ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

На правах рукопису

Бойко Сергій Сергійович

Дефектні функції та унітарні зчеплення

01.01.01 – математичний аналіз

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник –
кандидат фізико-математичних наук
доцент Дубовий В.К.

Харків – 1997

Дисертація є рукописом.
Дисертація виконана в Харківському державному університеті

Науковий керівник: канд. фіз.- мат. наук, доцент
Дубовий Володимир Кирилович

Офіційні опоненти: доктор фіз.- мат. наук, професор
Аров Дамір Зямович
(Південно - Український педагогічний університет, м.Одеса),
доктор фіз.- мат. наук, професор
Кужель Олександр Васильович
(Сімферопольський державний університет)

Провідна організація: Харківський фізико-технічний інститут низьких температур НАН України

Захист відбудеться "3" жовтня 1997 р. о 15[15] годині на засіданні спеціалізованої ради К 02.02.17 у Харківському державному університеті (310077, м. Харків, майдан Свободи, 4, ауд. VI-48).
З дисертацією можна ознайомитися в Центральній науковій бібліотеці університету за адресою: майдан Свободи, 4.

Автореферат розісланий "23" липня 1997 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради А.Ф.Кощій

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. У 1946 р. М.С.Лівшицем було введене фундаментальне поняття характеристичної оператор-функції (х.о.-ф.). Це стало початком інтенсивного вивчення операторів методами х.о.-ф. Відзначимо, що М.С.Лівшицем і його учнями методи х.о.-ф. були використані в основному при дослідженнях операторів, близьких до самоспряжених.

Важливою подією в теорії операторів стало доведення Б.С.-Надем в 1953 р. існування унітарної ділатації стиску. На базі цього поняття Б.С.-Надем і Ч.Фояшем був розвинений інший підхід до означення х.о.-ф., що дало їм змогу методами х.о.-ф. досить глибоко дослідити оператори стиску в гільбертовому просторі. В подальшому застосуванню методів х.о.-ф. до вивчення несамоспряжених і неунітарних операторів присвятили свої роботи М.С.Бродський, І.Ц.Гохберг, М.Г.Крейн, Ю.Л.Шмульян, Д.З.Аров, О.В.Кужель, Б.С.Павлов, Л.А.Сахнович, А.В.Штраус, R.Arocena, J.A. Ball, H.Bercovici, A.E.Frazho та багато інших математиків.

Відзначимо, що для операторів стиску в гільбертовому просторі відповідні х.о.-ф. утворюють клас S голоморфних в одиничному крузі $D = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ стискальних оператор-функцій (о.-ф.).

Важливим є те, що в класі S можна поставити інтерполяційну задачу Шура, яку у випадку комплекснозначних функцій вперше розглянув і розв'язав у 1917 р. І.Шур. Методи, якими І.Шур розв'язав поставлену задачу, проникли в багато інших розділів математики.

На початку 70-х років В.П.Потапов запропонував новий пов'язаний з теорією J- розтягувальних матриць-функцій підхід до вивчення широкого кола інтерполяційних задач аналіза. У вісімдесяті роки з позицій ідей, запропонованих В.П.Потаповим, В.К.Дубовий дослідив інтерполяційну задачу Шура в класі S. В результаті цих досліджень ним були введені поняття регулярного розширення, дефектних чисел і дефектних функцій голоморфної в D стискальної матриці-функції, а також був вивчений зв'язок цих понять з операторами стиску. Зокрема, це дало змогу В.К.Дубовому та його учню Рамадану К.Мохамеду дослідити зв'язок між о.-ф. класу S та її дефектними функціями у випадку, коли максимальні однобічні зсув і козсув, що містяться у відповідному цілком неунітарному стиску, ортогональні.

Метою даної роботи є, з одного боку, подальше дослідження властивостей дефектних функцій, а з іншого – дослідження зв'язку між о.-ф. класу S та її дефектними функціями в загальному випадку, тобто якщо згадані вище максимальні зсув і козсув не є ортогональними. Якщо в ортогональному випадку важливу роль відіграє теорія унітарних вузлів, а також теорія унітарних ділатацій, то вивчення неортогонального випадку привело до застосування теорії унітарних зчеплень.

Ця теорія була розвинена в роботах В.М.Адамяна та Д.З.Арова і виникла на базі досліджень П.Лакса та Р.Філліпса з теорії розсіяння, з одного боку, і Б.С.-Надя та Ч.Фояша з теорії унітарних ділатацій стиску, з іншого.

Цілі дисертації. Основними цілями дисертації є розв'язання наступних задач.

1) Отримати факторизацію радіусів граничного круга Вейля через дефектні функції для виродженої задачі Шура.

2) Дати опис класів дефектних функцій через властивості відповідного цілком неунітарного стиску.

3) Обгрунтувати та ввести операцію добутку унітарних зчеплень і за її допомогою поширити методи теорії унітарних вузлів, пов'язані з факторизаціями вузлів, на унітарні зчеплення.

4) Ввести поняття правильного розширення стискальної оператор-функції класу L^∞ і за його допомогою розв'язати екстремальну задачу типу узагальненої проблеми Нехарі в класі L^∞.

Методика дослідження. У роботі використовуються методи теорії унітарних вузлів, теорії унітарних ділатацій, теорії відкритих систем, теорії унітарних зчеплень.

Наукова новизна, теоретична та практична цінність полягає в застосуванні операторного підходу до вивчення дефектних функцій оператор-функцій класу S та в поширенні методів факторизацій унітарних вузлів на унітарні зчеплення. Завдяки цим підходам

1) отримано факторизацію радіусів граничного круга Вейля для виродженої інтерполяційної задачі Шура;

2) дано опис класів дефектних функцій;

3) введено поняття правильної факторизації стискальної оператор-функції класу L^∞ та доведено критерії правильності факторизацій;

4) введено поняття правильного розширення стискальної оператор-функції класу L^∞ та розв'язано екстремальну задачу типу узагальненої проблеми Нехарі в класі L^∞.

Усі отримані в дисертації результати є новими та можуть бути використані для подальшого розвитку пов'язаних з дефектними функціями та унітарними зчепленнями методів вивчення стискальних оператор-функцій, як голоморфних в D, так і класу L^∞.

Апробація роботи. Основні результати дисертації доповідались на наукових семінарах акад. Ю.М.Березанського в Києві (1996 р.), проф. О.В.Кужеля в Сімферополі (1996 р.), проф. Б.Кірстайна і проф. Б.Фрітцше в Лейпцігу (1994 р.), проф. Г.М.Скляра в Харкові (1996 р.) і доц. В.К.Дубового в Харкові (1994–1996 рр.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в статтях [1-5].

Структура й обсяг дисертації. Дисертація складається з вступу, чотирьох глав і списку літератури, який містить у собі 88 найменувань. Обсяг роботи 133 сторінки. Назви глав:

Глава I. Унітарні вузли, інтерполяційна задача Шура та дефектні функції.

Глава II. Опис класів дефектних функцій голоморфних стискальних оператор-функцій.

Глава III. Унітарні зчеплення та правильні факторизації стискальних оператор-функцій класу L^∞.

Глава IV. Унітарні зчеплення та правильні розширення стискальних оператор-функцій класу L^∞.

Основні положення, які виносяться на захист:

1) Факторизація радіусів граничного круга Вейля для виродженої задачі Шура.

2) Опис класів дефектних функцій голоморфних в одиничному крузі стискальних оператор-функцій.

3) Факторизації унітарних зчеплень та їх властивості. Правильні факторизації стискальних оператор-функцій класу L^∞ та критерії правильності факторизацій.

4) Вкладення основних каналів в інші канали мінімального унітарного зчеплення та їх зв'язок з правильними факторизаціями субоператора розсіяння. Правильні розширення стискальних оператор-функцій класу L^∞. Розв'язання екстремальної задачі типу узагальненої проблеми Нехарі в класі L^∞. Опис множини правильних розширень стискальних оператор-функцій класу L^∞ у "невиродженому" випадку. Опис голоморфних правильних розширень голоморфних в одиничному крузі стискальних оператор-функцій.

Зміст роботи

У §1 гл.I наводяться загальновідомі необхідні для подальшого поняття та факти з теорії гільбертових просторів векторнозначних функцій $L^2(\mathfrak{N})$ і $H^2_+(\mathfrak{N})$ та банахових просторів операторнозначних функцій $L^\infty[\mathfrak{G},\mathfrak{F}]$ і $H^\infty_+[\mathfrak{G},\mathfrak{F}]$, де $\mathfrak{N},\mathfrak{F},\mathfrak{G}$ – гільбертові простори[1], а символом $[\mathfrak{G},\mathfrak{F}]$ позначається простір лінійних обмежених операторів, що діють з $\mathfrak{G}$ у $\mathfrak{F}$. У роботі вживається позначення $S[\mathfrak{G},\mathfrak{F}]$ для класу голоморфних в $D=\{\zeta:|\zeta|<1\}$ стискальних о.-ф., значеннями яких при всіх $\zeta\in D$ є оператори з $[\mathfrak{G},\mathfrak{F}]$.

У §2 гл.I перелічені відомі основні властивості операторів стиску в гільбертовому просторі. Особлива увага приділяється ізометріям та коізометріям (останній термін вживається для операторів, спряжені до яких є ізометріями).

Нехай $T\in[\mathfrak{H},\mathfrak{H}]$ – оператор стиску, тобто $||T||\le 1$.

Будемо говорити, що однобічний зсув $V\in[\mathfrak{H}_1,\mathfrak{H}_1]$ міститься в стиску $T\in[\mathfrak{H},\mathfrak{H}]$, якщо $\mathfrak{H}_1$ – інваріантний відносно T підпростір в $\mathfrak{H}$ і $V=T|_{\mathfrak{H}_1}$. Оператор $\tilde V\in[\tilde{\mathfrak{H}}_1,\tilde{\mathfrak{H}}_1]$ будемо називати однобічним козсувом, якщо $\tilde V^*$ є однобічним зсувом, і будемо говорити, що $\tilde V$ міститься в T, якщо $\tilde V^*$ міститься в стиску T^*. Можна показати, що серед однобічних зсувів V, які містяться в цілком неунітарному стиску T, є максимальний зсув V_T, тобто такий, що містить у собі всякий однобічний зсув, який міститься в T. Максимальним козсувом, що міститься в цілком неунітарному стиску T, назвемо оператор $\tilde V_T=V^*_{T^*}$.

У §3 гл.I перелічуються основні поняття та відомі факти з теорії унітарних вузлів.

Нехай $T\in[\mathfrak{H},\mathfrak{H}]$ – оператор стиску. Як відомо, для стиску T існують такі гільбертові простори $\mathfrak{F}$ і $\mathfrak{G}$ та оператори $F\in[\mathfrak{F},\mathfrak{H}]$, $G\in[\mathfrak{H},\mathfrak{G}]$, $S\in[\mathfrak{F},\mathfrak{G}]$, що відображення

$$U=\begin{pmatrix}T & F\\ G & S\end{pmatrix}\in[\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{F},\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{G}]$$

є унітарним. Отримана таким чином сукупність

$$\Delta=(\mathfrak{H},\mathfrak{F},\mathfrak{G};T,F,G,S) \tag{1}$$

[1]Всі гільбертові простори в роботі вважаються комплексними та сепарабельними.

називається унітарним вузлом або просто вузлом, а описана вище процедура – включенням стиску T до унітарного вузла Δ, при цьому простори $\mathfrak{H}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ називаються відповідно внутрішнім, лівим зовнішнім та правим зовнішнім, а T – основним оператором вузла Δ. Вузол (1) називається простим, якщо в $\mathfrak{H}$ не існує ненульових підпросторів, які приводять оператор U. Вузол (1) є простим тоді й тільки тоді, коли стиск T є цілком неунітарним.

Унітарному вузлу (1) можно зіставити визначену в D оператор-функцію

$$\theta_\Delta(\zeta) = S^* + \zeta F^*(I - \zeta T^*)^{-1} G^*, \tag{2}$$

яка називається характеристичною оператор-функцією вузла (1). Легко перевіряється, що $\theta_\Delta(\zeta) \in S[\mathfrak{G}, \mathfrak{F}]$. З іншого боку, важливим є обернене твердження: для будь-якої о.-ф. $\theta(\zeta) \in S[\mathfrak{G}, \mathfrak{F}]$ існує простий унітарний вузол (1) такий, що $\theta_\Delta(\zeta) = \theta(\zeta)$, при цьому вузол Δ визначається за $\theta(\zeta)$ з точністю до унітарної еквівалентності.

Одним з основних понять, що використовуються в роботі, є поняття дефектних функцій о.-ф. класу S, введене В.К.Дубовим. Нехай $\theta(\zeta) \in S[\mathfrak{G}, \mathfrak{F}]$ і Δ – простий вузол вигляду (1) такий, що $\theta_\Delta(\zeta) = \theta(\zeta)$. Позначимо відповідно $\mathfrak{H}_0$ і $\tilde{\mathfrak{H}}_0$ породжувальні підпростори максимальних однобічних зсуву V_T і козсуву $\tilde{V}_T$, які містяться в T, а P_0 і $\tilde{P}_0$ – відповідні ортопроектори в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_0$ і $\tilde{\mathfrak{H}}_0$. Голоморфні в D оператор-функції

$$\psi(\zeta) = F^*(I - \zeta T^*)^{-1} P_0|_{\mathfrak{H}_0}, \quad \varphi(\zeta) = \tilde{P}_0(I - \zeta T^*)^{-1} G^* \tag{3}$$

називаються відповідно лівою та правою дефектними функціями оператор-функції $\theta(\zeta)$. Виявляється, що $\psi(\zeta) \in S[\mathfrak{H}_0, \mathfrak{F}]$, $\varphi(\zeta) \in S[\mathfrak{G}, \tilde{\mathfrak{H}}_0]$ і являють собою відповідно * - зовнішню та зовнішню о.-ф.

У §4 гл.I наводяться необхідні зведення про інтерполяційну задачу Шура.

Проблема Шура в операторній постановці формулюється таким чином. Задані $n+1$ операторів $\{c_0, c_1, ..., c_n\} \subset [\mathfrak{G}, \mathfrak{F}]$, де $\mathfrak{G}$ і $\mathfrak{F}$ – гільбертові простори.

а) Знайти необхідні та достатні умови того, що $c_0, c_1, ..., c_n$ є першими $n+1$ коефіцієнтами розкладу в ряд Маклорена деякої о.-ф. $\theta(\zeta) \in S[\mathfrak{G}, \mathfrak{F}]$.

б) У випадку розв'язності попередньої задачі дати опис множини її розв'язків.

Добре відомо, що задача Шура розв'язна в тому й тільки в тому випадку, якщо оператор

$$C_n = \begin{pmatrix} c_0 & & & & \\ c_1 & c_0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ c_n & c_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & c_0 \end{pmatrix}$$

є стискальним. У роботі розглядається лише матричний варіант проблеми Шура, тобто при $\dim\mathfrak{F} < \infty$, $\dim\mathfrak{G} < \infty$. Задача називається невиродженою, якщо оператор $A_n = I - C_nC_n^*$ є оборотним, і виродженою в противному випадку. У випадку розв'язності задачі Шура позначимо сукупність її розв'язків $S[\mathfrak{G},\mathfrak{F};c_0,c_1,...,c_n]$, $K_n(\zeta) = \{\theta(\zeta) : \theta(\zeta) \in S[\mathfrak{G},\mathfrak{F};c_0,c_1,...,c_n]\} \subset [\mathfrak{G},\mathfrak{F}]$ – множину значень її розв'язків у точці $\zeta \in D$. Відомо, що $K_n(\zeta)$ являє собою операторний "круг", який називається кругом Вейля та має вигляд

$$K_n(\zeta) = \{w : w = \sigma_n(\zeta) + |\zeta|^{2n+2} r_{g,n}(\zeta) u \rho_{d,n}(\zeta), u \in [\mathfrak{G},\mathfrak{F}], u^*u \leq I\},$$

де $\sigma_n(\zeta) \in [\mathfrak{G},\mathfrak{F}]$, $r_{g,n}(\zeta) \in [\mathfrak{F},\mathfrak{F}]$, $\rho_{d,n}(\zeta) \in [\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$ – оператори, які однозначно визначаються за $c_0, c_1, ..., c_n$ і називаються відповідно центром, лівим нормованим і правим радіусами круга Вейля.

Будь-яка о.-ф. $\theta(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\zeta^k \in S[\mathfrak{G},\mathfrak{F}]$, очевидно, породжує послідовність розв'язних задач Шура, які відповідають наборам $\{c_0, c_1, ..., c_n\}$ $(n = 0,1,2...)$. Цю послідовність прийнято називати "нескінченною" проблемою Шура, говорячи про її невиродженість, якщо при всіх $n = 0,1,2,...$ невироджена відповідна задача Шура, і про виродженість – у противному випадку. Відомо, що в кожній точці $\zeta \in D$ існують граничні радіуси

$$r_{g,\infty}(\zeta) = \lim_{n\to\infty} r_{g,n}(\zeta), \quad \rho_{d,\infty}(\zeta) = \lim_{n\to\infty} \rho_{d,n}(\zeta).$$

У невиродженому випадку В.К.Дубовим були отримані факторизації

$$r_{g,\infty}(\zeta) = \psi(\zeta)\psi^*(\zeta), \quad \rho_{d,\infty}(\zeta) = \varphi^*(\zeta)\varphi(\zeta),\ \zeta \in D,$$

де $\psi(\zeta)$ $\varphi(\zeta)$ – дефектні функції вигляду (3) о.-ф. $\theta(\zeta)$.

У §5 гл.I доводиться основний результат глави I (теорема I.5.1), в якому узагальнюються наведені вище факторизації граничних радіусів на загальний випадок.

У §1 гл.II наводяться відомі факти про унітарні вузли Δ_ψ і Δ_φ, які відповідають дефектним функціям $\psi(\zeta)$ і $\varphi(\zeta)$ о.-ф. $\theta(\zeta) \in S[\mathfrak{G}, \mathfrak{F}]$.

У §2 вводиться ключове поняття глави II – стиск, в якому міститься породжувальний однобічний зсув (козсув). Зсув $V \in [\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_1]$ (козсув $\tilde{V} \in [\tilde{\mathfrak{H}}_1, \tilde{\mathfrak{H}}_1]$), що міститься в стиску $T \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$, назвемо породжувальним, якщо

$$\mathfrak{H} = \bigvee_{k=0}^{\infty} T^{*k} \mathfrak{H}_1 \quad (\mathfrak{H} = \bigvee_{k=0}^{\infty} T^{k} \tilde{\mathfrak{H}}_1).$$

Отримані в §2 властивості стиску, в якому міститься породжувальний зсув (козсув), дають змогу в наступному параграфі описати класи дефектних функцій.

У §3 доводиться основний результат гл.II (теореми II.3.4 – II. 3.5): для того щоб о.-ф. $\omega(\zeta) \in S[\mathfrak{G}, \mathfrak{F}]$ являла собою ліву (праву) дефектну функцію деякої о.-ф. класу S, необхідно й достатньо, щоб цілком неунітарний стиск, що відповідає $\omega(\zeta)$, містив у собі породжувальний однобічний зсув (козсув).

У §1 гл.III вводиться поняття унітарного зчеплення, яке лише за формою відрізняється від введеного В.М.Адамяном і Д.З.Аровим поняття унітарного зчеплення напівунітарних операторів. Нехай $\mathfrak{F}$ і $\mathfrak{G}$ – гільбертові простори, а $U \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$ – унітарний оператор. Сукупність

$$\sigma = (\mathfrak{H}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}; U) \tag{4}$$

називається унітарним зчепленням або просто зчепленням, якщо $\mathfrak{F}$ і $\mathfrak{G}$ містяться в $\mathfrak{H}$ і являють собою блукаючі відносно U підпростори. Підпростори $\mathfrak{F}$ і $\mathfrak{G}$ називаються каналовими підпросторами входу та виходу відповідно. Зчеплення (4) називається мінімальним, якщо $\mathfrak{H} = M(\mathfrak{F}) \vee M(\mathfrak{G})$, де

$$M(\mathfrak{F}) = \bigoplus_{-\infty}^{\infty} U^k \mathfrak{F}, \quad M(\mathfrak{G}) = \bigoplus_{-\infty}^{\infty} U^k \mathfrak{G}.$$

Зчеплення $\sigma = (\mathfrak{H}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}; U)$ і $\sigma' = (\mathfrak{H}', \mathfrak{F}, \mathfrak{G}; U')$ назвемо унітарно еквівалентними, якщо існує унітарний оператор $Z \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}']$ такий, що

$$U'Z = ZU, \quad Z|_{\mathfrak{F}} = I_{\mathfrak{F}}, \quad Z|_{\mathfrak{G}} = I_{\mathfrak{G}}.$$

Нехай σ – зчеплення вигляду (4). Для будь-якого блукаючого відносно U підпростору $\mathfrak{N}$ можна ввести зображення Фур'є

$$\left[\Phi_U^{\mathfrak{N}} h\right](e^{it}) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{ikt} P_{\mathfrak{N}} U^{-k} h, \quad h \in \mathfrak{H},$$

де $P_{\mathfrak{N}}$ – ортопроектор в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$. Оператор $\theta_\sigma = \Phi_U^{\mathfrak{F}} \left(\Phi_U^{\mathfrak{G}}\right)^* \in [L^2(\mathfrak{G}), L^2(\mathfrak{F})]$ називається оператором розсіяння зчеплення σ. Очевидно, що θ_σ є стискальним оператором, причому $U_{\mathfrak{F}}^\times \theta_\sigma = \theta_\sigma U_{\mathfrak{G}}^\times$, де $U_{\mathfrak{F}}^\times$, $U_{\mathfrak{G}}^\times$ – оператори множення на e^{it} в просторах $L^2(\mathfrak{F})$ і $L^2(\mathfrak{G})$ відповідно. Відомо, що існує єдина (як елемент $L^\infty[\mathfrak{G},\mathfrak{F}]$) о.-ф. $\theta_\sigma\left(e^{it}\right) \in L^\infty[\mathfrak{G},\mathfrak{F}]$ така, що

$$(\theta_\sigma g)\left(e^{it}\right) = \theta_\sigma\left(e^{it}\right) g\left(e^{it}\right), \quad g\left(e^{it}\right) \in L^2(\mathfrak{G}),$$

і яка називається субоператором розсіяння зчеплення σ. При цьому

$$\|\theta_\sigma\left(e^{it}\right)\|_{L^\infty[\mathfrak{G},\mathfrak{F}]} = \operatorname*{ess\,sup}_t \|\theta_\sigma\left(e^{it}\right)\| = \|\theta_\sigma\| \le 1.$$

У §2 гл.III наводиться відомий факт, доведений В.М.Адамяном і Д.З.Аровим, про те, що будь-яка стискальна о.-ф. класу L^∞ може розглядатися як субоператор розсіяння деякого мінімального зчеплення, яке визначається з точністю до унітарної еквівалентності, а також будуються відомі функціональні моделі зчеплень, необхідні в подальшому.

У §3 вводиться ключове поняття гл.III – добуток унітарних зчеплень. Два зчеплення $\sigma_1 = (\mathfrak{H}_1, \mathfrak{F}, \mathfrak{K}; U_1)$ і $\sigma_2 = (\mathfrak{H}_2, \mathfrak{K}, \mathfrak{G}; U_2)$ назвемо зачепленими, якщо збігаються підпростори $M^{(1)}(\mathfrak{K})$ і $M^{(2)}(\mathfrak{K})$, де $M^{(j)}(\mathfrak{K}) = \oplus_{-\infty}^{\infty} U_j^k \mathfrak{K}$ $(j = 1, 2)$, і при цьому $U_1|_{M^{(1)}(\mathfrak{K})} = U_2|_{M^{(2)}(\mathfrak{K})}$. Для таких зчеплень введемо простір $\mathfrak{H} = \mathfrak{R}_{\mathfrak{K}}^{(1)} \oplus M(\mathfrak{K}) \oplus \mathfrak{R}_{\mathfrak{K}}^{(2)}$, де $\mathfrak{R}_{\mathfrak{K}}^{(j)} = \mathfrak{H}_j \ominus M^{(j)}(\mathfrak{K})$ $(j = 1, 2)$, а $M(\mathfrak{K})$ – спільне позначення для підпросторів $M^{(1)}(\mathfrak{K})$ і $M^{(2)}(\mathfrak{K})$. Ототожнюючи $\mathfrak{H}_j$ з відповідним підпростором в $\mathfrak{H}$, позначимо P_j ортопроектор в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_j$ $(j = 1, 2)$ і визначимо унітарний оператор $U \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$ формулою $U = U_1 P_1 + U_2 Q_2$, де $Q_2 = I_{\mathfrak{H}} - P_1$. Зчеплення $\sigma = (\mathfrak{H}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}; U)$ будемо називати добутком $\sigma_1\sigma_2$ зачеплених зчеплень σ_1 і σ_2. Ясно, що для U справджується також рівність $U = U_1 Q_1 + U_2 P_2$, де $Q_1 = I_{\mathfrak{H}} - P_2$. Факторизацією унітарного зчеплення називається будь-яке його подання у вигляді добутку унітарних зчеплень.

У цьому ж третьому параграфі встановлюється ряд властивостей операції множення зчеплень. Відзначимо лише, що добуток мінімальних зчеплень не обов'язково є мінімальним зчепленням.

Важливим для подальшого є доведення такого твердження (теорема III.3.8): для того щоб існувала факторизація $\sigma = (\mathfrak{H}_1, \mathfrak{F}, \mathfrak{K}; U_1)(\mathfrak{H}_2, \mathfrak{K}, \mathfrak{G}; U_2)$ зчеплення (4), необхідно і достатньо, щоб існував інваріантний відносно U підпростір $\mathfrak{H}_+ \subset \mathfrak{H}$ такий, що $\mathfrak{K} = \mathfrak{H}_+ \ominus U\mathfrak{H}_+$, $\mathfrak{G} \subset \vee_{k=0}^{\infty} U^{*^k} \mathfrak{H}_+$,

$\mathfrak{F} \subset \bigvee_{k=0}^{\infty} U^k \mathfrak{H}_-$, де $\mathfrak{H}_- = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_+$. Між такими підпросторами та факторизаціями зчеплення σ існує взаємно однозначна відповідність.

Зв'язок між факторизаціями зчеплень та їх субоператорів розсіяння встановлюється "теоремою множення" (теорема III.3.9): якщо $\sigma = \sigma_1\sigma_2$, то $\theta_\sigma\left(e^{it}\right) = \theta_{\sigma_1}\left(e^{it}\right)\theta_{\sigma_2}\left(e^{it}\right)$.

На закінчення §3 будується функціональна модель добутку мінімальних зчеплень, яка відповідає добутку $\theta_1\left(e^{it}\right)\theta_2\left(e^{it}\right)$ стискальних о.-ф. $\theta_1\left(e^{it}\right) \in L^\infty[\mathfrak{K},\mathfrak{F}]$ і $\theta_2\left(e^{it}\right) \in L^\infty[\mathfrak{G},\mathfrak{K}]$.

У §4 гл.III вводиться важливе для подальшого поняття правильної[2] факторизації стискальної о.-ф. класу L^∞ : факторизація $\theta\left(e^{it}\right) = \theta_1\left(e^{it}\right)\theta_2\left(e^{it}\right)$, де $\theta_1\left(e^{it}\right) \in L^\infty[\mathfrak{K},\mathfrak{F}]$, $\theta_2\left(e^{it}\right) \in L^\infty[\mathfrak{G},\mathfrak{K}]$ – стискальні о.-ф., називається правильною, якщо добуток $\sigma_1\sigma_2$ мінімальних зачеплених зчеплень σ_1 і σ_2 таких, що $\theta_{\sigma_j}\left(e^{it}\right) = \theta_j\left(e^{it}\right)$ $(j = 1,2)$, також є мінімальним зчепленням. Встановлюється взаємно однозначна відповідність між множинами факторизацій мінімального зчеплення та правильних факторизацій його субоператора розсіяння (теорема III.4.1). Решту §4 присвячено встановленню часткового порядку в множині правильних факторизацій стискальної о.-ф. класу L^∞. Отримано геометричне тлумачення введеного часткового порядку.

У §5 гл. III за допомогою побудованої в §3 гл.III функціональної моделі добутку зчеплень доводиться низка критеріїв правильності факторизації стискальної оператор-функції класу L^∞ (теореми III.5.2 – III.5.3), які є узагальненням відомих критеріїв правильності факторизації о.-ф. класу S.

У §6 гл.III спочатку наводиться відомий зв'язок між так званими ортогональними ($M_-(\mathfrak{F}) \perp M_+(\mathfrak{G})$) зчепленнями вигляду (4) та унітарними вузлами вигляду (1), далі для таких зчеплень встановлюється адекватність введеного в роботі поняття добутку зчеплень та відомого поняття добутку вузлів.

Для будь-якого зчеплення σ вигляду (4) підпростори в $\mathfrak{H}$ вигляду

$$M(\mathfrak{N}) = \bigoplus_{-\infty}^{\infty} U^k\mathfrak{N}, \quad M_+(\mathfrak{N}) = \bigoplus_{0}^{\infty} U^k\mathfrak{N}, \quad M_-(\mathfrak{N}) = \bigoplus_{-\infty}^{-1} U^k\mathfrak{N},$$

де $\mathfrak{N}$ – блукаючий відносно U підпростір в $\mathfrak{H}$, будемо називати відповідно двобічним, однобічним вихідним та однобічним вхідним каналами зчеплення

[2]В роботі вживається термін "правильна факторизація" замість загальновідомого терміна "регулярна факторизація" через неоднозначне тлумачення останнього при роботі в класі L^∞

σ, які відповідають підпростору $\mathfrak{N}$.

У §1 гл. IV вивчаються зв'язки між вкладеннями основних двобічних каналів ($M(\mathfrak{F})$ і $M(\mathfrak{G})$) в інші канали мінімального зчеплення σ вигляду (4) і правильними факторизаціями (спеціального вигляду) субоператора розсіяння $\theta_\sigma\left(e^{it}\right)$ (теореми IV.1.3, IV.1.4, IV.1.9), а також з'ясовуються деякі умови, за яких норма стискальної о.-ф. $\theta\left(e^{it}\right)$ класу L^∞ набуває екстремального значення, тобто $||\theta\left(e^{it}\right)||_{L^\infty}=1$ (теореми IV.1.5, IV.1.6, IV.1.8).

У§2 гл.IV введені правильні розширення стискальних о.-ф. класу L^∞.

Стискальну о.-ф. $\theta_1\left(e^{it}\right) \in L^\infty[\mathfrak{G}^{(1)} \oplus \mathfrak{G}, \mathfrak{F}]$ ($\theta_2\left(e^{it}\right) \in L^\infty[\mathfrak{G}, \mathfrak{F}^{(1)} \oplus \mathfrak{F}]$) вигляду

$$\theta_1\left(e^{it}\right) = [\tilde{\theta}\left(e^{it}\right), \theta\left(e^{it}\right)] \quad \left(\theta_2\left(e^{it}\right) = \begin{bmatrix} \hat{\theta}\left(e^{it}\right) \\ \theta\left(e^{it}\right) \end{bmatrix}\right)$$

будемо називати правильним розширенням вліво (вверх) стискальної о.-ф. $\theta\left(e^{it}\right) \in L^\infty[\mathfrak{G}, \mathfrak{F}]$, якщо факторизація $\theta\left(e^{it}\right) = \theta_1\left(e^{it}\right)\theta_2\left(e^{it}\right)$, де

$$\theta_2\left(e^{it}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{\mathfrak{G}} \end{bmatrix} \quad \left(\theta_1\left(e^{it}\right) = [0, I_{\mathfrak{F}}]\right),$$

є правильною. Аналогічним чином вводяться двобічні (вліво та вверх) правильні розширення, при цьому однобічні розширення (вліво або вверх) можна розглядати як окремий випадок двобічних.

Відзначимо, що В.К.Дубовим і Рамаданом К. Мохамедом були вивчені голоморфні правильні розширення о.-ф. класу S.

За умови "невиродженості" (в термінах відповідного мінімального зчеплення вигляду (4) це означає, що $\mathfrak{H} = \overline{M(\mathfrak{F})\dot{+}M(\mathfrak{G})}$) в теоремі IV.2.3 отримано повний опис правильних однобічних розширень стискальної оператор-функції $\theta\left(e^{it}\right) \in L^\infty[\mathfrak{G}, \mathfrak{F}]$.

У §3 гл. IV формулюється та розв'язується екстремальна задача типу узагальненої проблеми Нехарі в класі L^∞. Цей результат є основним у главі IV і являє собою узагальнення аналогічної задачі в класі S, яка була розв'язана В.К.Дубовим і Рамаданом К. Мохамедом.

Нехай $\theta\left(e^{it}\right) \in L^\infty[\mathfrak{G}, \mathfrak{F}]$ – стискальна о.-ф. і

$$[\theta_{21}\left(e^{it}\right), \theta\left(e^{it}\right)] \in L^\infty[\mathfrak{G}^{(1)} \oplus \mathfrak{G}, \mathfrak{F}], \quad \begin{bmatrix} \theta_{12}\left(e^{it}\right) \\ \theta_2\left(e^{it}\right) \end{bmatrix} \in L^\infty[\mathfrak{G}, \mathfrak{F}^{(1)} \oplus \mathfrak{F}] \quad (5)$$

– її правильні розширення відповідно вліво та вверх.

а) Знайти

$$\inf_{\eta\in L^\infty[\mathfrak{G}^{(1)},\mathfrak{F}^{(1)}]}\left\|\begin{bmatrix}\eta\left(e^{it}\right) & \theta_{12}\left(e^{it}\right)\\ \theta_{21}\left(e^{it}\right) & \theta\left(e^{it}\right)\end{bmatrix}\right\|_{L^\infty[\mathfrak{G}^{(1)}\oplus\mathfrak{G},\mathfrak{F}^{(1)}\oplus\mathfrak{F}]}. \tag{6}$$

б) Якщо інфімум досягається, знайти о.-ф. $\eta\left(e^{it}\right)\in L^\infty[\mathfrak{G}^{(1)},\mathfrak{F}^{(1)}]$, на яких це справджується.

Розв'язання цієї задачі може бути сформульоване в такому вигляді (теорема IV.3.2).

За умови $\mathfrak{F}^{(1)}\neq\{0\}$ або $\mathfrak{G}^{(1)}\neq\{0\}$ інфімум (6) досягається та дорівнює 1. О.-ф. $\theta_{11}\left(e^{it}\right)\in L^\infty[\mathfrak{G}^{(1)},\mathfrak{F}^{(1)}]$, на якій він досягається єдина. Якщо σ – мінімальне зчеплення вигляду (4) таке, що $\theta_\sigma\left(e^{it}\right)=\theta\left(e^{it}\right)$, то $\theta_{11}\left(e^{it}\right)=\theta_{\sigma_{11}}\left(e^{it}\right)$, де $\sigma_{11}=(\mathfrak{H},\mathfrak{F}^{(1)},\mathfrak{G}^{(1)};U)$, а $\mathfrak{F}^{(1)}$ і $\mathfrak{G}^{(1)}$ – блукаючі відносно U підпростори в $\mathfrak{H}$, що однозначно визначаються правильними розширеннями (5). О.-ф.

$$\Omega\left(e^{it}\right)=\begin{bmatrix}\theta_{11}\left(e^{it}\right) & \theta_{12}\left(e^{it}\right)\\ \theta_{21}\left(e^{it}\right) & \theta\left(e^{it}\right)\end{bmatrix}\in L^\infty[\mathfrak{G}^{(1)}\oplus\mathfrak{G},\mathfrak{F}^{(1)}\oplus\mathfrak{F}]$$

являє собою єдине правильне двобічне розширення о.-ф. $\theta\left(e^{it}\right)$, яке одночасно є правильним розширенням відповідно вверх і вліво о.-ф. (5).

На підставі цього результату в "невиродженому" випадку дається повний опис правильних двобічних розширень стискальної о.-ф. класу L^∞ (теорема IV.3.4), а також голоморфних правильних двобічних розширень о.-ф. класу S (теорема IV.4.5)

Відзначимо, що близьке коло проблем розглядалось Д.З.Аровим у зв'язку із зображеннями за Дарлінгтоном. Але при цьому використовувались інші методи.

Література

[1] Бойко С.С., Дубовой В.К. Факторизация радиусов предельного круга Вейля в вырожденной интерполяционной задаче Шура // Матем. физика, анализ, геометрия.– 1996.– Т.3.– № 1/2.- С.18-26.

[2] Бойко С.С., Дубовой В.К. Унитарные сцепления и рассеяние по внутренним каналам системы // Харьков. 1996. Деп. в ГНТБ Украины. 12.12.96. № 2381 - Ук 96.

[3] Бойко С.С., Дубовой В.К. Унитарные сцепления и правильные факторизации оператор-функций из L^∞ // Доповіді НАН України.– 1997. – № 1. – С.41-44.

[4] Бойко С.С., Дубовой В.К., Кирстайн Б., Фритцше Б. Описание класса дефектных функций // Харьков. 1996. Деп. в ГНТБ Украины. 12.12.96. № 2382 - Ук 96.

[5] Бойко С.С., Дубовой В.К., Кирстайн Б., Фритцше Б. Операторы сжатия, дефектные функции и теория рассеяния // Укр. мат. жур. – 1997. – Т. 49.– № 4.– С.481-489

Boiko S.S. Defect functions and unitary couplings. Manuscript. The dissertation is to achieve the degree of Doctor of Philosophy in mathematics on the speciality 01.01.01. – Mathematical analysis. Kharkov State University. Kharkov. Ukraine. 1997.

The disseratation deals with developing the operator approach to study of defect functions of holomorphic in the unit disk contractive operator functions and with applications of the unitary couplings theory to reseacheres of regular extensions of contractive operator functions in class L^∞. Due to these approaches the factorization of the radii of Weil limit ball in the degenerate interpolation Schur problem is obtained, a description of the classes of defect functions is given, factorization methods of unitary colligations are extended to unitary couplings and a Nehari-type extremal generalized problem in class L^∞ is solved.

Бойко С.С. Дефектные функции и унитарные сцепления. Рукопись. Диссертация на соискание научной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Математический анализ. Харьковский государственный университет. Харьков. Украина. 1997.

Диссертация посвящена развитию операторного подхода к изучению дефектных функций голоморфных в единичном круге сжимающих оператор-функций и применению теории унитарных сцеплений при исследовании правильных расширений сжимающих оператор-функций класса L^∞. Благодаря этим подходам получена факторизация радиусов предельного круга Вейля в вырожденной интерполяционной задаче Шура, дано описание классов дефектных функций, распространены методы факторизации унитарных узлов на унитарные сцепления и решена экстремальная задача типа обобщённой проблемы Нехари в классе L^∞.

Ключові слова: гільбертів простір, оператор стиску, однобічний зсув, унітарний вузол, характеристична оператор-функція, відкрита система, унітарна ділатація, дефектна функція, правильне розширення, теорія розсіяння, унітарне зчеплення, субоператор розсіяння.

Key words: Hilbert space, contraction operator, unilateral shift, unitary colligation, characteristic operator function, open system, unitary dilation, defect function, regular extension, scattering theory, unitary coupling, scattering suboperator.

Підписано до друку 14.07.97. Формат 60x84 1/16
Тираж 100 прим.Замовлення №1229.

Отпечатано на дубликаторе «Seiki» ФАО «КиПи-РИЗО»
310166, г.Харьков, пр. Ленина 17а, к. 405.