

Львівський державний університет  
ім. Івана Франка

*на правах рукопису*

УДК 518

Рожанківська Мар'яна Ігорівна

**ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИЙ РЕГУЛЯРИЗУЮЧИЙ  
АЛГОРИТМ І НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК  
ЛІНІЙНИХ НЕКОРЕКТНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ**

Спеціальність 01.01.07 - обчислювальна математика

**АВТОРЕФЕРАТ**

дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

Львів - 1997



00750929 (W)

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі прикладної математики Львівського державного університету "Львівська політехніка".

**Науковий керівник:**доктор фізико-математичних наук, професор  
Свявко Мар'ян Степанович**Офіційні опоненти:**доктор фізико-математичних наук, професор  
Макаров Володимир Леонідович, Київський національний університет,  
кандидат фізико-математичних наук, доцент  
Щербина Юрій Миколайович, Львівський державний університет  
імені Івана Франка.**Провідна установа:**Інститут прикладних проблем механіки і математики ІАН України,  
відділ числових методів математичної фізики.Захист відбудеться "10" *листопада* 1997 р. о. *15<sup>00</sup>* год. на засіданні спеціалізованої вченої ради К 04.04.05 при Львівському державному університеті імені Івана Франка за адресою: 290602, м. Львів, вул. Університетська, 1, ЛДУ, ауд. 261.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотечі Львівського державного університету імені Івана Франка за адресою: м. Львів, вул. Драгоманова, 5.

Автореферат розіслано "9" *серпня* 1997 р.Вчений секретар спеціалізованої вченої ради  
кандидат фізико-математичних наук,  
доцент

Б.А.Остудін

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

*Актуальність тематики та стан дослідженості проблеми.* Неперервні (ланцюгові) дроби є об'єктом вивчення і засобом наукових досліджень багатьох математиків минулого і сьогодення. За допомогою апарату неперервних дробів розв'язано багато важливих задач теорії чисел і функцій. Ланцюгові дроби застосовуються, зокрема, для зображення гіпергеометричних функцій, для розв'язування проблеми моментів. Детальний історичний огляд, присвячений неперервним дробам, викладено у монографії У.Джоунса та В.Трона (Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения: Пер. с англ. - М.: Мир, 1985. - 414с.). Широкий спектр застосувань неперервних дробів в обчислювальній математиці та теоретичній фізиці розглядається Дж.Бейкером і П.Грейвс-Моррісом (Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде: Пер. с англ. - М.: Мир, 1986.-502с.). Монографія М.С.Сяввко (Сяввко М.С. Интегральные ланцюгові дроби. -К.: Наукова думка, 1994. - 205 с.) містить велику кількість прикладів застосувань неперервних дробів і їх різного роду узагальнень.

Застосування неперервних дробів в обчислювальній математиці у більшості випадків розширює область збіжності класичних ітераційних методів, особливо для тих задач, для яких поліноміальна апроксимація є неефективною. Крім того, умови збіжності дробово-аналітичних методів суттєво відрізняються від умов збіжності лінійних ітерацій. Дроби часто дозволяють встановити і область значень досліджуваної функції.

На сьогоднішній день апарат неперервних дробів і їх узагальнень в основному використовується як практичний підхід до аналітичного продовження елементарних функцій. Але дуже обмеженою є кількість робіт, в яких би цей апарат ефективно використовувався до розв'язання операторних рівнянь. Доцільність використання тут неперервних дробів пояснюється хоча б тим, що, наприклад, в багатьох випадках розв'язок лінійних інтегральних рівнянь другого роду є мероморфною функцією параметра цього рівняння. Крім того, незважаючи на численність публікацій, присвячених проблемі дослідження і наближеного розв'язку лінійних некоректних задач, нам невідома робота, в якій би для вирішення даного питання використовувався метод апроксимацій Паде, або їх частковий випадок - апарат неперервних дробів, підхідні дроби яких утворюють діагональні і парадіагональні апроксиманти Паде.

ІНСТИТУТ ім. В. Стефаника  
АН України

Тому не викликає сумніву актуальність використання апарату ланцюгових дробів до проблем дробово-аналітичного представлення розв'язку лінійних операторних рівнянь у функціональних просторах та дослідження регуляризованих властивостей RITZ- і J-дробів.

*Метою роботи* є розробка ефективних дробово-раціональних і дробово-аналітичних методик розв'язання лінійних операторних рівнянь, встановлення достатніх умов збіжності дробово-аналітичного представлення, що відповідає формальному розкладові Ліувілья-Неймана лінійного інтегрального рівняння другого роду, до розв'язку цього рівняння, дослідження регуляризованих властивостей дробово-аналітичного методу. З цією метою використовуються відомі класи параметризованих C-, RITZ-, J- і M-дробів.

*Методика досліджень.* Використовуються методи теорії неперервних і операторних дробів, теорії дослідження некоректних задач, методи розв'язання лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма і сингулярних рівнянь, асимптотичні методи.

*Наукова новизна роботи* полягає

- у покомпонентному представленні розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь у вигляді загальних RITZ-дробів;
- у встановленні зв'язку між методами регуляризації по Бакушинському і з допомогою RITZ-дробів;
- у представленні розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь M-дробами;
- встановленні регуляризованих властивостей дробово-аналітичного методу;
- у встановленні достатніх умов збіжності дробово-аналітичного розв'язку безмежної системи лінійних алгебраїчних рівнянь і лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду;
- у представленні розв'язку тридіагональної системи лінійних рівнянь операторними ланцюговими дробами;
- у розв'язанні дробово-аналітичним методом одновимірних сингулярних рівнянь з виродженням ядром;
- у встановленні перетворення формальних по параметру розв'язків лінійних диференціальних рівнянь в неперервні RITZ-дробі.

*Наукова та практична цінність роботи.* Робота має теоретичний і практичний характер, результати сформульовані у вигляді теорем і алго-

ритмів. Започатковано новий метод регуляризації, в саме зрізаний дробово-раціональний метод. Знайдено нормальний розв'язок безмежної системи лінійних алгебраїчних рівнянь і рівняння Фредгольма першого роду. Знайдено дробовий розв'язок тридіагональної системи інтегральних рівнянь першого роду. Досліджено регуляризуючі властивості дробово-раціонального методу. Формальні по параметру розв'язки лінійних диференціальних рівнянь представлено у вигляді неперервних дробів. Знайдено їх асимптотику при прямуванні параметра цих рівнянь до нуля і безмежності.

*Основні положення дисертації, що вносяться на захист:*

- розроблення нового методу регуляризації лінійних некоректних задач, що будується на методі покоординатного представлення розв'язку у вигляді неперервних дробів;
- встановлення достатньої умови збіжності дробово-аналітичного розв'язку безмежної системи лінійних алгебраїчних рівнянь і лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду;
- використання апарату операторних неперервних дробів для побудови стійких методів розв'язання тридіагональних систем лінійних рівнянь;
- перетворення асимптотичних по параметру розв'язків лінійних диференціальних рівнянь в неперервні RITZ-дробів. Знаходження асимптотики цих розв'язків при прямуванні параметрів рівняння до нуля і безмежності.

*Вірогідність результатів* забезпечується строгістю постановок задач, математичним обґрунтуванням методів їх розв'язування та узгодженістю отриманих розв'язків з відомими для тестових задач.

*Апробація роботи.* Основні результати роботи доповідались на Другій Всеукраїнській конференції молодих вчених (Київ, 16-18 травня 1995р.); на Всеукраїнській науковій конференції "Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях" присвяченій 70-річчю від дня народження професора П.С.Казімірського (5-7 жовтня 1995р., м.Львів); на симпозіумі "Питання оптимізації обчислень" (22-24 листопада 1993р., м.Київ); на Всеукраїнській науковій конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (25-27 січня 1994р., м.Дрогобич); на Міжнародній школі-семінарі "Ланцогові дробів, їх узагальнення та застосування" (18-25 вересня 1994р., Верхнє Синевиднє); на семінарах з аналітичної теорії ланцогових дробів та їх узагальнень при ІППММ НАН України, семінарах кафедр прикладної математики Державного університету

"Львівська політехніка" та обчислювальної математики Львівського державного університету ім. Ів.Франка.

**Публікації.** Основний зміст дисертації відображено у 10 друкованих роботах автора.

**Структура і обсяг дисертації.** Дисертаційна робота складається із вступу, трьох розділів, висновків та додатку. Вона містить 139 сторінок машинописного тексту, 1 рисунок, 14 таблиць та бібліографічний список, що складається з 66 літературних джерел.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі коротко обґрунтовується актуальність тематики, характеризується стан дослідженості проблеми, яка складає предмет досліджень. Сформульовано мету та основні завдання дисертації.

У першому розділі, використовуючи аналітичну теорію неперервних загальних RITZ- та M-дробів, запропоновано чисельно стійкий алгоритм розв'язування лінійних функціональних рівнянь, який є регуляризуючим і може успішно використовуватись до розв'язання задач з поганообумовленими чи виродженими матрицями. Дослідження, проведені в цьому розділі, служать основою для побудови нового методу регуляризації некоректних інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду.

Основним типом неперервних дробів, використаним в роботі є загальні C-дроби - це неперервні дроби вигляду

$$\frac{a_1 z^{\alpha_1}}{1 +} \frac{a_2 z^{\alpha_2}}{1 +} \frac{a_3 z^{\alpha_3}}{1 +} \dots \quad a_n \neq 0 \quad (1)$$

де кожне  $\alpha_n$  - додатне ціле число, а кожне  $a_n$  - ненульове комплексне число. Якщо  $\alpha_n = 1$  для всіх  $n$ , то одержимо правильний C-дріб, який є набагато простішим в обчисленні, але правильний C-дріб, відповідний степеневому ряду, не завжди існує, в той час як відповідність між загальними C-дробами та степеневими рядами є взаємно однозначною.

Розглядається перш за все невироджена і неоднорідна скінченна система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР):

$$y_k = b_k + \lambda \sum_{j=1}^n a_{kj} y_j; \quad k = \overline{1, n} \quad (2)$$

де для всіх  $k = \overline{1, n}$   $b_k \neq 0$ ,  $A = (a_{kj})_{k, j = \overline{1, n}}$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$   
 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$

Системі (2) відповідає покомпонентно формальний по  $\lambda$  степеневий ряд (ФСР)

$$b_k + \lambda \sum_{j_1=1}^n a_{kj_1} b_{j_1} + \lambda^2 \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n a_{kj_1} a_{kj_2} b_{j_1} + \dots \quad (3)$$

який, при рівномірній збіжності, є розв'язком системи (2).

Введемо позначення

$$a_{ij}^{(1)} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}, \quad a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}^{(1)}, \quad a_{ij}^{(m)} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}^{(m-1)}$$

Тоді ряд (3) може бути записаний в більш компактній формі, а саме

$$b_k + \lambda A_k^1 + \lambda^2 A_k^2 + \dots + \lambda^r A_k^r + \dots \quad (4)$$

де

$$A_k^1 = \sum_{j=1}^n a_{kj} b_j, \quad A_k^2 = \sum_{j=1}^n a_{kj}^{(1)} b_j, \quad \dots, \quad A_k^r = \sum_{j=1}^n a_{kj}^{(r-1)} b_j, \quad \dots$$

Розв'язок системи (2) покомпонентно шукається у вигляді дробу

$$y_k = \frac{\beta_1^{(k)} \beta_2^{(k)} \lambda^{\alpha_2^{(k)}} \beta_3^{(k)} \lambda^{\alpha_3^{(k)}} \dots \beta_{s_k}^{(k)} \lambda^{\alpha_{s_k}^{(k)}}}{1 + 1 + 1 + \dots + 1} \quad (5)$$

де, враховуючи ту обставину, що дробово-раціональний розв'язок системи (2) має знаменником поліном відносно  $\lambda$  степені  $n$ , для цілих додатніх значень  $\alpha_p^{(k)}$  (для кожного  $k$ ) виконуються співвідношення

$$n = \begin{cases} \alpha_2^{(k)} + \alpha_4^{(k)} + \alpha_6^{(k)} + \dots + \alpha_{s_k}^{(k)}, & \text{якщо } s_k = 2m, \\ \alpha_2^{(k)} + \alpha_4^{(k)} + \alpha_6^{(k)} + \dots + \alpha_{s_k-1}^{(k)}, & s_k = 2m+1; \end{cases} \quad (6)$$

$$\alpha_2^{(k)} + \alpha_3^{(k)} + \alpha_4^{(k)} + \dots + \alpha_{s_k}^{(k)} \leq 2n-1, \quad s_k \leq 2n, \quad k = \overline{1, n}$$

В (6) буде виконуватися рівність при  $\alpha_2^{(k)} = \alpha_3^{(k)} = \dots = \alpha_{s_k}^{(k)} = 1$ .

**Теорема 1.** Дріб (5) буде відповідним ряду (4), якщо в ньому компоненти  $\beta_p^{(k)}$  будуть знаходитися згідно рекурентних співвідношень

$$\beta_{p+1}^{(k)} = \frac{(-1)^p}{\beta_1^{(k)} \beta_2^{(k)} \dots \beta_p^{(k)}} \left( A_k^{\Sigma_{p+1}} + Q_{p,1}^{(k)} \left( A_k^{\Sigma'_{p+1}} \right) + \dots + Q_{p, \lfloor p/2 \rfloor}^{(k)} \left( A_k^{\Sigma'_{p+1}} \right) \right) \quad (7)$$

де

$$A'_k = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_r=1}^n a_{kj_1} a_{j_1 j_2} \dots a_{j_{r-1} j_r} b_r, \quad \Sigma_{p+1} = \alpha_2^{(k)} + \alpha_3^{(k)} + \dots + \alpha_{p+1}^{(k)}, \quad (8)$$

а  $Q_{p,1}^{(k)} (A_k^{\Sigma_{p+1}})$  - це вирази

$$Q_{m,1}^{(k)} = \sum_{j=2}^m \beta_j^{(k)} \lambda^{\alpha_j^{(k)}}, \quad Q_{m,r}^{(k)} = \sum_{j=2r}^m \beta_j^{(k)} Q_{j-2r,1}^{(k)} \lambda^{\alpha_j^{(k)}}, \quad r = \overline{1, \lfloor m/2 \rfloor},$$

$$Q_{2m,m}^{(k)} = \beta_2^{(k)} \beta_4^{(k)} \dots \beta_{2m}^{(k)} \lambda^{\alpha_2^{(k)} + \alpha_4^{(k)} + \dots + \alpha_{2m}^{(k)}},$$

в яких замість  $\lambda$  підставлено значення (8) наступним чином

$$\beta_{j_1}^{(k)} \beta_{j_2}^{(k)} \dots \beta_{j_r}^{(k)} \lambda^{\alpha_{j_1}^{(k)} + \dots + \alpha_{j_r}^{(k)}} \sim \beta_{j_1}^{(k)} \beta_{j_2}^{(k)} \dots \beta_{j_r}^{(k)} A_k^{\Sigma_{r+1}} (\alpha_{j_1}^{(k)}, \dots, \alpha_{j_r}^{(k)})$$

Знаменником дробу (5) є поліном відносно  $\lambda$  степеня  $n$ :

$$Q_{s_k}^{(k)} = Q_n(\lambda) = 1 + q_1 \lambda + q_2 \lambda^2 + \dots + q_n \lambda^n = \det(I - \lambda A).$$

Цей поліном не залежить від  $k$ , а залежить від  $n$ , а дріб

$$\frac{P_{s_k}^{(k)}}{Q_{s_k}^{(k)}} = \frac{P_{s_k}^{(k)}}{Q_n} \quad k = \overline{1, n},$$

для значень  $\lambda$ , таких, що  $Q_n(\lambda) \neq 0$ , є  $k$ -ою компонентою розв'язку рівняння (2). Таким чином, для всіх  $k = \overline{1, n}$

$$P_{s_k}^{(k)}(\lambda) = b_k Q_n(\lambda) + \lambda \sum_{j=1}^n a_{kj} P_{s_j}^{(j)}(\lambda), \quad P_{s_k}^{(k)}(\lambda) = \det(I - \lambda A)_k.$$

Розглянемо тепер СЛАР виду

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} y_j = b_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad (9)$$

де для всіх  $k = \overline{1, n}$   $b_k \neq 0$ ,  $A' = (a_{kj})_{k,j=\overline{1, n}}$  - самоспряжена (не обов'язково додатна) матриця яка може бути виродженою або погано обумовленою. Тоді завдання розв'язування системи (9) полягає у відшуванні псевдорозв'язку або нормального розв'язку  $y^+ = (y_1^+, y_2^+, \dots, y_n^+)$  системи.

**Теорема 2.** При умові існування відповідних правильних С-дробів, нормальний псевдорозв'язок системи (9) може бути знайдений як

$$y^+ = - \frac{\beta_1^{(k)}}{\beta_2^{(k)}} \left( 1 + \frac{\beta_3^{(k)}}{\beta_4^{(k)}} \left( 1 + \dots \left( 1 + \frac{\beta_{2n-1}^{(k)}}{\beta_{2n}^{(k)}} \right) \right) \right), \quad k = \overline{1, n}$$

**Теорема 3.** Нормальний псевдорозв'язок системи (9) може бути знайдений як

$$y^+ = - \frac{p_{n-1}^{(k)}}{q_n}$$

де  $p_{n-1}^{(k)}$ ,  $q_n$  - коефіцієнти при  $\lambda^{n-1}$  та  $\lambda^n$  у  $P_{s_j}^{(k)}$  та  $Q_n$  відповідно.

Очевидно, що теорема 3 узагальнює теорему 2, але на відміну від регулярного випадку, нормальний псевдорозв'язок не може бути явно виражений через компоненти дробу, оскільки остаточний вигляд  $p_{n-1}^{(k)}$ ,  $q_n$  суттєво залежить від степенів  $\alpha_j^{(k)}$ .

Чисельно алгоритм знаходження нормального псевдорозв'язку у випадку нерегулярності дробу (5) (тобто саме алгоритм згортання дробу) може бути зrealizований двома способами: згортанням, використовуючи формули Валіса, або по алгоритму "із хвоста в голову". Насправді, оскільки нашою метою є відшукування тільки тих коефіцієнтів розкладу, які стоять при  $\lambda$  в максимальній степені, обидва алгоритми значно спрощуються. Найкращим же алгоритмом для чисельного знаходження самих коефіцієнтів RITZ-дробу для нашого випадку, як при регулярності так і нерегулярності дробу, слід визнати узагальнений алгоритм Вісковатова.

В той час як фактично існує лише один формальний степеневий по параметру ряд для розв'язку системи (2), можна створити декілька принципово різних дробово-раціональних представлень розв'язку. Так, у роботі побудовано таке представлення у вигляді M-дробу.

Характерною особливістю дробово-раціональних представлень розв'язків функціональних рівнянь є їх регуляризуючі властивості.

**Теорема 4. (Теорема регуляризації)** Нехай для системи (9) визначники Ганкеля  $H_{s,k}^1 \neq 0$  і  $H_{s,k}^2 \neq 0$ , а  $h \geq 0$  і  $\delta \geq 0$  - це точність задання матриці коефіцієнтів і правої частини системи відповідно. Тоді стійкість

$$\lim_{h, \delta \rightarrow 0} y_{h, \delta} = y$$

має місце, якщо в регулярному дробі (5) вибирається кількість поверхів рівна  $s$ ,  $s \leq n$ , де  $s$  визначається із співвідношення

$$\beta_2^{(k)} \beta_4^{(k)} \dots \beta_{2s}^{(k)} = 0_\epsilon$$

де  $0_\epsilon$  - це нуль згідно заданої точності,  $0_\epsilon = \max(h, \delta)$ .

Такий спосіб регуляризації не вимагає громіздких обчислень для знаходження параметра регуляризації. Вдалий вибір поверху дробу ріднить вказаний вище метод регуляризації з ітеративними методами, в яких для знаходження псевдорозв'язку потрібно вчасно зупинити ітераційний процес. Але перевага неперервних дробів полягає також в тому, що вони володіють властивістю ненакопичення похибок при обчисленні.

Розглянемо безмежну систему лінійних алгебраїчних рівнянь (БСЛАР)

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} y_j = b_k \quad (10)$$

Має місце теорема:

**Теорема 5.** Нехай, по-перше, для ФСР системи (10) визначники Ганкеля  $H_{s,k}^1$ ,  $H_{s,k}^2$  і всі  $b_k$  ( $k, s \in \overline{1, \infty}$ ) відмінні від нуля. Нехай, по-друге, при  $\beta_1^{(k)} = b_k$  коефіцієнти RITZ-дробу (5) обчислюються згідно рекурентних формул (7) і, по-третє, слід матриці  $A$  системи (10) існує

$$Sp A = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kk} < \infty$$

Тоді розв'язок системи (10) представляється у вигляді збіжної послідовності

$$\left\{ \frac{P_{2n}^{(k)}(\lambda)}{Q_{2n}^{(k)}(\lambda)} \right\}_{n=1}^{\infty} \text{ парних підхідних дробів дробу (5).}$$

Результати, отримані в даному розділі, є ключовими для подальших досліджень.

*Другий розділ* присвячено побудові стійких методів розв'язання тридіагональних систем операторних рівнянь а також дослідженню пов'язаних з ними операторних дробів.

Вводиться нове поняття фігурного операторного дробу.

Нехай  $X$  - банахів простір,  $B_i \in L(X, X)$ ,  $A_i \in L(X, L(X, X))$ ,  $C_i \in X$  ( $i \in \overline{1, \infty}$ ), де  $L(X, X)$  - множина всіх лінійних обмежених операторів, що відображають  $X$  в себе. Відомо, що  $L(X, X)$  - банахова алгебра.

**Означення.** Безмежний операторний дріб

$$\left( B_1 + A_1 \left( B_2 + A_2 (B_3 + \dots)^{-1} C_3 \right)^{-1} C_2 \right)^{-1} C_1 \quad (11)$$

назвемо фігурним операторним дробом (ФОД). В (11) оператор  $M_i^{-1}$  є узагальненим оберненим оператором Мура-Генроуза.

Досліджено властивості такого дробу, зокрема має місце теорема:

**Теорема 6.** Якщо в (11) для всіх  $i$  виконуються нерівності

$$\|B_i^{-1} A_i\| + \|B_i^{-1} C_i\| \leq 1, \quad (12)$$

(причому в (12) хоча б одна з нерівностей є строгою), то ФОД (11) є збіжним і справедливою є оцінка

$$\|\Omega\| \leq 1,$$

де  $\Omega$  - це значення збіжного дробу (11).

Сформульовано і доведено також теорему про збіжність формального розкладу деякого оператора у ФОД до цього ж оператора, а також теорему про обчислювальну стійкість ФОД.

Відомо, що прямий хід методу прогонки для тридіагональних матриць еквівалентний обчисленню підхідних дробів неперервного дробу виду (11). Умова типу (12) крім збіжності дробу, забезпечує також коректність і стійкість методу матричної прогонки з відповідними матрицями-коефіцієнтами. В роботі показано, що завдяки особливостям дробу (11) для визначення стійкості методів прогонки нарівні з умовою діагональної переваги (12) можна застосовувати умову типу Ворпітського:

$$\|B_i^{-1} A_i\| \cdot \|B_{i-1}^{-1} C_{i-1}\| \leq \frac{1}{4}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (13)$$

В загальному випадку ці умови (діагональної переваги та Ворпітського) для тридіагональних систем не включають одна одну, але для випадку системи із сталими коефіцієнтами  $B_i = B$ ,  $A_i = A$ ,  $C_i = C$ , умова (13) є ширшою і загальнішою.

На основі вивчення властивостей дробу (11) та його часткових випадків - матричного та інтегрального фігурних операторних дробів, по аналогії з методом прогонки побудовано також представлення розв'язку тридіагональної системи інтегральних рівнянь першого роду через інтегральні фігурні дробу.

**Третій розділ** повністю присвячено розв'язуванню інтегральних рівнянь різного виду.

Нехай  $\Omega$  - вимірна множина в просторі довільної кількості змінних,  $\xi$  і  $x$  - точки цієї множини,  $\mu$  - невідємна міра, визначена на  $\Omega$ . Розглянемо рівняння Фредгольма загального вигляду з виродженим ядром:

$$u(x) - \lambda \int_{\Omega} K(\xi, x) u(\xi) d\mu(\xi) = f(x) \quad (14)$$

ядро  $K(\xi, x)$  і вільний член  $f(x)$  якого задовольняють нерівностям

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} |K(\xi, x)|^2 d\mu(\xi) d\mu(x) < \infty, \quad \int_{\Omega} |f(x)|^2 d\mu(x) < \infty,$$

та умові виродженості

$$K(\xi, x) = \sum_{j=1}^n d_j(\xi) b_j(x)$$

Будемо вважати, що розв'язок  $u(x)$  рівняння (14) належить простору  $L_2(\mu, \Omega)$  функцій, квадратично сумовних в  $\Omega$  по мірі  $\mu$ .

Розв'язок інтегрального рівняння (14) з виродженим ядром можна представити у вигляді

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n c_k b_k(x) \quad (15)$$

де  $c_k$  - невідомі постійні:

$$c_k = \int_{\Omega} d_k(\xi) u(\xi) d\mu(\xi), \quad k = \overline{1, n}.$$

Задача про визначення невідомих постійних  $c_k$  зводиться до розв'язку системи  $n$  алгебраїчних рівнянь. Для її одержання помножимо (15) на  $d_j(x)$  і проінтегруємо по множині  $\Omega$ . Ввівши позначення

$$f_j = \int_{\Omega} d_j(x) f(x) d\mu(x), \quad f_{jk} = \int_{\Omega} d_j(x) b_k(x) d\mu(x),$$

з (15) маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення  $c_k$ , яку представимо у вигляді

$$c_j - \lambda \sum_{k=1}^n d_{jk} c_k = f_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (16)$$

Застосуємо для розв'язування СЛАР (16) дробово-раціональний алгоритм. Обчислювальна схема складатиметься з наступних етапів (для цілюстоти викладу зафіксуємо значення  $\lambda$ , наприклад, нехай  $\lambda=1$ ):

- знайдемо  $D^*(1)$ , де  $D^*(\lambda)$  - матриця  $D = (d_{jk})_{j,k=1, \dots, 2n}$  з системи (16);
- перейдемо від системи рівнянь (16) до рівняння Ейлера

$$\alpha c^\alpha + D^*(1)D(1)c^\alpha = D^*(1)f, \quad (17)$$

$$\text{де } c^\alpha = (c_1^\alpha, c_2^\alpha, \dots, c_n^\alpha)^T, \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$$

- Якщо для системи (17)  $\beta_s^{(i)} \neq 0 \quad \forall i = \overline{1, n}, s = \overline{1, 2n}$ , то  $i$ -ту компоненту  $c_i^\alpha$  можна представити як

$$c_i^\alpha = \frac{\beta_1^{(i)}}{\alpha - \beta_2^{(i)}} - \frac{\beta_2^{(i)}\beta_3^{(i)}}{\alpha - (\beta_3^{(i)} + \beta_4^{(i)})} - \dots - \frac{\beta_{2n-2}^{(i)}\beta_{2n-1}^{(i)}}{\alpha - (\beta_{2n-1}^{(i)} + \beta_{2n}^{(i)})}, \quad (18)$$

де  $\beta_s^{(i)}$  знаходяться згідно рекурентних співвідношень (7).

- Здійснивши в (18) граничний перехід при  $\alpha \rightarrow 0$ , одержимо нормальний розв'язок системи (16) при  $\lambda = 1$ :

$$c_i^* = -\frac{\beta_1^{(i)}}{\beta_2^{(i)}} - \frac{\beta_2^{(i)}\beta_3^{(i)}}{\beta_3^{(i)} + \beta_4^{(i)}} - \dots - \frac{\beta_{2n-2}^{(i)}\beta_{2n-1}^{(i)}}{\beta_{2n-1}^{(i)} + \beta_{2n}^{(i)}} \quad (19)$$

Даний алгоритм дозволяє дослідити розв'язки СЛАР (16) без попередніх досліджень на власні значення рівняння (14). Дійсно, при довільному  $\lambda$  знаменник дробу (18) є рівним визначнику  $\det(I - D(\lambda))$ . Отже, при  $\det(I - D(\lambda)) \neq 0$  значення дробу (19) дає єдиний розв'язок системи (16). При існуванні безмежної множини розв'язків СЛАР дріб (19) дорівнює нормальному розв'язку. Якщо ж інтегральне рівняння (14) не розв'язальне, то (19) - це псевдорозв'язок Мура-Петроуза. Таким чином, без знаходження власних значень рівняння (14) дробово-раціональний метод дає повну відповідь на поставлене питання знаходження розв'язку рівняння Фредгольма.

Іншим видом рівнянь, розглянутих у даному розділі є одновимірні сингулярні рівняння. Розроблено методіку застосування дробово-раціонального методу для знаходження розв'язків таких рівнянь в залежності від індексу рівняння. Показано, що запропонований метод доцільно використовувати, оскільки він не вимагає попередніх громіздких досліджень самого рівняння.

Предметом наступних досліджень є задачі для диференціальних рівнянь з граничними або початковими умовами (в тому числі з обома одночасно), що описують деякі процеси в певній відкритій просторовій області  $D$   $r$ -вимірному евклідовому просторі  $E^r$  з границею  $\mathcal{D}$  і в часі  $t \geq t_0$ . Можливим є і векторний випадок.

Нехай основне рівняння а також граничні та початкові умови записуються відповідно у вигляді

$$L(\Phi(x, t)) = f(x, t) + \mu g(x, t)\Phi(x, t), \quad x \in D, t > t_0, \quad (20)$$

$$\Gamma(\Phi(x, t)) = h(x, t), \quad x \in \mathcal{D}, t > t_0, \quad (21)$$

$$N(\Phi(x, t)) = \Phi_0(x), \quad x \in D, t = t_0. \quad (22)$$

Тут  $L$ ,  $\Gamma$ ,  $N$  - деякі задані лінійні оператори, причому  $\Gamma$  - оператор граничних умов,  $N$  - оператор початкових умов;  $\mu$  - числовий параметр. Функції  $f(x, t)$ ,  $g(x, t)$ ,  $h(x, t)$ , а також  $\Phi_0(x)$  вважаються заданими.

Крім того, допустимо, що Функція Гріна  $G(x, \xi, t, \tau)$  і стандартизуюча функція  $\omega(x, t)$  лівої частини задачі (20)-(22) відомі. Тоді (20)-(22) зводиться до розв'язання інтегрального рівняння

$$\Phi(x, t) = b(x, t) + \mu \int_{t_0}^t \int_{\bar{D}} G(x, \xi, t, \tau) g(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (23)$$

В (23)  $b(x, t)$  не залежить від  $\Phi$ , а лінійно виражається через  $f$ ,  $h$ , і  $\Phi_0$ . Введемо скорочені позначення

$$G(x, \xi, t, \tau) g(\xi, \tau) = K(x, \xi, t, \tau),$$

$$\int_{t_0}^t \int_{\bar{D}} h(\xi, \tau) d\xi d\tau = \int_{\Omega} h(\xi, \tau) d\xi \tau.$$

Метод послідовних наближень створює для (23) формальний по  $\mu$  степеневий ряд (ФСР):

$$b(x, t) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i A_i(x, t), \quad \text{де} \quad (24)$$

$$A_i(x, t) = \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} K(x, \xi_1, t, \tau_1) K(\xi_1, \xi_2, \tau_1, \tau_2) \dots K(\xi_{i-1}, \xi_i, \tau_{i-1}, \tau_i) b(\xi_i, \tau_i) d_{\xi_1, \tau_1} \dots d_{\xi_i, \tau_i}$$

Побудуємо для розв'язку інтегрального рівняння (23) регулярний RITZ-дріб, який відповідав би рядові (24):

$$\frac{\beta_1(x, t)}{1} + \frac{\beta_2(x, t)\mu}{1} + \frac{\beta_3(x, t)\mu}{1} + \dots \quad (25)$$

**Теорема 7.** Нехай, по-перше, для всіх  $(x, t) \in D \times [t_0, t]$   $H_k^{(s)} \neq 0$  ( $s = 1, 2; k = \overline{1, \infty}$ ),  $b \neq 0$ , де  $H_k^{(s)}$  - це визначники Ганкеля, побудовані по компонентах ряду (24), по-друге, коефіцієнти  $\beta_m$  RITZ-дроби (25) обчислюються згідно рекурентних формул виду (7) і, по-третє, слід оператора  $K$  інтегрального рівняння (23) існує:

$$Sp K = \int_{\Omega} K(\xi, \xi, \tau, \tau) d_{\xi, \tau} < \infty$$

де  $\Omega = \overline{D} \times [t_0, t]$ .

Тоді розв'язок задачі (20)-(22) представляється у вигляді збіжної послідовності  $\left\{ \frac{P_{2m}}{Q_{2m}} \right\}_{m=1}^{\infty}$  парних підхідних дробів дробу (25). Цей розв'язок є мероморфною функцією параметра  $\mu$  рівняння (23), а дріб (25) є відповідним дробом рядові (24). Крім того, існує границя такого розв'язку при прямуванні параметра  $\mu$  до безмежності

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \mu \rightarrow \infty}} \frac{P_{2m}}{Q_{2m}} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \left( 1 + \frac{\beta_3}{\beta_4} \left( 1 + \dots \right) \right) = \frac{\beta_1}{\beta_2} - \frac{\beta_2\beta_3}{\beta_3 + \beta_4} - \frac{\beta_4\beta_5}{\beta_5 + \beta_6} - \dots$$

Якщо ж в (20)  $\mu$  - малий параметр, то

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \mu \rightarrow 0}} \frac{P_{2m}}{Q_{2m}} = \beta_1$$

$$i \quad \Phi(x, t) - \frac{P_n(x, t)}{Q_n(x, t)} = O(\mu^{n+1})$$

Якщо задача (20)-(22) є статичною (не залежить від часу  $t$ ), дріб (25) буде скінченним.

І, нарешті, розглянемо інтегральне рівняння першого роду

$$Ku \equiv \int_Y K(x, y)u(y) dy = f(x), \quad x \in X, \quad (26)$$

де  $K(x, y)$  - неперервна на  $X \times Y$  функція;  $X \in E^m$ ,  $Y \in E^k$ ; множини  $X$  і  $Y$  компактні;  $f(x)$  - неперервна, не рівна тождество нулю на  $X$  функція. Будемо шукати розв'язок в просторі  $L^2_Y$ .

Викладений в частині I підхід дозволяє узагальнити спосіб наближеного розв'язування задачі (26) запропонований в монографії Е.Г. Давидова (Давыдов Э.Г. Исследование операций. -М.: Высшая школа, 1990. - 383 с.). Має місце твердження.

**Теорема 8.** Розв'язок задачі (26) існує тоді і тільки тоді, коли для довільного  $n$  і довільного набору  $x^{(i)} \in X$   $i = \overline{1, n}$  існує така функція  $\bar{u}(y) \in L^2_Y$ , яка, взагалі кажучи, залежна від вибору точки  $x^{(i)}$   $i = \overline{1, n}$ , що

$$\int_Y K(x^{(i)}, y)\bar{u}(y) dy = f(x^{(i)}), \quad i = \overline{1, n}, \quad \|\bar{u}\| \leq A,$$

де  $A > 0$  і не залежить від  $n$  і від вибору точок  $x^{(i)} \in X$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Тоді

$$\bar{u}(y) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{K(x^{(i)}, y)\beta_1^{(i)}}{1} + \frac{\beta_2^{(i)}}{1} + \frac{\beta_3^{(i)}}{1} + \dots + \frac{\beta_s^{(i)}}{1} \right),$$

де  $\beta_p^{(i)}$  знаходяться для системи

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j = c_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (27)$$

згідно співвідношень (7). В (27)

$$\int_Y K(x^{(i)}, y)K(x^{(j)}, y) dy; \quad c_i = f(x^{(i)}); \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Практична цінність дробово-раціонального методу підтверджується конкретними прикладами його застосування до розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь та рівнянь Фредгольма першого роду.

## ВИСНОВКИ

1. Здійснено докомпонентне представлення розв'язку лінійних функціональних рівнянь у вигляді загальних RITZ-дробів.
2. Розроблено новий метод регуляризації лінійних некоректних задач, що будується на покоординатному представленні розв'язку у вигляді неперервних дробів.
3. Встановлено достатню умову збіжності дробово-аналітичного розв'язку безмежної системи лінійних алгебраїчних рівнянь та інтегрального рівняння Фредгольма другого роду.
4. Досліджено і використано апарат операторних неперервних дробів для побудови стійких методів розв'язання тридіагональних систем лінійних рівнянь.
5. Дробово-аналітичним методом знайдено розв'язки одновимірного сингулярного рівняння з виродженим ядром.
6. Здійснено перетворення асимптотичних по параметру розв'язків лінійних диференціальних рівнянь в неперервні RITZ-доби. Знайдено асимптотику цих розв'язків при прямуванні параметра рівняння до нуля і безмежності.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ РОБІТ

1. Рожанківська М.І., Сявавко М.С. Операторні ланцюгові дроби та побудова коректних і стійких методів розв'язання тридіагональних систем операторних рівнянь // Доп. НАН України. - 1994, - N 9. С. 24-29.
2. Рожанківська М.І. Про один клас нелінійних диференціальних рівнянь у біології./ Вісник Державного університету "Львівська політехніка". Диференціальні рівняння та їх застосування. N 277. Львів, 1994. С. 120-123.
3. Рожанківська М.І. Про одну математичну модель керування синтезом ферменту, пов'язану з урахуванням пісидії./ Вісник Львівського політехнічного інституту. Диференціальні рівняння та їх застосування. N 269. Львів, 1993. С. 160-166.
4. Рожанківська М.І. Операторні ланцюгові дроби та їх зв'язок з методом матричної проєкції./ Праці Другої Всеукраїнської конференції

ції молодих вчених. Київ, 16-18 травня 1995 р. Математика. Збірник депоновано у ДНТБ України 4.09.95 р. Номер депонування 2034 УК 95. С. 132-139.

5. М.І.Рожанківська. Операторні ланцюгові дроби як апарат розв'язування задач оптимальної фільтрації. / Всеукраїнська наукова конференція (19-21 вересня 1995 р., м.Львів) Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях (Тези доповідей). Львів, 1995. С.71.
6. М.Рожанківська. Фігурні операторні дроби та їх зв'язок з методами прогонки. / Всеукраїнська наукова конференція "Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях" присвячена 70-річчю від дня народження професора П.С.Казімірського (5-7 жовтня 1995 р.). Тези доповідей. Частина 3. Секція: Математичне моделювання, Чисельні методи і оптимізація обчислень. Львів, 1995. С. 131.
7. Рожанківська М.І. Про стійкість операторного полінома. / Симпозіум "Питання оптимізації обчислень" (22-24 листопада 1993 р., м.Київ). Тези доповідей. Київ, 1993. С. 143.
8. М.Рожанківська. Фігурні операторні дроби і побудова коректних та стійких методів розв'язку операторних рівнянь. / Всеукраїнська наукова конференція "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (25-27 січня 1994р., м.Дрогобич). Тези доповідей. Київ, 1994. С. 140.
9. М.Рожанківська. Про дробово-раціональний метод регуляризації рівнянь першого роду і використання параметру релаксації. / Міжнародна школа-семінар "Ланцюгові дроби, їх узагальнення та застосування" (18-25 вересня 1994 р., Верхнє Синевидне). Тези доповідей. Львів, 1994. С. 11.
10. Рожанківська М.І. Представлення розв'язків лінійних рівнянь у вигляді загальних  $S$ -дробів. / Наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу" (24-27 вересня 1996р., м.Івано-Франківськ). Івано-Франківськ, 1996. С. 136.

*Особистий внесок претендента.* Всі результати, що складають основний зміст роботи, отримані автором самостійно. В публікації [1], яка написана у співавторстві, атору належать всі теореми і означення першої і третьої частин, на які структурно розбита стаття.

Rozhankiv's'ka M.I. **The fraction-rational regularization algorithm and approached solution of the linear incorrect integral equations.** - Manuscript.

Thesis for a master's degree of physical and mathematical sciences on speciality 01.01.07 - computation mathematic. - Ivan Franko Lviv State University, Lviv, 1997.

New method of regularization of linear incorrect problems which is based on co-ordinate representation of the solution in a kind of continuous fractions is developed. The sufficient criteria of convergence of the fraction-analytical decision of the functional equation of the second kind is established. The apparatus of continuous fractions is used for the solution of the integral equations of a various kinds.

Рожанківська М.І. **Дробно-раціональний регуляризувальний алгоритм і приближене рішення лінійних некоректних інтегральних рівнянь.** - Рукопис.

Дисертація на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07 - вычислительная математика. - Львовский государственный университет имени Ивана Франко, Львов, 1997.

Разработан новый метод регуляризации линейных некорректных задач, который базируется на координатном представлении решения в виде непрерывных дробей. Установлен достаточный признак сходимости дробно-аналитического решения функционального уравнения второго рода. Аппарат непрерывных дробей использован для решения интегральных уравнений различного вида.

**Ключові слова:** некоректно поставлена задача, псевдорозв'язок, регуляризація, дробно-аналітичний розв'язок, неперервний дріб, тридіагональна система лінійних рівнянь, інтегральні рівняння, сингулярні рівняння.

43246

**АВ 38.118**

Підписано до друку 17.05.97. Формат 60x84/16. Папір друк. №1.  
Друк офсетн. Умовн.друк.арк. 1,25. Обл.-вид.арк. 1,25.  
Умовн.фарб.відб. 1,3. Тираж 100. Зам. 94.

Машинно-офсетна лабораторія Львівського держуніверситету  
Ім. Івана Франка. 290602 Львів, вул. Університетська, 1.