

Національна академія наук України
Фізико-механічний інститут ім.Г.В.Карпенка

на правах рукопису

Зіяд Рашид Каддур

**ЗГИН ЗАЛІЗОБЕТОННИХ БАЛОК
З НАХИЛЕНИМИ ТРІЩИНАМИ**

05.02.07 - механіка деформівного твердого тіла

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Львів - 1997 р.

39.3



00738109 (S)

Дисертацією є рукопис
Робота виконана в Фізико-механічному
ім.Г.В.Карпенка НАН України.

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних
наук, провідний науковий
співробітник
Бережницький Лев Теодорович

Офіційні опоненти: доктор технічних
наук, професор
Стадник Мирон Михайлович

кандидат технічних
наук, старший науковий
співробітник
Лучко Йосип Йосипович

Провідна організація: Науково-дослідний інститут
технології виробництва
будівельних конструкцій
Державного комітету України
у справах містобудування і
архітектури, м.Київ

Захист відбудеться 2 липня 1997р., о 14⁰⁰ годині
на засіданні спеціалізованої вченої ради Д.04.01.03 в
Фізико-механічному інституті ім.Г.В.Карпенка НАН
України, за адресою: 290601, м.Львів, МСП,
вул.Наукова, 5.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці
Фізико-механічного інституту ім.Г.В.Карпенка НАН
України.

Автореферат розісланий "01" червня 1997 року.

Вчений секретар
спеціалізованої ради

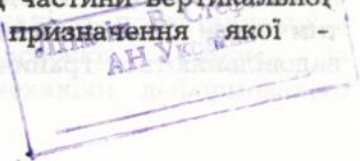
Никифорчин Г.М.

Загальна характеристика роботи.

Актуальність роботи. Залізобетон у всіх його різновидностях став основним будівельним матеріалом. Якщо врахувати великі і всезростаючі масштаби будівництва у всьому світі, то можна собі уявити, як важливо вміти раціонально проектувати залізобетонні конструкції, адже навіть невелика економія матеріалу на конструкціях масового застосування дає значну економію матеріальних ресурсів.

Раціональність і економічність конструкції, що проектується, залежить від багатьох факторів, в тому числі і від прийнятого методу розрахунку конструкції.

В числі факторів, що утруднюють створення методики розрахунку, слід відзначити наявність тріщин в розтягнутих зонах залізобетону, які виникають при порівняльно малих навантаженнях внаслідок низького опору бетону розтягові. Крім того, бетон працює сумісно з арматурою, тому необхідно враховувати різнофазність залізобетону. Оскільки в більшості залізобетонних конструкцій при експлуатації утворюються тріщини, то зрозуміла важливість оцінки їх напружено-деформованого стану при наявності тріщин. Вони можуть бути як нормального розриву, що перпендикулярні до осі балки, так і нахилені до її осі. Останні, як правило утворюються в околі опор, закладення балки, точніше говорячи в тій її приопорній частині, де діють значні перерізуючі сили. На даний час є аналітичні дослідження утворення і розвитку тріщин нормального розриву в залізобетонних балках, що згинаються. Але практично відсутні аналітичні дослідження розвитку похилих тріщин. Їх розвиток в значній мірі залежить від рівня дотичних напружень в бетоні біля опор балки, тобто від частини вертикальної арматури (хомутів), основне призначення якої -



сприйняття частини дотичних напружень. Розрахунки необхідної частини цієї арматури проводять до емпіричних формул, які різні в різних країнах.

Тому необхідно володіти аналітичним розв'язком задачі про залежність дотичного напруження в бетоні від частини вертикальної арматури і, як наслідок, визначити довжину похилих тріщин від її частини. Цей розв'язок повинен бути заснований на рівняннях теорії пружності і механіки руйнування.

Механіку руйнування враховували при розрахунку бетону, залізобетону і конструкцій з них такі вчені як Андрейків О.Е., Бережницький Л.Т., Зайцев Ю.В., Гладішев Г.М., Дорошкевич Л.А., Зайцев Ю.В., Залесов А.С., Лучко Й.Й., Мухітдін, Панасюк В.В., Пересипкін Є.М., Русинко К.М., Трапезников Л.П., Чубриков В.М.

Отриманий нами розв'язок дає можливість оцінки необхідної частини вертикальної арматури, що і визначає актуальність роботи.

Метою роботи є розробка методу врахування впливу вертикальної арматури на напружено-деформований стан (НДС) балки; виведення і розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь, що описують розкриття берегів похилих тріщин в припорних ділянках, обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень і визначення, згідно критерію Ірвіна, довжини тріщини в залежності від величини навантаження і густини армування; порівняння з експериментом і практичні рекомендації, що витікають з аналізу отриманих залежностей.

Наукова новизна. В роботі приведено уточнений розв'язок задачі теорії пружності при агині однорідної ізотропної балки. Він будується з врахуванням наявності кінцевості опорних ділянок, які сприймають тимчасове навантаження. В такій поставі точно задовільняються граничні умови на кінцях балки, а не

тільки з точністю до принципу Сен-Венана. Цим відрізняється запропонований розв'язок від загальновідомих, де наявність опор не враховується. В них розв'язок задачі про згин балки підміняється згином смуги, до торців якої прикладуються дотичні зусилля, що зрівноважують поперечне навантаження. Але закон розподілу цих зусиль невідомий, тому вказаний розв'язок непридатний в околі торця балки, де утворюються похилі тріщини.

В подальшому в роботі запропонований метод врахування впливу вертикальної арматури на НДС балки. Вважаємо, що в поперечному перерізі балки нормальне і дотичне напруження в бетоні і арматурі співпадають між собою, відрізняється тільки нормальне напруження в горизонтальних площинах в бетоні. Приймається, що відносне видовження бетону і арматури в напрямку останньої, співпадають між собою. При цьому НДС як в бетоні, так і арматурі знаходиться за допомогою неперервних функцій.

Складена система двох інтегральних рівнянь, одне з яких сингулярне, що описують розвиток похилої тріщини. Рівняння містять дві невідомі функції - похідні від нормального і дотичного розриву зміщень протилежних берегів тріщини.

Віднайдені КІН K_1 і, згідно формули Ірвіна, отримані критичні довжини похилої тріщини. Підтверджені експериментально отримані в роботі аналітичні залежності.

Практична цінність. Отримані аналітичні залежності доведені до числа і графіків. На їх основі робляться висновки про (не)відповідність рекомендаціям СНиПу і даних, що витікають із наших досліджень. Визначені оптимальні розміри армованої балки.

Достовірність і обґрунтованість представлених в роботі результатів і висновків слідує із фундаментальних положень механіки деформованого

тіла і механіки руйнування; співставлення розв'язків, отриманих різними методами; контролю точності вчислень на ЕОМ.

Для розв'язання задач автор застосовує наступний магематичний апарат і методи дослідження: методи рядів Фур'є; методи механіки деформованих тіл; числові методи розв'язку сингулярних рівнянь, зокрема метод механічних квадратур; методи механіки руйнування і експериментальні методи.

Автор захищає такі основні положення:

- визначення НДС суцільної пружної балки з точним задоволенням граничних умов на її торцях при дії на неї розподіленого навантаження і при врахуванні кінцевості приопорних ділянок;
- встановлення НДС в суцільній балці, що армована вертикальними хомутиами;
- визначення функцій напружень Мусхелішвілі для пружних однорідних і ізотропних напівплощин і площини, що послаблені двома розрізами, нахиленими під кутом $\alpha = \pi/4$ до границі півплощини;
- складання і розв'язок системи двох інтегральних рівнянь, що визначають НДС в балці, що згинається і послаблена двома похилими симетричними відносно середини балки тріщинами;
- практичні висновки із отриманих розв'язків про необхідну кількісну величину армування балок.

Публікації. По темі дисертації опубліковано 4 друковані роботи. З них одна стаття депонована журналом ФХХМ, дві статті вийшли в журналі ФХММ, одна стаття - в матеріалах II Міжнародного симпозіуму "Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій". Львів-Дубляни, Україна, в 1996 році.

Особливий вклад автора дисертації - роботи, що опубліковані в співавторстві.

В співавторстві опубліковано 2 роботи, [3,4] в яких співавтору належить участь в постановці задачі, методів розв'язку, і аналізу отриманих результатів.

Апробація роботи. Основні результати і положення дисертації в цілому доповідались на II Міжнародному симпозиумі "Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій" 7-10 жовтня 1996 року, Львів - Дубляни, Україна, у відділі механіки композиційних матеріалів Фізико-механічного інституту, та на загальноінститутському семінарі з механіки квазікрихкого руйнування, на кафедрі теоретичної механіки Держуніверситету "Львівська політехніка", на семінарі з крихкого руйнування в інституті механіки НАН України, Київ.

Структура і об'єм роботи. Дисертаційна робота складається з вступу, шістьох глав, основних результатів і висновків, списку використаної літератури.

Загальний об'єм роботи 140 сторінок, в тому числі 39 рисунків, 3 таблиці. Список літератури містить 114 назв.

Основний зміст роботи.

В першій главі приведений короткий огляд робіт з міцності бетонних і залізобетонних балок, з якого витікає актуальність даної дисертаційної роботи. Приведені також деякі відомі плоскі співвідношення теорії пружності, що використовуються в подальшому.

Оригінальний матеріал розпочинається з другої глави. Вона присвячена визначенню НДС суцільної балки, що згинається. Дія опор замінюються розміщеним на кінцевих ділянках постійним, або змінним, згідно лінійного закону навантаженням. Розглянуто балку, яка лежить на двох шарнірних опорах під дією розподіленого навантаження $p(x)$.

Поперечний переріз - прямокутник одиничної ширини і висоти H . Балка розглядається, як ізотропне лінійно-пружне тіло дов. ини $2L$. Нижній і верхній край балки вільний від дотичних напружень, а на торцях напруження повністю відсутні. Граничні умови задачі наступні

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -p(x), & \text{при } y=H; \\ \sigma_{xy} &= 0, & \text{при } y=0, y=H; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sigma_x = \tau_{xy} = 0, \quad \text{при } x=\pm L.$$

Розв'язки цієї задачі повинні бути уточнені, оскільки тріщини виникають з безпосередній близькості від опор, а відомі формули отримані при умові заміни балки пружною смугою, до бокових граней якої прикладені дотичні зусилля τ_{xy} , що зрізнажують навантаження $p(x)=\text{const}$, тобто

$$\int_0^H \tau_{xy}(L, y) dy = pL. \quad (2)$$

В різних розв'язках отримують різні значення на торцях, що задовольняють умову (2), хоч на деякій віддаленості від опор. Згідно принципу Сен-Венана всі ці розв'язки дають вірогідний опис згину балки.

В другій главі дано новий, більш точний, розв'язок розглядуваної задачі.

Опорні реакції замінимо розподіленим навантаженням, що діє на деякій ділянці (ширини опори). В першому випадку (постійні реакції) маємо:

$$\sigma_x = -q(x), \quad \text{при } y=0, \quad (3)$$

$$\text{де } q(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |x| \leq L - a, \\ q, & L - a \leq |x| \leq L, \end{cases} \quad (4)$$

де a - ширина опори.

Таким чином, визначення НДС суцільної балки зводиться до розв'язку задачі теорії пружності з граничними умовами (1) і (3).

Задачу розв'язуємо методом рядів Фур'є. Розкладемо навантаження $p(x)$ в ряд Фур'є, вважаючи $p(x)$ парною функцією. При відсутності вільного члена:

$$p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k \cos \alpha_k x. \quad (5)$$

де в нашому випадку рівномірного навантаження після інтегрування отримуємо:

$$P_k = \frac{4p}{(2n-1)\pi} (-1)^{n+1}, \text{ при } k=2n-1; \quad P_{2k}=0 \quad (6)$$

$$q_k = \frac{4q(-1)^{k\pi}}{\pi(2k-1)} \left[1 - \frac{\cos(2k-1)\pi a}{2L^2} \right]. \quad (7)$$

Задовільняючи граничним умовам, умовам при $x=\pm L$, $\sigma_x=0$, $\sigma_y=q(x)$ при $y=0$, $\tau_{xy}=0$ при $y=0$ отримуємо в функції напружень Ері:

$$\alpha_k = \frac{\pi k}{2L} \text{ при } k=2n-1, \quad A_k = \frac{q_k}{\alpha_k^2}, \quad B_k = -\alpha_k B_k \quad (8)$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів функції Ері B_k і C_k маємо умову $\tau_{xy}=0$, $\sigma_y=-p(x)$ при $y=H$. Як наслідок отримуємо розв'язки, які точно задовольняють умовам (1), (2) і (3),

при умові $R_1=pL-qa=0$, що витікає з умови рівноваги балки. Для конкретних обчислень на ЕОМ приймаємо, що

$$\alpha_k y \gg 1. \text{ Тоді } \operatorname{sh}^2 \alpha_k H \geq \alpha_k^2 H^2, \quad \operatorname{sh} \alpha_k y = \operatorname{ch} \alpha_k y \quad (9)$$

і розрахункові формули значно спрощуються.

Аналогічно розглядається задача при лінійному законі зміни розподіленої реакції. При цьому

$$q_k = \begin{cases} 0, & \text{при } k=2n \\ \frac{4(-1)^n q}{k\pi} \left\{ -c s \frac{k\pi\alpha}{2L} + \frac{2L}{k\pi\alpha} \sin \frac{k\pi\alpha}{2L} \right\}, & \end{cases} \quad (10)$$

при $k=2n-1$

Методом рядів Фур'є розглянута нами допоміжна задача про рівновагу напівнескінченної смуги, до торця якої прикладена самозрівноважена система дотичних напружень, знайдена в ході розв'язку першої задачі. Розв'язок вихідної задачі з граничними умовами (1) отримуємо таким чином:

$$\sigma_x = \sigma_{x1} - \sigma_{x2}; \quad \sigma_y = \sigma_{y1} - \sigma_{y2}; \quad \tau_{xy} = \tau_{xy1} - \tau_{xy2}. \quad (11)$$

При розв'язку допоміжної задачі для напізнес інченої голоси на верхніх і нижніх кромках ($y=0$, $y=H$) виникають дотичні τ_{xy} і формальні напруження σ_y . Про їх малу величину можна судити з таблиці, приведеної в дисертації. Задача доведена до числа. При розрахунках приймали $H/L=0.3$, $a/L=0.1$. На рисунках, приведених в дисертації, показано розподіл напружень по висоті і по довжині балки, на опорі і в двох варіантах: постійних і лінійно змінних реакцій поблизу опор.

Співставлено сgrimаний аналітичний розв'язок з формулами опору матеріалів. З цих співставлень при різних варіантах опорних реакцій слідує, що принцип Сей-Венана справедливий при $|x/L| < 0.8$. Над опорами, в місцях розташування нахилених тріщин, користуватись формулами теорії опору матеріалів не можна.

В третій главі розглядається аналогічно навантажена балка з поперечною арматурою.

Поперечна арматура по суті є паралельними сталевими хомутиами, що близько розташовані один від одного. Їхні осі знаходяться в серединній площині балки, паралельно більшій стороні її прямокутного перерізу. Оскільки стержні знаходяться близько один від одного, то їх взаємодію з бетоном в першому наближенні можна описати неперервними функціями (як би хомути складали суцільну тонку частину). Контакт між бетоном і арматурою вважаємо ідеальним. Бетон і хомути вважаємо ізотропними однорідними лінійно-пружними тілами, модуль пружності Юнга і коефіцієнт Пуасона бетону позначимо через E і ν , тіж величини для арматури - E_a , ν_a . Внаслідок взаємодії бетону і арматури в тілі виникає дотичне напруження τ_{yz} . Компонента напружень τ_{xz} відсутня, оскільки вертикальні хомути не перешкоджають видовжуватись (скорочуватись) бетону в горизонтальному напрямку. Наявність компоненти τ_{yz} означає, що в розглядуваному складеному тілі визначення НДС зводять до просторової, а не плоскої задачі теорії пружності. Однак розв'язок такого роду трьохвимірних задач є виключно важким завданням. Ця трудність обійдена нами наступним чином:

$$\sigma_x = -q(x) \quad \text{при} \quad y=0;$$

$$\sigma_y = -p(x) \quad \text{при} \quad y=H;$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad \text{при} \quad y=0, y=H; \quad (12)$$

$$\sigma_x = \tau_{xy} = 0 \quad \text{при} \quad \bar{x} = \pm L.$$

Ці умови доповнюються вимогою співпадіння відносного видовження бетону ϵ_y і арматури ϵ_{y_a} , тобто

$$\epsilon_y = \epsilon_{y_a} \quad (13)$$

Введенням в розгляд функції Ері U і невідомої поки що функції V , ми з рівнянь рівноваги отримаємо таке рівняння сумісності бетону і сталльної пластинки:

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \quad (14)$$

$$V = \frac{(E_a - E)b_1}{E_a b_1 + E(b - b_1)} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{(-\nu_a E + \nu E_a)b_1}{E_a b_1 + E(b - b_1)} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (15)$$

Отже основним рівнянням задачі в третій главі, буде:

$$D_1 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2D_2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + D_3 \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad (16)$$

де введені наступні позначення:

$$D_1 = 1 - \frac{(E_a - E)b_1}{E_a b_1 + E(b - b_1)}; \quad D_2 = 1 + \frac{(-\nu_a E + 2\mu E_a - \nu E)b_1}{E_a b_1 + E(b - b_1)};$$

$$D_3 = 1 - \frac{(-\nu_a E + \nu E_a)b_1}{E_a b_1 + E(b - b_1)} \quad (17)$$

Як і в другій главі, при розв'язанні цієї задачі використовуємо ряди Фур'є і симетричність граничних умов, визначимо необхідні постійні, компоненти тензора напружень і постійні інтегрування. Методом рядів Фур'є отримаємо необхідний розв'язок напівнескінченної полоси, до торця якої прикладена система самозрівноважених дотичних напружень, знайдених при розв'язку першої задачі з арматурою.

Різниця цих результатів дасть нам вислід, який відповідає умовам (12).

Як і в другій главі приймемо при обчисленнях, що $H/L=0.3$, $a/L=0.1$, а b_1 - товщина армованого шару, знаходиться з умови рівності площі поперечних перерізів всіх вертикальних хомутів і площі армованого шару

$$\frac{\pi d^2}{4} k = b_1 L, \quad (18)$$

де d - діаметр арматури, k - кількість хомутів по довжині балки,

L - довжина балки, $b=0.15$ м - ширина балки.

Крім того, взято модуль пружності бетону $E = 2 \times 10^5 \text{ кг/см}^2 \cong 2 \times 10^{10} \text{ Па} = 2 \times 10^4 \text{ МПа}$; Модуль пружності арматури $E_a = 2 \times 10^6 \text{ кг/см}^2 \cong 2 \times 10^{11} \text{ Па} = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$; Співвідношення модулів пружності $E_a/E = 10$; Коефіцієнт Пуасона бетону $\nu = 0.2$; арматури - $\nu_a = 0.3$.

Результати обчислень при $b_1=0$, $b_1 \cong 0.2$ мм, $b_1=0.4$ мм приведені в таблиці і рисунках в дисертації. На рисунках показано розподіл дотичного напруження по висоті балки в різних її поперечних перерізах і при різних товщинах арматури. Як видно, збільшення товщини армованого шару b_1 приводить до зменшення дотичного напруження в поперечному перерізі балки. Це тривіальний результат, однак отримані дані дають можливість просто знайти це зменшення. Його можна виразити за формулою

$$\tau_{xy}(b_1) = \left\{ 1 - 100 \frac{b_1}{b} \right\}^m \tau_{xy}(0), \quad (19)$$

де $\tau_{xy}(b_1)$ - дотичне напруження в поперечному перерізі балки при наявності армованого шару товщини b_1 , $\tau_{xy}(0)$ - при його відсутності. Для наших розмірів $m=0.7$.

При цьому похибка формули (19) не перевищує 7% при $v_1=0.4\text{мм}$ і швидко зменшується при менших b_1 , а точність формули (19) збільшується. Значення формули (19) зростає, якщо врахувати, що $\tau_{xy}(0)$ з певною точністю можна вирахувати і згідно формули Журавського.

В четвертій главі за допомогою теорії функції комплексної змінної визначені методом суперпозиції, потенціали напружень в пружній однорідній площині і напівплощині, що містить дві похилі тріщини, які виходять на їх край. Все розпочинається з пружної площини з нескінченим розрізом вздовж від'ємного напрямку (напівосі) Oy , в якій проекції переміщення u і v зазнають розриву, причому

$$\Phi_0(z) = -\Psi(z) = D\lambda/z; \quad (20)$$

$$D = E/8\pi, \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 i;$$

$$\begin{aligned} \text{де } \Delta u &= \lambda_2; & x=0, y < 0, \\ \Delta v &= -\frac{1-\nu}{2} \lambda_1; & x=0, y < 0. \end{aligned} \quad (21)$$

формули (21) визначають фізичну і механічну суть параметрів λ_1 і λ_2 . Паралельним переносом, поворотом і методом суперпозиції отримано розв'язок, що наведений тут. Може виникнути запитання: чи правомірна тут суперпозиція. Адже наявність лівого розрізу обумовлює певні напруження на правому розрізі і навпаки. Тим не менше суперпозиція справедлива. Кожний розріз обумовлює переміщення для всієї півплощини, але розрив переміщень - тільки на самій лінії розрізу. В інтегральному рівнянні задачі (глава V) прирівнюються нульові напруження на розрізах, обумовлені всіма факторами: обома розрізами і границею півплощини.

В п'ятій главі приведена система двох інтегральних рівнянь, одне з яких сингулярне, для опису розвитку похилих тріщин в приопорних ділянках балки. Їх довжина визначається критерієм Ірвіна. Проведено порівняння з експериментом. Експериментально встановлено, що при поперечному згині балки в ній виникають похилі тріщини в безпосередній близькості до опор. Вони орієнтовані приблизно під кутом $\alpha = \pi/4$ до осі балки. Для простоти приймемо, що їх початки мають координати $x_0 = \pm(L-a)$, $y_0 = 0$. Вісь Ox направляємо вздовж нижньої грані, вісь Oy розпочинається посередині довжини балки ($2L$).

В околі точок $x = x_0$, $y_0 = 0$ при $|x| < x_0$, $y_0 > 0$ нормальні напруження незначні ($\sigma_x \approx \sigma_y \approx 0$), а дотичні - максимальні при $y = H/2$. Тому головні нормальні напруження діють на площинах, нахилених приблизно під кутом $\alpha = \pi/4$ до осі балки, що пояснює орієнтацію тріщин власне під таким кутом.

Напруження в балці приймемо в вигляді суми складових:

$$\sigma_x = \sigma_{x0} + \sigma_{x1}, \quad \sigma_y = \sigma_{y0} + \sigma_{y1}; \quad \tau_{xy} = \tau_{x0} + \tau_{x1}, \quad (22)$$

де індексами "0" визначені напруження в суцільній балці без тріщин, а "1" - шукані напруження, обумовлені наявністю тріщин. Задача полягає у пошуку напружень σ_{x1} , σ_{y1} , τ_{xy1} . Вважаючи, що напруження викликані тріщинами, нехтувально малі на верхній поверхні балки $y = H$, то їх значення можуть бути обчислені згідно формул для симетрично навантаженої півплощини [3.4]. В точках торця $x = \pm L$, $y = 0$ дотичне напруження, визначене для півплощини, рівне нулеві, оскільки її границя, як вже вказувалось, вільна від напружень. Приймемо, що аналогічні умови для дотичних напружень задовільняються на торцях балки. Інша ситуація з компонентою σ_x . Очевидно, що на

торцях $\sigma_x \neq 0$. Тому на напружений стан півплощини [3.4] накладено позацентровий розтяг-стиск

$$\sigma_x = -\sigma_{x2} \left(1 - \frac{y}{H} \right) \quad (23)$$

так, щоб в гочці ($y=H$) умова $\sigma_x=0$ виконувалась точно, а в інших точках торця - наближено. Це виправдано тим, що при $y=H$ вплив тріщини малий (по обмеженні на її довжину). Таким чином, напруження в балці

$$\sigma_x = \sigma_{x0} + \sigma_{x1} - \sigma_{x2} \left(1 - \frac{y}{H} \right); \quad \sigma_y = \sigma_{y0} + \sigma_{y1}; \quad \tau_{xy} = \tau_{xy0} + \tau_{xy1} \quad (24)$$

Два інтегральні рівняння задачі, одне з яких сингулярне, отримаємо прирівнюючи нулеві, (оскільки тріщини вільні від напружень згідно постави), напруження, що діють на розрізах, а також попередньо виражені σ_{x2} через напруження σ_{x0} , σ_{y0} , τ_{x0} . Праві частини цих рівнянь $f_1(x)$ і $f_2(x)$ також виражаємо через σ_{x0} , σ_{y0} , τ_{x0} . Допустимо, що тріщини не впливають одна на одну. Тому зупинимось на лівій тріщині. Опустивши ряд викладок, в кінцевому підсумку отримаємо:

$$\int_{-1}^1 A_1(x', \frac{l}{2}(t+1)\overline{\varphi}_1(t)) dt + \int_{-1}^1 A_2(x', \frac{l}{2}(t+1)\overline{\varphi}_2(t)) dt = \frac{2}{l} f_1(x'),$$

(25)

$$\int_{-1}^1 A_3(x', \frac{l}{2}(t+1)\overline{\varphi}_1(t)) dt + \int_{-1}^1 A_4(x', \frac{l}{2}(t+1)\overline{\varphi}_2(t)) dt = \frac{2}{l} f_2(x'),$$

де $t = \frac{2\xi}{l} - 1$, $d\xi = \xi'(t)dt = \frac{l}{2} dt$, ξ, t - змінні,

$$\varphi_1(\xi) = \varphi_1\left(\frac{l}{2}(t+1)\right) = \overline{\varphi}_1(t)$$

При цьому

$$\begin{aligned}
 A_1(x', \xi) &= M_1(x, \xi) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x'}{H\sqrt{2}}\right) M_5(\xi), \\
 A_2(x', \xi) &= M_2(x, \xi) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x'}{H\sqrt{2}}\right) M_6(\xi), \\
 A_3(x', \xi) &= M_3(x, \xi) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x'}{H\sqrt{2}}\right) M_5(\xi), \\
 A_4(x', \xi) &= M_4(x, \xi) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x'}{H\sqrt{2}}\right) M_6(\xi).
 \end{aligned} \tag{26}$$

Тут

$$\begin{aligned}
 M_1(x', \xi) &= 4Dx\xi^2 \left[\frac{x^2 + 4x\xi + \xi^2}{(x^2 + \xi^2)^3} \right], \\
 M_2(x', \xi) &= 2D \left[\frac{1}{x - \xi} + \frac{-x^5 - \xi x^4 - 6\xi^2 x^3 + 3\xi^4 x + \xi^5}{(x^2 + \xi^2)^3} \right], \\
 M_3(x', \xi) &= 4D \frac{\xi^2 x(3x^2 - \xi^2)}{(x^2 + \xi^2)^3}, \\
 M_4(x', \xi) &= 4D \frac{x^2(-x^2 + 3\xi^2)}{(x^2 + \xi^2)^3},
 \end{aligned} \tag{27}$$

$$M_5(\xi) = 4D \frac{a^2 \sqrt{2}(a + \xi \sqrt{2})}{(a^2 + a\xi \sqrt{2} + \xi^2)^2},$$

$$M_6(\xi) = -4D \frac{a\xi \sqrt{2}(a\sqrt{2} + \xi)}{(a^2 + a\xi \sqrt{2} + \xi^2)^2},$$

$$\text{де } D = \frac{E}{8\pi}, \quad d = -(L - a) + \xi e^{\pi i/4}, \quad (28)$$

$$f_1(x') = \tau_{xy0} - \frac{1}{2}(\sigma_{x0} + \sigma_{y0}), \quad f_2(x') = \frac{1}{2}(\sigma_{x0} - \sigma_{y0}),$$

x' і y' направлені вздовж лівого розрізу $0 \leq x' < 1$.

В шостій главі приведено розв'язок системи інтегральних рівнянь методом механічних квадратур, а також порівняння з експериментальними даними і приведенням задачі до таблиць, графіків і рисунків.

Систему інтегральних рівнянь (25) перетворимо в систему лінійних рівнянь відносно невідомих поки що коефіцієнтів " a_{ij} " ($j = \overline{1, n}, i = 1, 2$)

$$\overline{\varphi}_i(t) = \frac{U_i(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}(t+1)^j}{\sqrt{1-t^2}} \quad (29)$$

тут a_{j1} коефіцієнти шуканої функції $\overline{\varphi}_1$, а a_{j2} - функції $\overline{\varphi}_2$, з виділенням особливості в кінцях тріщини.

Величини $a_{j1} = x_j$ при ($j = \overline{1, n}$); $a_{j2} = x_{j-n}$ при ($j = \overline{n+1, 2n}$). Визначаємо ці коефіцієнти з рівнянь типу системи (29), задовольняючи її хоча б, в w точках x_j ($j = 1, \dots, 4$) $x_j \in [0, 1)$. Розв'язок є нестійким відносно точності (тобто степені " n " апроксимуючого поліному) при виборі x_j згідно точок Чебишева, що задаються такою ж формулою, що і точки τ_{xy0} в останній формулі (28), тільки в півінтервалі $[0, \dots, 1)$. Ми, по суті, апроксимуємо поліном " n " степені невідомі функції в w нерівномірно розташованих точках. Зі збільшенням степені апроксимуючого полінома крива проходить все ближче до кожної із точок, але в інтервалі між ними

відбуваються дуже сильні коливання. Для ліквідації таких коливань слід застосовувати інші способи апроксимації, наприклад, інтерполяційні поліноми спеціального вигляду або метод найменших квадратів.

Із-за неточності вихідних припущень розв'язку задачі, а також значного розсіювання пружності і міцності бетону слід задовільнитись розв'язком для $n=2$, яке на 5-7% відрізняється від отриманого при $n=1$. Величина "w", що визначає точність числового інтегрування сингулярних інтегралів з врахуванням вибору опорних точок для формування системи рівнянь згідно точок Чебишева, на точність обчислень цілком не впливає. Стійкість розв'язку залежить також (підтверджено експериментально) від вигляду функцій σ_{x0} , σ_{y0} , τ_{xy0} .

В результаті встановлені функції розриву зміщень, які справедливі для довільної довжини тріщини. Критичну довжину тріщини знаходимо з додаткової умови - критерію Ірвіна.

$$K_1 = K_{1c} \quad (30)$$

Напруження на лінії продовження тріщини представимо :

$$\sigma_{y'} = \frac{K_1}{\sqrt{\pi(x'-1)}} + C(x'); \quad x' > 1, \quad (31)$$

де K_1 - коефіцієнт інтенсивності напружень нормального відриву, розрахований для заданих геометричних параметрів балки і тріщини, $C(x')$ - обмежена функція. На відміну від металів бетон надзвичайно чутливий до розтягуючих напружень. Тому критерій руйнування застосовують тільки по відношенню до нормальних напружень, а не до комбінації нормальних і дотичних складових. Після відповідних викладок

$$K_1 = \pi u_2(1), \quad (32)$$

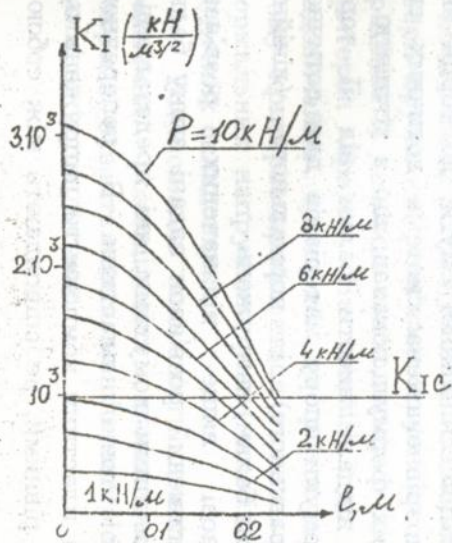
що співпадає з літературними даними. Тут $u_2(1)$ обчислюємо згідно формули (29)

$$u_2(1) = \sum_{j=1}^n 2^j a_{jj} \quad (33)$$

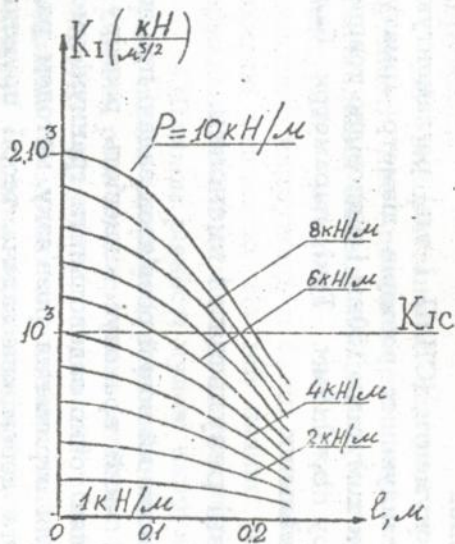
Величину K_1 визначаємо через невідомі коефіцієнти a_{ij} , які рівні для однакових "n", але зі зростанням "n" будуть уточнюватись. Вихідними при розв'язанні системи (25), крім геометричних розмірів та механічних характеристик, є напруження в балці при відсутності тріщин. В дисертації побудовані залежності коефіцієнту інтенсивності K_1 , підрахованого згідно формули (33), від довжини тріщини (рис.1а,б,в). Кожному навантаженню p (p міняється від 1 кН/м до 10 кН/м) відповідає своя крива K_1 . Там же відкладено експериментальне значення $K_{1c} = 10^3 \text{кН/м}^{3/2}$ (горизонтальна пряма). Як бачимо, до навантаження 3кН/м криві не досягають рівня K_{1c} , значить, рух тріщини неможливий. В міру навантаження - тріщина розвивається. Мінімальне поперечне армування збільшує міцність балки (криві K_1 направлені вниз відносно лінії K_{1c}). Ще більше суттєвий цей ефект при армуванні до товщини $b_1 = 0,4 \text{мм}$. Поперечне армування підвищує надійність і перестерігає балку від руйнування поблизу опор.

Висновки аналітичних досліджень співставлені з результатами, виконаних на кафедрі будівельних конструкцій Держуніверситету "Львівська політехніка", випробувань балок довжини 2.1м (в теоретичному плані 2м) з прямокутним перерізом 10x30см, як в даній дисертації.

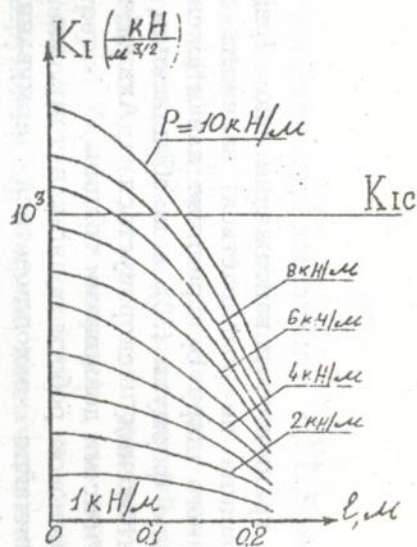
Значний розкид експериментальних даних зумовлений неоднорідністю бетону. Однак загальна закономірність росту тріщин вірно описується запропонованими співвідношеннями. Застосовність цих рівнянь до надійного опису деформування і руйнування такого неоднорідного матеріалу, яким є залізобетон - головне досягнення нашої роботи. Згідно з



а



б



в

Рис.1. Графіки залежності між довжиною тріщини l і коефіцієнтом інтенсивності напружень для розглядуваної балки в залежності від величини навантаження при різних степенях армування балки поперечною арматурою: а-випадає відсутності арматури; б-товщина армованого шару $b_1=0.1$ мм; в-товщина армованого шару $b_1=0.4$ мм.

розрахунками, граничне навантаження по Ірвіну (менше якої тріщина не розвивається) залежить від товщини армованого шару b_1 . Граничне навантаження обчислюють згідно формули (30), а із збільшенням b_1 приріст навантаження скорочується. Аналогічна картина і з критичними довжинами тріщин.

Другий висновок роботи полягає в тому, що не потрібно надзвичайно захоплюватися армуванням балки, оскільки ефект в цьому випадку може виявитись надзвичайно малий.

Керівні документи (СНиП і т.п.) регламентують для балки розглядуваних розмірів діаметр арматури 6мм, віддаль між хомутами 150мм і відповідно товщину армуючого шару $b_1=0.19$ мм. Такі параметри балки близькі до оптимальних.

Основні результати і висновки.

1. Запропонований новий розв'язок задачі про згин пружної балки, який враховує кінцевість розміру її опор, що дозволяє точно задовольнити граничні умови на її торцях. Для отримання розв'язку методом рядів Фур'є розглянута допоміжна задача теорії пружності про рівновагу напівнескінченної смуги, до торця якої прикладена самозрівноважена система дотичних сил. Аналіз отриманих формул показав, що з точністю до 10% зозні на віддалі висоти балки від її торця справедливі формули опору матеріалів для дотичного (формула Журавського) і нормального (лінійний розподіл по висоті балки) напружень.

2. На основі вище відзначених розв'язків побудовано наближений розв'язок задачі згину балки, армованої поперечними хомутами, які представлені у вигляді сталюї тонкої пластини. В поперечному перерізі балки і пластини компоненти напружень σ_x і τ_{xy} вважаються рівними; не співпадають між собою в

бетоні і арматурі компоненти σ_y . Приймається до уваги дію складової τ_{yz} , тобто враховується, що задача не є плоскою.

На основі відзначеного розв'язку, шляхом апроксимації складних залежностей отримана проста формула для дотичного напруження в поперечному перерізі балки. Ця формула дає можливість просто визначити вплив арматури на розподіл дотичного напруження τ_{xy} , зокрема визначити необхідну кількість (або діаметр) хомутив для обмеження вказаного напруження.

3.3 Використанням відомих розв'язків теорії пружності про розклинення площини і на основі вищезгаданих співвідношень для балки з вертикальною арматурою, отримані наближені формули для компонент напружень в балці, послабленій біля опори похилою тріщиною. На ній зазнає розрив не тільки нормальна, але й дотична складова переміщення.

4. Шляхом рівності нулеві напружень $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ на березі лівого розрізу і в умовах малої його довжини отримано розв'язок системи інтегральних рівнянь, що описують рівновагу армованої балки, послабленої тріщиною. З метою спрощення задачі приймаємо, що нахилена тріщина розповсюджується вздовж площини її початкового розташування. Як характерно для задач теорії пружності розв'язок існує при довільній довжині тріщини. Її довжина знаходиться з додаткової умови - критерію Ірвіна. На відміну від металів бетон надзвичайно чутливий до розтягуючих напружень. Тому критерій приймається тільки по відношенню до нормальних напружень, а не комбінації нормальних і дотичних складових.

Встановлена залежність довжини тріщини від величини розподіленого навантаження. Знайдено, зокрема, навантаження, менше якого похила тріщина в балці не поширюється.

5. Співставлені результати аналітичних досліджень з експериментальними даними. Має місце великий розкид експериментальних даних, що обумовлено неоднорідністю бетону. Разом з тим загальна закономірність росту тріщин вірно описується отриманими в даній роботі співвідношеннями. Застосовність рівнянь теорії пружності до надійного опису деформації і руйнування такого неоднорідного матеріалу, яким є залізобетон - перший головний висновок з даної роботи.

6. Наці розрахунки показали, що граничне навантаження (менше якого не поширюється похила тріщина) нелінійно залежить від товщини армованого шару b_1 . Із збільшенням b_1 приріст граничного навантаження, починаючи з якогось b_1 , зменшується. Аналогічна картина спостерігається і з довжинами тріщин і ця зміна нелінійно залежить від b_1 .

Таким чином, не слід значно переармувати балку, оскільки приріст ефекту армування зменшується із збільшенням товщини армованого шару - в цьому другий висновок роботи.

Згідно СНиПу для балки розглядуваних розмірів діаметр арматури $d=6\text{мм}$, відстань між хомутами $c=150\text{мм}$, яким відповідає товщина армованого шару $b_1=0.19\text{мм}$. Виходячи з рисунків, приведених в дисертації, таке армування близьке до оптимального. Таким є $b_1=0.3\text{мм}$ оскільки при $b_1>0.3$ приріст ефекту армування явно зменшується. Значенню $b_1=0.3\text{мм}$ при $d=6\text{мм}$ відповідає відстань між хомутами $c=100\text{мм}$.

Публікації по темі роботи.

Основні положення дисертації опубліковані в таких роботах:

1. Каддур Зияд, Напряженное состояние в изгибаемой балке, определенное с учетом конечности длины

участков, ФХММ, 1995г., №3, с.102, деп.№934 ІК95, 25.04.1995.,с.16.

2.Каддур Зияд, Напряжения в балке с поперечной арматурой, ФХММ, 1995г., №5,с.123-126.

3.Бережницький Л.Г., Каддур Зияд, (Україна - Сирія), Про розвиток похилених тріщин в приопорних ділянках залізобетонної балки, Мат.ІІ Міжнародного симпозиуму "Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів і конструкцій" Львів-Дубляни, Україна, 1996, с.26-28.

4.Каддур Зияд, Бережницький Л.Г., Железобетонная балка с короткими наклонными трещинами у опор, ФХММ, 1997, №2, с. 49-54.

Анотація

Зияд Рашид Каддур "Изгиб железобетонных балок с наклонными трещинами".

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.02.07 - "Механика деформируемого твердого тела".

Физико-механический институт им.Г.В.Карпенко НАН Украины, Львов, 1997г.

Методом рядов Фурье предложено новое решение задачи об изгибе упругой балки с поперечной подкрепляющей арматурой, учитывающее конечные размеры опорных участков и позволяющее точно удовлетворить граничные условия на ее торцах. Составлены два интегральных уравнения задачи и методом механических квадратур получено их численное решение. Увеличение армирования ведет к уменьшению предельного напряжения по линейному закону.

В результате определены оптимальные размеры армированной балки.

Ключові слова: згин балки, напруження, вертикальні хомути, тріщина, оптимальні розміри.

Summary

Ziad Rashed Kaddur "Bend of ferro-concrete beam with inclined cracks"

Dissertation is in the level of candidate in technical and scientific science in the speciality 05.02.07 - mechanics of deformable solids.

Karpenko Physico-Mechanical Institute of the National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, 1997.

A new solution of a problem on bending of an elastic beam with a cross-section reinforcement by a Fourier series has been proposed. It takes into account the finite dimensions of the support sections and allows to satisfy rigorously the boundary conditions on the beam ends. Two integral equations of the problem have been constructed and their numerical solution has been obtained by a mechanical quadratures method. The growth of reinforcement causes a decrease of the limiting stresses by a linear law.

As a result, the optimal dimensions of the reinforced beam have been determined.

Key words: Beam bending, stresses, vertical clamps, a crack, optimal dimensions.

A handwritten signature in black ink, consisting of a stylized initial 'Z' followed by a long horizontal stroke that tapers to a point on the right.

Підписано до друку 29.05.97. Формат паперу
60x84 1/16. Папір друкарський. Друк офсетний.
Друкарських листів 1. Зам. 503. Тираж 100.

Ротопронт Львівського ЦНТІ. Бул. 700-річчя
Львова, 57

AB 38.194

AB 38.194