НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
Институт прикладной математики и механики

На правах рукописи

КРАВЕЦ Татьяна Николаевна

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

01.01.05 - теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Донецк-1997

Ав 38.242

Диссертация является рукописью.

Работа выполнена в отделе теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и механики НАН Украины

Научный руководитель	- член-корреспондент НАН Украины, доктор физико-математических наук, профессор ГИХМАН.И.И.
Официальные оппоненты	- доктор физико-математических наук, профессор ШАЙХЕТ Л.Е.
	- кандидат физико-математических наук, доцент ПЯСЕЦКАЯ Т.Е.
Ведущее предприятие	- Институт математики НАН Украины

Защита состоится "9" июля 1997г. в "15^{00}" час. на заседании специализированного совета К 06.01.02 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук в Институте прикладной математики и механики НАН Украины (340114, г.Донецк, ул. Р.Люксембург,74)

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института прикладной математики и механики НАН Украины.

Автореферат разослан "9" июня 1997г.

ЛННБ України ім.В.Стефаника
00737915 (W)

Ученый секретарь
специализированного совета
к.ф.-м. наук Чани А.С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Понятие дифференциального включения появилось достаточно давно в связи с исследованиями обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью.

Вскоре появилась целая серия работ, посвященных дифференциальным включениям

$$\dot{u} \in C(u), \quad u(0)=u_0$$

с монотонным оператором C в произвольных банаховых пространствах. Математическим аппаратом для исследования таких включений явилась теория монотонных операторов, основания которой были заложены в работах М.М.Вайнберга, Р.И.Качуровского, Дж.Минти, Ф.Броудера.

Позднее дифференциальные включения использовались в теории оптимального управления. Существует, кроме того, много естественных примеров, приводящих к исследованию динамических систем, у которых скорости определяются неоднозначно, а содержатся в некотором множестве.

Таким образом, хотя дифференциальные включения и являются обобщением дифференциальных уравнений, но это обобщение не формально, и к ним сводятся многие задачи не только математики, механики, физики, техники, но также задачи биологии, математической физики и математической экономики.

В то время как о дифференциальных включениях имеется достаточно много результатов, стохастические дифференциальные включения практически не исследованы.

Первым стохастические дифференциальные включения начал рассматривать Э.Конвей в связи с исследованием стохастических дифференциальных уравнений с разрывным коэффициентом сноса. Он ввел понятие ослабленного решения стохастического дифференциального включения как решения некоторого вариационного неравенства, связанного со стохастическим дифференциальным включением, доказал существование и сильную единственность такого решения для монотонного оператора сноса.

Позднее результаты Э.Конвея были обобщены в работах В.А.Лебедева.

Исследованию вариационных неравенств, связанных со стохастическими дифференциальными включениями, посвящена также работа А.Роскану.

В 1978 г. вышла статья ДаПрато, М.Ианнелли и Л.Тубаро, в которой впервые дано определение решения однородного стохастического дифференциального включения с многозначным оператором сноса, определенном в некоторой области конечномерного пространства. В этой работе на основании однозначной аппроксимации коэффициента сноса строится аппроксимационная последовательность стохастических дифференциальных уравнений и доказывается сходимость соответствующей последовательности решений. Однако, ни в этой ни в последующих известных работах авторов нет доказательства того факта,что последовательность аппроксимирующих коэффициентов сноса будет сходиться к процессу, лежащему в области значений многозначного оператора сноса. Иными словами, существование решения в смысле данного авторами определения не доказано.

Свойства решений стохастических дифференциальных включений, фактически, не исследовались.

Цель работы. Целью настоящей работы является получение теорем существования и единственности решений стохастических дифференциальных включений с многозначным максимально монотонным оператором сноса в конечномерном пространстве и исследование свойств решений.

Методика исследований. В работе использованы: теория случайных процессов в конечномерных пространствах и теория многозначных монотонных операторов.

Научная новизна. В работе получены следующие новые результаты:

- доказано существование решения стохастического дифференциального включения с многозначным максимально-монотонным оператором сноса;

- для стохастических дифференциальных включений с неслучайными коэффициентами доказано свойство марковости и получено обратное уравнение Колмогорова;

- выписаны условия, обеспечивающие устойчивость решения.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты и развитые методы могут найти применение в дальнейшем исследовании проблемы сильной разрешимости стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами. Практическое значение работы состоит в том, что она позволяет исследовать свойства решений стохастических дифференциальных включений, возникающих в прикладных задачах.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались: на XX школе-коллоквиуме по теории вероятностей и математической статистике (Бакуриани, 1986); на семинаре в Математическом институте им. Стеклова АН России (Москва, 1987); на III Международной Донецкой конференции " Вероятностные модели процессов в управлении и надежности "; на семинарах по теории вероятностей и математической статистике в Донецком государственном университете и Институте прикладной математики и механики НАН Украины (Донецк, 1986 - 1996 гг.).

Публикации. Основное содержание диссертации в достаточной степени отображено в опубликованных семи работах.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы из 56 наименований. Общий объем работы 100 страниц машинописного текста.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность выбранной темы исследования и дано краткое изложение результатов диссертации.

Первая глава " Некоторые сведения из теории многозначных монотонных отображений " является сводкой предварительных сведений и вспомогательных результатов. Все результаты этой главы ранее известны и приводятся без доказательства. Остановимся более подробно на содержании этой главы.

В первом параграфе введены основные обозначения и дано определение монотонного множества.

Многозначный оператор C из X в Y будем отождествлять с некоторым подмножеством декартова произведения $X \times Y$.

Определение 1.6. Множество $C \subset X \times Y$ называется монотонным, если

$$(x_1 - x_2 , y_1 - y_2) \geqslant 0$$

для любых $[x_i , y_i] \in C$, $i=1,2$. Будем говорить, что монотонное множество в $X \times Y$ является максимально монотонным, если оно не включается ни в какое другое монотонное множество.

Во втором параграфе введены однозначные операторы J_n и C_n , $n \in \mathrm{N}$, которые в случае, когда X и Y - d-мерные евклидовы пространства можно записать в виде

$$J_n x = (1 + \frac{1}{n} C)^{-1} x,$$

$$C_n x = n (x - J_n x),$$

и выписаны их свойства (теоремы I.6 и I.7).

Теорема 1.2. Пусть X - гильбертово пространство, $C \in X \times X$ -

монотонное множество , n - натуральное число. Тогда

1) $\|J_n x - J_n y\| \leqslant \| x - y \|$,

для всех x и y, принадлежащих области значений оператора $1+\frac{1}{n}C$, то есть $x,y \in \mathcal{R}(1+\frac{1}{n}C)$,

2) C_n- монотонно в $X \times X$ и удовлетворяет условию Липшица с константой n, то есть

$$\|C_n x - C_n y\| \leqslant 2n \| x - y \|,$$

для всех $x,y \in \mathcal{R}(1+\frac{1}{n}C)$,

3) $C_n x \in CJ_n x$

для всех $x,y \in \mathcal{R}(1+\frac{1}{n}C)$,

4)
$$\| C_n x \| \leqslant inf \{ \|y\|, y \in Cx \}$$

для всех $x \in \mathcal{D}(C) \cap \mathcal{R}(1+\frac{1}{n}C)$,

5) $\lim\limits_{n\to\infty} J_n x = x$

для всех $x \in \overline{\mathcal{D}(C)} \cap \mathcal{R}(1+\frac{1}{n}C)$.

В третьем параграфе приведены примеры монотонных множеств.

Вторая глава "Стохастические дифференциальные включения в конечномерных пространствах", состоящая из четырех параграфов, посвящена доказательству основных теорем о разрешимости стохастических дифференциальных включений в d-мерном пространстве.

В параграфе 2.1 введено определение решения стохастического дифференциального включения со случайными коэффициентами, и формулируются предположения о коэффициентах.

Рассмотрено стохастическое дифференциальное включение

$$du(t)+[A(t,u(t),\omega)+C(u(t))]dt+B(t,u(t),\omega)dw(t)\ni 0, \quad t\in]0,T[, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0,$$

где $w(t)$ - винеровский процесс, заданный на потоке σ-алгебр $\mathfrak{F}_t$, $u(t)$ и $w(t)$ принимают значения в $\mathcal{R}^d$; $A(t,u,\omega)$ и $B(t,u,\omega)$ - случайные вектор и матрица, $C(u)$ - многозначная вектор функция.

Определение 2.1. Решением стохастического дифференциального включения будем называть $\mathfrak{F}_t$-согласованный процесс $u(t)$, удовлетворяющий следующим условиям:

а) $u(\cdot) \in L(\Omega\times[0,T];\mathcal{R}^d)$;

б) существует $\mathfrak{F}_t$-согласованный процесс $\eta(t) \in L(\Omega\times[0,T];\mathcal{R}^d)$, такой, что $\eta(t) \in C(u(t))$ (ω,t)- п.н. и

$$u(t)+\int_0^t(A(s,u(s),\omega)+\eta(s))ds+\int_0^t B(s,u(s),\omega)dw(s)= u_0.$$

О коэффициентах A, B и C предполагается следующее

1) $A(t,u,\omega)$ и $B(t,u,\omega)$ - случайные функции, непрерывные по совокупности аргументов и $\mathfrak{F}_t$-согласованные при каждом $u\in\mathcal{R}^d$, u_0 - $\mathfrak{F}_0$-измеримая случайная величина;

2) существует постоянная величина l такая, что для $u,v\in\mathcal{R}^d$

$$| A(t,u)-A(t,v)| + \| B(t,u,\omega)-B(t,v,\omega)\| \leqslant l|u-v| ;$$

3) существует постоянная величина L такая, что для $\forall u\in\mathcal{R}^d$

$$|A(t,u,\omega)| + \|B(t,u,\omega)\| \leqslant L(1 + |u|);$$

4) $C \subset \mathcal{R}^d\times\mathcal{R}^d$ - максимально монотонный оператор;

5) $\mathcal{D}(C)=\mathcal{R}^d$;

6) существует постоянная величина k такая, что для $\forall u\in\mathcal{R}^d$ и $\forall z\in C(u)$

$$|z|\leqslant k(1 + |u|).$$

В параграфах 2.2 и 2.3 формулируются и доказываются теоремы о единственности и существовании решения стохастического дифференциального включения

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия 4) и 5) и условие 2) заменено на следующее

2') существует такая неслучайная функция $\Phi(t,x)$, что

$$(A(t,u)-A(t,v),\ u-v) + \| B(t,u,\omega)-B(t,v,\omega)\|^2 \leqslant \Phi(t,|u-v|^2)\ ;$$

почти наверное при всех $t\in[0,t]$, $u,v\in\mathcal{R}^d$, причем функция $t \to \Phi(t,x)$ при всех $u>0$ суммируема, функция $t \to \Phi(t,x)$ при всех t непрерывна, монотонно неубывает и выпукла вверх, $\Phi(t,0)=0$, дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{dt} = \Phi(t,u), \quad u(0) = 0$$

имеет только тривиальное решение. Пусть стохастическое дифференциальное включение (1) имеет непрерывное решение, тогда это решение единственно.

Теорема 2.4. Пусть выполнены условия 1)-6). Тогда существует решение стохастического дифференциального включения (1).

Для доказательства теоремы существования 2.4 построена последовательность стохастических дифференциальных уравнений с однозначным сносом $A(t,u,\omega)+C_n(u)$ (свойства функции $C_n(u)$ указаны в теореме 1.2) и доказывается сходимость последовательности соответствующих решений к решению стохастического дифференциального включения. Тут же приведены некоторые свойства гладкости решений.

Получена теорема существования решения в пространстве непрерывных $\mathfrak{F}_t$-согласованных процессов из $[0,T]$ в $L(\Omega)$ (теорема 2.6).

В последнем параграфе второй главы, 2.4, устанавливается связь между решением одномерного стохастического дифференциального включения и обыкновенным дифференциальнам уравнением со случайными коэффициентами. Результаты этого параграфа являются обобщением результатов Г.Досса и Е.Ленгларта на случай разрывного коэффициента сноса.

Теорема 2.7. Пусть A, B, C удовлетворяют условиям 1)-6), а функция $B(t,x)$ дважды непрерывно дифференцируема по x и один раз по t. Тогда разрешимость стохастического дифференциального включения (1) эквивалентна разрешимости при почти всех ω обыкновенного дифференциального уравнения

$$D_t' = F(t,D_t), \qquad D_0 = u_0, \tag{2}$$

где

$$F(s,x) = exp\{\int_0^{W(s)} \frac{\partial B}{\partial x}(s,h(s,x,v))\,dv\} \times$$

$$\times[-\frac{\partial h}{\partial s}(s,x,w_s) - \frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial x}B(s,h(s,x,w_s))-A(s,h(s,x,w_s))-\hat{C}(h(s,x,w_s))],$$

где h - некоторое решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial h(t,\alpha,\beta)}{\partial\beta} = -B(t,h(t,x,w_s)), \quad \forall\ \alpha,\ \beta \in \mathcal{R}^1,$$

$$h(t,\alpha,0)=\alpha.$$

Причем решения стохастического дифференциального включения (1) и обыкновенного дифференциального уравнения (2) связаны соотношениями

$$u(t) = h(t,D_t,w_t),$$

$$D(t) = h(t,u_t,-w_t).$$

Как следствие теоремы 2.7 получена теорема сравнения и предельная теорема для стохастических дифференциальных включений.

В главе III исследуются свойства решений стохастических дифференциальных включений.

В параграфе 3.1 (теорема 3.1) доказывается, что если коэффициенты стохастического дифференциального включения неслучайны и удовлетворяют теореме существования 2.4, то решение такого включения является марковским процессом и, более того, является обобщенным диффузионным процессом (теорема 3.2), плотность вероятности которого является обобщенным решением параболического уравнения (теорема 3.4).

Теорема 3.2. Пусть неслучайные функции $A(t,x)$, $B(t,x)$ и $C(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.4. Тогда для вероятности перехода процесса $u(t)$, являющегося решением стохастического дифференциального включения (1) , справедливы следующие оценки:

1) для $\forall\varepsilon>0$ и $\forall t\in[0,T]$, $\forall x\in\mathcal{R}^d$

$$\lim_{\Delta\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon} P(t,x,t+\Delta,dy) = 0 \ ;$$

2) для $\forall\varepsilon>0$ и $\forall t\in[0,T]$ и почти всех $x\in\mathcal{R}^d$

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\int_{|x-y|\leqslant\varepsilon} (x-y)P(t,x,t+\Delta,dy) \in -A(t,x)-C(x);$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\int_{|x-y|\leqslant\varepsilon} (x-y,\theta)^2 P(t,x,t+\Delta,dy) = (B(t,x)B^*(t,x)\theta,\theta).$$

Теорема 3.4. Пусть существует измеримая по совокупности переменных плотность вероятности перехода $p(t,x,s,y)$ марковского процесса $u(t)$, являющегося решением стохастического дифференциального включения *(1)* с неслучайными коэффициентами. Предположим, что функции A, B, C удовлетворяют условиям 1)-6). Тогда $p(t,x,s,y)$

при $t \geqslant 0$ является обобщенным решением параболического уравнения

$$\frac{\partial p(t,x,s,y)}{\partial s} =$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big[A(s,y) + C(y)\Big]p(t,x,s,y) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,BB^*(s,y)p(t,x,s,y)$$

то есть для любой функции $g(z,s)$, непрерывно дифференцируемой по s один раз и по z дважды, обращающейся в нуль вне некоторого множества $D\subset R^d$ для $\forall t\in[0,T]$ и при $t>T$ для $\forall z\in R^d$ справедливо равенство

$$\int_0^T\!\!\int p(t,x,s,z)\, g'_s(s,z)dz\, ds = \int_0^T\!\!\int p(t,x,s,z) \Big\{ A(s,z)g'_z(z,s) -$$

$$- \hat{C}(z)g'_z(s,z) + \frac{1}{2}\, sp\, [g''_z(s,z)B(s,z)B^*(s,z)] \Big\}\, dz\, ds,$$

где $\hat{C}$ - произвольное однозначное сужение функции $\hat{C}$.

В параграфе 3.2 доказаны устойчивость нулевого решения стохастического дифференциального включения.

Теорема 3.5 .Пусть $U_\varepsilon = \{\ |x|<\varepsilon\ \}$ и существует некоторое $\varepsilon_0>0$, что функция Ляпунова $V(t,u)\in C^{1,2}(U_{\varepsilon_0})$, удовлетворяющая условиям

$$\inf_{|u|>m,\, t>0} V(t,u) = V_m > 0;$$

$$V(t,0)=0;$$

$$LV(t,x) \in (\infty,\ 0] \text{ в области } U_\varepsilon.$$

Тогда решение $u(t) = 0$ уравнения (1) устойчиво по вероятности.

В последнем параграфе третьей главы приведены примеры стохастических дифференциальных включений, удовлетворяющих теоремам существосания и единственности.

Основные результаты, вынесенные на защиту:

1. Определение понятия решения стохастического дифференциального включения с многозначным максимально-монотонным оператором в сносе и доказательство теорем существования и единственности в различных пространствах.
2. Изучение свойств марковости решения стохастического дифференциального включения с неслучайными коэффициентами, и исследование свойств плотности вероятности перехода.
3. Исследование свойств устойчивости решений.

По результатам диссертации опубликованы следующие работы:

I. Кравец Т.Н. Об аппроксимации решений стохастических дифференциальных включений.- Теория случайных процессов, I986, в.I4, с. 43-48.

2. Кравец Т.Н. О решениях стохастических дифференциальных включений в конечномерных пространствах. - Донецк, I985. (Рукопись деп. в УкрНИИНТИ I4.08.85, N I829-85 Деп.), I4 с.

3. Кравец Т.Н. Решение стохастического дифференциального включения как марковский процесс. - Тезисы докладов XX школы-коллоквиум по теории вероятностей и математической статистики. Бакуриани, 23.02-I.03.86, Мецниереба, Тбилиси, I986, с.26.

4. Кравец Т.Н. К вопросу о стохастических дифференциальных включениях. - Теория случайных процессов, I987, в.I5, с.54-59.

5. Кравец Т.Н. Решение одномерного стохастического дифференциального включения как марковский процесс. - Марковские процессы и их применение, Саратов, I988, в.4, с.55-64.

6. Кравец Т.Н. О связи решения стохастического дифференциаль-

ного включения с решением обыкновенного дифферциального уравнения.- Теория случайных процессов, I988, в.I6, с.48-55.

7. Кравец Т.Н. К вопросу об устойчивости решений стохастических дифференциальных включений. - УМЖ, I995, т.47, N4, с.55I-554.

АННОТАЦИЯ

Кравец Т.Н. Некоторые вопросы теории стохастических дифференциальных включений. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 - теория вероятностей и математическая статистика, Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, 1997.

Введено понятие стохастического дифференциального включения. Найдены условия существования и единственности решения такого включения с многозначным максимально монотонным оператором в сносе. Доказано свойство марковости решения стохастического включения с неслучайными коэффициентами и получено обратное уравнение Колмогорова. Получены необходимые условия устойчивости решения.

ABSTRACT

Kravets T.N. Some Question of the Theory of Stocastic Differential Inclusions. Dissertation for a condidates degree of physical and mathematical sciences on the speciality 01.01.05 - Theory of Probability and Mathematical Statistics. Institute of Applied Mathemstics and Mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine, Donetsk, 1997.

Stocastic Differential Inclusions with are considered in the work. Theorems of existence and uniqueness with monotone maltioperator in drift are proved. Markov properties and stability property of solutions are investigated.

Ключові слова:
стохастичне діфференціальне включенння, багатозначний максімально монотоний оператор.

ТКравец 433687

Отпечатано на ризографе ЧП Краснова Я.А. Заказ № 3 от 06.06.1997 г. Тираж 100 экз.

AB 38.242