

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
"КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

Присяжнюк Володимир Костянтинович

УДК 539.3

**УЗАГАЛЬНЕНА НЕКЛАСИЧНА МОДЕЛЬ
НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ
В ЗАДАЧАХ СТАТИКИ, ДИНАМІКИ ТА КОНТАКТУ
ШАРУВАТИХ ПЛИТ І ОБОЛОНОК**

Спеціальність 01.02.04 -
МЕХАНІКА ДЕФОРМІВНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

КИЇВ - 1997

№. 38. 665

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Українському транспортному університеті
Міністерства освіти України

Науковий консультант - доктор технічних наук, професор
Піскунов Вадим Георгійович,
завідувач кафедрою Українського
транспортного університету

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Василенко Анатолій Тихонович,
головний науковий співробітник Інституту
механіки імені С.П.Тимошенка Національної
академії наук України;

доктор технічних наук, професор
Сахаров Олександр Сергійович,
завідувач кафедрою Національного
технічного університету України
"Київський політехнічний інститут";

доктор технічних наук, професор
Чибириков Валерій Кузьмич,
завідувач кафедрою Київського
державного технічного університету
будівництва і архітектури

Провідна установа - Інститут проблем машинобудування
Національної академії наук України, м. Харків,
відділ міцності тонкостінних конструкцій

Захист відбудеться " 08 " 12 1997 р. о 15 годині
на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.02.18 Національного
технічного університету України "Київський політехнічний інститут",
за адресою: 252056, м. Київ, пр. Перемоги, 37, корп. №1, ауд. № 166

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Національного
технічного університету України "Київський політехнічний інститут",
252056, м. Київ, проспект Перемоги, 37

Автореферат розісланий " 01 " 11 1997 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради,
кандидат технічних наук, доцент



Боронко О.О.

ЛННБ України ім.В.Стефаника



00728743 (V)

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА ДИСЕРТАЦІЇ

Актуальність теми. Розвиток сучасної техніки пов'язаний з вдосконаленням існуючих та створенням нових конструктивних систем та матеріалів, що відповідають вимогам надійності та технологічності. До них відносяться шаруваті системи - оболонки, плити, балки, при виготовленні яких застосовують композиційні матеріали, що створюють шарувату структуру в цілому або є окремими шарами в загальній структурі системи.

Дослідження напружено-деформованого стану шаруватих плит і оболонок становить складну проблему механіки деформівного твердого тіла. Цей стан має просторовий характер, визначений викривленням та зміною довжини нормалей до поверхонь контакту шарів та зовнішніх поверхонь. Причина полягає у підвищеній податності шаруватих конструктивних систем поперечним деформаціям - зсуву та обтисненню. В зв'язку з цим класична модель напружено-деформованого стану, в основу якої покладено гіпотезу прямих нормалей, непридатна до шаруватих систем. Тому для їх розрахунку, поряд з тривимірними розв'язками просторової теорії пружності, знайшли застосування двовимірні моделі, які уточнюють класичну врахуванням поперечних деформацій та відповідних напружень - уточнені некласичні моделі.

Аналіз сучасних некласичних моделей напружено-деформованого стану шаруватих плит і оболонок вказує на необхідність поглиблення їх розробки та узагальнення, особливо в напрямку врахування деформацій поперечного обтиснення та поперечних нормальних напружень. Саме ці фактори мають визначальний характер для розв'язку ряду задач статичної й динамічної шаруватих систем, зокрема, згину нетонких плит і оболонок, їх високочастотних коливань, а також для задач контакту шаруватих плит з пружною основою, визначення напружень при їх контакті зі штампами.

В зв'язку з викладеним побудову некласичних моделей напружено-деформованого стану шаруватих плит і оболонок, їх реалізацію аналітичними й чисельними методами розрахунку та розв'язок вказаних задач слід вважати актуальними питаннями механіки деформівного твердого тіла, розв'язання яких покладено в основу теми даної дисертації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано відповідно до комплексної теми досліджень в галузі механіки деформівного твердого тіла "Розробка основ прикладної теорії та методів розрахунку багатошарових конструкцій складної геометрії", що виконувалась в Українському транспортному університеті (колишньому Київському автомобільно-дорожньому інституті) за Координаційним планом досліджень Академії наук України, а також згідно теми "Чисельне дослідження процесів деформування багатошарових елементів конструкцій та споруд, що взаємодіють з неоднорідними середовищами, при статичних, динамічних та температурних навантаженнях" за планом досліджень Міністерства освіти України.

Мета і завдання дисертації. Мета дисертації полягає в побудові узагальненої двовимірної неklasичної моделі напружено-деформованого стану анізотропних шаруватих плит і оболонок, в реалізації побудованої моделі аналітичними й чисельними методами розрахунку та в розв'язку на цій основі задач статички, динаміки та контакту шаруватих систем.

Для реалізації цієї мети поставлено вирішення наступних завдань:

- відображення при побудові моделі просторового (тривимірного) характеру напружено-деформованого стану шаруватих плит і оболонок;
- розробка точного розв'язку плоскої задачі теорії пружності для шаруватого ортотропного композитного масиву та використання результатів цього розв'язку для обґрунтування достовірності побудованої неklasичної моделі;
- отримання аналітичних розв'язань системи диференціальних рівнянь узагальненої неklasичної моделі, її часткових випадків, та розвиток чисельного моделювання напружено-деформованого стану шаруватих систем;
- дослідження напружено-деформованого стану шаруватих плит і оболонок при лінійному та нелінійному статичному згині, високочастотних коливань цих систем, а також встановлення меж застосування узагальненої неklasичної моделі та її часткових випадків;
- побудова двовимірної моделі напружено-деформованого стану шаруватого півпростору (пружної основи) й розв'язок задач контакту з ним шаруватих плит;
- розробка розв'язків задач контакту шаруватих плит із жорсткими штампами, а також міжшарового контакту, та дослідження розподілу контактних напружень;
- розв'язок на основі неklasичних моделей та методів їх реалізації дослідницьких та прикладних задач розрахунку шаруватих систем.

Наукова новизна одержаних результатів. В дисертації отримано такі основні результати:

- побудовано нову узагальнену двовимірну неklasичну модель динамічного напружено-деформованого стану шаруватих анізотропних плит і пологих оболонок, яку відрізняє повнота врахування факторів, що відображають просторовий характер їх деформування, зокрема, шляхом врахування деформацій поперечного зсуву й обтиснення, а також геометричної нелінійності та динамічної дії навантажень;
- розроблено новий точний розв'язок плоскої задачі теорії пружності для шаруватого ортотропного композитного масиву з використанням комплексних коренів характеристичних рівнянь;
- розвинено аналітичні й чисельні розв'язки, основою яких є узагальнена неklasична модель, використання яких дозволило одержати нові результати досліджень впливу поперечних деформацій зсуву та обтиснення в задачах статичного згину, коливань, виявити нові ефекти напружено-деформованого стану шаруватих систем;
- побудовано та реалізовано адекватну до неklasичної моделі плити нову багатопараметрову двовимірну модель шаруватого пружного півпростору та встановлено особливості контактної взаємодії плит й півпростору;

- розроблено нові розв'язки задач контакту шаруватих плит з жорсткими штампами, міжшарового контакту та отримано нові дані щодо розподілу контактних напружень;

- отримано нові результати розв'язку ряду прикладних задач, що стосуються напружено-деформованого стану плит дорожнього та аеродромного одягу, а також оболонки рефлектора антени космічного апарату.

Практичне значення одержаних результатів. В дисертації створено наукові основи для подальшого розвитку досліджень в галузі механіки деформування неоднорідних шаруватих тіл та розв'язку практичних задач розрахунку конструктивних систем шаруватої структури для різних галузей техніки. Одержані результати використано в ряді науково-дослідних та проектно-конструкторських організацій, зокрема:

- НДІАСП (м. Київ) - чисельний алгоритм розрахунку шаруватих плит і оболонок;
- ДП "Укргіпродор" (м. Київ) - результати розрахунку плит дорожнього одягу;
- "СоюздорНДІ" (м. Балашиха) - дані для "Інструкції по проектуванню дорожнього одягу жорсткого типу";
- НВО "Прикладна механіка" (м. Красноярськ) - результати розрахунку оболонки рефлектора антени космічного апарату;
- НДПКІ "Аеродромпроект" (м. Москва) - результати теоретичних та експериментальних досліджень напружено-деформованого стану шаруватих плит аеродромного одягу.

Деякі результати дисертації знайшли відображення в учбовому виданні "Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності" (м.Київ: Вища школа; 1994-1995 р.р.), співавтором якого є здобувач.

Апробація результатів дисертації. Матеріали дисертації оприлюднено більш ніж на двадцяти наукових конгресах, конференціях, симпозіумах та семінарах, зокрема: Міжнародному конгресі "Застосування математики в інженерних науках - ІКМ-84" (Німеччина, м.Веймар - 1984р.); Міжнародному конгресі "Теорія та експериментальні дослідження просторових конструкцій - ІASS" (м. Москва - 1985р.); V всесоюзній конференції із статички та динаміки просторових конструкцій (м. Київ - 1985р.); конференції "Математичні моделі та методи розв'язку задач оптимального проектування гнучких пластин і оболонок" (м. Саратов - 1988р.); конференції "Методи потенціала і скінченних елементів в автоматизованих дослідженнях інженерних конструкцій" (м. Київ - 1991р.); Міжнародній конференції з комп'ютерної інженерії - ICSE-95 (США - 1995р.); Білоруському конгресі з теоретичної та прикладної механіки "Механіка - 95" (м. Мінск - 1995р.); Міжнародній конференції "Механіка композитних матеріалів - МКМ-96" (Латвія, м.Рига - 1996р.); на конференціях та семінарах з проблем міцності Київського автомобільно-дорожнього інституту, згодом Українського транспортного університету.

Публікації. Матеріали дисертації загалом викладено в 50 наукових роботах, з яких в авторефераті наведено список з 30 основних публікацій. Серед них:

- монографія [1];
- 16 статей в провідних фахових академічних журналах України [13, 17, 20, 24, 29] та фахових журналах колишнього СРСР і країн СНД [4, 7, 12, 14, 15, 18, 19, 22, 23, 25, 27];
- 8 статей в періодичних збірниках наукових праць [2, 5, 8, 10, 11, 16, 21, 30];
- 5 публікацій в працях і матеріалах наукових конгресів та конференцій [3, 6, 9, 26, 28].

Особистий внесок здобувача. Головна частина ідей, теоретичних та практичних розробок дисертації належать здобувачу особисто, що знайшло відображення в його індивідуальних працях: розділі монографії [1], присвяченому розв'язку контактних задач для шаруватих систем, дев'яти статтях [2, 10, 14, 15, 20, 21, 24, 27, 30] та доповіді [28].

Статті [7, 13, 17, 18] надруковано разом з науковим консультантом професором В.Г.Піскуновим, як постановником проблем дисертації.

В роботах [3, 5, 6, 11, 29], виконаних разом з В.Г.Піскуновим, В.С.Веригином та деякими іншими авторами, здобувачу належить частина, що стосується розробки геометрично нелінійної теорії шаруватих систем, динамічних та контактних задач, які є предметом досліджень дисертації.

В статтях [8, 16, 19, 23], співавтором яких є О.В.Марчук, викладено результати, що стосуються задач контакту шаруватих плит з пружною основою. Теоретична частина цих робіт розроблена автором, а розрахунки та їх аналіз виконано з участю співавтора.

Ряд розділів монографії [1], статті та доповіді [4, 9, 22, 25, 26] викладають результати різних теоретичних та експериментальних досліджень, виконаних спільно з науковим консультантом, співробітниками, що приймали участь в розробці координаційних програм, госпдогівірних та держбюджетних тем, аспірантами. Зокрема, разом із співавторами монографії [1] В.С. Сіпетовим, В.С. Карпіловським, а також Н.Г. Марченко, О.М. Демчуком виконано розробку процедур чисельної реалізації моделей неоднорідних шаруватих плит і оболонок методом скінченних елементів, розрахунки на цій основі рефлектора антени космічного апарату та деяких конструкцій шаруватих плит дорожніх одягів. Ряд цих результатів, що належать автору, включено до дисертації.

Структура та обсяг дисертації. Робота складається з вступу, семи розділів (глав), висновків. Повний обсяг становить 389 сторінок. Окрім основного тексту дисертація містить 66 рисунків (60 сторінок), 32 таблиці (25 сторінок) та список літературних джерел з 327 найменувань (27 сторінок).

Автор висловлює щире подяку доктору технічних наук, професору Піскунову Вадиму Георгійовичу - науковому консультанту виконаної дисертації.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

В с т у п до дисертації висвітлює постановку проблеми розробки неklasичних моделей напружено-деформованого стану шаруватих плит і оболонок, мету роботи та її загальні характеристики.

Перший розділ присвячено огляду теорії моделювання напружено-деформованого стану шаруватих оболонок і пластин, розвитку різних типів неklasичних моделей.

Відмічається два основних підходи в моделюванні шаруватих систем: застосування рівнянь просторової тривимірної теорії пружності та використання рівнянь, отриманих зведенням тривимірної задачі до двовимірної.

Розв'язки теорії пружності для шаруватих систем будуються, головним чином, за аналогією з розв'язками для однорідних плит і оболонок. Такі розв'язки отримали Б.Г.Гальоркін, А.І.Лур'є, Б.Ф.Власов, В.Т.Грінченко, А.Ф.Улітко та інші вчені. В першу чергу було побудовано точні або наближені до них розв'язки для тришарових плит і оболонок. Це роботи Л.Е.Брюккера та О.П.Прусакова для задачі згину плити, В.М.Москаленка - для задачі коливань, О.М.Гузя - для задачі стійкості. Системи з довільним числом шарів на основі рівнянь тривимірної теорії розглядали В.В.Болотін і Ю.М.Новічков, Я.М.Григоренко, А.Т.Василенко і Н.Д.Панкратова, В.Г.Піскунов і В.С.Сіпетов, О.П.Прусаков і А.В.Плеханов, А.К.Приварников і Б.С.Радовський, М.О.Шульга і О.І.Ямковий, а також Е.Рейсснер, С.Среніваз, Р.Крістенсен, Н.Пейгано, А.Нур, Я.Редді, М.Савоя та інші.

Методи зведення тривимірної задачі теорії пружності для однорідних та шаруватих плит і оболонок розробляли та застосовували В.З.Власов, І.Н.Векуа, І.І.Ворович, О.Л.Гольденвейзер, М.О.Кільчевський, А.І.Лур'є, Х.М.Муштари, М.М.Леонтьєв. Згодом їх розвинули Ю.В.Верюжський, С.М.Галілеєв, В.І.Гуляєв, Б.М.Лисицин, Л.П.Хорошун, В.К.Чибириков та інші дослідники.

Широке застосування для побудови двовимірних моделей шаруватих оболонок і пластин (плит) знайшов метод гіпотез, який за класифікацією Е.І.Григолюка і Ф.А.Когана має два напрямки: перший, в якому кінематичні гіпотези вводять дискретно - для кожного окремого шару, що формує клас "дискретно-структурних" моделей, яким властива залежність порядку рівнянь від кількості шарів; другий, в якому гіпотези вводять неперервно для пакета шарів в цілому, що формує клас "неперервно-структурних" моделей, для яких порядок рівнянь від кількості шарів не залежить.

Загальна теорія багатошарових систем в рамках першого напрямку була сформульована В.В.Болотіним і Ю.М.Новічковим, Е.І.Григолюком і П.П.Чулковим.

Другий напрямок пов'язаний із узагальненням неklasичних моделей однорідних балок і плит, які враховують вплив деформацій поперечного зсуву і вперше побудовані С.П.Тимошенком та Е.Рейсснером. Для шаруватих анізотропних пластин і оболонок пріоритетними є роботи С.О.Амбарцумяна та С.Г.Лехницького.

Цей напрямок теорії моделювання шаруватих ізотропних оболонок і пластин згодом набув розвитку в роботах О.П.Прусакова, С.Н.Кана, Б.Я.Кантора, О.Ф.Рябова, трансверсально-ізотропних - В.Г.Піскунова, В.С.Сіпетова та автора,

ортотропних - О.О.Рассказова і О.Г.Бондаря, анізотропних - Я.М.Григоренка і А.Т.Василенка, Е.І.Григолюка і Г.М.Кулікова, В.А.Баженова і О.І.Оглоблі, О.С.Сахарова і О.В.Гондляха, Р.Б.Рикардса і В.А.Нарусберга, інших вітчизняних та зарубіжних вчених.

Ряд робіт присвячений важливому питанню моделювання контакту шарів оболонок і пластин, їх розшаруванню та руйнуванню. Г.С.Писаренко та О.С.Бабенко розглянули питання неідеального контакту шарів рулонованих оболонок. В.А.Баженов, Е.А.Гоцуляк та О.І.Оглобля побудували моделі й розв'язали задачі розрахунку оболонок і пластин, що мають зони розшарування. В.Н.Паймушин побудував модель нелінійного деформування тришарових оболонок з урахуванням міжшарових дефектів. О.С.Сахаров, О.В.Гондлях та С.Л.Мельников розробили аналітично-дискретні моделі, що дозволили дослідити руйнування шаруватих композиційних оболонок. В.Г.Дубенець розвинув теорію коливальних багатшарових оболонок і пластин з урахуванням розсіювання енергії. А.С.Дехтяр розглянув граничну рівновагу шаруватих систем. В.Є.Веригенко та С.Г.Буригін побудували моделі фізично-нелінійного деформування шаруватих ортотропних плит і оболонок. В.Г.Савченко, В.С.Сіпетов, О.Г.Бондар розробили різні підходи щодо розрахунку оболонок і плит при дії температурних навантажень.

Викладення проблем механіки композитних шаруватих матеріалів знайшли відображення в роботах О.М.Гузя, Я.М.Григоренка, І.Ю.Бабича, Л.П.Хорошуна, Г.М.Ваніна, В.В.Васильєва, Б.Є.Победри, С.Ю.Єременка, М.О.Шульги. Проблеми моделювання технологічних процесів шаруватих композитних систем розглянули Г.О.Кривов, В.А.Тітов та Ю.М.Федоренко.

Розв'язок всіх розглядуваних проблем потребує, перш за все, застосування достовірних моделей напружено-деформованого стану. На основі аналізу побудованих неklasичних моделей та результатів їх застосування зроблено висновок щодо необхідності їх подальшого вдосконалення, в першу чергу за рахунок більш повного врахування ефектів поперечного обтіснення, зокрема обов'язкового врахування цього фактору від безпосереднього прикладання зовнішніх навантажень, сил інерції в динамічних задачах. Це тим більше необхідно, що існує клас задач механіки деформівного твердого тіла, в яких врахування саме цих факторів має вирішальний вплив на точність результатів. До них відносяться, в першу чергу, задачі контакту пластин і оболонок із жорсткими штампами. В цих задачах навіть для тонких гнучких систем, як показали дослідження Ю.П.Артюхіна і С.Н.Карасьова, М.В.Блоха, Е.І.Григолюка і Г.М.Кулікова, Б.Я.Кантора, Г.І.Льова, для отримання реального розподілу контактних напружень, що відповідає фізичній сутності задачі, необхідно враховувати, поряд з поперечним зсувом, також і поперечне обтіснення.

Вказані твердження стали основою для постановки мети та завдань даної дисертації, сформульованих у вступній частині автореферату.

У другому розділі викладено побудову узагальненої неklasичної моделі динамічного напружено-деформованого стану шаруватих пологих оболонок (рис. 1), в частковому випадку плит. Розглядаються оболонки (плити), шари яких мають змінні за товщиною фізико-механічні характеристики. Товщини й жорсткості шарів, їх кількість і порядок взаємного розташування вважаються довільними.

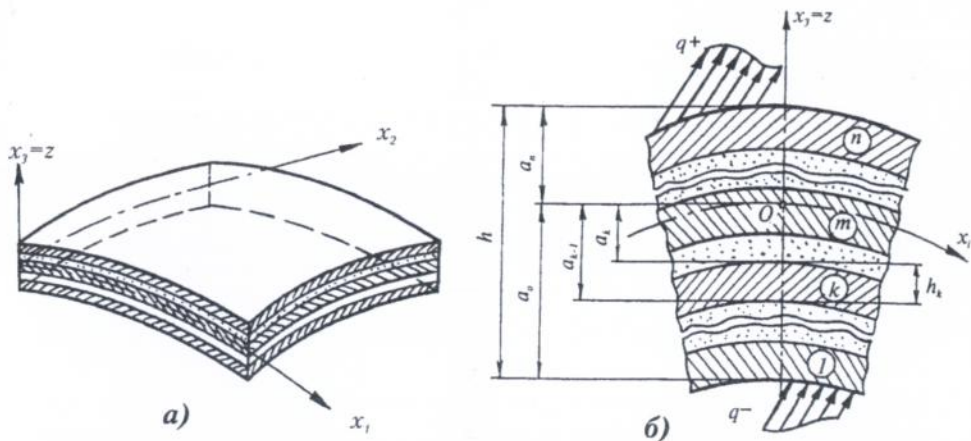


Рис. 1. Елемент шаруватої оболонки:
а)-загальний вигляд; б)-структура за товщиною

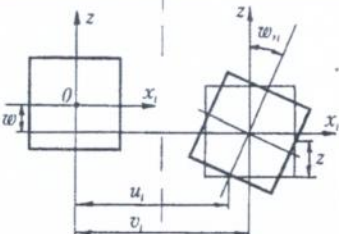
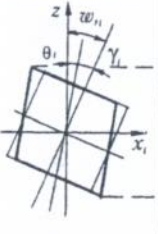
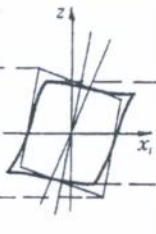
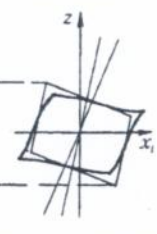
				
Початкове положення	Лінійні переміщення й поворот	Осереднений зсув	Локальні поперечні зсуви	Поперечне обтиснення
Класична модель Кірхгофа-Лява		Некласичні моделі		
		Лінійна С.П.Тимошенка	Нелінійна зсувна	Узагальнена зсув, обтиснення
Припущення		$G' = E' = \infty$	$G' \neq 0; E' = \infty$	$G' \neq \infty; E' \neq \infty$
Розклад переміщень	$u_1 = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5$ $u_3 = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4$			

Рис. 2. Схема деформування елементарного об'єму оболонки

Матеріал кожного шару є анізотропним з однією площиною пружної симетрії. Контакт шарів вважається "абсолютно жорстким".

Всі співвідношення моделі записано відповідно правилу підсумовування по "німих" індексах: $i, j = 1, 2$; $s = 1, 2, 3$; l, p, g, q, r . На індекси k, m , що відносяться до нумерації шарів, це правило не розповсюджується.

Побудову моделі здійснено в два етапи. На першому етапі для пакету шарів в цілому використано гіпотези Кірхгофа-Лява про відсутність поперечних деформацій та поперечних нормальних напружень. Цим гіпотезам відповідає лінійний закон зміни тангенціальних переміщень $u_i^{(k)}(x_i, z, t)$ та незмінність нормальних переміщень $u_j^{(k)}(x_i, z, t)$ за товщиною пакета шарів. Далі на основі співвідношень Коші та закону Гука визначено тангенціальні складові $\sigma_{ij}^{(k)}$ тензора напружень. Нормальні складові $\sigma_{13}^{(k)}$, $\sigma_{33}^{(k)}$ отримано інтегруванням рівнянь руху тривимірного тіла, до якого віднесено шар k , із задовільненням умов контакту шарів та умов на зовнішніх поверхнях оболонки. Ці компоненти враховують вплив навантажень та сил інерції.

Застосування до виразів поперечних складових тензору напружень закону Гука дає змогу отримати деформації поперечного зсуву та поперечного обтиснення: $2e_{13}^{(k)} \neq 0$, $e_{33}^{(k)} \neq 0$. Вирази цих деформацій використано на другому етапі в якості гіпотез неklasичної моделі напружено-деформованого стану шаруватої оболонки (плити). Інтегрування співвідношень Коші з врахуванням виразів для поперечних деформацій призводить до нових виразів переміщень, які мають нелінійні закони зміни за товщиною пакету шарів: поліном п'ятого ступеню для тангенціальних переміщень та четвертого ступеню для нормальних переміщень. Схему деформування елементарного об'єму оболонки відповідно до цих виразів, та її часткові випадки, що відповідають класичній моделі Кірхгофа-Лява та неklasичній моделі С.П.Тимошенка, наведено на рис. 2.

У виразі для переміщень, в доповнення до переміщень координатної поверхні й на заміну часткових похідних від них по координатах x_i , введено наступну систему функцій координатної поверхні, яка визначається векторами:

$$W_1 = \{v_i, w, \theta_i\}^T, \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

- вектор основних шуканих функцій, прийнятих за аналогією з моделлю С.П.Тимошенка, а саме, тангенціальні, нормальне та кутові переміщення;

$$W_2 = \{\chi_p, \chi_{p,i}\}^T, \quad p = 1, \dots, 5 \quad (2)$$

- вектор додаткових шуканих функцій, пов'язаних з врахуванням поперечного зсуву та обтиснення від ефекту Пуассона;

$$W_3 = \{\chi_g, \chi_{g,i}\}^T, \quad g = 6, \dots, 9 \quad (3)$$

- вектор додаткових функцій, що враховують поперечні зсуви та обтиснення від безпосередньої дії зовнішніх динамічних навантажень та відповідних сил інерції.

Переміщення в оболонці (плиті) подано у вигляді узагальненої матричної форми:

$$\{U\} = [F] \{W\}, \quad (4)$$

де

$$\{U\} = \{u_i^{(k)}(x_i, t)\}^T; \quad \{W\} = \{W_s\}, \quad s = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2 \quad (5)$$

являють собою вектори переміщень в шарі k та переміщень координатної поверхні, пов'язані матрицею $[F]$, яку формують функції розподілу переміщень за товщиною пакету шарів.

Відповідно вектору переміщень (5) із співвідношень Коші отримано деформації, які також подано в матричній уяві:

$$\{e\} = [\Psi] \{\theta\}, \quad (6)$$

де

$$\{\theta\} = \{\theta_s\}^T, \quad s = 1, 2, 3 \quad (7)$$

- вектор деформацій координатної поверхні, складові якого відповідають складовим W_s вектора переміщень $\{W\}$; $[\Psi]$ - матриця функцій розподілу деформацій за товщиною пакету шарів.

Напруження визначено за законом Гука в такій узагальненій формі:

$$\{\sigma\} = [C] \{e\} = [C][\Psi] \{\theta\}, \quad (8)$$

де $[C]$ - матриця пружних сталей матеріалу анізотропного шару $k = 1, 2, \dots, n$.

Співвідношення (1) - (8), що визначають переміщення, деформації та напруження в довільній точці шару k оболонки, формують геометричну та фізико-механічну сторони моделі її напружено-деформованого стану. При цьому, не наголошується розподіл шарів за їх товщиною та властивостями, чим визначена універсальність моделі до структури пакета шарів оболонки та її відношення до класу "неперервно-структурних" моделей.

На основі співвідношень (4), (6), (8) побудованої моделі та варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського отримано наступну систему рівнянь руху оболонки:

$$\begin{aligned} N_{ij,l} - K_l + p_l &= 0; \\ Q_{i,l} - K_{ij} N_{ij} + (N_{ij} w_{i,l})_{,j} - K_3 + p_3 &= 0; \\ M_{ij,l} - Q_l - K_{iq}^{(q)} + p_l^{(q)} &= 0; \\ M_{qr,q} - Q_{3r} - K_{3r} - K_{wr,q} + p_3^{(r)} &= 0; \\ M_{ij,q} + Q_{ii,l} - Q_{3l} - K_{3l} - K_{w,q} + p_3^{(l)} &= 0; \end{aligned} \quad (9)$$

$$q = i, j = 1, 2; \quad r = 1, 2, 8, 9; \quad l = 3, \dots, 7.$$

Систему рівнянь (9) записано відносно узагальнених за товщиною пакета шарів $h = a_o + a_n$ напружень або зусиль, сил інерції та динамічних навантажень:

$$\{M\} = \int_h \{\sigma\}^T [\Psi] dz; \{K\} = \int_h \{\ddot{U}\}^T [\rho] [F] dz; \{P\} = \{p_s \ p_s^{(1)}\}, \quad l = 1, \dots, 9. \quad (10)$$

Узагальнені силові фактори прикладено до двовимірного елементу координатної поверхні оболонки, якому надано зведені фізико-механічні властивості елементарного об'єму пакета шарів товщиною h (див. рис. 1). Таким чином, тривимірному деформівному шаруватому тілу поставлено у відповідність двовимірну модель.

З контурного інтегралу варіаційного рівняння отримано граничні умови, які за відомим у неперервно-структурних моделях принципом поділено на дві групи:

- умови, що визначають пов'язи накладені на контур двовимірного елемента координатної поверхні - "зовнішні" пов'язи;
- умови, які відображають пов'язи, що перешкоджають переміщенням на торцях за їх товщиною - "внутрішні" пов'язи або "торцеві діафрагми".

Система рівнянь (9) та граничні умови за допомогою виразів силових факторів (10) подано відносно функцій $v_i, w, \theta_i, \chi_p, (i = 1, 2; p = 1, \dots, 9)$, що визначають переміщення, в наступній диференціально-матричній формі:

$$[L][D]\{\Theta\} + [J][D_\rho]\{\ddot{W}\} + \{P\} = 0. \quad (11)$$

Тут $[L]$ та $[J]$ - діагональні "статична" та "динамічна" матриці диференціальних операторів;

$$D = \int_h [\Psi]^T [C] [\Psi] dz; \quad D_\rho = \int_h [F]^T [\rho] [F] dz \quad (12)$$

- матриці інтегральних характеристик жорсткості та щільності пакету шарів;

$$\{\Theta\} = \{\Theta_s\}; \quad [\ddot{W}] = [\ddot{W}_s], \quad s = 1, 2, 3 \quad (13)$$

- вектори деформацій та прискорень координатної поверхні, виражені через її переміщення - функції координат x_i та часу t .

Система рівнянь та зусиль (9) - (11), разом з матрицями інтегральних характеристик (12), становлять "силову" сторону побудованої неklasичної моделі шаруватої оболонки (плити).

Модель побудовано на основі гіпотез єдиних для пакету шарів в цілому, що дозволило отримати систему розв'язувальних рівнянь, число і порядок яких не залежить від кількості шарів. Враховано наступні фактори, що суттєво впливають на точність відображення напружено-деформованого стану шаруватої системи:

- деформації поперечного зсуву й обтіснення, відповідні до них напруження, в тому числі й від безпосередньо прикладених до зовнішніх поверхонь навантажень;
- геометричну нелінійність, врахування якої є необхідним для систем з тонкими шарами;
- динамічні навантаження та сили інерції, що дає можливість розв'язку задач коливань шаруватих оболонок і плит.

Таким чином, побудована модель узагальнює основні фактори, що відображають просторовий (тривимірний) характер напружено-деформованого стану оболонки (плити) з довільною кількістю шарів.

Одночасно, модель узагальнює та розширює властивості відомих неklasичних моделей, деякі з яких, зокрема, лінійна модель С.П.Тимошенка, нелінійні зсувні моделі та моделі, що враховують обтиснення лише від ефекту Пуассона, статичні моделі, є частковими випадками побудованої.

Виходячи з викладеного, побудована модель може бути класифікована як нова узагальнена неklasична модель динамічного напружено-деформованого стану анізотропних шаруватих оболонок (плит) з довільною кількістю шарів.

Третій розділ присвячений побудові точного розв'язку плоскої задачі теорії пружності для шаруватого ортотропного композитного масиву. На основі цього розв'язку досліджено напружено-деформований стан деяких типів плит в умовах циліндричного згину, зіставлено результати застосування узагальненої неklasичної моделі й точного розв'язку. Вирішено також задачі циліндричного згину гнучких шаруватих плоских та оболонкових панелей з врахуванням геометричної нелінійності.

Як основу для побудови точного розв'язку прийняте наведене Р.Крістенсенем розв'язання в напруженнях:

$$\sigma_{11} = \Phi_{,33}(z) \sin \lambda_m x; \quad \sigma_{13} = -\lambda_m \Phi_{,3}(z) \cos \lambda_m x; \quad \sigma_{33} = -\lambda_m^2 \Phi(z) \sin \lambda_m(x), \quad (14)$$

що задовольняє умовам типу Нав'є на бічних гранях. У виразах (14) Φ - функція напружень, $\lambda_m = m\pi / l$, ($m = 1, 2, 3, \dots$) - хвильовий параметр, l - поздовжній розмір масиву (плити).

Це розв'язання зводиться до диференціального рівняння

$$\Phi_{,3333} - \lambda_m^2 \frac{a_{55} + 2a_{13}}{a_{11}} \Phi_{,33} + \lambda_m^4 \frac{a_{33}}{a_{11}} \Phi = 0, \quad (15)$$

де $a_{11}, a_{13}, a_{33}, a_{55}$ - коефіцієнти матриці податності. Реалізація відповідного характеристичного рівняння

$$y^4 + p_m y^2 + q_m = 0 \quad (16)$$

відома відносно дійсних коренів. На відміну від цих розв'язків виконано новий варіант реалізації - в комплексних спряжених коренях при завданні функції напружень у формі

$$\Phi(z) = [A_1 \cos(\lambda_m \beta z) + A_2 \sin(\lambda_m \beta z)] \exp(\lambda_m \alpha z) + [A_3 \cos(\lambda_m \beta z) + A_4 \sin(\lambda_m \beta z)] \exp(-\lambda_m \alpha z), \quad (17)$$

де параметри α, β залежать від коефіцієнтів матриці податності. Отримано відповідні до (15) та (17) вирази напружень, а також переміщень. Задовільнення умовам "жорсткого" контакту n шарів масиву та умовам на зовнішніх поверхнях одержано систему $4n$ алгебраїчних рівнянь відносно сталих A_p , ($p = 1, 2, 3, 4$).

Отриманий результат розширює область фізико-механічних характеристик шаруватих систем, для яких можливий точний розв'язок плоскої задачі теорії пружності.

На основі точного розв'язку та зіставлення з ним результатів розрахунку за неklasичною моделлю досліджено напружено-деформований стан товстих однорідних та шаруватих плит, що має такі особливості (рис.3):

- нелінійний характер зміни переміщень та напружень за товщиною при значному їх перевищенні на навантаженій поверхні у порівнянні з вільною від навантажень;
- ефект "підтягування" ненавантаженої поверхні плити при її поперечній податності ($E/E \geq 50$).

Ці ефекти за допомогою неklasичної моделі можливо отримати лише за умови врахування нею поперечного обтиснення від безпосередньої дії навантаження, що властиво побудованій узагальненій моделі.

Порівнянням результатів за неklasичною моделлю та точним розв'язком встановлено межі параметрів (l/h , G/G'), для яких можливо застосувати часткові випадки цієї моделі (нелінійна зсувна, лінійна типу С.П.Тимошенка, класична). Зокрема, для плит середньої товщини ($l/h=3$) зсувну модель можна застосувати для переміщень, якщо $G/G' \leq 50$, для напружень, якщо $G/G' \leq 10$.

На основі узагальненої неklasичної моделі отримано також аналітичний розв'язок геометрично нелінійної задачі циліндричного згину пологої оболонки.

Для випадку шарнірного закріплення сторін вираз для безвимірних переміщень координатної поверхні в залежності від параметру навантаження $P = ql^4 / D_M h$ отримано у вигляді

$$\zeta(\eta) = \frac{r(1-\eta^2)}{2} - \frac{r(1-\cos \mu\eta / \cos \mu)}{\mu^2} + P \frac{16(1-\alpha)}{\pi^2(\pi^2-4\mu^2)} \cos \frac{\pi\eta}{2}. \quad (18)$$

Для жорстко затиснених країв цей вираз має вигляд

$$\zeta(\eta) = r \left(\frac{\cos \mu\eta}{\mu \sin \mu} + \frac{1}{2} \eta^2 - \frac{\text{ctg} \mu}{\mu} - \frac{1}{2} \right) + P \frac{8(1-\alpha)}{\pi(\pi^2-4\mu^2)} \left(\frac{\text{ctg} \mu}{\mu} - \frac{\cos \mu h}{\mu \sin \mu} + \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi\eta}{2} \right). \quad (19)$$

В цих виразах введено безвимірні параметри: $\eta = x / l$; $\zeta = w / h$; $\mu = \lambda l$; $r = l^2 / Rh$; а також позначено: l - поздовжній розмір панелі, R - радіус її кривизни, h - товщина, D_M - циліндрична жорсткість, $\lambda^2 = N / D_M$, N - поздовжня сила.

Встановлено превалюючий вплив поперечного обтиснення на напружено-деформований стан. Для тришарової панелі (рис.4) із зростанням податності шару заповнювача має місце суттєве збільшення переміщень навантаженого несучого шару, що значно перевищують його товщину (при м'якому заповнювачі $E_1 / E_2 = 50$ - в 4 рази). Податність заповнювача поперечному обтисненню значно змінює (у порівнянні з розв'язком, що не враховує цей ефект) характер кривих критичних навантажень та призводить до зменшення їх значень (рис.5).

Таким чином, доведено, що поперечне обтиснення, як фактор, що врахований узагальненою моделлю, має суттєво якісний та кількісний вплив на напружено-деформований стан шаруватих систем. Нехтування цим фактором виключає можливість отримання достовірних результатів як в рамках лінійної, так й нелінійної постановок задач згину.

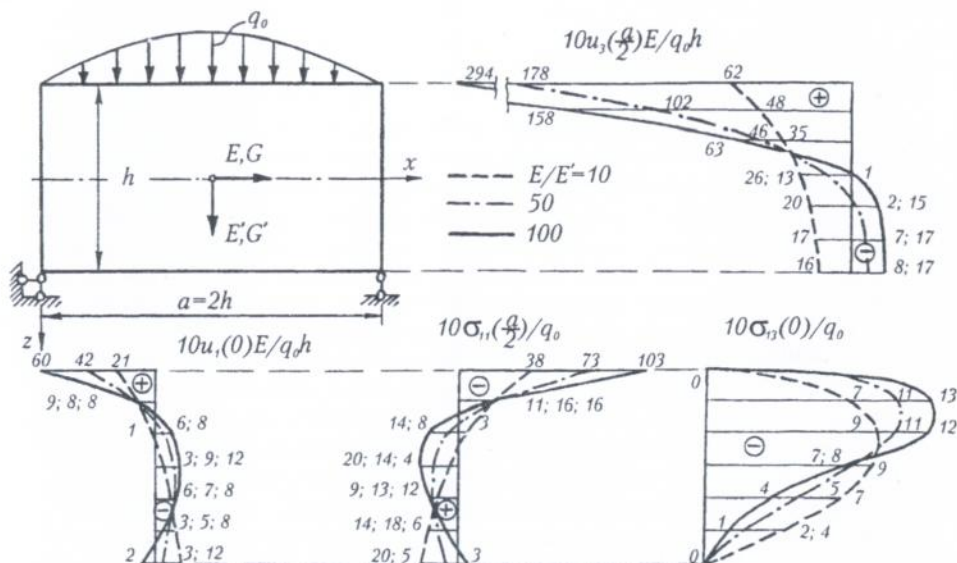


Рис. 3. Напружно-деформований стан трансверсально-ізоотропної плити

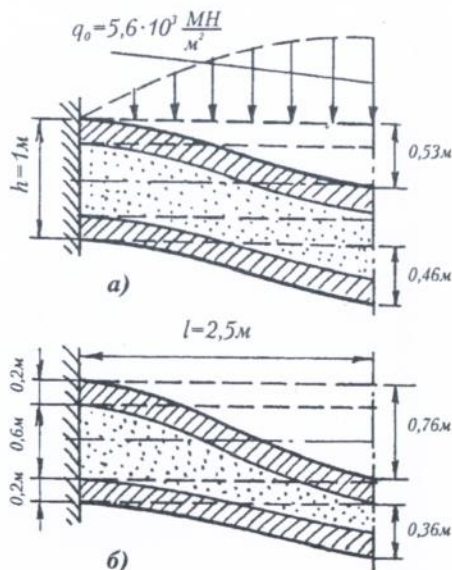


Рис. 4. Деформований стан гнучких тришарових пластин: а) - жорсткий; б) - м'який заповнювачі

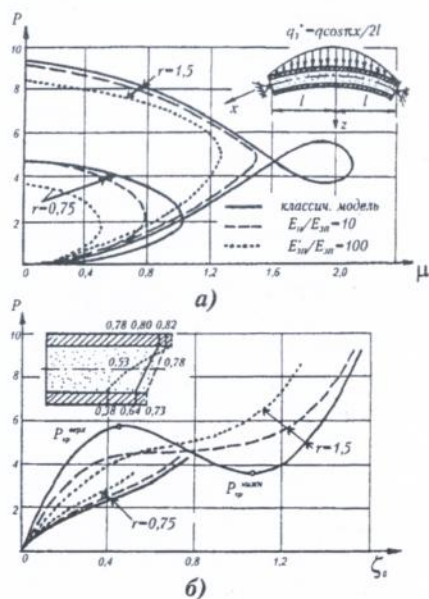


Рис. 5. Результати розрахунку гнучких оболонок: а) - поздовжні сили; б) - переміщення

В четвертому розділі узагальнену некласичну модель та її часткові випадки застосовано до розв'язку задач статички - згину плит і пологих оболонок різноманітної структури за товщиною, та задач динаміки - їх коливань.

Попередньо проаналізовано можливість отримання аналітичного розв'язку задачі згину прямокутних пологих оболонок в подвійних тригонометричних рядах. Встановлено, що в загальному випадку анізотропної оболонки (плити) розв'язок цієї задачі неможливий, оскільки тригонометричні множники системи характеристичних рівнянь не скорочуються. Розв'язок отримано для двох можливих часткових випадків:

- довільна за структурою по товщині система з ортотропних шарів при шарнірно-рухомому обпиранні сторін;
- кососиметрична за структурою по товщині система з анізотропних шарів при шарнірно-нерухомому обпиранні сторін.

Для першого з них шляхом зіставлення результатів з відомими в літературі точними розв'язками Б.Г.Гальоркіна, Б.Ф.Власова, Л.Е.Брюккера, Н.Пейгано, В.Г. Піскунова та В.С.Сіпетова, інших вчених, а також з експериментальними даними О.О.Рассказова, Ю.М.Тарнопольського, А.В.Розе обґрунтована достовірність узагальненої моделі для дослідження напружено-деформованого стану товстих однорідних ізотропних та трансверсально-ізотропних плит, товстих тришарових плит з податним поперечному зсуву заповнювачем, плит з композитними ортотропними шарами, плит неперервно- та кусково-неоднорідної структури, тощо.

Встановлено геометричні та фізичні параметри тришарових плит, при яких узагальнена некласична модель та її часткові випадки (зсувна нелінійна модель, модель С.П.Тимошенка) дають достовірні результати. Вони знаходяться в досить широких межах відносних параметрів: розмірів в плані ($2 \leq a/h \leq 20$), товщин заповнювача й несучих шарів ($1 \leq h_2/h_1 \leq 16$), модулів пружності шарів ($10^2 \leq E_1/E_2 \leq 10^5$).

Основний висновок дослідження напружено-деформованого стану плит різноманітної структури за товщиною полягає в тому, що для товстих плит, однорідних та неоднорідних (шаруватих) за товщиною, достовірні результати з застосуванням двовимірних моделей можливо отримати тільки за умови врахування ними поперечного обтіснення. Саме такою є запропонована узагальнена некласична модель, яка відображає такі характерні особливості напружено-деформованого стану:

- виключно нелінійний характер зміни переміщень (нормальних і тангенціальних), напружень (тангенціальних компонентів) за товщиною плит, особливо трансверсально податних;
- суттєву різницю значень вказаних величин на навантаженій та вільній від навантаження поверхнях, в тому числі ефект "підтягування" ненавантаженої поверхні;
- зміщення екстремумів поперечних дотичних напружень в бік навантаженої поверхні.

Зсувні моделі, а також моделі, в яких враховано лише пуассонове обтиснення, до розглянутих задач незастосовані, оскільки вони не дають можливості відобразити вказані ефекти.

Найбільш суттєвою стороною поперечного обтиснення, що відображає вказані особливості та ефекти, є врахування моделлю безпосередньої дії прикладених до зовнішніх поверхонь навантажень. Тільки за допомогою вказаного фактора двовимірна некласична модель дозволяє достовірно відобразити просторовий характер напружено-деформованого стану. Як приклад, на рис.6 наведено результати для тришарової плити під синусоїдальним навантаженням. Показано, що нормальні переміщення й нормальні напруження навантаженої поверхні в п'ять разів перевищують їх значення на вільній (нижній) поверхні й в півтора рази значення цих величин, які дає зсувна модель (без врахування обтиснення). Екстремум поперечних дотичних напружень в навантаженому (верхньому) шарі в півтора рази перевищує його значення, отримане при застосуванні зсувної моделі.

Розв'язано також задачі оптимізації структури товстих тришарових плит:

- задача мінімуму найбільших нормальних переміщень нижньої (ненавантаженої) поверхні плити симетричної структури при обмеженні на товщину верхнього навантаженого шару та співвідношення модулів пружності цього шару і заповнювача;
- задача мінімуму найбільших нормальних напружень при обмеженнях на товщини зовнішніх несучих шарів та співвідношень модулів пружності шарів при несиметричній структурі плити.

Зокрема встановлено, що для оптимальної (за напруженнями) структури характерні однакові (за модулями) напруження зверху та знизу плити. Плита симетричної структури не дає оптимуму напружень, а розв'язок без врахування обтиснення не має сенсу в розглянутих задачах оптимізації.

Розв'язок задач згину пологих оболонок довів, що ефекти поперечного обтиснення також мають тут відповідний вплив, особливо для напружень. В цілому, збільшення загальної жорсткості оболонки при зростанні кривизни сприяє зростанню впливу поперечного обтиснення.

Другий випадок аналітичного розв'язку, що стосується кососиметричної за товщиною структури з анізотропними шарами, застосований до шаруватих косокутно-армованих пластин (рис.7). Попередньо порівнянням результатів з точним розв'язком М.Савоя та Я.Редді обґрунтовано достовірність застосування некласичної моделі до розглядуваної задачі. Далі, на основі розв'язку за некласичною моделлю досліджено вплив значення кута армування на прогини та напруження (рис.8). Всі складові мають мінімум при куті армування $\varphi = \pm 45^\circ$. При цьому, зменшення нормальних напружень найбільше - приблизно в три рази.

Встановлено також, що для пластин з різною кількістю шарів при незмінному куті армування $\varphi = \pm 30^\circ$ стабілізація результатів із зростанням числа шарів відбувається, починаючи з восьмишарової системи, яку вже можна розглядати як квазіоднорідну. Кососиметрія структури пакету шарів породжує такі особливості напружено-деформованого стану, як симетрію тангенціальних переміщень за

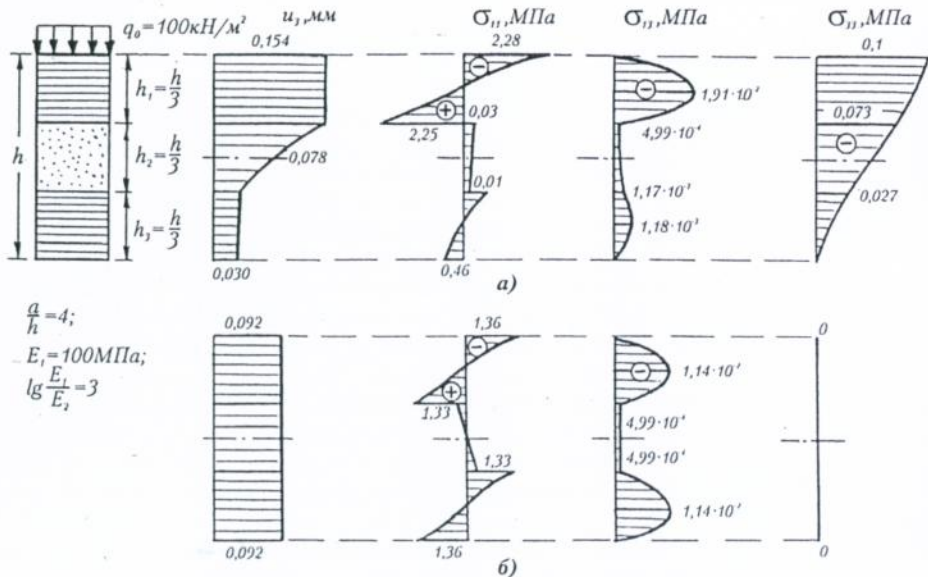


Рис. 6. Напружно-деформований стан тришарової плити:
а) - врахування обтиснення; б) - без обтиснення

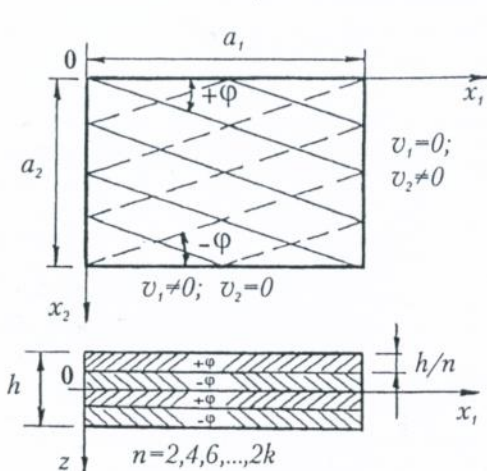


Рис. 7. Схема шаруватої косокутно-армованої пластини

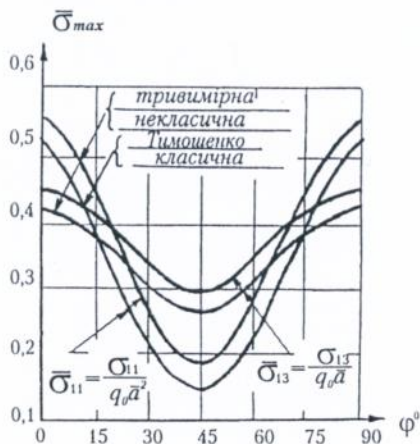


Рис. 8. Напруження в чотирьохшаровій анізотропній пластині

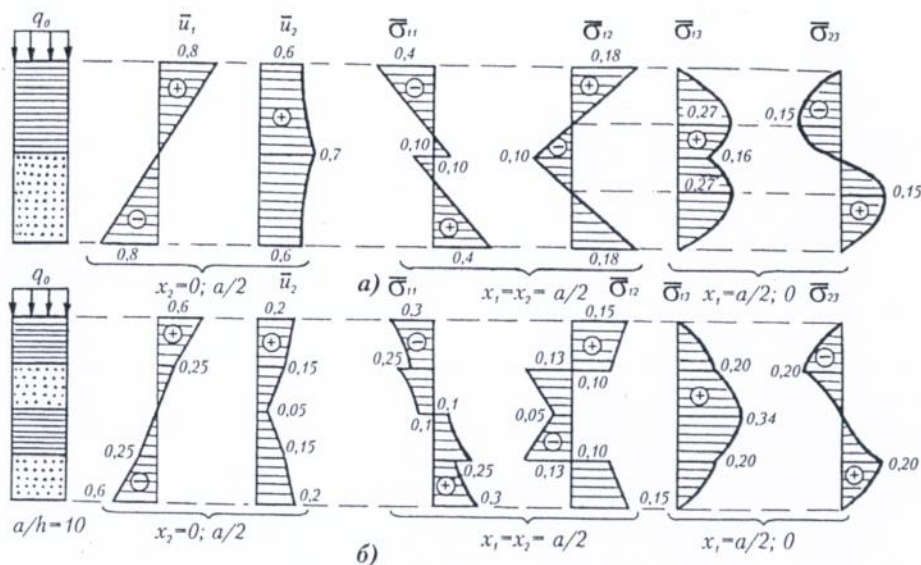


Рис.9. Напружено-деформований стан в анізотропних пластинках:
а) - двохшаровій; б) - чотирьохшаровій

Таблиця 1. Частоти коливань шаруватих пластин і сферичних оболонок з рівною масою

	$\frac{\bar{\omega}}{2\pi}$	$\frac{\omega_{\text{кл}}}{\omega_{\text{пкл}}}$	$\frac{\bar{\omega}}{2\pi}$	$\frac{\omega_{\text{кл}}}{\omega_{\text{пкл}}}$	$\frac{\bar{\omega}}{2\pi}$	$\frac{\omega_{\text{кл}}}{\omega_{\text{пкл}}}$
K						
∞	44	1,5	18	1,1	66	2,0
4	68	1,2	54	1,0	83	1,7
2	112	1,1	104	1,0	122	1,4
K						
∞	12	1,1	63	1,7	68	2,1
4	53	1,0	81	1,4	85	1,9
2	103	1,0	120	1,2	130	1,5

$\bar{\omega} = 5 \cdot 10^3 \cdot \omega \sqrt{\rho_1 / E_1}$;
 $R = K \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}$;
 $a = 20h$;
 $E_1 = 10^3 E_2$;
 $\nu_1 = 0,3$; $\nu_2 = 0,4$;
 $\rho_1 = 10 \rho_2$

товщиною плити вздовж їх сторін та кососиметрію поперечних дотичних напружень, діючих по нормалях до сторін (рис.9).

Отримано розв'язок задач динаміки - коливань шаруватих пластин і пологих оболонок різної структури за товщиною. Показано, що узагальнена неklasична модель дозволяє достовірно визначати частоти вищої частини спектру, що відповідають довжинам півхвиль форм коливань, сорозмірним з товщиною шаруватої системи. Для тришарової пластини встановлено параметри (E_1/E_2 , h_2/h_1 , l/h), в межах яких точність моделі достатня для практичних розрахунків.

Встановлено також, що для такої узагальненої характеристики, якою є частота коливань, основним фактором, що впливає на точність її визначення є поперечний зсув. Вплив цього фактора зростає із зменшенням довжини півхвилі форми коливань, з перерозподілом матеріалу жорстких несучих шарів до зовнішніх поверхонь. Вплив зменшується із збільшенням кривизни оболонки. Ці положення ілюструє таблиця 1, де наведено безвимірні частоти коливань пластин і пологих оболонок, а також відношення частот знайдених за класичною та неklasичною моделями. Саме ці відношення є показниками впливу поперечного зсуву. Для тришарових систем з жорсткими несучими шарами вплив зсуву вдвічі зменшує частоти коливань основного тону навіть для досить тонкої пластини ($a/h=20$) з "легким" заповнювачем ($E_1/E_2=10^3$).

Показано також, що тільки неklasична модель, що враховує нелінійний характер зміни переміщень за товщиною пакету шарів, дає можливість досліджувати високочастотні коливання ($l/h \leq 4$). Лінійна зсувна модель типу С.П.Тимошенка неспроможна до розв'язку таких задач, бо дає достатньо точні результати тільки для відносно довгих півхвиль форм коливань ($l/h \geq 8$) тришарових пластин з "легким" заповнювачем.

В п'ятому розділі узагальнену неklasичну модель напружено-деформованого стану шаруватих оболонок (плит) реалізовано чисельно - методом скінченних елементів. Прийнято до уваги, що співвідношення моделі незалежні від кількості шарів системи, що дозволяє використання дискретно-континуальної схеми метода скінченних елементів (ДКС МСЕ), який передбачає, що система є дискретною тільки по її поверхні (рис.10), а за товщиною кожний скінченний елемент S , є шаруватим континуумом, властивості якого відображено моделлю.

ДКС МСЕ розроблено для трансверсально-ізотропної оболонки. Враховано поперечний зсув та обтіснення. Попередньо, неklasичну модель трансформовано в такий її варіант, який в частковому випадку ($E'=\infty$, $G'=\infty$) переходить в класичну (гіпотеза прямої нормалі). При цьому виключається нестійкість процесу обтіснення при розрахунку тонких плит і оболонок, що властиво процедурам МСЕ, які побудовано на основі гіпотези прямої лінії.

Трансформована для реалізації МСЕ модель відрізняється від відомих тим, що вона враховує поперечний зсув та поперечне обтіснення однією "універсальною" шуканою функцією. Вказана особливість скорочує число ступенів вільності системи у порівнянні з відомими схемами.

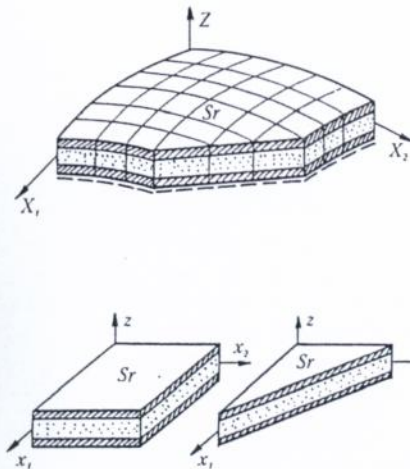


Рис.10. Схема розподілу пологої оболонки на скінченні елементи

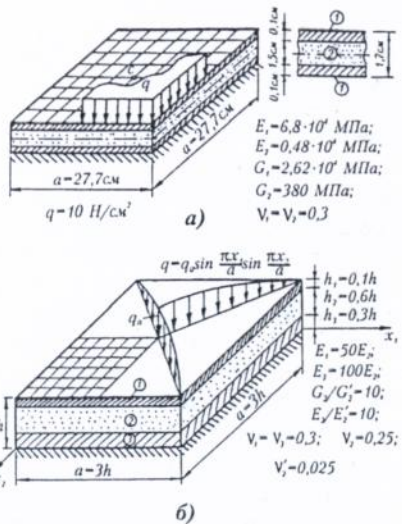


Рис.11. Схеми до розрахунку шаруватих плит МСЕ: а) - тонка тришарова плита (тестовий приклад); б) - товста несиметрична за товщиною плита

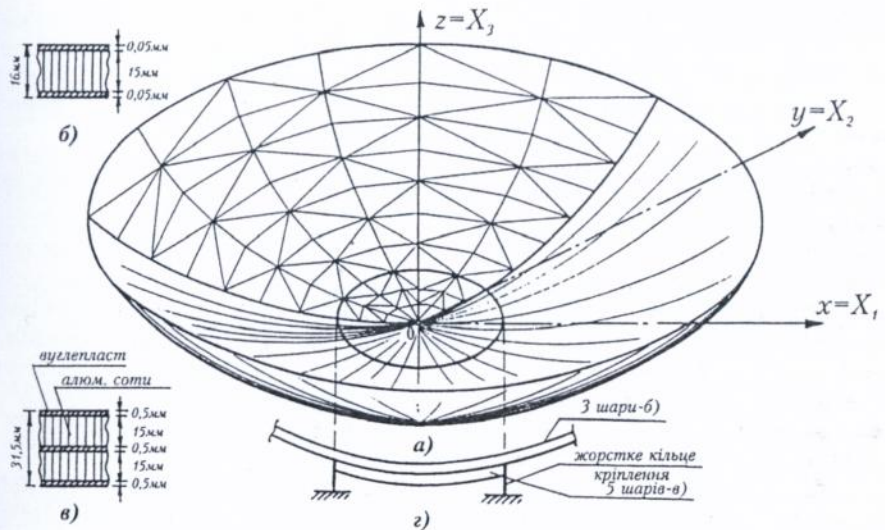


Рис.12. Схема оболонки-рефлектора антени: а) - загальний вигляд; б) - структура основної частини; в) - структура центральної частини; г) - схема кріплення

Переміщення в оболонці зводяться до виразів

$$u_i^{(k)} = u_i - w_{,i} z - \chi_{p,i} \psi_{pk}; \quad u_j^{(k)} = w + \chi_p \psi_{pk,j}; \quad i=1, 2; \quad p=1, \dots, 7, \quad (20)$$

в яких u_i , w - тангенціальні та нормальні переміщення поверхні зведення; χ_1 - шукана універсальна функція зсуву - обтиснення; $\chi_2, \dots, \chi_7$ - задані функції (аналогі шуканої), що враховують ці ефекти від зовнішнього навантаження; ψ_{pk} - задані функції нормалі, що відображають розподіл переміщень за товщиною пакету шарів та узагальнюють його властивості.

У відповідності до виразів переміщень побудовано функціонал потенціальної енергії деформації шаруватої оболонки, який є сумою енергій, що відносяться до таких станів: плоский напружений, чистий згин, зсув-обтиснення, а також безпосередній вплив навантаження. Кожному стану поставлено у відповідність групу переміщень вузлів скінченного елемента та вузлових сил, а також відповідний блок матриці жорсткості такої структури:

$$[K]_r = [K_{gs}]_r; \quad g, s = 1, 2, 3; \quad r = 1, \dots, n, \quad (21)$$

де маємо блоки станів: $g = s = 1$ - плоского напруженого; $g = s = 2$ - чистого згину; $g = s = 3$ - зсуву-обтиснення; $g \neq s$ - взаємовпливу станів.

Енергія безпосереднього впливу навантажень породжує так звану "матрицю навантажень" (аналог матриці жорсткості), що пов'язана із заданими переміщеннями. Структура матриці навантажень така:

$$[K_z]_r = [K_{zl}]_r; \quad g = 1, 2, 3; \quad l = q+2 = 4, \dots, 9; \quad r = 1, \dots, n. \quad (22)$$

Система розв'язувальних рівнянь має таку матричну форму:

$$[K]\{V\} = [K_z]\{V_z\} + \{R\}, \quad (23)$$

де $[K]$ та $[K_z]$ - позначення загальних для об'єкту матриць жорсткості та навантажень, $\{V\}$ та $\{V_z\}$ - вектори шуканих та заданих вузлових переміщень, $\{R\}$ - вектор вузлових сил.

На загальних принципах ДКС МСЕ розроблено два типи СЕ оболонки нульової кривизни - прямокутний та трикутний. В обох СЕ для станів згину та зсуву-обтиснення використано аналогічні апроксимації, запропоновані при розробці відомих обчислювальних комплексів "ЛІРА" та "МІРАЖ", опис яких подано в монографії [1].

Приділено увагу оцінкам збіжності та похибкам результатів. Збіжність відповідає квадрату крока сітки СЕ. Абсолютні похибки завжди нижчі (в 1,5-2 рази), ніж для задач, що розв'язані на основі СЕ, які реалізують класичну модель, або модель типу С.П.Тимошенка - Е.Рейсснера. Вказаний ефект має те практичне значення, що задану точність розрахунку можна отримати при меншому згущенні сітки, ніж при розрахунку за вказаними моделями. Показано також ефект уточнення результатів за допомогою екстраполяції типу Річардсона по результатах з двома різними відносно невеликими кроками сітки. Таблиця 2 ілюструє збіжність, похибки та уточнення результатів розрахунку для тестової задачі згину тришарової шарнірно-обпертої квадратної пластини (рис. 11-а).

Таблиця 2. Результати розрахунку (прогини в центрі) тришарової пластини

Число кроків сітки n	Тип моделі											
	Узагальнена неklasична			Неklasична зсувна			С.П.Тимошенко - Е.Рейсснер			Класична		
	w_n , мм	Δ_n , %	$\frac{\Delta_n}{\Delta_{2n}}$	w_n , мм	Δ_n , %	$\frac{\Delta_n}{\Delta_{2n}}$	w_n , мм	Δ_n , %	$\frac{\Delta_n}{\Delta_{2n}}$	w_n , мм	Δ_n , %	$\frac{\Delta_n}{\Delta_{2n}}$
2	2,482	18	4,1	2,537	17	3,5	1,796	43	4,6	1,294	40	3,6
4	2,894	4,4	4,0	2,897	4,9	4,1	2,850	9,4	4,5	1,915	11,0	3,9
8	2,994	1,1	4,2	3,010	1,2	4,0	3,079	2,1	3,7	2,095	2,8	4,0
16	3,019	0,26		3,037	0,30		3,127	0,57		2,140	0,70	
Аналіт. результ.	3,027	-	-	3,046	-	-	3,146	-	-	2,155	-	-
n_i/n_j	Уточнення результатів екстраполяцією											
4/2	3,031	0,13	-	3,017	0,9	-	3,200	1,7	-	2,143	0,6	-
8/4	3,027	0	-	3,048	0,07	-	3,155	0,3	-	2,155	0	-

Таблиця 3. Результати розрахунку товстої тришарової несиметричної плити

Поверхня	Нормальні переміщення $u, E_1 / q_0 h$		Нормальні напруження σ_{11} / q_0		Поперечні напруж. σ_{33} / q_0
	з обтиснен.	без обтисн.	з обтиснен.	без обтисн.	
Навантаж. верхня	208		-18,0	-3,17	-1,00
Границя шарів 1 і 2	207	37,9	14,8/-0,03	2,76/0,05	-0,94
Границя шарів 2 і 3	31,2		-0,22/-14,8	-0,16/-17,6	-0,25
Нижня вільна	31,0		14,7	18,0	0

На прикладах розв'язку ряду інших тестових задач показано також, що при рівних вихідних даних задачі згину плити застосування ДКС МСЕ призводить до скорочення числа невідомих у порівнянні з подібними СЕ, в яких не впроваджено універсальну функцію зсуву-обтиснення, й у порівнянні з застосуванням прямих дискретних схем МСЕ. При цьому розроблені СЕ дозволяють отримати інформацію про зміну переміщень і напружень за товщиною пакету шарів, фіксувати їх суттєву різницю на навантаженій та вільній поверхнях (рис.11-б, таблиця 3). Підтверджена також можливість розрахунку оболонок плоскими СЕ.

Головні особливості побудованої схеми МСЕ полягають:

- в можливості розрахунку систем неоднорідної структури не тільки за товщиною, але й по поверхні, як наслідок довільного призначення поверхні зведення, до якої можливо "прив'язати" СЕ різної неоднорідної структури за товщиною;
- в незалежності числа ступенів вільності від кількості шарів й, в зв'язку з цим, в можливості розрахунку неперервно-неоднорідних за товщиною систем зведенням їх до кусково-неоднорідних шляхом призначення довільної достатньо великої кількості шарів (підшарів).

Ці особливості було використано для розрахунку досить складного об'єкту - параболічної оболонки рефлектора високоточної антени космічного апарату (рис.12). Розрахунок виконано за участю автора по завданню НВО "Прикладна механіка" (м.Красноярск). На основі розрахунку проаналізовано напружено-деформований стан рефлектора й розроблено рекомендації щодо покращення його конструкції для збільшення жорсткості.

В шостому розділі розглянуто задачі контакту шаруватих плит з пружною основою. Огляд моделей пружної основи, зроблений в початковому підрозділі, показує, що достовірність розв'язку цих задач визначається обґрунтованістю моделювання як самої плити, так і основи, адекватності цих моделей. В зв'язку з цим зроблено висновок про необхідність розробки двовимірної моделі шаруватого півпростору - основи, що враховує, як і неklasична модель плити, трансверсальні властивості матеріалу шарів півпростору, роботу шарів на розтяг-стиск, зсув, обтиснення. Таку нову узагальнену модель побудовано в даному розділі на основі гіпотез про розподіл переміщень за товщиною пакету шарів півпростору (рис.13), тангенціальних і нормальних, відповідно:

$$u_{0i}^{(k)}(x, z) = u_{0i} \Phi_{0ik}, \quad i = 1, 2; \quad u_{03}^{(k)}(x, z) = w_0 \Phi_{03k}, \quad (24)$$

де u_{0i}, w_0 - переміщення координатної поверхні;

$$\Phi_{0ik} = B_{k-1} \exp[-\gamma_k(z - c_{k-1})]; \quad \Phi_{03k} = B_{3(k-1)} \exp[-\gamma_{3k}(z - c_{k-1})] \quad (25)$$

- функції розподілу переміщень за товщиною шару k , що задовільнюють умовам контакту на верхній межі півпростору; B_{k-1} та $B_{3(k-1)}$ - константи, які характеризують осадку цієї поверхні; γ_k та γ_{3k} - коефіцієнти вщунання осадок за товщиною шару k .

Із застосуванням співвідношень Коші отримано деформації в шарі k , а за законом Гука - напруження. Далі на основі варіаційного принципу Лагранжа отримано систему рівнянь в зусиллях

$$N_{ij,j}^{(0)} - \bar{Q}_i^{(0)} + P_i^{(0)} = 0; \quad Q_{i,i}^{(0)} - Q_3^{(0)} + P_3^{(0)} = 0 \quad (26)$$

й відповідні граничні умови.

Рівняння рівноваги (26) трансформовано в систему розв'язувальних рівнянь в функціях переміщень:

$$\begin{aligned} D_1 u_{01,11} + D_2 u_{02,12} + D_3 (u_{01,2} + u_{02,1})_{,2} - D_4 u_{01} + (D_5 - D_6) w_{0,1} + P_1^{(0)} &= 0; \\ D_1 u_{02,22} + D_2 u_{01,21} + D_3 (u_{01,2} + u_{02,1})_{,1} - D_4 u_{02} + (D_5 - D_6) w_{0,2} + P_2^{(0)} &= 0; \\ (D_5 - D_6)(u_{01,1} + u_{02,2}) + D_7 w_0 - D_8 \Delta w_0 - P_3^{(0)}, \end{aligned} \quad (27)$$

яка містить вісім параметрів пружної основи $D_1, \dots, D_8$ - інтегральні характеристики жорсткості пружного півпростору.

В частковому випадку нехтування тангенціальними переміщеннями отримуємо модель з двома коефіцієнтами жорсткості $D_7 = C_1, D_8 = C_2$ - двопараметрову модель основи типу В.З.Власова - М.М.Леонтєва, але для шаруватої основи.

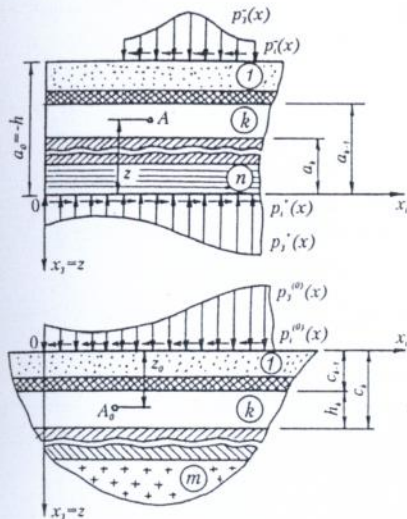


Рис.13. Фрагмент шаруватої плити в контактї з пружною шаруватою основою

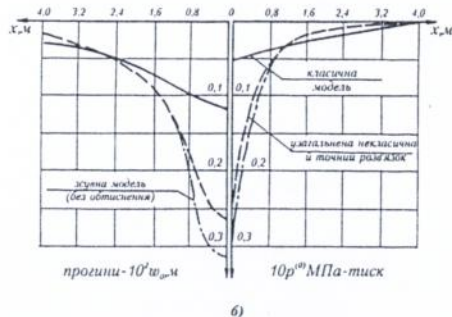
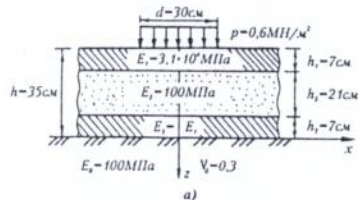


Рис.14. До розрахунку тришарової плити на пружній основі: а) - структура плити; б) - графіки зміни прогинів й тиску під центром плити

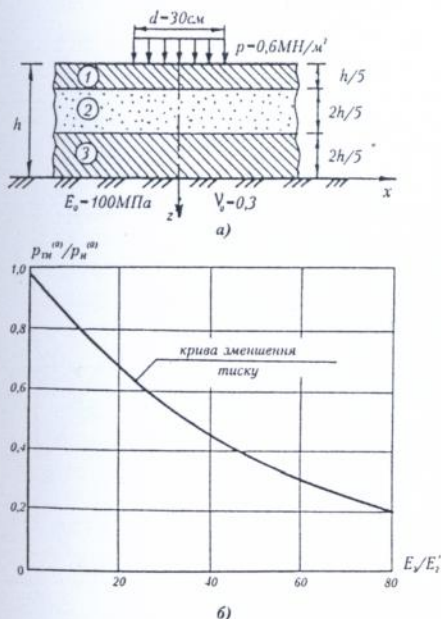


Рис.15. Ефект зменшення тиску плити на основу: а) - структура плити; б) - крива тиску

Епюри $u_1^{\max}(z)$, мм Епюри $\sigma_{11}^{\max}(z)$, МПа
з урахуванням обтіснення

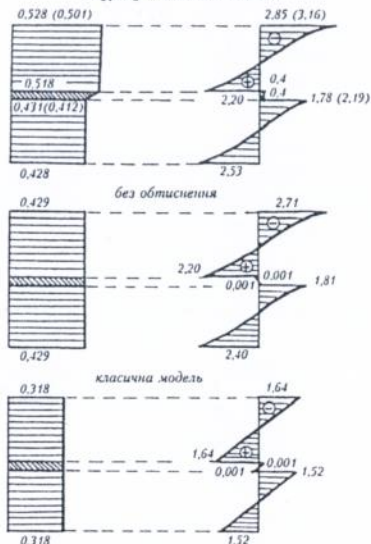


Рис.16. Нормальні переміщення та напруження в центрі аеродинамічної плити (в дужках-дані експерименту)

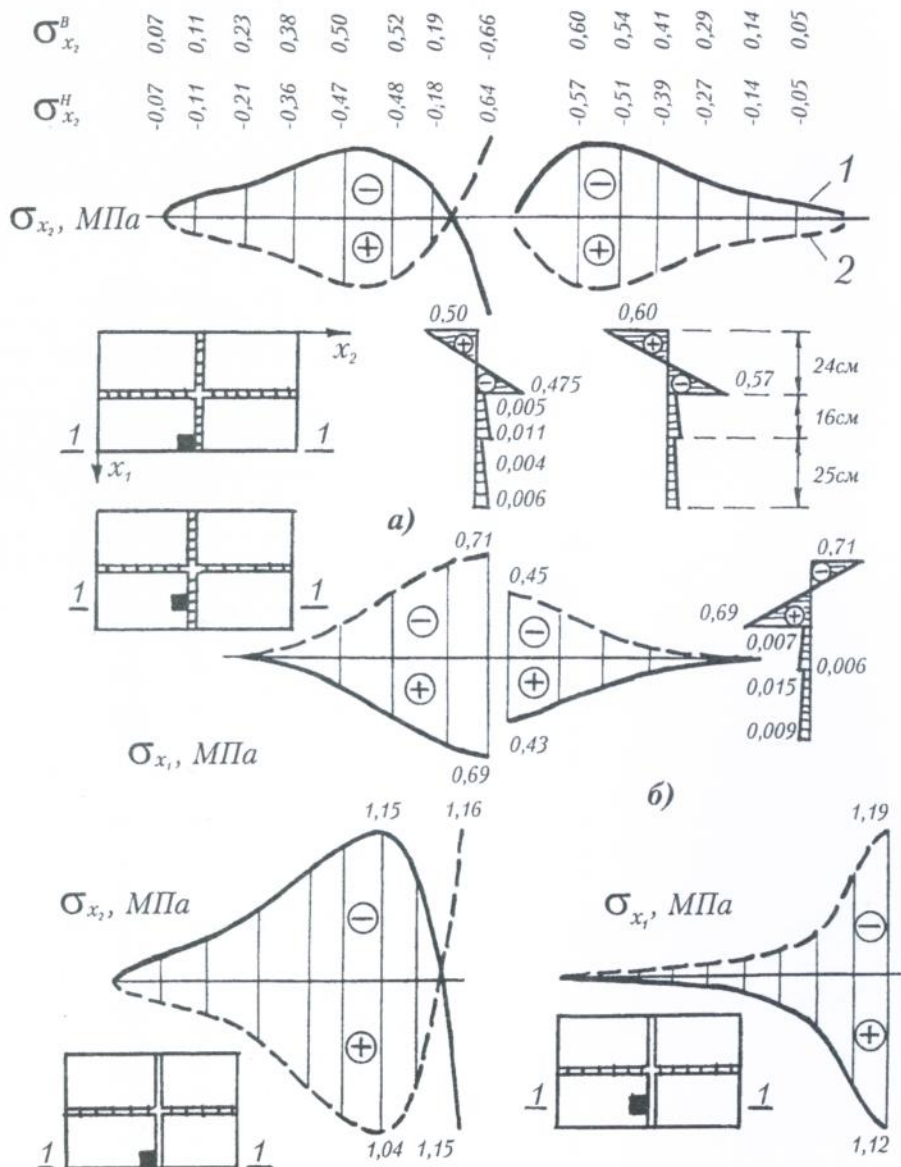


Рис.17. Напряжения в системе плит: а) - из штирями в поперечных швах;
б) - без штирів (1-верх плиты, 2-низ плиты, 1-1-небезпечний переріз)

Умови контакту плити й основи (рис. 13), геометричні й статичні, відповідно:

$$u_i(x) = u_{0i}(x); w(x) = w_0(x), \quad i = 1, 2; \quad P_i^{(+)}(x) = -P_i^{(0)}(x), \quad s = 1, 2, 3 \quad (28)$$

дозволили скласти загальну систему рівнянь задачі розрахунку шаруваті плити на пружній шаруватій основі відносно шуканих функцій переміщень поверхні контакту та реакцій основи. Отримано розв'язання цієї системи під навантаженням, розподіленням по площадці в формі круга. На основі цього розв'язання знайдено результати для ряду задач, що дозволило обґрунтувати достовірність розробленої моделі пружної основи.

Зокрема, для однорідної плити на шаруватій основі результати узгоджуються з точним розв'язком А.К.Приварнікова та з відомим розв'язком О.Я.Шехтер. Для задачі контакту тришарової плити з однорідною основою досліджено вплив обтиснення та зсуву на розподіл прогинів та тиску по поверхні контакту (рис. 14). Застосування узагальненої неklasичної моделі дозволяє отримати збіг результатів з точним розв'язком, а зсувної моделі призводить до перебільшення значень прогинів та тиску. Класична модель плити дає значну похибку в бік зменшення досліджуваних величин.

Показано, що поперечне обтиснення плити має суттєве значення для оцінки її тиску на основу. Збільшення податності плити обтисненню дозволяє зменшити тиск (рис. 15), що має важливе значення для проектування плитних конструкцій на природних й штучних основах, зокрема, покрить автомобільних доріг і аеродромів. Розрахунковим й експериментальним шляхом показано вплив поперечного обтиснення на переміщення та напруження в тришаровій плиті аеродромного покриття (рис. 16).

Відпрацьовано реалізацію моделі шаруваті пружної основи методом скінченних елементів за допомогою дискретно-континуальної схеми, що узагальнює властивості основи за глибиною. Приклад розрахунку плити з вільними краями дозволив дослідити її напружено-деформований стан і встановити параметри тиску на основу при різних положеннях штампу навантаження. Ці результати підтверджено експериментально. На основі чисельної методики виконано розрахунки систем плит бетонного дорожнього одягу на шаруватій пружній основі при різних умовах їх поєднання (рис. 17), встановлено особливості напруженого стану та можливість зменшення металомісткості покриття шляхом відказу від штирів в поперечних швах.

Досліджено напружено-деформований стан плит дорожнього одягу під дією груп штампів транспортних засобів. Виконано оцінку міцності шаруватих плит дорожнього одягу під дією важкого наднормативного багатоколісного транспортного засобу і подано рекомендації щодо підвищення міцності одягу.

В сьомому розділі неklasична модель та її часткові випадки застосовано до розв'язку задач контакту плит з жорсткими штампами та задач міжшарового контакту (рис. 18).

Для обґрунтування можливостей застосування розробленої неklasичної моделі та її варіантів до поставлених контактних задач отримано аналітичний розв'язок задачі циліндричного згину шаруваті плити гладким жорстким штампом, яка, згідно огляду літературних джерел, раніше не розглядалася. Для повноти

дослідження впливу поперечних деформацій зсуву й обтиснення на результати цю задачу розв'язано в двох варіантах:

- врахування впливу поперечного зсуву при виключенні впливу обтиснення ($E'_k = \infty$, $\nu'_k = 0$);
- врахування впливу поперечного обтиснення від безпосередньої дії навантаження на плиту від штампку при виключенні впливу поперечного зсуву ($G'_k = \infty$) та обтиснення від ефекту Пуассона ($\nu'_k = 0$).

Загальний розв'язок отримано для трансверсально-ізотропної плити з довільною кількістю шарів (рис.18-а). Розглянуто зону контакту й позаконтактну зону. Як показує вираз для розподіленої реакції плити

$$q(x) = \frac{P\omega}{2sh(\omega b)} ch(\omega x), \quad (29)$$

її значення й, відповідно, контактні напруження не дорівнюють нулю на межі зони контакту, а досягають найбільших значень. Це протиріччя з фізичною сутністю задачі розв'язується врахуванням поперечного обтиснення - другим варіантом розв'язку, який для розподіленої реакції дає такий вираз

$$q(x) = P\omega \frac{sh\omega(b+x) \sin\omega(b-x) + sh\omega(b-x) \sin\omega(b+x)}{sh2\omega b - \sin2\omega b}. \quad (30)$$

Тут параметр ω залежить від параметрів жорсткості багат шарової плити.

Вираз (30), на відміну від (29), дає нульові значення контактних напружень на межі зони контакту. Числові результати показують скорельованість отриманого розв'язку з відомими даними теорії пружності в частковому випадку однорідної ізотропної плити (рис.19), як для малих зон контакту $\beta = 0,03 - 0,1$ ($\beta \leq 0,1$ - розподіл контактних напружень за Герцем), так й для зон середніх ($\beta = 0,3$) та великих ($\beta = 0,5; 0,8$), коли суттєвим є вплив згину плити. Для цих випадків характерно зміщення максимуму тиску до межі інтервалу контакту. Розв'язок за зсувною моделлю дає не тільки кількісні, але й якісні похибки - на межах зони контакту немає "спаду" контактних напружень.

Показано (рис.20), що для трансверсально-ізотропних плит, а також для тришарових плит з трансверсально-ізотропним заповнювачем, при зменшенні жорсткості (модуля пружності) в поперечному напрямку, навіть при великих зонах контакту, максимум контактних напружень зменшується й зміщується до її середини, тобто розподіл цих напружень схожий з розподілом за Герцем. Отже встановлено суттєвий вплив поперечного обтиснення на розподіл контактних напружень, як по своїй сутності, так й з точки зору отримання розв'язків близьких до точного.

Розв'язано також задачу про міжшарові контактні напруження в тришаровій трансверсально-ізотропній плиті, навантаженій по краях тангенціальними силами, які зсувають зовнішні шари відносно внутрішнього (рис.18-б). Цю задачу, як й для плити під штампком, розв'язано в двох вказаних раніше варіантах.

Розподіл напружень за обома варіантами (рис.21) для пластин з відносною довжиною $L = l/h$ та параметром $\lambda = Eh/2E_1h_1$ (h та h_1 - товщини середнього та крайніх шарів), показує що, як і для дії штампку, визначальним фактором,

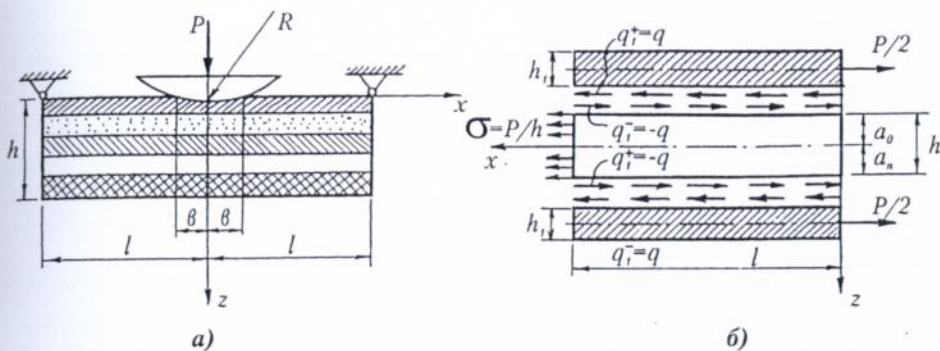


Рис.18. Схеми до розв'язку контактних задач: а) - плита із штампом; б) - міжшаровий контакт

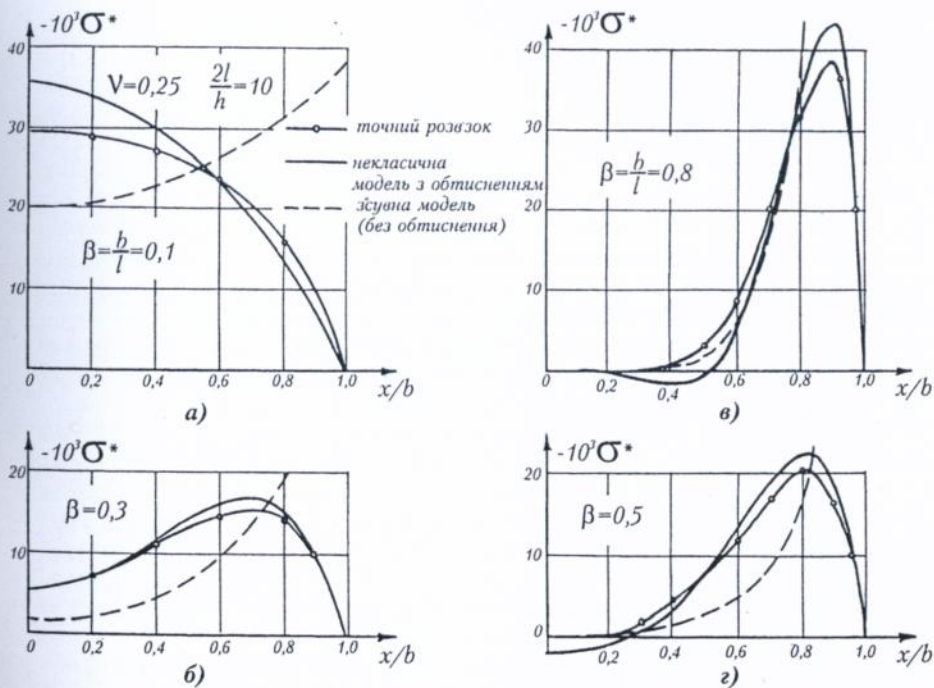


Рис.19. Розподіл контактних напружень під штампом: а) - мала; б) - середня; в,г) - великі зони контакту

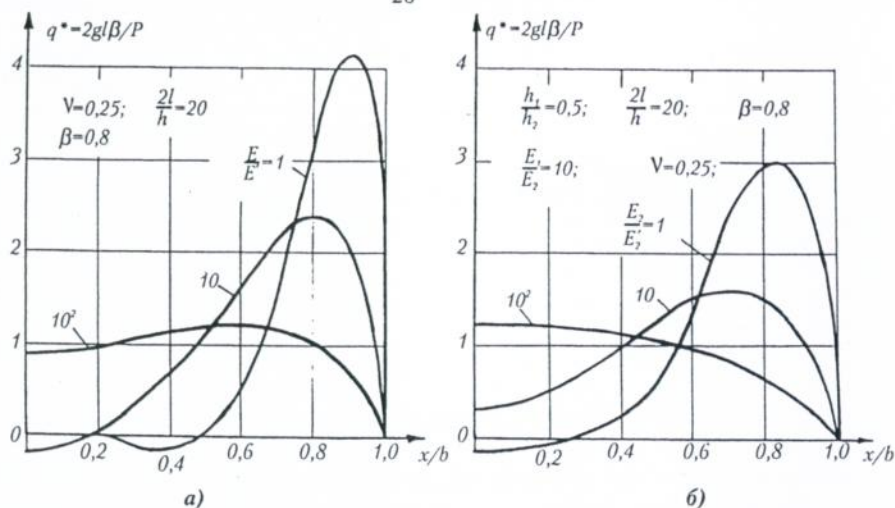


Рис.20. Контактні напруження під штампом: а) - в трансверсально-ізотропній пластині; б) - в тришаровій пластині

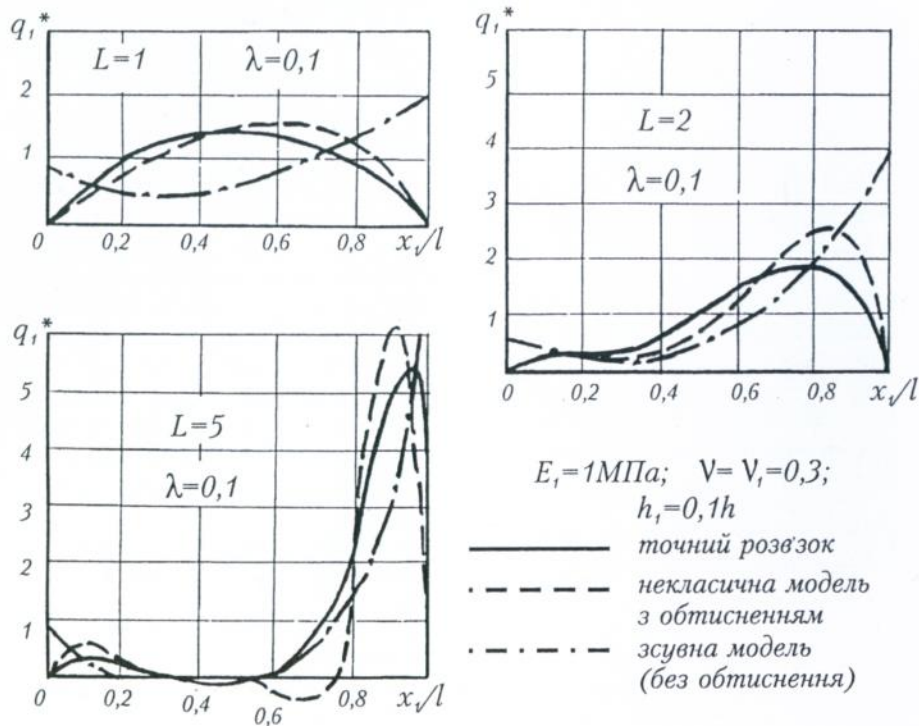


Рис.21. Розподіл міжшарових дотичних контактних напружень в тришаровій пластині

який забезпечує точність розв'язку, його збіг з результатами теорії пружності, є поперечне обтиснення. В даному випадку це обтиснення від міжшарових контактних напружень (точніше, похідних вздовж осі плити від цих напружень). Податність в поперечному напрямку зменшує екстремум контактних напружень.

Таким чином, контактні задачі відносяться до такого класу, в яких визначальний вплив на точність результатів має найбільш суттєва сторона розробленої неklasичної моделі - врахування поперечного обтиснення від безпосередньо прикладених навантажень, як нормальних, так і тангенціальних.

Поряд з аналітичними розв'язками в даному розділі запропонована чисельна методика розв'язання задач контакту методом скінченних елементів. Розподіл контактних напружень прийнято за законом трапеції (для плоскої задачі). Такий підхід дозволяє отримувати розв'язок при досить розряженій сітці в зоні контакту. Контактні напруження в межах скінченного елемента є неперервною кусково-лінійною функцією. Розв'язок реалізовано методом ітерацій за допомогою матриці податності, яка дозволяє розв'язувати задачі контакту як з жорсткими, так і з пружними тілами.

ВИСНОВКИ

В дисертації отримано наступні основні наукові та практичні результати:

1. Побудовано нову узагальнену двовимірну неklasичну модель напружено-деформованого стану шаруватих анізотропних пологих оболонок і плит, призначену для розв'язку задач їх статичного згину, високочастотних коливань та контактної взаємодії з пружною основою та жорсткими штампами. Побудовану модель відрізняють:

- узагальнення врахування факторів, що відображають просторовий (тривимірний) характер деформування - поперечного зсуву й, особливо, поперечного обтиснення, відповідних ним напружень, в тому числі викликаних безпосередньо дією навантажень, а також силами інерції;

- універсальність по відношенню до структури пакету шарів з суттєво різними товщинами та фізико-механічними характеристиками й, відповідно, незалежність числа й порядку розв'язувальних рівнянь від кількості шарів;

- відповідність системи внутрішніх зусиль та геометричної сторони моделі, що враховує поворот, викривлення та зміну довжини нормалі по товщині шарів за рахунок деформацій поперечного зсуву та обтиснення, а також повнота зв'язку моделі з пружними константами анізотропних шарів;

- довільність призначення в межах пакету шарів поверхні зведення (координатної поверхні), що значно спрощує розв'язок контактних задач шляхом суміщення її з поверхнею контакту.

2. Реалізовано точний розв'язок плоскої задачі теорії пружності для шаруватого ортотропного композитного масиву, який характеризують:

- застосування функцій напружень та отримання розв'язків не тільки в дійсний, але й в комплексній формі коренів характеристичних рівнянь;

- розширення, завдяки вказаному, границь фізико-механічних характеристик шаруватих систем, для яких можливий точний розв'язок, отримання на цій основі нових даних про напружено-деформований стан цих систем та застосування їх для оцінки достовірності неklasичних моделей.

3. Розроблено та досліджено варіанти аналітичних розв'язків задач статичного та динамічного згину шаруватих пологих оболонок і плит, що реалізують узагальнену неklasичну модель та її часткові випадки:

- для лінійної задачі згину анізотропних шарнірно-обпертих прямокутних в плані об'єктів досліджена можливість отримання розв'язку в подвійних тригонометричних рядах й доведено, що в загальному випадку довільної за товщиною структури анізотропних шарів з однією площиною пружної симетрії ця задача нерозв'язувана;

- встановлено розв'язуваність та побудовано розв'язки для двох часткових випадків: перший - довільна структура з ортотропними (ортогонально-армованими до країв) шарами при шарнірно-рухомому закріпленні і другий - кососиметрична за товщиною структура з анізотропними (косокутно-армованими) шарами при шарнірно-нерухомому закріпленні;

- отримано розв'язки геометрично-нелінійних задач циліндричного згину пологих шаруватих оболонок і пластин, шарнірно й жорстко закріплених по краях;

- дано розв'язок задачі власних коливань пологих оболонок і пластин з прямокутним контуром.

4. На основі розроблених аналітичних розв'язків проведено обґрунтування достовірності побудованої неklasичної моделі та отримано нові результати дослідження напружено-деформованого стану та коливань шаруватих систем:

- шляхом зіставлення результатів з даними точних розв'язків теорії пружності, відомими та отриманими в роботі, а також з експериментальними даними, встановлено межі відносних геометричних та фізико-механічних параметрів плит і пологих оболонок, для яких узагальнена модель та її часткові випадки дають достовірні результати (розміри в плані $\alpha / h \geq 2$, сумарна товщина несучих шарів та заповнювачів $h_2 / h_1 > 1$, модулів пружності цих шарів $E_1 / E_2 \leq 10^5$);

- основний висновок з аналізу результатів розв'язку задач статичного згину полягає в тому, що отримання достовірних даних про напружено-деформований стан шаруватих нетонких плит і оболонок потребує обов'язкового врахування, поряд з поперечним зсувом, деформацій поперечного обтиснення, що дає можливість на основі двовимірної неklasичної моделі відобразити нелінійний характер зміни переміщень та напружень за товщиною пакету шарів, їх суттєво різні значення на навантаженій та вільній від навантаження поверхнях, включаючи ефект її "підтягування";

- в пологих оболонках збільшення загальної жорсткості системи із зростанням їх кривизни сприяє зростанню впливу обтиснення на напружено-деформований стан, а за рахунок податності обтисненню заповнювачів навантажений жорсткий шар виявляє гнучкість і його прогини можуть значно перевищити товщину, тобто виявляти суттєву геометричну нелінійність;

- для пластин кососиметричної за товщиною структури з анізотропними косокутно-армованими шарами показано суттєве зменшення (приблизно в три рази)

нормальних напружень при зміні кута армування від нуля до $\pm 45^\circ$, при цьому кососиметрія структури пакету шарів породжує симетрію за товщиною тангенціальних переміщень вздовж країв та кососиметрію поперечних дотичних напружень, що діють по нормалях до країв;

- в динамічних задачах коливань плит і оболонок узагальнена неklasична модель, що враховує нелінійний характер зміни переміщень за товщиною пакету шарів, дає змогу достовірно визначати частоти вищої частини спектру, коли довжини півхвиль коливань сорозмірні з товщиною всього пакету ($l / h \leq 4$), в той час як лінійна зсувна модель типу Тимошенка - Рейсснера значно занижує ці частоти.

5. Відпрацьовано чисельне моделювання задач згину пологих оболонок і плит, що реалізує неklasичну модель на основі дискретно-континуальної схеми методу скінченних елементів:

- із застосуванням ефективних апроксимацій побудовано прямокутний та трикутний шаруваті скінченні елементи оболонки нульової кривизни, кількість ступенів свободи яких зменшено в порівнянні з відомими елементами цього типу за рахунок особливості запропонованої неklasичної моделі, що враховує поперечний зсув та пуассонове обтиснення однією універсальною шуканою функцією, а обтиснення від завданого навантаження - завданими функціями (аналогами шуканих);

- на тестових прикладах встановлено збіжність (по переміщенням) процесу розрахунку при згущенні сітки порядку квадрата її кроку, досліджено ефект зниження абсолютної похибки у порівнянні з скінченними елементами, побудованими за класичною моделлю, показано, що уточнення результатів екстраполяцією за результатами з двома кроками негустих сіток дозволяє отримати дані, значно ближчі до результатів аналітичних розв'язків, ніж прямий розрахунок з досить густою сіткою;

- в задачах, де необхідно враховувати обтиснення, показано перевагу по кількості невідомих дискретно-континуальної схеми перед прямою дискретною схемою методу скінченних елементів, демонструється можливість розрахунку товстих пологих оболонок за допомогою плоских скінченних елементів;

- досліджено напружено-деформований стан шаруватої параболічної оболонки рефлектора антени космічного апарату й дано рекомендації щодо збільшення жорсткості системи.

6. Побудована адекватна до неklasичної моделі плити нова багатопараметрова двовимірна модель напружено-деформованого стану шаруватого півпростору (пружної основи) та розв'язано задачі контакту шаруватих плит з такою основою:

- побудовану модель відрізняють врахування властивостей трансверсальної ізотропії шарів, їх опір розтягу-стиску та зсуву в площинах шарів, поперечному зсуву та обтисненню;

- розроблено аналітичну та чисельну методики розв'язку задач контакту шаруватих плит з основою, зокрема скінченний елемент, що реалізує модель пружної основи;

- розрахункові та експериментальні дані дозволили встановити, що запропонована модель дає достовірні результати для плит як нескінченно-великих розмірів, так й для плит відносно малих розмірів при навантаженні їх штампами в різних зонах;

- розв'язок ряду дослідницьких та прикладних задач дозволив встановити, що деформації поперечного обтиснення для шаруватих плит з податними прошарками мають суттєвий вплив на переміщення підшви плити та її тиску на основу, зокрема, із збільшенням податності обтисненню тиск зменшується, що має неабияке практичне значення;

- серед результатів практичного значення слід також відмітити дані розрахунку систем плит при різних умовах їх поєднання, що дозволило обґрунтувати відмову від штирів в поперечних швах покриття бетонного дорожнього одягу та зменшити металомісткість конструкції;

- дослідження напружено-деформованого стану плит дорожнього одягу під дією груп штампів транспортних засобів, що дозволило отримати табличні нормативні дані та дати оцінку міцності шаруватих плит дорожнього одягу під дією важкого наднормативного багатоколісного транспортного засобу.

7. На основі варіантів узагальненої моделі розв'язано задачі контакту шаруватих плит з жорсткими штампамі, а також задачі міжшарового контакту:

- побудовано аналітичні розв'язки вказаних задач контакту на основі зсувної моделі та моделі, що враховує обтиснення, й доведено, що застосування саме моделі з обтисненням дозволяє отримати фізично непротиворіччі результати, що мають якісний й кількісний збіг з точними розв'язками теорії пружності, зокрема "спад" контактних напружень на межах зон контакту;

- встановлено, що податність плити (заповнювача тришарової плити) поперечному обтисненню викликає зменшення контактних напружень та більш рівномірний їх розподіл вздовж зони контакту, наближаючи до розподілу напружень, характерного для малих зон контакту - розподілу за Герцем;

- дослідження міжшарових дотичних контактних напружень показало, що тільки врахування моделлю поперечного обтиснення дозволяє отримати результати, що збігаються з точним розв'язком теорії пружності, а загальні закономірності розподілу цих напружень близькі до отриманих для задач контакту із штампамі;

- відпрацьована чисельна методика розв'язку контактних задач й показана її ефективність.

В цілому, слід зробити висновок, що виконана дисертація має комплексний характер: містить розробку нових теоретичних моделей шаруватих систем, їх аналітичну й чисельну реалізацію, дослідження особливостей напружено-деформованого стану цих систем та розв'язки прикладних задач для різних галузей техніки.

Отримані в дисертації наукові та практичні результати можна кваліфікувати як розвиток та узагальнення теорії моделювання напружено-деформованого стану неоднорідних твердих тіл шаруватої структури, що в сукупності є суттєвим внеском у вказаний напрямок механіки деформівного твердого тіла.

ПУБЛІКАЦІЇ

1. Расчет неоднородных оболочек и пластин методом конечных элементов / Пискунов В.Г., Вериженко В.Е., Присяжнюк В.К., Сипетов В.С., Карпиловский В.С.. -К.: Вища школа, 1987. -200с.
2. Присяжнюк В.К. Модель напряженно-деформированного состояния неоднородного ортотропного упругого основания. // Новые методы расчета строительных конструкций. -Л.: изд. ЛИСИ. -1983. -С.157-163.
3. Присяжнюк В.К., Вериженко В.Е.. Линейные и нелинейные модели контактного взаимодействия слоистых конструкций с упругим основанием // Труды X международного конгресса "Применение математики в инженерных науках -ИКМ-Х". Том 6. -Германия, Веймар: 1984. -С.26-29.
4. Пискунов В.Г., Присяжнюк В.К., Вериженко В.Е., Васильев Н.Б., Кульчицкий В.А.. Напряженно-деформированное состояние слоистого покрытия аэродромной одежды // Известия вузов. Строительство и архитектура. -1984. -№12. -С.108-111.
5. Вериженко В.Е., Присяжнюк В.К. Модели линейного и нелинейного деформирования многослойных конструкций и их реализация // Сопротивление материалов и теория сооружений. -К.: Будівельник. -1985. -Вып. 47. -С.52-57.
6. Пискунов В.Г., Вериженко В.Е., Присяжнюк В.К. Неклассические модели линейной и нелинейной теории пологих слоистых оболочек // Труды международного конгресса ИАСС. -Том 1. -М.: -1985. -С.85-90.
7. Пискунов В.Г., Присяжнюк В.К. Расчет неоднородных плит на упругом неоднородном полупространстве // Строительная механика и расчет сооружений. -1985. -№1. -С.25-28.
8. Пискунов В.Г., Присяжнюк В.К., Марчук О.В. Задача контакту прямокутної плити жорсткого дорожнього одягу з напівпростором // Автомобільні дороги і дорожнє будівництво. -К.: Будівельник. -1985. -Вип.36. -С.27-29.
9. Пискунов В.Г., Присяжнюк В.К., Сипетов В.С. Неклассическая теория в задачах статики, динамики и термоупругости слоистых конструкций // Доклады V всесоюзной конференции по статике и динамике пространственных конструкций. -К.: изд. КИСИ. -1985. -С.18-22.
10. Присяжнюк В.К. К решению контактной задачи для многослойных конструкций. // Расчет строительных конструкций на статические и динамические нагрузки. -Л.: изд. ЛИСИ. -1985. -С.147-158.
11. Присяжнюк В.К., Вериженко В.Е. Расчет непрерывно-неоднородных плит с учетом эффектов поперечного сдвига и обжатия // Расчет пространственных строительных конструкций. -Куйбышев: изд. Куйбышевского университета. -1985. -С.119-124.
12. Вериженко В.Е., Присяжнюк В.К., Бурыгин С.Г. Уточненная модель слоистой композитной оболочки для решения контактной задачи в упругопластической постановке // Механика композитных материалов. -1986. -№4. -С.672-677.
13. Пискунов В.Г., Присяжнюк В.К. Некласична модель багатошарових оболонок з ортотропних композиційних матеріалів для розв'язку динамічних задач // Доповіді АН УРСР. Сер.А. -1986. -№4. -С.43-46.

14. Присяжнюк В.К. Численная реализация модели многослойной пластины, учитывающей поперечный сдвиг и обжатие. // Строительная механика и расчет сооружений. -1986. -№2. -С.25-28.
15. Присяжнюк В.К. Об одном подходе к решению контактной задачи для многослойной ортотропной пластины. // Известия вузов. Строительство и архитектура. -1986. -№5. -С.26-30.
16. Присяжнюк В.К., Марчук А.В. Построение модели слоистой трансверсально-изотропной пластины для решения контактных задач. // Соппротивление материалов и теории сооружений. -К.: Будівельник. -1986. -Вып.48. -С.39-42.
17. Присяжнюк В.К., Пискунов В.Г. Учет поперечного обжатия в задачах изгиба многослойных ортотропных пластин // Прикладная механика. -1986. -Том 22, №7. -С.66-72.
18. Присяжнюк В.К., Пискунов В.Г. Модель пологих оболочек и пластин из слоистых композитных материалов для решения задач статики, динамики и контактного взаимодействия // Механика композитных материалов. -1987. -№6. -С.1014-1021.
19. Присяжнюк В.К., Марчук А.В. МКЭ в задачах контактного взаимодействия многослойных плит с упругим полупространством // Строительная механика и расчет сооружений. -1987. -№4. -С.9-13.
20. Присяжнюк В.К. К вопросу о применимости одной из уточненных теорий пластин для решения контактных задач // Проблемы прочности. -1988. -№2. -С.122-123.
21. Присяжнюк В.К. Определение касательных контактных напряжений в многослойных ортотропных пластинах. // Известия Северо-Кавказского научного центра высшей школы. Естественные науки. -Ростов-на-Дону: изд. Ростовского университета. -1988. -№3. -С.68-73.
22. Пискунов В.Г., Присяжнюк В.К., Зайвелев И.Б. Большие прогибы удлиненных многослойных ортотропных пластин // Известия вузов. Строительство и архитектура. -1989. -№1. -С.24-29.
23. Присяжнюк В.К., Марчук А.В. Учет деформаций поперечного сдвига и обжатия в задачах контактного взаимодействия многослойных плит с упругим полупространством. // Строительная механика и расчет сооружений. -1989. -№3. -С.20-22.
24. Присяжнюк В.К. Учет поперечного обжатия при расчете гибких многослойных панелей из композитных материалов. // Прикладная механика. -1990. Том 26, №12. -С.108-113.
25. Присяжнюк В.К., Зайвелев И.Б. К решению плоской задачи теории упругости для многослойного ортотропного композита // Механика композитных материалов. -1991. Том 27, №2. -С.206-214.
26. Piskunov V.G., Demtchouk O.N., Prisjaznuk V.K. Optimal design of laminated composite plates based on the use of refined theory // International conference ICES-95. -USA. -1995. -P.321-327.
27. Присяжнюк В.К. Численное решение контактной задачи для многослойных композитных конструктивных систем // Механика композитных материалов. -1995. Том 31, №1. -С.45-53.

28. Присяжнюк В.К. Задача контакта слоистой плиты с упругим слоистым основанием // Труды Белорусского конгресса по теоретической и прикладной механике "Механика - 95". - Минск: изд. Академии наук республики Беларусь. - 1995. - С.191-192.
29. Вериженко В.Е., Пискунов В.Г., Присяжнюк В.К., Табаков П.Я. Уточненная динамическая теория многослойных оболочек и пластин. // Проблемы прочности. -1996. -Сообщ. 1. Исходные гипотезы и соотношения модели. -№5. -С.91-99; -Сообщ. 2. Система разрешающих уравнений и результаты. -№6. -С.61-69.
30. Присяжнюк В.К. Оценка прочности слоистой плиты дорожной одежды при действии тяжелого многоколесного транспортного средства // Системні методи керування, технологія та організація виробництва, ремонту і експлуатації автомобілів. -К.: вид. УТУ та ТАУ. -Збірник наукових праць, розд. "Прикладна механіка". -1997. -Вип.3. -С.80-83.

АНОТАЦІЇ

Присяжнюк В.К. Узагальнена неklasична модель напружено-деформованого стану в задачах статика, динаміки та контакту шаруватих плит і оболонок. - Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.02.04 - механіка деформівного твердого тіла. - Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут", Київ, 1997.

Дисертація присвячена побудові та застосуванню узагальненої неklasичної моделі напружено-деформованого стану анізотропних плит і оболонок. Модель відображає просторовий характер деформування вказаних систем шляхом врахування деформацій поперечного зсуву та обтиснення, відповідних напружень, сил інерції, геометричної нелінійності. Модель реалізована аналітичними й чисельними методами. Для обґрунтування достовірності моделі розроблено точний розв'язок плоскої задачі теорії пружності для композитного шаруватого масиву. Встановлено ефекти напружено-деформованого стану шаруватих систем, розв'язано задачі їх височастотних коливань. Побудовано модель шаруватого пружного півпростору й розв'язано задачі його контактної взаємодії з шаруватими плитами. Отримано розв'язок задач контакту шаруватих плит з жорсткими штампами, міжшарового контакту. Результати застосовано для розрахунків шаруватих конструкцій дорожніх та аеродромних одягів, а також елементів космічної техніки.

Ключові слова: неklasична модель, шаруваті плити, оболонки, статика, динаміка, контактна взаємодія.

Присяжнюк В.К. Обобщенная неклассическая модель напряженно-деформированного состояния в задачах статики, динамики и контакта слоистых плит и оболочек. - Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 01.02.04 - механика деформируемого твердого тела. - Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт", Киев, 1997.

Диссертация посвящена построению и применению обобщенной неклассической модели напряженно-деформированного состояния слоистых анизотропных плит и оболочек. Модель отражает пространственный характер деформирования указанных систем путем учета деформаций поперечного сдвига и обжатия, соответствующих им напряжений, сил инерции, геометрической нелинейности. Модель реализована аналитическими и численными методами. Для обоснования достоверности модели разработано точное решение плоской задачи теории упругости для композитного слоистого массива. Установлены эффекты напряженно-деформированного состояния слоистых систем, решены задачи их высокочастотных колебаний. Построена модель слоистого упругого полупространства и решены задачи его контактного взаимодействия со слоистыми плитами. Получены решения задач контакта слоистых плит с жесткими штампами и межслоевого контакта. Результаты применены для расчетов слоистых конструкций дорожных и аэродромных одежд, а также элементов космической техники.

Ключевые слова: неклассическая модель, слоистые плиты, оболочки, статика, динамика, контактное взаимодействие.

Prysyazhnyuk V.K. Generalized nonclassical stress-strain state model in the problem of statics, dynamics and contact of the laminated plate and shells. - Manuscript.

Thesis for a doctor's degree by speciality 01.02.04 - mechanics of the deformable solid body. National Technical University of Ukraine "Kiev Politechnical Institute", Kiev, 1997.

The dissertation is devoted to construction and application of the generalized nonclassical model of stress-strain state of laminated anisotropic plates and shells. The model is reflected of the spatial disposition of the deform these system by calculation of the transverse shear and normal deformation, the forces of inertia, geometrical nonlinear. Model is realized by analytical and numarical methods. The exact solution of the flat problem of the theory of elasticity is developed for the substantive of the model authenticity. The effects of the stress-strain state of the laminated systems are established, the problem of the higher-frequency vibration are decided. The model of the laminated elastic half-space is constructed and the problems of contact interaction with the laminated plates are decided. The solution of the problems of the contact of the laminated plate with the stiffpunch and interlayer contact are received. Results are applied for the calculations of the laminated constructions of the road and airdrome surfacing, and the same of the elements of the space technics.

Key words: nonclassical model, laminated plates, shells, statics, dynamics, contact interaction.

Підписано до друку 20.10.1997 р. Формат 60х84¹/₁₆ .
Ум. друк. арк. 2.0. Обл. вид. арк. 2.0. Наклад. 100.
Зам. № 85.

Видавництво "АТОЛЛ"

252135, м. Київ, проспект Перемоги, 14, к. 2411.

431.048

AB 38.665