq \alpha_2 + 1$ відповідає рівність ваг перших двох членів першого з рівнянь (1.11) із переважанням над третім. Аналогічно, співвідношення $\alpha_1 + 2\alpha_2 = \alpha_2 + 1 \leq \alpha_1 + 1$ відповідають переважанням першого та третього членів, а співвідношення $\alpha_1 + 1 = \alpha_2 + 1 \leq \alpha_1 + 2\alpha_2$ – переважанням другого та третього членів. Вказаним трьома співвідношенням відповідає веєр із трьох променів на площині α_1, α_2 , зображений на рис. 1.

Аналогічно, різні варіанти ваг другого з рівнянь (1.10) зображені графічно другим веєром на рис. 1. Особливу роль на цьому рисунку відіграють точки I і II, які відповідають випадкам, коли у кожному з рівнянь (1.10) залишається, після відкидання другорядних доданків, по два члени.

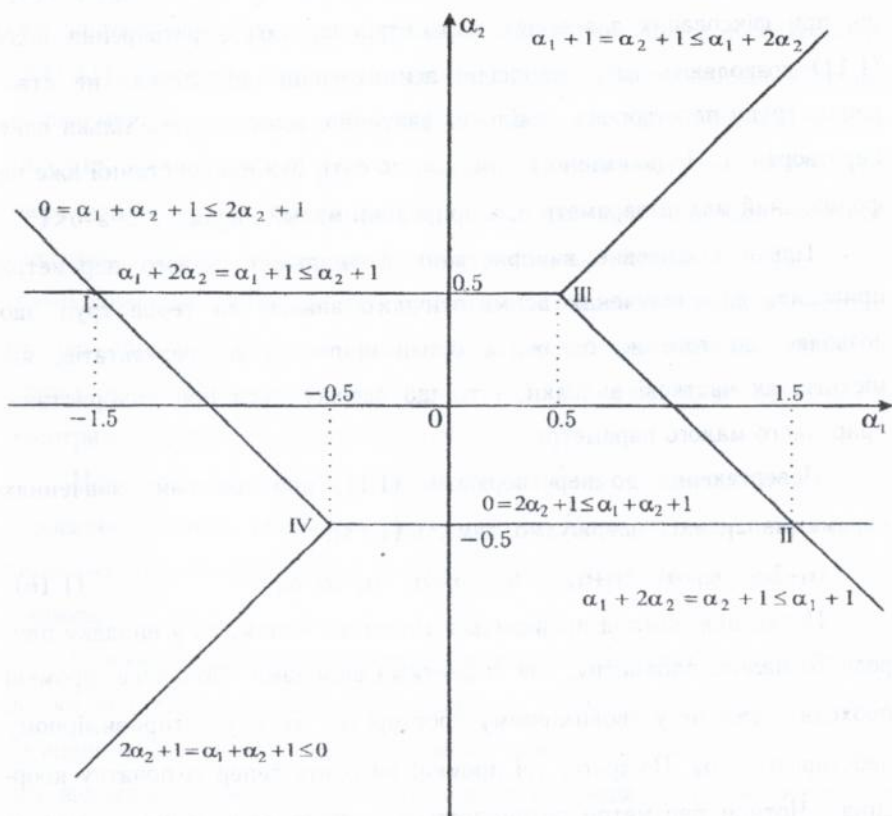


Рис. 1

Випадок I. $\alpha_1 = -1.5$, $\alpha_2 = 0.5$; спрощені рівняння:

$$\partial_X^2 U + a \partial_Y^2 U = 0, \quad \partial_Y^2 V + b \partial_X \partial_Y U = 0 \quad (1.14)$$

Випадок II. $\alpha_1 = 1.5$, $\alpha_2 = -0.5$; спрощені рівняння:

$$\partial_X^2 U + b \partial_X \partial_Y V = 0, \quad \partial_Y^2 V + a \partial_X^2 V = 0 \quad (1.15)$$

Рівняння виду (1.14) и (1.15) неодноразово застосовувались до вирішення досить складних контактних задач. Однак основні результати у цій галузі одержані без участі автора і тому тут не приводяться.

Описаний спосіб пошуку параметрів асимптотичного інтегрування може бути корисним при вирішенні конкретних задач, але він не пов'язаний, прямо, з груповими властивостями рівнянь (1.1). Річ тут у тому, що при фіксованих значеннях параметрів $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ перетворення виду (1.11) дозволяють дати відповідні асимптотичні оцінки, але не створюють групу перетворень, оскільки, фактично, вони задають тільки одне перетворення. Це пов'язано з тим, що, по суті, був використаний вже не формальний малий параметр δ , а природний малий параметр $\epsilon = a \sim b < 1$.

Тільки послідовне використання формального малого параметра приводить до сполучення асимптотичного аналізу та теорії груп, що дозволяє, до того ж, одержати більш широке коло результатів, які містять, як часткові випадки, і ті, що одержуються при використанні природного малого параметру.

Повертаючись до перетворювань (1.11) при довільних значеннях параметрів $\alpha_1, \dots, \alpha_4$, одержуємо, замість (1.13):

$$\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_4; \quad 0, 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 \quad (1.16)$$

Подальший розгляд провадиться таким же чином, як у випадку природного малого параметру, але із деякими відмінностями. По-перше, промені проходять вже не у двовимірному просторі α_1, α_2 , а у чотиривимірному просторі $\alpha_1, \dots, \alpha_4$. По-друге, усі промені виходять тепер із початку координат. Чотири параметри розшуковуються із трьох однорідних рівнянь із точністю до загального невід'ємного множника. Відповідні три рівняння будуються шляхом прирівнювання між собою показників степені, що входять у таблицю (1.16). Два рівняння одержуються як наслідок рівності між собою усіх трьох показників, відповідаючих одному з рівнянь (1.10), третє – як наслідок рівності між собою двох показників, що відповідають другому рівнянню (1.10). Це третє рівняння супроводжується

нерівністю, яка означає, що вибрані рівними два показники не є більшими, ніж третій, що відповідає більшій вазі двох членів рівнянь у порівнянні з третім. Усього, таким чином, одержуються шість різних променів, які виходять із початку координат у чотиривимірному просторі $\alpha_1, \dots, \alpha_4$.

Усі параметри, відповідаючі якомусь променю, визначені із точністю до довільного загального множника. Внаслідок цього перетворювання (1.11) створюють однопараметричну підгрупу перетворень. Спрощені рівняння, що одержуються, інваріантні відносно такої підгрупи, оскільки у них залишаються тільки ті доданки, які одержують, внаслідок перетворень (1.11) із значеннями $\alpha_1, \dots, \alpha_4$, що розглядаються, однакові множники. Таким чином, процедура побудови спрощених рівнянь на ґрунті критерію мінімального спрощення автоматично приводить до того, що спрощені рівняння допускають як ті перетворення, відносно котрих були інваріантні вихідні рівняння (1.10), так и додаткову однопараметричну підгрупу розтягнень виду (1.11).

Наявність додаткової підгрупи розтягнень є критерієм дійсного спрощення рівнянь. Наявність такої підгрупи дозволяє значно спростити перевірку тих асимптотичних оцінок, завдяки яким одержані спрощені рівняння.

Однією з особливостей підходу, що пропонується, є та, що даються оцінки не тільки шуканим величинам, але й коефіцієнтам рівнянь, тобто відомим величинам. При цьому може виявитись, що жоден із знайдених випадків мінімального спрощення не відповідає заданим значенням коефіцієнтів. У такому разі можна скористуватись тим, що знайдені промені створюють базис, за допомогою якого можливо побудувати будь які інші варіанти. Слід тільки враховувати, що лінійні комбінації променів можна брати тільки з невід'ємними множниками, тому кількість базисних променів повинна перевершувати розмірність простору, як мінімум, на один. У даному випадку для чотиривимірного простору параметрів $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ одержано шість променів.

У другій главі розглядається рівняння Клейна-Гордона:

$$\partial_x^2 u - \partial_t^2 u - u = 0, \quad (2.1)$$

де $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_t = \partial/\partial t$.

Це рівняння може описувати різні фізичні процеси. Будемо тут розглядати його як рівняння коливань струни, яка лежить на пружній основі. Тоді змінна x задає просторову координату, t – час та u – прогин струни. Усі коефіцієнти у (2.1.1) прийняти рівними одиниці, чого легко добитися замінами змінних.

Враховуючи, що рівняння (2.1) інваріантне відносно розтягань шуканої функції u , будемо піддавати розтягненню тільки диференційні оператори:

$$\partial_x = \delta^{\alpha_1} \partial_x^*, \quad \partial_t = \delta^{\alpha_2} \partial_t^*, \quad (2.2)$$

вимагаючи виконання співвідношень:

$$\partial_x^* \sim 1, \quad \partial_t^* \sim 1 \quad (2.3)$$

Розглянемо площину α_1, α_2 (рис. 2) та побудуємо на ній веер із трьох променів.

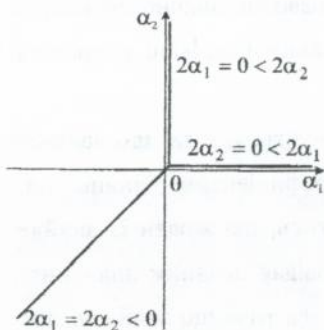


Рис 2.

Перший промінь:

$$2\alpha_1 = 2\alpha_2 < 0 \quad (2.4)$$

відповідає спрощеному рівнянню із відкинутим третім членом:

$$\partial_x^2 u - \partial_t^2 u = 0 \quad (2.5)$$

Другий промінь

$$2\alpha_1 = 0 < 2\alpha_2 \quad (2.6)$$

відповідає спрощеному рівнянню:

$$\partial_x^2 u - u = 0 \quad (2.7)$$

Третій промінь:

$$2\alpha_2 = 0 < 2\alpha_1 \quad (2.8)$$

відповідає спрощеному рівнянню:

$$\partial_t^2 \mathbf{u} + \mathbf{u} = 0 \quad (2.9)$$

Кожен з цих променів відповідає додатковій однопараметричній групі розтягнень виду (2.2), яка допускається відповідним спрощенням рівнянням. Це виходить з того, що у спрощених рівняннях залишаються тільки доданки, що одержують, завдяки перетворюванням (2.2), однакові множники.

На базі одержаних наближених рівнянь побудуємо процедури послідовних наближень. Для цього представимо шукану функцію у вигляді ряду:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{u}_i \quad (2.10)$$

Перетворювання (2.2) та співвідношення (2.3) замінімо перетворюваннями:

$$\partial_x = \delta^{\alpha_1} \partial_x^*, \partial_t = \delta^{\alpha_2} \partial_t^*, \mathbf{u}_i = \delta^{i-1} \mathbf{u}_i^* \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (2.11)$$

що приводять до співвідношень:

$$\partial_x^* \sim 1, \partial_t^* \sim 1, \mathbf{u}_i^* \sim \mathbf{u}_1^* \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (2.12)$$

У перетворених змінних ряд (2.10) приймає вид:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{u}_i^* \delta^{i-1}, \quad (2.13)$$

причому, у відповідності до (2.12), коефіцієнти при різних степенях δ цього ряду є величини одного порядку.

Підставимо (2.10) у (2.1), виконаємо перетворювання (2.11) та розщеплення по однакових степенях δ , відповідаюче деяким заданим α_1, α_2 , одержуючи замість (2.1) нескінчену рекурентну систему рівнянь. Ця система буде інваріантною відносно перетворювань (2.11), оскільки процедура розщеплення об'єднує у кожне з рівнянь системи члени, які одержують, після перетворювань (2.11), однакові степені δ . Таким чином, додаткові однопараметричні підгрупи розтягнень одержують не тільки спрощенні рівняння, але й нескінчені рекурентні системи, які будуються на базі таких рівнянь.

Зазначимо, що інваріантність рекурентної системи рівнянь відносно перетворювань (2.11) дозволяє, не змінюючи вигляду цієї системи, повернутися від перетворених до вихідних рівнянь. Таким чином, кінцеве рішення одержується у вигляді ряду (2.10), члени якого задовольняють відповідній рекурентній системі рівнянь, і при цьому ні ряд, ні рівняння не містять формально введеного малого параметру δ .

Наприклад, вибираючи $\alpha_1 = -0.5$, $\alpha_2 = -0.5$, що відповідає швидким змінам по x і t , одержуємо:

$$\partial_x^2 u_i - \partial_t^2 u_i = u_{i-1} \quad (i=1,2,\dots) \quad (2.14)$$

Розглянемо розтягнення дифференціальних операторів ∂_x і ∂_t як наслідок розтягнень аргументів x і t , що більш відповідає теорії інваріантно-групових рішень дифференціальних рівнянь. Різниця міститься у тому, що розтягнення операторів дає інформацію тільки про структуру рівнянь, у той час як розтягнення аргументів може дати інформацію і про структуру рішення. У той же час треба зазначити, що розтягнення операторів більш відповідає тому локальному підходу, на якому ґрунтується асимптотичний аналіз. При розтягненні аргументів ми розтягаємо нескінченні осі, у той час як оцінка ваг операторів завжди локальна. Однак у тих випадках, коли розтягнення аргументів асимптотично оправдане (наприклад, при постійних коефіцієнтах рівнянь), воно може допомогти у пошуці рішення рівнянь, що розглядаються.

При $\alpha_1 = -0.5$, $\alpha_2 = -0.5$ одержуємо, замість (2.11), перетворення:

$$x^* = \delta^{-0.5} x, \quad t^* = \delta^{-0.5} t, \quad u_i^* = \delta^{1-i} u_i \quad (i=1,2,\dots), \quad (2.15)$$

які знову приводять до співвідношень (2.12). Рішення, інваріантні відносно суперпозиції перетворювань (2.15), а також розтягнень шуканої функції u , можна розшукувати у виді:

$$I_i = I_i(J) \quad (i=1,2,\dots), \quad (2.16)$$

де

$$J = \frac{t}{x}, \quad I_i = x^{2-2i} u_i \quad (i=1,2,\dots) \quad (2.17)$$

– інваріанти вказаної суперпозиції перетворювань. Із (2.16) та (2.17) для шуканих величин витікає:

$$u_i = x^{2i+2\gamma-2} I_i(J) \quad (i=1,2,\dots) \quad (2.18)$$

Підставляючи (2.18) у (2.14) одержуємо, замість дифференціальних рівнянь у часткових похідних, звичайні дифференціальні рівняння:

$$(J^2 - 1) I_i'' - 2(2i - 3 + 2\gamma) J I_i' + (2i - 2 + 2\gamma)(2i - 3 + 2\gamma) I_i = I_{i-1} \quad (2.19)$$

$$(i=1, 2, \dots)$$

Таким чином, вдалось знизити розмірність простору аргументів, що i є однією з головних можливостей теорії інваріантно-групових рішень. Однак реалізована ця можливість, у даному випадку, за рахунок використання асимптотичного аналізу. Вихідне рівняння Клейна-Гордона не допускає застосування подібного підходу.

Звернемо увагу на те, що тут застосовується процедура вирішення рівнянь, яка відповідає теорії звичайних дифференціальних рівнянь, у відповідності з якою спочатку розшукується загальне рішення рівнянь, а потім підбираються значення констант інтегрування з метою задоволення яким-небудь початковим чи граничним умовам. Для задач математичної фізики такий підхід прийнято називати зворотним.

У даному разі із усіх рішень нескінченної системи рівнянь (2.19) вибрано таке, яке відповідає випромінюванню пружної хвилі від границі на півнескінченної $x \geq 0$ струни, яка спочатку перебуває у спокої. Після повернення від інваріантів до вихідних змінних воно має вид:

$$u_i = \sum_{j=1}^i u_{i,j} x^{i-j} (t-x)^{\alpha+i+j-1} \quad (i=1,2,\dots) \quad (2.20)$$

Вирази виду $t-x$ визначені при $x \leq t$ та дорівнюють нулю при $x > t$. Це відповідає наявності у збурення, що розповсюджується, фронту $x=t$.

Коефіцієнти сум (2.20) знаходяться з рекурентних співвідношень, що одержуються після підстановки (2.20) у (2.14) та приведення подібних по однакових степенях x та $t-x$:

$$u_{i,j} = \frac{(i-j+1)(i-j)u_{i,j-1} - u_{i-1,j}}{2(i-j)(\alpha + i + j - 1)} \quad \begin{pmatrix} i = 2, 3, \dots \\ j = 1, \dots, i-1 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Із співвідношень (2.21) не знаходяться коефіцієнти виду $u_{i,i}$, котрі є константами інтегрування. Якщо на границі $x=0$ струни задано зусилля:

$$T(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.22)$$

то розкладаючи відповідну функцію $T(0, t) = f(t)$ у ряд:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i t^{\alpha+2i-2} \quad (2.23)$$

($\alpha=2\gamma-1$), одержуємо:

$$u_{i,i} = \frac{u_{i,i-1} - f_i}{\alpha + 2i - 1} \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (2.24)$$

Таким чином, знайдене рішення відповідає випромінюванню хвилі від границі напівнескінченої струни, на котру у момент часу $t=0$ раптово прикладене навантаження, яке у подальшому змінюється по закону (2.23). У формі (2.23) можливо представити нескінченно багато різних видів навантажень. У частковому випадку раптово прикладеного навантаження, яке залишається постійним, $f(t)=1$ буде: $\alpha=0$, $f_1=1$, $f_i=0$ ($i>1$). На рис. 3 приведений графік зусилля T як функції x (жирна лінія).

Отримане рішення дозволяє, формально, описати усю збурену зону $0 \leq x \leq t$, однак обчислювальні особливості степенних рядів обмежують його застосування тільки околom фронту $x=t$ (котрий для досить малих значень t може охоплювати усю збурену область).

Із ростом часу поблизу фронту починають переважати доданки з $j=1$. Для таких доданків побудовані ряди співпадають з відомими рядами для функцій Беселя. Для часткового випадку раптово прикладеного навантаження маємо:

$$u_{\alpha} \approx -(t-x)\Lambda_1(z); \quad T \approx \Lambda_0(z); \quad z = \sqrt{2x(t-x)}; \quad \Lambda_\nu(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{(z/2)^\nu} J_\nu(z), \quad (2.25)$$

де $J_\nu(z)$ – функція Беселя. На рис. 3 відповідний графік для T зображений маленькими кружками. Видно, що поблизу від фронту він зближується з основним графіком.

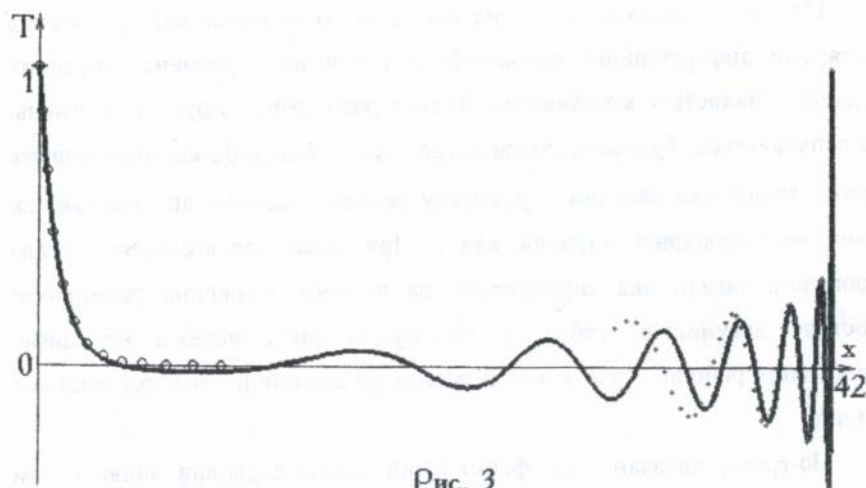


Рис. 3

Для зони поблизу від навантаженої границі при великих значеннях часу t необхідно будувати окрему, приграничну, асимптотику. Цій зоні відповідає спрощене рівняння (2.7), рішення котрого, у випадку раптово прикладеного постійного навантаження буде:

$$u \approx -e^{-x}, \quad T \approx e^{-x} \quad (2.26)$$

Відповідний графік для T (більші кружки) також зображений на рис. 3. Видна його добра відповідність з повним графіком поблизу границі.

Залишилось ще третє спрощене рівняння (2.9), рішення якого, при нульових граничних умовах, дорівнює нулю. Воно відповідає зоні, проміжній між границею та фронтом і вказує, що після проходження швидкозмінної прифронтної зони стан струни в указаній проміжній зоні повертається у вихідний, що був до прикладення навантаження.

Таким чином, на прикладі рівняння Клейна-Гордона показано, що, по-перше, запропонований у першій главі метод асимптотико-групового аналізу може бути застосований не тільки для одержання спрощених

рівнянь, але й для побудови, на базі цих рівнянь, процедури послідовних наближень, що дозволяє уточнити, до необхідних границь, одержані у першому наближенні результати.

По-друге, показано, що у тих випадках, коли можливий перехід від розтягнень диференційних операторів до розтягнень аргументів шуканих функцій, з'являється можливість, завдяки розширенню групи розтягнень, що допускається, будувати інваріантно-групові рішення, які відповідають деяким граничним задачам – у даному випадку задачам про випромінювання нестационарної пружної хвилі. При цьому досягається суттєве спрощення задачі, яка вирішується, за рахунок зниження розмірності простору аргументів, тобто, у даному випадку, перехід від диференціальних рівнянь у часткових похідних до звичайних диференціальних рівнянь.

По-третє, показано, що формальний аналіз дозволив виявити три характерні зони нестационарного збурення, що розповсюджується, які принципово відрізняються одна від іншої: прифронтову, приграничну та проміжну.

Конкретні результати, одержані на прикладі рівняння Клейна-Гордона, загалом не є принципово новими, але новою є застосована методика їх знаходження, яка далі відіграє роль еталона, на базі якого вирішуються інші, більш складні, задачі.

У третій главі розглядаються динамічні рівняння теорії пружності у декартових координатах:

$$\partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} + \partial_3 \sigma_{13} - \rho \partial_t^2 u_1 = 0; \quad E \partial_1 u_1 = \sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad (3.1)$$

$$\partial_1 \sigma_{12} + \partial_2 \sigma_{22} + \partial_3 \sigma_{23} - \rho \partial_t^2 u_2 = 0; \quad E \partial_2 u_2 = \sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})$$

$$\partial_1 \sigma_{13} + \partial_2 \sigma_{23} + \partial_3 \sigma_{33} - \rho \partial_t^2 u_3 = 0; \quad E \partial_3 u_3 = \sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

$$G(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) = \sigma_{12}; \quad G(\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1) = \sigma_{13}; \quad G(\partial_2 u_3 + \partial_3 u_2) = \sigma_{23}$$

Тут $\partial_1 = \partial/\partial x_1$, $\partial_2 = \partial/\partial x_2$, $\partial_3 = \partial/\partial x_3$, $\partial_t = \partial/\partial t$; x_1, x_2, x_3 – декартові координати, t – час; інші позначення загальноприйняті у теорії пружності.

Рівняння (3.1) інваріантні відносно чотирипараметричної групи розтягнень:

$$\partial_i = \partial_i^*, u_i = \delta^{\gamma_1} u_i^*, \sigma_{ij} = \delta^{\gamma_1} \sigma_{ij}^*, E = E^*, G = G^*, \rho = \rho^*, \partial_t = \partial_t^* \quad (3.2)$$

$$\partial_i = \delta^{\gamma_2} \partial_i^*, u_i = \delta^{-\gamma_2} u_i^*, \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^*, E = E^*, G = G^*, \rho = \rho^*, \partial_t = \delta^{\gamma_2} \partial_t^*$$

$$\partial_i = \partial_i^*, u_i = u_i^*, \sigma_{ij} = \delta^{\gamma_3} \sigma_{ij}^*, E = \delta^{\gamma_3} E^*, G = \delta^{\gamma_3} G^*, \rho = \delta^{\gamma_3} \rho^*, \partial_t = \partial_t^*$$

$$\partial_i = \partial_i^*, u_i = u_i^*, \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^*, E = E^*, G = G^*, \rho = \delta^{\gamma_4} \rho^*, \partial_t = \delta^{-0.5\gamma_4} \partial_t^*$$

$$(i, j = 1, 2, 3)$$

Інваріанти цієї групи будуть:

$$I_1 = \frac{\partial_1}{\partial_3}, \quad I_2 = \frac{\partial_2}{\partial_3}, \quad I_3 = E \frac{\partial_3 u_1}{\sigma_{23}}, \quad I_4 = E \frac{\partial_3 u_2}{\sigma_{23}}, \quad I_5 = E \frac{\partial_3 u_3}{\sigma_{23}} \quad (3.3)$$

$$I_6 = \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{23}}, \quad I_7 = \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{23}}, \quad I_8 = \frac{\sigma_{33}}{\sigma_{23}}, \quad I_9 = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{23}}, \quad I_{10} = \frac{\sigma_{13}}{\sigma_{23}}, \quad I_{11} = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \frac{\partial_t}{\partial_3}$$

Розглянемо перетворювання:

$$\partial_i = \delta^{\alpha_i} \partial_i^*, \partial_2 = \delta^{\alpha_2} \partial_2^*, \partial_3 = \partial_3^*, u_1 = \delta^{\alpha_3} u_1^*, u_2 = \delta^{\alpha_4} u_2^*, u_3 = \delta^{\alpha_5} u_3^* \quad (3.4)$$

$$\sigma_{11} = \delta^{\alpha_6} \sigma_{11}^*, \sigma_{22} = \delta^{\alpha_7} \sigma_{22}^*, \sigma_{33} = \delta^{\alpha_8} \sigma_{33}^*, \sigma_{12} = \delta^{\alpha_9} \sigma_{12}^*, \sigma_{13} = \delta^{\alpha_{10}} \sigma_{13}^*, \sigma_{23} = \sigma_{23}^*$$

$$E = E^*, G = G^*, \rho = \rho^*, \partial_t = \delta^{\alpha_{11}} \partial_t^*$$

У відповідності до цього у кожному з інваріантів (3.3) розтягується тільки одна з величин, а інші залишаються незмінними. Тому перетворювання (3.4) еквівалентні перетворюванням інваріантів, але більш зручні, тому що мають справу безпосередньо з вихідними величинами, що входять у рівняння (3.1). Результатом перетворень (3.4) є оцінка ваг інваріантів, яку у даному випадку зручно представити у вигляді:

$$\partial_i^* \sim \sqrt{\frac{\rho}{E}} \partial_i^*; \quad E \partial_i^* u_j^* \sim \sigma_{im}^* \quad (i, j, l, m = 1, 2, 3) \quad (3.5)$$

Пошук параметрів асимптотичного інтегрування виконується за допомогою алгоритма, описаного у першій главі. Однак у даному випадку одинадцятимірного простору параметрів $\alpha_1, \dots, \alpha_{11}$ реалізація цього алгоритму виконана за допомогою ЕОМ. Одержано п'ятдесят сім наборів параметрів, що відповідають критерію мінімального спрощення.

Показано, як на ґрунті спрощених рівнянь будуються процедури послідовних наближень за допомогою розкладень шуканих функцій у формальні ряди виду:

$$u_i = \sum_{k=1}^{\infty} u_i^k, \quad \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{ij}^k \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.6)$$

Докладному змістовному розгляду піддані чотири набори параметрів. Перший набір: $\alpha_1=0.5, \alpha_2=0.5, \alpha_3=-1, \alpha_4=-1, \alpha_5=-0.5, \alpha_6=-0.5, \alpha_7=-0.5, \alpha_8=0.5, \alpha_9=-0.5, \alpha_{10}=0, \alpha_{11}=0.5$ приводить до наступних рівнянь першого наближення:

$$\partial_1 \sigma_{11}^1 + \partial_2 \sigma_{12}^1 + \partial_3 \sigma_{13}^1 - \rho \partial_1^2 u_1^1 = 0; \quad E \partial_1 u_1^1 = \sigma_{11}^1 - \nu \sigma_{22}^1 \quad (3.7)$$

$$\partial_1 \sigma_{12}^1 + \partial_2 \sigma_{22}^1 + \partial_3 \sigma_{23}^1 - \rho \partial_1^2 u_2^1 = 0; \quad E \partial_2 u_2^1 = \sigma_{22}^1 - \nu \sigma_{11}^1$$

$$\partial_1 \sigma_{13}^1 + \partial_2 \sigma_{23}^1 + \partial_3 \sigma_{33}^1 - \rho \partial_1^2 u_3^1 = 0; \quad E \partial_3 u_3^1 = -(\sigma_{11}^1 + \sigma_{22}^1)$$

$$G(\partial_1 u_2^1 + \partial_2 u_1^1) = \sigma_{12}^1; \quad \partial_3 u_1^1 = 0; \quad \partial_3 u_2^1 = 0$$

Рішення цих рівнянь розшукується у виді:

$$u_1^1 = u_{1,1}^1; \quad u_2^1 = u_{2,1}^1; \quad \sigma_{11}^1 = \sigma_{11,1}^1; \quad \sigma_{22}^1 = \sigma_{22,1}^1; \quad \sigma_{12}^1 = \sigma_{12,1}^1; \quad (3.8)$$

$$\sigma_{13}^1 = x_3 \sigma_{13,1}^1; \quad \sigma_{23}^1 = x_3 \sigma_{23,1}^1; \quad u_3^1 = x_3 u_{3,1}^1; \quad \sigma_{33}^1 = \frac{(x_3)^2}{2} \sigma_{33,1}^1 + \sigma_{33,2}^1$$

Тут утримані тільки ті константи інтегрування по x_3 , котрі породжують напружено-деформований стан, симетричний відносно площини $x_3=0$. Усі функції у правих частинах виразів (3.8) залежать тільки від x_1, x_2, t ; залежність від x_3 виписана явно.

Задаваючи також симетричні граничні умови на лицевих поверхнях шару $-h \leq x_3 \leq h$:

$$\sigma_{13}^1 = h \sigma_{13,1}^1 = \tau_1^+ = -\tau_1^-; \quad \sigma_{23}^1 = h \sigma_{23,1}^1 = \tau_2^+ = -\tau_2^-; \quad \sigma_{33}^1 = \frac{h^2}{2} \sigma_{33,1}^1 + \sigma_{33,2}^1 = q^+ = q^- \quad (3.9)$$

приходимо до відомих рівнянь узагальненого плоского напруженого стану:

$$\partial_1 T_1 + \partial_2 S - \rho_1 \partial_1^2 v_1 = -\tau_1; \quad \partial_1 S + \partial_2 T_2 - \rho_1 \partial_1^2 v_2 = -\tau_2 \quad (3.10)$$

$$T_1 = B(\partial_1 v_1 + \nu \partial_2 v_2); \quad T_2 = B(\partial_2 v_2 + \nu \partial_1 v_1); \quad S = \frac{1-\nu}{2} B(\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1)$$

$$\mathbf{V} = -\frac{\nu}{2hE}(T_1 + T_2); \quad \sigma_{33,1}^1 = \rho \partial_1^2 \mathbf{V} - \frac{1}{2h}(\partial_1 \tau_1 + \partial_2 \tau_2); \quad \sigma_{33,2}^1 = p - \frac{h^2}{2} \sigma_{33,1}^1 \quad (3.11)$$

Тут v_1, v_2 – постійні по товщині шару $-h \leq x_3 \leq h$ переміщення у напрямках осей x_1 і x_2 ; T_1, T_2, S – нормальні та дотичне зусилля; τ_1, τ_2 – сумарні по двох лицевих поверхнях шару дотичні напруження у напрямках осей x_1 і x_2 ; p – нормальне напруження, що розтягає або стискує шар по товщині; переміщення \mathbf{V} характеризує зміну товщини шару, однакову по обидви боки від серединної поверхні $x_3=0$.

Функції, що знаходяться у (3.11), звичайно не враховуються при вивченні узагальненого плоского напруженого стану; але вони відіграють, у деяких випадках, досить важливу роль і у подальшому використовуються для порівняння класичних результатів з уточненими.

Для рівнянь (3.10), (3.11) дійсні асимптотичні оцінки:

$$(hD)^2 < 1; \quad D = \max\left(\partial_1, \partial_2, \sqrt{\frac{\rho}{E}} \partial_t\right) \quad (3.12)$$

Другий набір параметрів: $\alpha_1=0.5, \alpha_2=0.5, \alpha_3=-1, \alpha_4=-1, \alpha_5=-0.5, \alpha_6=-0.5, \alpha_7=-0.5, \alpha_8=-0.5, \alpha_9=-0.5, \alpha_{10}=0, \alpha_{11}=-0.5$ приводить до спрощених рівнянь:

$$\partial_1 \sigma_{11}^1 + \partial_2 \sigma_{12}^1 + \partial_3 \sigma_{13}^1 - \rho \partial_1^2 u_1^1 = 0; \quad E \partial_1 u_1^1 = \sigma_{11}^1 - \nu(\sigma_{22}^1 + \sigma_{33}^1) \quad (3.13)$$

$$\partial_1 \sigma_{12}^1 + \partial_2 \sigma_{22}^1 + \partial_3 \sigma_{23}^1 - \rho \partial_1^2 u_2^1 = 0; \quad E \partial_2 u_2^1 = \sigma_{22}^1 - \nu(\sigma_{11}^1 + \sigma_{33}^1)$$

$$G(\partial_1 u_2^1 + \partial_2 u_1^1) = \sigma_{12}^1; \quad E \partial_3 u_3^1 = \sigma_{33}^1 - \nu(\sigma_{11}^1 + \sigma_{22}^1)$$

$$\partial_2 \sigma_{33}^1 = 0; \quad \partial_3 u_1^1 = 0; \quad \partial_3 u_2^1 = 0; \quad \partial_1 \sigma_{13}^1 + \partial_2 \sigma_{23}^1 + \partial_3 \sigma_{33}^2 - \rho \partial_1^2 u_3^1 = 0$$

Тут, крім усіх рівнянь першого наближення, утримано також одне рівняння з другого наближення. Рішення рівнянь (3.13) розшукується у виді:

$$u_1^1 = u_{1,1}^1, \quad u_2^1 = u_{2,1}^1, \quad \sigma_{33}^1 = \sigma_{33,1}^1, \quad \sigma_{11}^1 = \sigma_{11,1}^1, \quad \sigma_{22}^1 = \sigma_{22,1}^1, \quad \sigma_{12}^1 = \sigma_{12,1}^1 \quad (3.14)$$

$$\sigma_{13}^1 = x_3 \sigma_{13,1}^1, \sigma_{23}^1 = x_3 \sigma_{23,1}^1, u_3^1 = x_3 u_{3,1}^1, \sigma_{33}^2 = \frac{(x_3)^2}{2} \sigma_{33,1}^2$$

При тих же граничних умовах, що й у попередньому випадку, остаточно одержуємо:

$$\partial_1 T_1 + \partial_2 S - \rho_1 \partial_t^2 v_1 = -\tau_1; \quad 2hE \partial_1 v_1 = T_1 - \nu(T_2 + K) \quad (3.15)$$

$$\partial_1 S + \partial_2 T_2 - \rho_1 \partial_t^2 v_2 = -\tau_2; \quad 2hE \partial_2 v_2 = T_2 - \nu(T_1 + K); \quad 2hG(\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1) = S$$

$$2hEV = K - \nu(T_1 + T_2); \quad \frac{2}{h^2} K + \rho_1 \partial_t^2 V = \partial_1 \tau_1 + \partial_2 \tau_2 + \frac{4}{h} P$$

Новим, у порівнюванні з (3.10), (3.11), є тут тільки позначення для зусилля K , що врівноважене вздовж осі x_3 . Рівняння (3.15) значно відрізняються від рівнянь узагальненого плоского напруженого стану (3.10), (3.11), хоч, як неважко побачити, закони зміну шуканих функцій по товщині шару $-h \leq x_3 \leq h$ (по сумі двох наближень) залишились тут попередніми. Основна різниця міститься у тому, що раніш напруження та переміщення σ_{33} та u_3 , перпендикулярні серединній площині шару $x_3=0$, не впливали на інші шукані функції, знаходячись заднім числом з формул (3.11); тепер же ці величини образують взаємопов'язану систему рівнянь (3.15).

Головною особливістю рівнянь (3.15), у порівнюванні з рівняннями (3.10), є те, що вони задають швидкості розповсюдження фронтів поздовжних та поперечних хвиль такими ж, як у випадку тривимірних рівнянь теорії пружності, залишаючись, у той же час, двовимірними рівняннями та зберігаючи ті ж порядки похідних по просторових координатах, як і рівняння (3.10), і ті ж види граничних умов на бокових поверхнях шару.

Асимптотичні оцінки (3.12) зберігаються і у цьому випадку.

Третій набір параметрів: $\alpha_1=0.5$, $\alpha_2=0.5$, $\alpha_3=-1$, $\alpha_4=-1$, $\alpha_5=-1.5$, $\alpha_6=-0.5$, $\alpha_7=-0.5$, $\alpha_8=0.5$, $\alpha_9=-0.5$, $\alpha_{10}=0$, $\alpha_{11}=1$. Спрощені рівняння першого наближення і одне з рівнянь другого наближення будуть:

$$\partial_1 \sigma_{11}^1 + \partial_2 \sigma_{12}^1 + \partial_3 \sigma_{13}^1 = 0; \quad E \partial_1 u_1^1 = \sigma_{11}^1 - \nu \sigma_{22}^1 \quad (3.16)$$

$$\partial_1 \sigma_{12}^1 + \partial_2 \sigma_{22}^1 + \partial_3 \sigma_{23}^1 = 0; \quad E \partial_2 u_2^1 = \sigma_{22}^1 - \nu \sigma_{11}^1$$

$$\partial_1 \sigma_{13}^1 + \partial_2 \sigma_{23}^1 + \partial_3 \sigma_{33}^1 - \rho \partial_t^2 u_3^1 = 0; \quad \partial_3 u_3^1 = 0$$

$$G(\partial_1 u_2^1 + \partial_2 u_1^1) = \sigma_{12}^1; \quad \partial_1 u_3^1 + \partial_3 u_1^1 = 0; \quad \partial_2 u_3^1 + \partial_3 u_2^1 = 0$$

$$E \partial_3 u_3^2 = -\nu(\sigma_{11}^1 + \sigma_{22}^1)$$

Представимо рішення рівнянь (3.16) у виді:

$$u_3^1 = u_{3,1}^1, \quad u_1^1 = x_3 u_{1,1}^1, \quad u_2^1 = x_3 u_{2,1}^1, \quad \sigma_{11}^1 = x_3 \sigma_{11,1}^1, \quad \sigma_{22}^1 = x_3 \sigma_{22,1}^1 \quad (3.17)$$

$$\sigma_{12}^1 = x_3 \sigma_{12,1}^1, \quad \sigma_{13}^1 = \frac{(x_3)^2}{2} \sigma_{13,1}^1 + \sigma_{13,2}^1, \quad \sigma_{23}^1 = \frac{(x_3)^2}{2} \sigma_{23,1}^1 + \sigma_{23,2}^1$$

$$\sigma_{33}^1 = \frac{(x_3)^3}{6} \sigma_{33,1}^1 + x_3 \sigma_{33,2}^1, \quad u_3^2 = \frac{(x_3)^2}{2} u_{3,1}^2$$

Тут у першому наближенні утримані тільки ті константи інтегрування по x_3 , котрі породжують напружено-деформований стан, антисиметричний відносно площини $x_3=0$. У виразі для єдиної функції u_3^2 із другого наближення константа інтегрування відкинута.

Доповнимо рівняння (3.16) граничними умовами, задаваючи при $x_3=\pm h$ напруження:

$$\sigma_{13}^1 = \frac{h^2}{2} \sigma_{13,1}^1 + \sigma_{13,2}^1 = \tau_1^+ = \tau_1^-, \quad \sigma_{23}^1 = \frac{h^2}{2} \sigma_{23,1}^1 + \sigma_{23,2}^1 = \tau_2^+ = \tau_2^- \quad (3.18)$$

$$\sigma_{33}^1 = \frac{h^3}{6} \sigma_{33,1}^1 + h \sigma_{33,2}^1 = q^+ = q^-$$

У результаті одержуємо:

$$\partial_1 M_1 + \partial_2 H - Q_1 = -m_1; \quad \frac{2h^3 E}{3} \partial_1 \varphi_1 = M_1 - \nu M_2 \quad (3.19)$$

$$\partial_1 H + \partial_2 M_2 - Q_2 = -m_2; \quad \frac{2h^3 E}{3} \partial_2 \varphi_2 = M_2 - \nu M_1$$

$$\frac{2h^3 G}{3} (\partial_1 \varphi_2 + \partial_2 \varphi_1) = H; \quad \varphi_1 = -\partial_1 w; \quad \varphi_2 = -\partial_2 w; \quad \partial_1 Q_1 + \partial_2 Q_2 - \rho \partial_t^2 w = -q$$

$$\mathbf{W} = -\frac{3\nu}{2h^3E}(M_1 + M_2) \quad (3.20)$$

Тут M_1, M_2, H – згинаючі та скручуючий моменти; Q_1, Q_2 – перерізуючі сили; m_1, m_2 – розповсюджені по поверхні пластини моменти, які є наслідком дотичних навантажень; φ_1, φ_2 – кути повороту нормалі; w – прогин; q – сумарне поперечне навантаження на пластину; функція \mathbf{W} задає зміну товщини пластини. Рівняння (3.19) задають класичні рівняння динамічного вигину пластини. Функція \mathbf{W} , яка знаходиться з (3.20), у класичній теорії звичайно не враховується, однак вона корисна при порівнюванні класичних рівнянь з наведеними далі уточненими рівняннями.

Асимптотичні оцінки у даному випадку мають вид:

$$\delta \sim (hD)^2 < 1; \quad D = \max \left[\partial_{1,2}, \sqrt{\frac{\rho}{E}} \partial_1 (h\partial_{1,2})^{-1} \right]; \quad \partial_{1,2} = \max(\partial_1, \partial_2) \quad (3.21)$$

Четвертий набір параметрів: $\alpha_1=0.5, \alpha_2=0.5, \alpha_3=0, \alpha_4=0, \alpha_5=-0.5, \alpha_6=0.5, \alpha_7=0.5, \alpha_8=0.5, \alpha_9=0.5, \alpha_{10}=0, \alpha_{11}=0.5$. Тут розглядаються усі рівняння першого наближення і чотири рівняння другого наближення:

$$\partial_3 \sigma_{13}^1 = 0; \quad \partial_3 \sigma_{23}^1 = 0; \quad \partial_3 u_3^1 = 0; \quad G(\partial_1 u_3^1 + \partial_3 u_1^1) = \sigma_{13}^1 \quad (3.22)$$

$$G(\partial_2 u_3^1 + \partial_3 u_2^1) = \sigma_{23}^1; \quad \partial_1 \sigma_{13}^1 + \partial_2 \sigma_{23}^1 + \partial_3 \sigma_{33}^1 - \rho \partial_t^2 u_3^1 = 0$$

$$E \partial_1 u_1^1 = \sigma_{11}^1 - \nu(\sigma_{22}^1 + \sigma_{33}^1); \quad E \partial_2 u_2^1 = \sigma_{22}^1 - \nu(\sigma_{11}^1 + \sigma_{33}^1); \quad G(\partial_1 u_2^1 + \partial_2 u_1^1) = \sigma_{12}^1$$

$$\partial_1 \sigma_{11}^1 + \partial_2 \sigma_{12}^1 + \partial_3 \sigma_{13}^1 - \rho \partial_t^2 u_1^1 = 0; \quad \partial_1 \sigma_{12}^1 + \partial_2 \sigma_{22}^1 + \partial_3 \sigma_{23}^1 - \rho \partial_t^2 u_2^1 = 0$$

$$E \partial_3 u_3^2 = \sigma_{33}^2 - \nu(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2); \quad \partial_1 \sigma_{13}^2 + \partial_2 \sigma_{23}^2 + \partial_3 \sigma_{33}^2 - \rho \partial_t^2 u_3^2 = 0$$

Рішення цих рівнянь розшукується із урахуванням як симетричних, так і антисиметричних складових:

$$\sigma_{13}^1 = \sigma_{13,1}^1, \sigma_{23}^1 = \sigma_{23,1}^1, u_3^1 = u_{3,1}^1, u_1^1 = x_3 u_{1,1}^1 + u_{1,2}^1, u_2^1 = x_3 u_{2,1}^1 + u_{2,2}^1 \quad (3.23)$$

$$\sigma_{33}^1 = x_3 \sigma_{33,1}^1 + \sigma_{33,2}^1, \sigma_{11}^1 = x_3 \sigma_{11,1}^1 + \sigma_{11,2}^1, \sigma_{22}^1 = x_3 \sigma_{22,1}^1 + \sigma_{22,2}^1, \sigma_{12}^1 = x_3 \sigma_{12,1}^1 + \sigma_{12,2}^1$$

$$\sigma_{13}^2 = \frac{(x_3)^2}{2} \sigma_{13,1}^2 + x_3 \sigma_{13,2}^2, \quad \sigma_{23}^2 = \frac{(x_3)^2}{2} \sigma_{23,1}^2 + x_3 \sigma_{23,2}^2, \quad u_3^2 = \frac{(x_3)^2}{2} u_{3,1}^2 + x_3 u_{3,2}^2$$

$$\sigma_{33}^2 = \frac{(x_3)^3}{6} \sigma_{33,1}^2 + \frac{(x_3)^2}{2} \sigma_{33,2}^2$$

Розглядаючи також довільно задані на лицевих поверхнях шару $-h \leq x \leq h$ дотичні та нормальні напруги приходимо, одночасно, і до рівнянь (3.15) для симетричного напружено-деформованого стану і до рівнянь:

$$\partial_1 M_1 + \partial_2 H - Q_1 - \frac{2h^3 \rho}{3} \partial_t^2 \varphi_1 = -m_1; \quad \partial_1 H + \partial_2 M_2 - Q_2 - \frac{2h^3 \rho}{3} \partial_t^2 \varphi_2 = -m_2 \quad (3.24)$$

$$\partial_1 Q_1 + \partial_2 Q_2 + \frac{2}{h^2} N - \frac{4h\rho}{3} \partial_t^2 w = \frac{1}{3} (\partial_1 m_1 + \partial_2 m_2)$$

$$\frac{2}{h^2} N + \frac{2h\rho}{3} \partial_t^2 w + \frac{h^3 \rho}{3} \partial_t^2 \mathbf{W} = q + \frac{1}{3} (\partial_1 m_1 + \partial_2 m_2)$$

$$\frac{2h^3 E}{3} \partial_1 \varphi_1 = M_1 - \nu(M_2 + N); \quad \frac{2h^3 E}{3} \partial_2 \varphi_2 = M_2 - \nu(M_1 + N)$$

$$\frac{2h^3 E}{3} \mathbf{W} = N - \nu(M_1 + M_2); \quad \frac{2h^3 G}{3} (\partial_1 \varphi_2 + \partial_2 \varphi_1) = H$$

$$Q_1 = \frac{4hG}{3} (\partial_1 w + \varphi_1) + \frac{m_1}{3} = \frac{4hG}{3} \beta_1 + \frac{m_1}{3}; \quad Q_2 = \frac{4hG}{3} (\partial_2 w + \varphi_2) + \frac{m_2}{3} = \frac{4hG}{3} \beta_2 + \frac{m_2}{3}$$

для антисиметричного стану.

Рівняння (3.24) є динамічними рівняннями вигину пластини. При їх виводі для кожної з шуканих функцій одержаний (по сумі двох наближень) точно такий же закон залежності від x_3 , як перед цим при виводі класичних динамічних рівнянь вигину пластини. Відрізняється тільки порядок знаходження доданків, що складають шукані функції; однак це приводить до принципово нових результатів.

На відміну від усіх відомих динамічних моделей пластин рівняння (3.24) задають ті ж швидкості розповсюдження хвильових фронтів, як і рівняння теорії пружності. Вигинаючі хвилі розповсюджуються із швидкістю позаддовжних хвиль, скручуючі та зрушуючі хвилі – із швидкістю

поперечних хвиль. Це забезпечується врахуванням поперечних, по відношенню до пластини, напруг та переміщень, які задані функціями \mathbf{N} і \mathbf{W} .

Також, як у теорії типу Тимошенко, враховується інерція повороту нормалі (доданки з $\partial_1^2 \varphi_1$ і $\partial_1^2 \varphi_2$ у перших двох рівняннях (3.24)) та зсув від перерізуючих сил. Останнє приводить до того, що граничні задачі для рівнянь (3.24) ставляться так, як для рівнянь типу Тимошенко; зокрема, окремо враховується згинаючий та скручуючий моменти та перерізуючі сили.

Асимптотичні оцінки у цьому випадку співпадають з (3.12).

Наприкінці третьої глави показано, як можна одержати відомі рівняння типу Тимошенко з рівнянь (3.24). Однак такий перехід потребує асимптотично протирічних перетворень.

У четвертій главі рівняння, одержані у третій главі, використовуються для вирішення ряду одновимірних задач про випромінювання нестационарних пружних хвиль. Це робиться як з метою демонстрації можливостей методу асимптотико-групового аналізу, так і з метою порівняння рішень на базі заново одержаних та раніше відомих рівнянь.

Оскільки виведені уточнені рівняння для симетричного та антисиметричного напружено-деформованих станів містять доданки з двох наближень, вони самі потребують подальший асимптотико-груповий аналіз. Запишемо рівняння (3.15) у формі:

$$\partial_1^2 v_1 + a_S^2 \partial_2^2 v_1 + c \partial_1 \partial_2 v_2 + c \partial_1 \mathbf{V} - \partial_1^2 v_1 = 0 \quad (4.1)$$

$$\partial_2^2 v_2 + a_S^2 \partial_1^2 v_2 + c \partial_1 \partial_2 v_1 + c \partial_2 \mathbf{V} - \partial_1^2 v_2 = 0$$

$$8(\mathbf{V} + c \partial_1 v_1 + c \partial_2 v_2) + \partial_1^2 \mathbf{V} = 0$$

$$T_1 = \partial_1 v_1 + c \partial_2 v_2 + c \mathbf{V}; \quad T_2 = \partial_2 v_2 + c \partial_1 v_1 + c \mathbf{V}; \quad a_S^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}; \quad e = \frac{1}{2(1-\nu)}$$

$$K = \mathbf{V} + c \partial_1 v_1 + c \partial_2 v_2; \quad S = a_S^2 (\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1); \quad c = \frac{\nu}{1-\nu}$$

Це рівняння у переміщеннях, які записані у безрозмірній формі. Виконуючи над ними стандартні дії, детально описані у попередніх главах, одержуємо такі три варіанти спрощених рівнянь.

Випадок 1:

$$\partial_1^2 v_1 + a_s^2 \partial_2^2 v_1 + c \partial_1 \partial_2 v_2 - \partial_1^2 v_1 = 0 \quad (4.2)$$

$$\partial_2^2 v_2 + a_s^2 \partial_1^2 v_2 + c \partial_1 \partial_2 v_1 - \partial_1^2 v_2 = 0; \quad 8c(\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2) + \partial_1^2 V = 0$$

$$T_1 = \partial_1 v_1 + c \partial_2 v_2; \quad T_2 = \partial_2 v_2 + c \partial_1 v_1; \quad K = c(\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2); \quad S = a_s^2(\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1)$$

Він відповідає швидким змінам по просторових координатах та часові.

Випадок 2. При повільних змінах по просторових координатах та часові як спрощені одержуються класичні рівняння узагальненого плоского напруженого стану:

$$\partial_1^2 v_1 + \frac{1-v}{2} \partial_2^2 v_1 + \frac{1+v}{2} \partial_1 \partial_2 v_2 - \frac{1}{a_1^2} \partial_1^2 v_1 = 0 \quad (4.3)$$

$$\partial_2^2 v_2 + \frac{1-v}{2} \partial_1^2 v_2 + \frac{1+v}{2} \partial_1 \partial_2 v_1 - \frac{1}{a_1^2} \partial_1^2 v_2 = 0$$

$$T_1 = a_1^2(\partial_1 v_1 + v \partial_2 v_2); \quad T_2 = a_1^2(\partial_2 v_2 + v \partial_1 v_1); \quad S = a_s^2(\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1)$$

$$V = -c(\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2); \quad K = 0; \quad a_1^2 = \frac{1-2v}{(1-v)^2}$$

Величина a_1 – це безрозмірна швидкість розповсюдження квазі-фронту повздожних хвиль.

Випадок 3 дає спрощені рівняння:

$$8V + \partial_1^2 V = 0; \quad c \partial_1 V - \partial_1^2 v_1 = 0; \quad c \partial_2 V - \partial_1^2 v_2 = 0 \quad (4.4)$$

$$T_1 = cV; \quad T_2 = cV; \quad K = V; \quad S = 0$$

Ці рівняння описують поперечні симетричні коливання шару. Такі самоврівноважені коливання і складають, власне кажучи, той головний ефект, який враховують уточнені рівняння (4.1) у порівнянні із звичайними рівняннями (4.3).

Для усіх варіантів спрощених рівнянь будується, як і раніш, процедура послідовних наближень.

У частковому випадку одномірної задачі ($\partial_2=0$) з (4.1) одержуємо:

$$\partial_1^2 v_1 + c \partial_1 V - \partial_1^2 v_1 = 0; \quad 8(V + c \partial_1 v_1) + \partial_1^2 V = 0 \quad (4.5)$$

$$T_1 = \partial_1 v_1 + cV; \quad T_2 = c(\partial_1 v_1 + V); \quad K = V + c \partial_1 v_1$$

Ці рівняння багато у чому нагадують по структурі рівняння Клейна-Гордона; тому їх вирішення, узявши за основу перший випадок спрощення (4.2), провадиться таким же чином. На рис. 4 приведений графік поведздовжнього зусилля T_1 для задачі про випромінювання від границі $x=0$ напівскінченної ($x \geq 0$) пластини у випадку раптово прикладеного поведздовжнього навантаження.

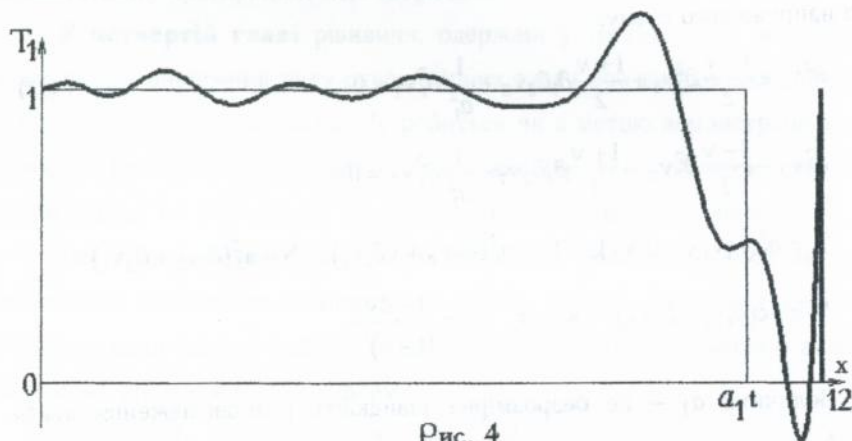


Рис. 4

Крім основного графіку (жирна лінія), на тому ж рисунку приведений і графік приграничної асимптотики (тонка лінія). У цьому випадку використовуються рівняння (4.3), які мають у одновимірному випадку вид:

$$a_1^2 \partial_1^2 v - \partial_1^2 v = 0; \quad T_1 = a_1^2 \partial_1 v, \quad T_2 = a_1^2 v \partial_1 v, \quad V = -c \partial_1 v, \quad K = 0 \quad (4.6)$$

Їх рішення для випадку раптово прикладеного постійного навантаження буде:

$$T_1 = 1, \quad v = -\frac{1}{a_1^2}(a_1 t - x), \quad T_2 = v, \quad V = -\frac{c}{a_1^2} \quad (4.7)$$

Звідси видно, що точки $x = a_1 t$, яка відповідає, згідно з рівняннями (4.6), фронту, насправді відповідає квазіфронт, у районі якого спостерігається швидкий, але не стрибкоподібний, ріст зусилля. Це явище було відоме й раніше, тут важливо те, що квазіфронт проявляється при аналізі рішення уточнених двовимірних рівнянь.

Таким же чином, як у випадку рівняння Клейна-Гордона, для прифронтної зони отримані замкнені вирази:

$$v = -(t-x)\Lambda_1(z); \quad T_1 = \Lambda_0(z); \quad z = \sqrt{16c^2 x(t-x)} \quad (4.8)$$

Відповідний графік для зусилля T_1 зображений, маленькими кружками, на рис. 5.

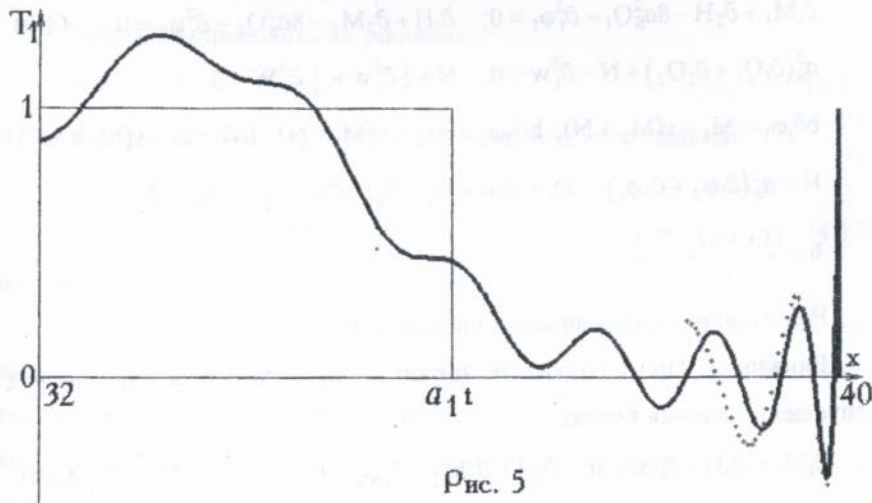


Рис. 5

Опис принципово тривимірної прифронтної зони на основі двовірних рівнянь (4.5) потребує додаткових коментарів. Описуючи не локальні ефекти, що викликані відбиттям основного фронту від лицевих поверхнь шару, а інтегральні наслідки цих ефектів, бачимо, що у точках основного фронту $x=t$ спостерігається стиснений напружений стан, викликаний раптовим виникненням напружень при відсутності

деформацій. При цьому усі три напруження σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} мають однаковий порядок. Таким чином тривимірність напруженого стану є не тільки наслідком наявності додаткових відбитих фронтів (котрі, у деяких випадках, можуть бути й відсутніми), а об'єктивною рисою картини навіть у випадку розповсюдження одновимірної хвилі.

У зоні поблизу фронту $x=t$ виникають самоврівноважені поперечні коливання шару, що призводять до зменшення поперечного напруження σ_{33} . Саме через це й виникає квазіфронт $x=a_1t$, відповідаючий перевазі напружень σ_{11} і σ_{22} над σ_{33} .

Аналогічним чином аналізується й рівняння (3.24). При відсутності навантажень на лицьових поверхнях шару ці рівняння у безрозмірній формі мають вид:

$$\partial_1 M_1 + \partial_2 H - 8a_S^2 Q_1 - \partial_t^2 \varphi_1 = 0; \quad \partial_1 H + \partial_2 M_2 - 8a_S^2 Q_2 - \partial_t^2 \varphi_2 = 0 \quad (4.9)$$

$$a_S^2 (\partial_1 Q_1 + \partial_2 Q_2) + N - \partial_t^2 w = 0; \quad N + \frac{1}{2} \partial_t^2 w + \frac{1}{16} \partial_t^2 W = 0$$

$$b \partial_1 \varphi_1 = M_1 - \nu(M_2 + N); \quad b \partial_2 \varphi_2 = M_2 - \nu(M_1 + N); \quad b W = N - \nu(M_1 + M_2)$$

$$H = a_S^2 (\partial_1 \varphi_2 + \partial_2 \varphi_1); \quad Q_1 = \partial_1 w + \varphi_1 = \beta_1; \quad Q_2 = \partial_2 w + \varphi_2 = \beta_2$$

$$b = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 - \nu}$$

Розглядаються такі випадки спрощення:

Випадок 1. При швидких змінах по x_1 , x_2 , t та перевазі φ_1 , φ_2 над w спрощені рівняння будуть:

$$\partial_1 M_1 + \partial_2 H - \partial_t^2 \varphi_1 = 0; \quad \partial_1 H + \partial_2 M_2 - \partial_t^2 \varphi_2 = 0 \quad (4.10)$$

$$a_S^2 (\partial_1 Q_1 + \partial_2 Q_2) + N - \partial_t^2 w = 0; \quad N + \frac{1}{2} \partial_t^2 w + \frac{1}{16} \partial_t^2 W = 0$$

$$b \partial_1 \varphi_1 = M_1 - \nu(M_2 + N); \quad b \partial_2 \varphi_2 = M_2 - \nu(M_1 + N); \quad 0 = N - \nu(M_1 + M_2)$$

$$H = a_S^2 (\partial_1 \varphi_2 + \partial_2 \varphi_1); \quad Q_1 = \partial_1 w + \varphi_1 = \beta_1; \quad Q_2 = \partial_2 w + \varphi_2 = \beta_2$$

Випадок 2. Перевага, у тому ж випадку, w над φ_1 , φ_2 дає:

$$\partial_1 M_1 + \partial_2 H - 8a_S^2 Q_1 - \partial_t^2 \varphi_1 = 0; \quad \partial_1 H + \partial_2 M_2 - 8a_S^2 Q_2 - \partial_t^2 \varphi_2 = 0 \quad (4.11)$$

$$a_S^2(\partial_1 Q_1 + \partial_2 Q_2) - \partial_t^2 w = 0; \quad \frac{1}{2} \partial_t^2 w + \frac{1}{16} \partial_t^2 \mathbf{W} = 0$$

$$b\partial_1 \varphi_1 = M_1 - \nu(M_2 + N); \quad b\partial_2 \varphi_2 = M_2 - \nu(M_1 + N); \quad b\mathbf{W} = N - \nu(M_1 + M_2)$$

$$N = a_S^2(\partial_1 \varphi_2 + \partial_2 \varphi_1); \quad Q_1 = \partial_1 w = \beta_1; \quad Q_2 = \partial_2 w = \beta_2$$

Випадок 3. При повільній зміні по x_1, x_2 та ще більш повільній зміні по t одержуємо спрощенні рівняння:

$$\partial_1 M_1 + \partial_2 N - 8a_S^2 Q_1 = 0; \quad \partial_1 N + \partial_2 M_2 - 8a_S^2 Q_2 = 0 \quad (4.12)$$

$$a_S^2(\partial_1 Q_1 + \partial_2 Q_2) + N - \partial_t^2 w = 0; \quad N + \frac{1}{2} \partial_t^2 w = 0$$

$$b\partial_1 \varphi_1 = M_1 - \nu M_2; \quad b\partial_2 \varphi_2 = M_2 - \nu M_1; \quad b\mathbf{W} = -\nu(M_1 + M_2)$$

$$N = a_S^2(\partial_1 \varphi_2 + \partial_2 \varphi_1); \quad 0 = \partial_1 w + \varphi_1; \quad 0 = \partial_2 w + \varphi_2$$

Це класичні рівняння вигину пластини, що записані у тих же безрозмірних величинах, що й рівняння (4.9).

Випадок 4 приводить до рівняння:

$$\partial_t^2 \mathbf{W} + 24\mathbf{W} = 0, \quad (4.13)$$

що описує коливання шару, пов'язані із зміною його товщини.

Випадок 5 приводить до рівнянь:

$$\partial_t^2 \beta_1 + 8a_S^2 \beta_1 = 0; \quad \partial_t^2 \beta_2 + 8a_S^2 \beta_2 = 0, \quad (4.14)$$

що описують зсуваючі коливання шару.

У сукупності випадки 4 та 5 доповнюють випадок 3, оскільки враховують саме ті деталі напружено-деформованого стану шару, які не фіксуються класичними рівняннями вигину. Урахування коливань, що відповідають випадкам 4 і 5, і складає головну відміну рівнянь (4.9), що пропонуються, від класичних рівнянь.

Рівняння (4.9) у одномірному випадку ($\partial_2=0$) мають вид:

$$\partial_t^2 \varphi_1 + c\partial_1 \mathbf{W} - 8a_S^2(\partial_1 w + \varphi_1) - \partial_t^2 \varphi_1 = 0 \quad (4.15)$$

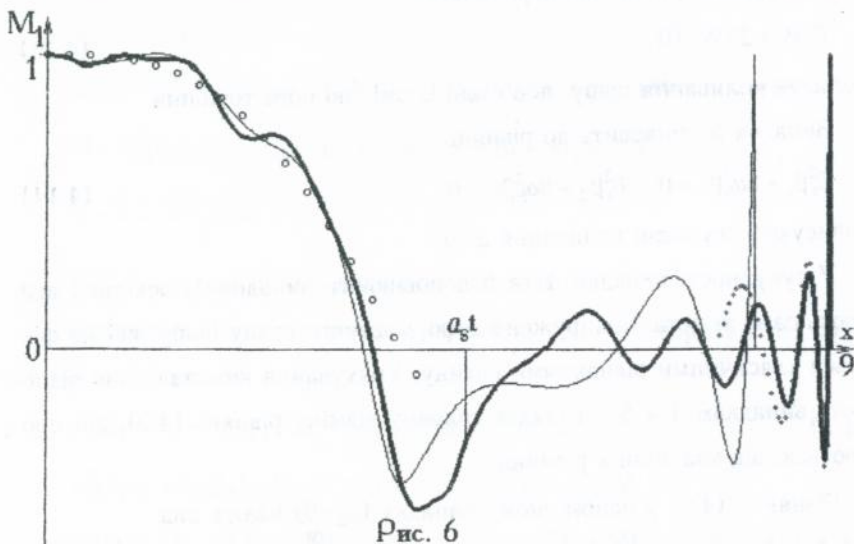
$$a_S^2 \partial_1^2 w + c\partial_1 \varphi_1 + \mathbf{W} - \partial_t^2 w = 0; \quad \mathbf{W} + c\partial_1 \varphi_1 + \frac{1}{2} \partial_t^2 w + \frac{1}{16} \partial_t^2 \mathbf{W} = 0$$

$$M_1 = \partial_1 \varphi_1 + c\mathbf{W}; \quad M_2 = c(\partial_1 \varphi_1 + \mathbf{W}); \quad N = \mathbf{W} + c\partial_1 \varphi_1; \quad Q_1 = \partial_1 w + \varphi_1$$

Вони описують розповсюдження пружних хвиль з двома фронтами: $x=t$ – фронт хвиль вигину та $x=a_s t$ – фронт хвиль зсуву. У відповідності до цього, процедура послідовних наближень, що має опору на спрощенні рівняння (4.10) та будується також, як для рівняння Клейна-Гордона, приводить до наявності, у кожному наближенні, двох доданків, відповідаючих двом фронтам. Зокрема, для φ_1 маємо:

$$\varphi_1 = \sum_{j=1}^i \varphi_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{\alpha+i+j-1} + \sum_{j=2}^i \varphi_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\alpha+i+j-1} \quad (4.16)$$

У подальшому процедура має такий же вид, що й раніше, відрізняючись тільки природною більшою громіздкістю. Для випадку раптово прикладеного постійного згинаючого моменту та відсутності на границі $x=0$ напівнескінченної $x \geq 0$ пластини перерізуючої сили одержуємо результати, які для вигинаючого моменту M_1 графічно зображені на рис. 6.



Окрім основних результатів, що відповідають більш точній теорії (жирна лінія), тут же зображені результати у відповідності до теорії типу Тимошенко (тонка лінія), класичної теорії (великі кружки) та формули для прифронтної зони (маленькі кружки). Остання одержується таким же чином, як у попередніх випадках і має вид:

$$M_1 \approx \Lambda_0(z_1); \quad z_1 = \sqrt{16gx(t-x)}; \quad r = 1 + 2c^2 \quad (4.17)$$

Результати по теорії типу Тимошенко одержуються таким же чином, як і по уточненій теорії, але тут місцезнаходження хвильових фронтів буде іншим.

Для отримання результатів по класичній теорії використовується одновимірний варіант рівнянь (4.12). Рішення цих рівнянь розшукується, у відповідності із загальним підходом, застосованим у даній роботі, як інваріантно-групове у виді:

$$\varphi = \sqrt{t} I_\varphi(I); \quad w = t I_w(I); \quad M = I_M(I); \quad Q = \frac{1}{\sqrt{t}} I_Q(I); \quad l = \frac{x}{\sqrt{t}} \quad (4.18)$$

У підсумку одержуються звичайні диференціальні рівняння відносно інваріантів, рішення яких отримано, практично, у замкненому вигляді.

Порівняння результатів, отриманих по більш точній теорії та теорії типу Тимошенко показує, що основна різниця спостерігається у прифронтівій зоні, по-перше, через різницю у швидкостях руху фронтів по двох теоріях, і по-друге, через різницю у частоті осциляцій. Позаду другого фронту (хвиль зсуву) спостерігається добре узгодження більш точних результатів з результатами по теорії типу Тимошенко; тут же спостерігається і добре узгодження з результатами, отриманими по класичній теорії.

Розглянута також задача про дію на границю $x=0$ напівнескінченної пластини раптово прикладеної постійної перерізуючої сили. Відповідні графіки для перерізуючої сили Q_1 зображені на рис. 7.

Повторюючи тут те ж, що було сказано по відношенню до графіків, зображених на рис. 6, намалюємо на різниці у результатах по більш точній теорії та теорії типу Тимошенко на другому фронті (хвиль зсуву).

У цілому результати, одержані у четвертій главі, показують можливість практичного застосування отриманих уточнених рівнянь динаміки пластин до вирішення задач про випромінювання нестационарних пружних хвиль і дозволяють порівняти знов отримані результати з відомими

із вказанням таких якісних явищ, які не фіксувались класичними моделями.

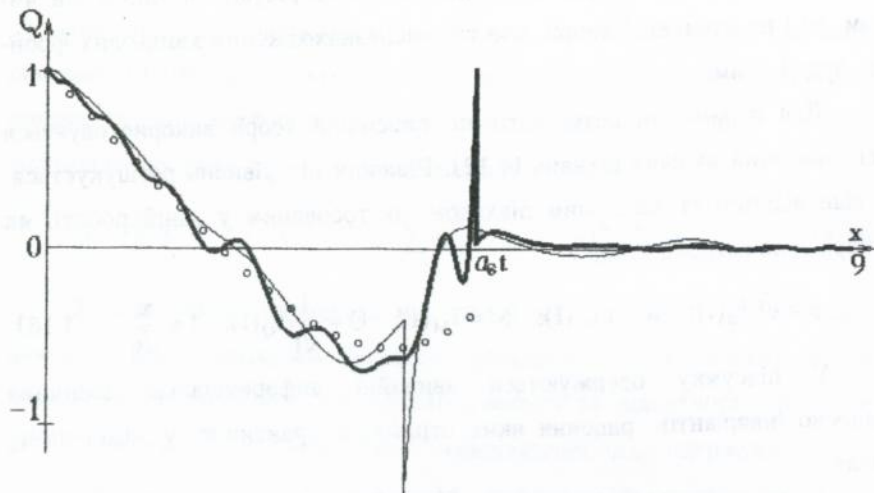


Рис. 7

У п'ятій главі розглядається вивід динамічних рівнянь теорії оболонок із динамічних рівнянь теорії пружності, записаних у довільній ортогональній криволінійній системі координат. Головна відзнака таких рівнянь від рівнянь (3.1) є, по-перше, у тому, що диференціальні оператори ∂_i одержують множники $1/H_i$, де H_i – це коефіцієнти Ляме, а по-друге, у появи додаткових членів з коефіцієнтами виду:

$$H_{ij} = \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j) \quad (5.1)$$

Коефіцієнти Ляме оцінюються разом з відповідними диференціальними операторами; нові параметри асимптотичного інтегрування потребуються для оцінки ваг шести коефіцієнтів (5.1), що задають кривизни координатних ліній. Знаходження нових параметрів виконується тут з використанням заданих значень попередніх параметрів. Розглядаються ті параметри, що призвели у четвертій главі одночасно і до симетричних і до антисиметричних уточнених динамічних рівнянь пластини. Нові параметри знаходяться, виходячи з критерію мінімального спро-

щення, із додатковою умовою, щоб жоден з нових доданків не перевіряв тих, що залишилися від випадку декартових координат.

По-друге, при побудові процедури послідовних наближень доводиться розкласти у ряди не тільки шукані функції, але й змінні коефіцієнти. При цьому необхідно дотримуватись тих же правил, що й для шуканих функцій. У частковому випадку спеціалізованої системи координат, коли координатні лінії на серединній поверхні оболонки є лініями кривизни, асимптотично обгрунтованими є вирази:

$$\frac{1}{H_1} \approx \frac{1}{A_1} - \frac{x_3}{A_1 R_1}; \frac{1}{H_2} \approx \frac{1}{A_2} - \frac{x_3}{A_2 R_2}; \frac{1}{H_3} = 1; H_{31} = 0; H_{32} = 0 \quad (5.2)$$

$$H_{12} \approx A_{12} - A_{12} \frac{x_3}{R_1}; H_{21} \approx A_{21} - A_{21} \frac{x_3}{R_2}; H_{13} \approx \frac{1}{R_1}; H_{23} \approx \frac{1}{R_2}$$

Величини A_1, A_2, R_1, R_2 не залежать від x_3 та ϵ , відповідно, коефіцієнтами першої квадратичної форми та головними радіусами кривизни вихідної поверхні.

Остаточно, застосування тієї ж методіки, яка була використана у третій главі, дає такі динамічні рівняння теорії оболонок, записані у безрозмірній формі для часткового випадку відсутності навантажень на лицевих поверхнях:

$$\frac{1}{A_1} \partial_1 M_1 + A_{21} (M_1 - M_2) + \frac{1}{A_2} \partial_2 H + 2A_{12} H - 8a_s^2 Q_1 - \partial_1^2 \phi_1 = 0 \quad (5.3)$$

$$\frac{1}{A_1} \partial_1 H + 2A_{21} H + \frac{1}{A_2} \partial_2 M_2 + A_{12} (M_2 - M_1) - 8a_s^2 Q_2 - \partial_1^2 \phi_2 = 0$$

$$a_s^2 \left(\frac{1}{A_1} \partial_1 Q_1 + A_{21} Q_1 + \frac{1}{A_2} \partial_2 Q_2 + A_{12} Q_2 \right) + N - \partial_1^2 w = 0$$

$$\frac{3}{2} \left[\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) K \right] + N + \frac{1}{2} \partial_1^2 w + \frac{1}{16} \partial_1^2 W = 0$$

$$\frac{1}{A_1} \partial_1 T_1 + A_{21} (T_1 - T_2) + \frac{1}{A_2} \partial_2 S + 2A_{12} S + a_s^2 \left(\frac{2}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) Q_1 - \partial_1^2 v_1 = 0$$

$$\frac{1}{A_1} \partial_1 S + 2A_{21} S + \frac{1}{A_2} \partial_2 T_2 + A_{12} (T_2 - T_1) + a_S^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{2}{R_2} \right) Q_2 - \partial_1^2 v_2 = 0$$

$$a_S^2 \left(\frac{1}{R_1 A_1} \partial_1 Q_1 + \frac{A_{21}}{R_2} Q_1 + \frac{1}{R_2 A_2} \partial_2 Q_2 + \frac{A_{12}}{R_1} Q_2 \right) + \frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{R_2} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) N + 8K + \partial_1^2 V = 0$$

$$b \left(\frac{1}{A_1} \partial_1 \varphi_1 + A_{12} \varphi_2 \right) = M_1 - \nu (M_2 + N); \quad b \left(\frac{1}{A_2} \partial_2 \varphi_2 + A_{21} \varphi_1 \right) = M_2 - \nu (M_1 + N)$$

$$bW = N - \nu (M_1 + M_2); \quad H = a_S^2 \left(\frac{1}{A_2} \partial_2 \varphi_1 - A_{12} \varphi_1 + \frac{1}{A_1} \partial_1 \varphi_2 - A_{21} \varphi_2 \right)$$

$$Q_1 = \frac{1}{A_1} \partial_1 w + \varphi_1; \quad Q_2 = \frac{1}{A_2} \partial_2 w + \varphi_2$$

$$b \left(\frac{1}{A_1} \partial_1 v_1 + A_{12} v_2 + \frac{w}{R_1} \right) = T_1 - \nu (T_2 + K); \quad b \left(\frac{1}{A_2} \partial_2 v_2 + A_{21} v_1 + \frac{w}{R_2} \right) = T_2 - \nu (T_1 + K)$$

$$bV = K - \nu (T_1 + T_2); \quad S = a_S^2 \left(\frac{1}{A_2} \partial_2 v_1 - A_{12} v_1 + \frac{1}{A_1} \partial_1 v_2 - A_{21} v_2 \right)$$

Ці рівняння об'єднують, для випадку оболонки, рівняння (3.15) та (3.24), які були незалежними для пластинок. Тому до них стосується усе, сказане вище у випадку пластинок.

Розглянутий також випадок довільної криволінійної ортогональної системи координат. У цьому випадку з'являється можливість використовувати у якості координатної сітки на серединній поверхні оболонки не обов'язково лінії кривизни. Крім того, з'являється можливість враховувати зміну товщини оболонки.

У всіх випадках наведені повні асимптотичні оцінки отриманих результатів. Із цих оцінок видно, що уточнені рівняння, що пропонуються, придатні для оболонок порівняно великої кривизни та для опису порівняно швидкозмінного напружено-деформованого стану.

У шостій главі рівняння, виведені у п'ятій главі, додатково вивчаються за допомогою асимптотико-групового аналізу. При цьому одержуються, по-перше, різні варіанти спрощень, відповідаючих прифронтовим зонам та різним комбінаціям ваг шуканих функцій. По-друге, розгля-

нуті випадки швидкозмінних напружено-деформованих станів, коли переважаючими є чи моментні, чи безмоментні ефекти, і оболонка, фактично, вироджується у пластинку.

Найбільш цікавими є рівняння пологих оболонок. Вони відповідають порівняно повільній зміні по координатах та ще більш повільній по часові напружено-деформованому станві. При цьому моментий (антисиметричний) стан є динамічним, а безмоментний (симетричний) – квазі-статичним.

Одержані також динамічні рівняння безмоментних оболонок. При цьому крім класичного варіанту, який відповідає порівняно великій кривизні, одержаний також і варіант пологих безмоментних оболонок. Цей останній доповнює моментні рівняння; у сукупності два одержаних варіанти динамічних рівнянь пологих оболонок дозволяють вирішувати будь які граничні задачі для оболонок невеликої кривизни.

Для оболонок, близьких до циліндричних, одержані квазіодномірні рівняння, подібні до рівнянь балки, яка лежить на пружній основі.

У сьомій главі вирішено ряд задач про випромінювання нестационарних хвиль від торця осесиметричної циліндричної оболонки з використанням отриманих уточнених рівнянь. Дослідження прифронтних зон провадиться таким же чином, як для пластинок; результати для цих швидкозмінних зон практично не відрізняються від відповідних результатів для пластинок.

Принципово нові результати отримуються для приграничних зон з повільною зміною шуканих величин. Тут виявлений так званий ефект подвійної перебудови.

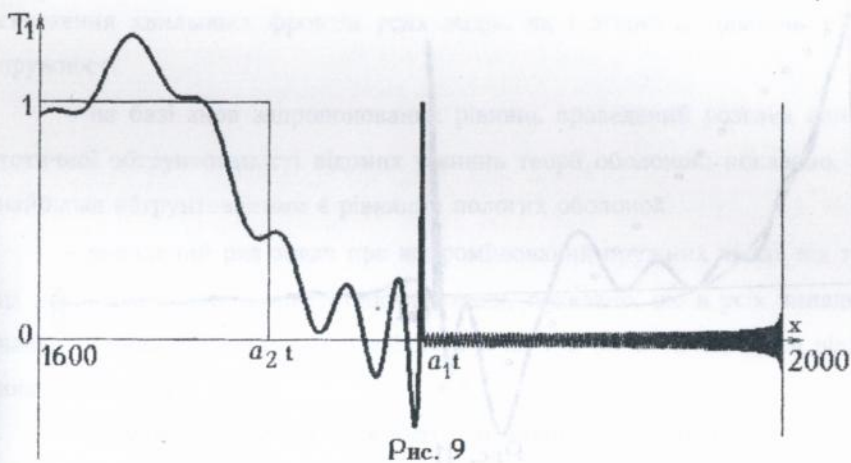
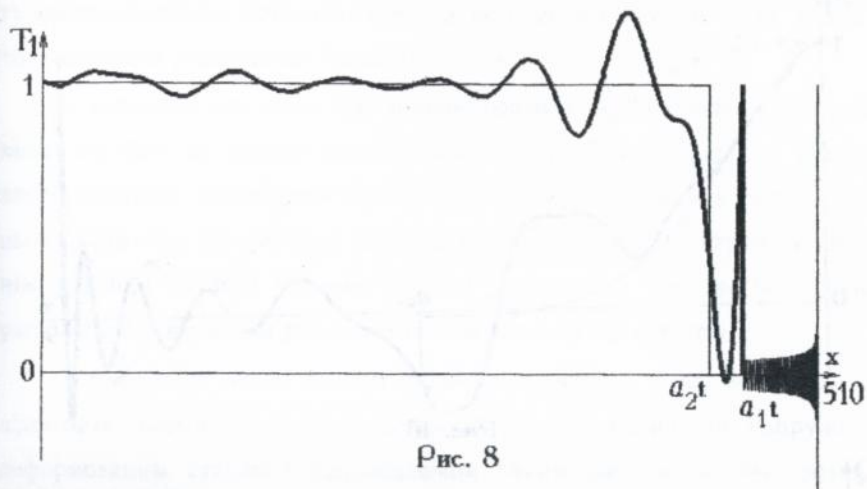
У випадку повздовжнього навантаження цей ефект зводиться до послідовного виникнення двох квазіфронтів. Перший квазіфронт виникає з тих же причин, що й для пластинки і пов'язаний з самоврівноваженими коливаннями по товщині шару, внаслідок чого тривимірний напружений стан вироджується у двовимірний. Але у випадку осесиметричної оболонки виникають також самоврівноважені кільцеві коливання,

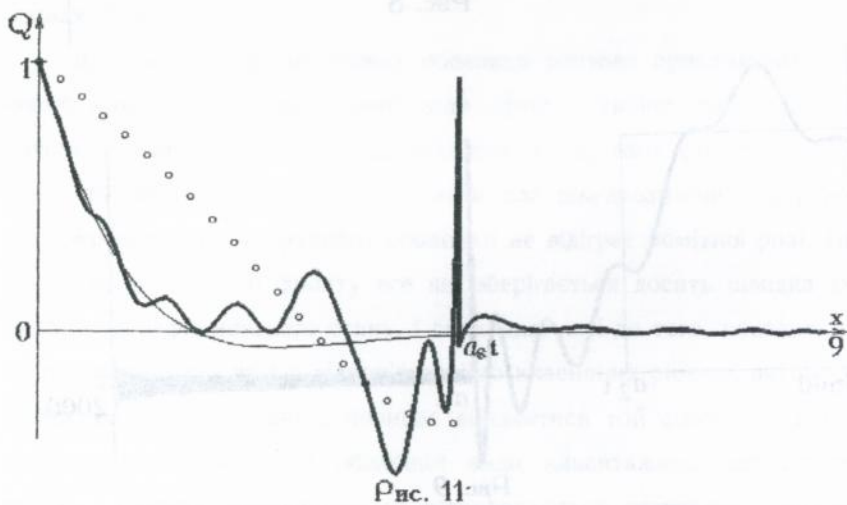
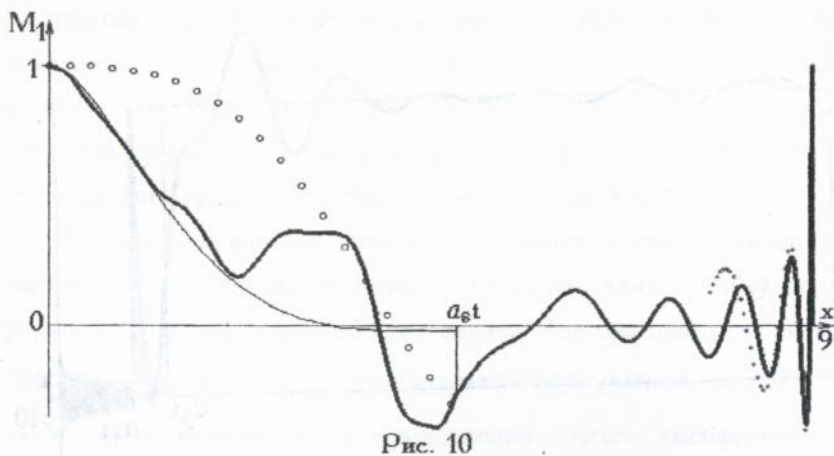
які приводять до перетворення двовимірного напруженого стану вже у одновимірний із зберіганням тільки повздовжнього зусилля і, відповідно, до появи ще одного квазіфронту, що рухається із швидкістю розповсюдження пружних хвиль у стержні. Графічно ці результати для повздовжнього зусилля T_1 зображені на рисунках 8 та 9.

Розглянутий випадок раптово прикладеної постійної повздовжньої сили та порівняльно великі моменти часу, при яких поблизу першого фронту $x=t$ частота осциляцій дуже велика. Але при цьому поблизу квазіфронту $x=a_1t$ осциляції тільки починають формуватися, оскільки їх частота значно менша. Після проходження другого квазіфронту $x=a_2t$ осциляції затухають.

Для випадків дії на торець оболонки раптово прикладених згинаючого моменту чи перерізуючої сили ефект подвійної перебудови міститься у тому, що у зоні від першого до другого фронту оболонка поводить себе, як пластинка, оскільки для швидкозмінних напружено-деформованих станів кривизна оболонки не відіграє помітної ролі. Після проходження другого фронту все ще зберігається досить швидка зміна напружено-деформованого стану, і оболонка, як і до того, поводить себе як пластинка, але вже у відповідності до класичних рівнянь вигину пластини. Ближче до границі починає виявлятися той факт, що для осесиметричної циліндричної оболонки види навантажень, що розглядаються, є самоврівноваженими та встановлюється статичний приграничний стан. Усі ці ефекти добре видні на рисунках 10 та 11, на яких, на відміну від рисунків 6 та 7, тонкими лініями зображені статичні результати.

Таким чином, і тут демонструються можливості асимптотико-групового аналізу, пов'язані із знаходженням якісних ефектів, які було б важко виявити іншими засобами.





У заключенні сформульовані основні результати дисертації, які містяться у наступному:

- розроблений метод сумісного застосування теорії груп та асимптотичного аналізу;
- вказані можливості застосування цього методу для вирішення задач про випромінювання нестационарних пружних хвиль у конструкціях різних видів.
- виведені нові варіанти динамічних рівнянь пластин для симетричної та антисиметричної деформацій, у відповідності з якими швидкос-

ті розповсюдження хвильових фронтів усіх видів є такими ж, як згідно з тривимірними рівняннями теорії пружності.

– вирішено ряд задач про випромінювання нестационарних пружних хвиль на базі як заново запропонованих, так і раніш відомих рівнянь теорії пластин; проведений порівняльний аналіз одержаних рішень; при цьому показано, що уточнені рішення краще описують прифронтіві зони, ніж рішення на базі відомих рівнянь, даваючи, у той же час, добре узгодження з відомими результатами на відстані від фронтів.

– виведений новий варіант динамічних рівнянь теорії оболонок, що відповідає оболонкам великої кривизни та швидкозмінним напружено-деформованим станам і відповідаючий таким же швидкостям розповсюдження хвильових фронтів усіх видів, як і згідно до рівнянь теорії пружності.

– на базі знов запропонованих рівнянь проведений розгляд асимптотичної обгрунтованості відомих рівнянь теорії оболонок; показано, що найбільш обгрунтованими є рівняння пологих оболонок.

– вирішений ряд задач про випромінювання пружних хвиль від торця напівнескінченої циліндричної оболонки; показано, що в усіх випадках навантаження збурена зона розділяється на три області, які дуже відрізняються одна від іншої.

Отримані результати досягнуті при використанні найбільш простих варіантів методів теорії груп та асимптотичного аналізу. Це дозволяє надіятись на досягнення більш значних результатів при використанні усіх можливостей даних методів.

Конкретний власний вклад автора у розробку результатів, що опубліковані у нижчеперелічених роботах.

Розроблений метод сумісного застосування апаратів теорії груп та асимптотичного аналізу [2,3,4,5,6,16,21].

Показана технологія застосування цього методу при вирішенні задач про випромінювання нестационарних пружних хвиль [1,7,9,10,11,15,16,17,18].

Розроблений алгоритм та складена програма його реалізації на ЕОМ для пошуку параметрів асимптотичного інтегрування у багатовимірному випадку [19,20,21].

Одержані нові варіанти динамічних рівнянь теорії пластин та оболонок; на їх основі виконаний асимптотичний аналіз відомих варіантів рівнянь [8,12,13,14].

Вирішений ряд задач про випромінювання нестационарних пружних хвиль на базі як заново запропонованих, так і відомих рівнянь; проведений порівняльний аналіз отриманих рішень [1,7,8,11,12,13,15,16,17].

Основні положення дисертації відображені у наступних публікаціях:

1. Жупиев А.Л., Шамровский А.Д. Решение некоторых динамических задач плоской теории упругости. В сб. Гидроаэромеханика и теория упругости, вып. 16. Изд. Днепропетровск. ун-та, 1973. с. 83–89.
2. Маневич Л.И., Павленко А.В., Шамровский А.Д. К решению плоской задачи теории упругости для ортотропной среды. В кн. III Всесоюзный съезд по теоретич. и прикл. механике. Аннотации докладов. М., «Наука», 1968. с. 47.
3. Маневич Л.И., Павленко А.В., Шамровский А.Д. К решению плоской задачи теории упругости для ортотропной среды. В кн. Вопросы прочности, надежности и разрушения механических систем. Днепропетровск, 1969. с. 15–25.
4. Маневич Л.И., Павленко А.В., Шамровский А.Д. Применение методов теории групп к решению динамических задач для ортотропных пластин. В кн. Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. Днепропетровск, 1969, М., «Наука», 1970. с. 408–412.

5. Маневич Л.И., Павленко А.В., Шамровский А.Д. Приближенное решение контактных задач теории упругости для ортотропной полосы, подкрепленной ребрами жесткости. В сб. Гидроаэромеханика и теория упругости, вып. 13. Изд. Днепропетровск. ун-та, 1971. с. 102–112.
6. Маневич Л.И., Шамровский А.Д. Групповой анализ динамических уравнений плоской задачи теории упругости. В кн. V Всесоюзный симпозиум по распространению упругих и упруго-пластических волн. Тезисы докладов. Алма-Ата, 1971. с. 37.
7. Пожуев В.И., Скрыпник И.А., Шамровский А.Д. Распространение антиплоской самоуравновешенной упругой волны от границы полупространства. Изв. РАН, МТТ, 1996, N 2. с. 124–133.
8. Пожуев В.И., Шамровский А.Д., Скрыпник И.А. Уточненное исследование распространения плоских волн в упругом слое на основе двумерных уравнений. Изв. вузов. Строительство. 1966, N 7. с. 44–48.
9. Свеженцев А.А., Шамровский А.Д., Пожуев В.И. Исследование прифронтных зон в задаче о распространении упругих волн от края кругового выреза в случае антиплоской деформации трансверсально-ортотропного тела. В кн. Математическое моделирование физико-математических полей и интенсификация промышленного производства. Запорожье, 1995. с. 10–15.
10. Свеженцев А.А., Шамровский А.Д. Характер волновых фронтов при излучении от края кругового выреза в трансверсально-ортотропной среде. В кн. Математическое моделирование физико-математических полей и интенсификация промышленного производства. Запорожье, 1995. с. 15–21.
11. Скрыпник И.А., Шамровский А.Д. Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости для случая антиплоских волн. В кн. Theoretical Foundations in Civil Engineering/ Тезисы докладов международной конференции. Dnepropetrovsk. Warsaw, 1993. с. 44–49.

12. Скрыпник И.А., Шамровский А.Д. Двумерное моделирование трехмерных продольных волн в плоском слое. В кн. Математическое моделирование физико-математических полей и интенсификация промышленного производства. Запорожье, 1995. с. 43–50.
13. Скрыпник И.А., Шамровский А.Д. Двумерное моделирование трехмерных поперечных и изгибных волн в плоском слое. В кн. Математическое моделирование физико-математических полей и интенсификация промышленного производства. Запорожье, 1995. с. 51–56.
14. Скрыпник И.А., Шамровский А.Д. Графическое моделирование волновых процессов в пластинах и оболочках. Тез. докл. междунар. науч.-практ. конф. Мелитополь, 1995. с. 164.
15. Шамровский А.Д. Применение методов теории групп к решению задач теории пластин типа Тимошенко. В сб. Гидроаэромеханика и теория упругости, вып. 14. Днепропетровск, 1972. с. 157–164.
16. Шамровский А.Д. Применение методов теории групп к исследованию волновых процессов в упругих пластинах и оболочках. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Днепропетровск, 1972. с. 127.
17. Шамровский А.Д. Распространение упругих волн от края кругового выреза в цилиндрической оболочке типа Тимошенко. Изв. АН СССР, МТТ, 1974, N 4. с. 69–79.
18. Шамровский А.Д. Исследование прифронтных зон в задаче о распространении упругих волн от края кругового выреза в цилиндрической оболочке типа Тимошенко. Изв. АН СССР, МТТ, 1976, N 6. с. 59–67.
19. Шамровский А.Д. Алгоритм поиска параметров асимптотического интегрирования в задачах теории пластин. Изв. АН СССР, МТТ, 1978, N 5. с. 194.
20. Шамровский А.Д. Асимптотическое интегрирование статических уравнений теории упругости в декартовых координатах с автоматизи-

рованными поиском параметров интегрирования. ПММ, 1979, том 43, вып. 5. с. 859–868.

21. Шамровский А.Д. Алгоритм поиска упрощенных моделей сложных систем. В кн. Вопросы механики и прикладной математики, вып. 3. Изд. Томского ун-та, 1981. с. 13–26.

Shamrovsky A.D. The asymptotic-group analysis of differential equations of the theory of elasticity.

Dissertation on the degree of doctor of physical-mathematical sciences on speciality 01.02.04 – mechanics of deformable solid body, Dnepropetrovsk state university, Dnepropetrovsk, 1997.

Twenty one scientific works are defended, which contain a method of joint application of the theory of groups and asymptotic analysis and received on his basis specified dynamic equations of the theory of plates and caps, as well as problem about the radiation of non-stationary elastic waves, resolved with application of a offered method on the basis as known, as again received equations with the comparative analysis of results.

Шамровский А.Д. Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела, Днепропетровский государственный университет, Днепропетровск, 1997.

Защищается 21 научная работа, которые содержат метод совместного применения теории групп и асимптотического анализа и полученные на его основе уточненные динамические уравнения теории пластин и оболочек, а также задачи об излучении нестационарных упругих волн, решенные с применением предлагаемого метода на основе как извест-

ных, так и вновь полученных уравнений со сравнительным анализом результатов.

Ключевые слова: теория групп, асимптотический анализ, теория упругости, теория пластин, теория оболочек, нестационарные волны, волновой фронт, инвариантное решение, тонкий слой, скорость распространения фронта, прифронтная асимптотика, приграничная асимптотика, квазифронт.

АВ 38.103