

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МІЦНОСТІ

На правах рукопису

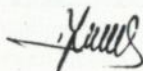
ТРАПЕЗОН Олександр Георгійович

УДК 517.9:534.1:620.178.3

МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ  
ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ ПРИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМУ  
ВИВЧЕННІ ВТОМИ МАТЕРІАЛІВ

Спеціальність: 05.02.09 – динаміка та міцність машин

Автореферат  
дисертації на здобуття вченого ступеня  
доктора технічних наук



КИЇВ – 1997



Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Інституті проблем міцності Національної академії наук України

Науковий консультант академік НАН України, доктор технічних наук, професор Г.С.Писаренко, Інститут проблем міцності НАН України, радник Президії НАН України

Офіційні опоненти:

доктор технічних наук, професор М.В.Василенко, Національний технічний університет "КПІ", професор кафедри динаміки, міцності машин та опору матеріалів;

доктор технічних наук, професор В.Г.Пискунов, Український транспортний університет, завідуючий кафедрою опору матеріалів;

доктор технічних наук, професор Б.О.Грязнов, Інститут проблем міцності НАН України, головний науковий співробітник.

Провідна організація: Київський міжнародний університет цивільної авіації, м. Київ


Захист відбудеться " 11 " грудня 1997 р. о 9<sup>30</sup> годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.99.01 при Інституті проблем міцності НАН України за адресою:

252014, м. Київ-14, вул. Тімірязєвська, 2

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Інституту проблем міцності НАН України

Автореферат розіслано " 6 " листопада 1997 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради  
доктор технічних наук

 Ф.Ф.Гігіняк

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність проблеми. Експлуатація промислового обладнання часто супроводжується вібраціями, що являється чинником втомних пошкоджень, які нерідко призводять до серйозних аварій, чому традиційно актуальними залишаються будь-які дослідження, що направлені на мінімізацію несприятливого впливу вібронавантажень. Експериментальні методи вивчення втоми матеріалів, що моделюють в лабораторних умовах інтенсивні пружні коливання різних елементів (типу стержнів, балок, пластинок чи оболонок), по своїм можливостям повинні охоплювати широкий спектр умов та видів навантажень, які зустрічаються на практиці, а це досягається в першу чергу шляхом всебічного аналізу відповідних задач теорії коливань. Сучасні розрахункові методи дослідження коливань базуються, як правило, на числових підходах, які мають ряд відомих недоліків, серед яких – їх наближеність, що долається головним чином за рахунок збільшення об'єму обчислювальної роботи. В зв'язку з цим дослідження по розвитку аналітичних методів і особливо – методів розрахунку в замкнутій формі залишаються актуальними, оскільки саме ці методи мають особливе практичне значення як такі, що відзначаються наглядністю, зручністю застосування пов'язаному з безпосереднім використанням готових розрахункових співвідношень та результатів, достовірністю, можливістю загального якісного аналізу поведінки систем і її прогнозування при змінах частот та обумовлених ними форм коливань. Очевидно, що чим повніше банк точних результатів, тим більше з'являється можливостей для вибору оптимальних практичних рішень. Тим більше це стосується пошуку нових методів, як джерела нових аналітичних чи точних розв'язків відповідних задач. Вирішення іншої частини проблеми – одержання характеристик опору втомі – можливе лише при наявності ефективних експериментальних методик, а зважаючи на вимоги, що випливають з сучасної концепції прискорених методів досліджень, – придатність цих методик для високочастотних (2...20 кГц) випробувань як одного з підходів в цьому напрямі. Оскільки високочастотні методи базуються на резонансних коливаннях пружних систем, то теоретичні дослідження та оптимальне використання особливостей таких коливань в даній сфері практики являються базовою передумовою всієї методології високочастотних втомних випробувань. Звідси випливає, що рівень розвитку відміченої теоретичної бази обумовлює і рівень експериментальної методології, яким в свою чергу будуть визначатись успіхи в накопиченні власне експериментальних даних по опору втомі. Таким чином актуальність розробки аналітичних методів розрахунку додатково підтверджується і

ДНБ ім. В. Стефанишина  
АН України

витікає із актуальності подальшого розвитку методів втомних випробувань, що ґрунтуються на резонансному принципі.

Мета роботи. Розширення теоретичної та експериментальної бази інженерних розрахунків при коливаннях механічних систем на основі вирішення зазначених вище питань, а саме:

– створення нових та розвитку відомих аналітичних методів розрахунку коливань пружних систем в тому числі і в першу чергу при різнобічних змінних характеристиках;

– одержання при допомозі розроблених методів нових замкнутих розв'язків ряду прикладних задач, розширення банку точних розв'язків;

– розробка та практична реалізація нових експериментальних засобів втомних випробувань, що ґрунтуються на доцільному використанні результатів розв'язку відповідних задач теорії коливань;

– одержання при допомозі створеної експериментальної бази даних по опору втомі широкого класу різнотипних конструкційних матеріалів при різноманітних умовах та видах навантаження;

– розробка та обґрунтування в необхідних випадках залежностей для розрахункового визначення або оцінки характеристик опору втомі матеріалів.

Наукова новизна роботи. Розроблені аналітичні методи побудови розв'язків ряду задач прикладної механіки для пружних систем змінної жорсткості (задачі теорії коливань, стійкості, статичного деформування та ін.), в основу яких покладені підходи, що конструктивно розв'язують проблему пошуку симетрій диференційних рівнянь. Ідея вирішення цієї проблеми в кожному із запропонованих методів залишається спільною і полягає в тому, що при виконанні належних умов, які витікають з побудованих спеціальним чином груп перетворень, що реалізують проблему симетрії, із відомого розв'язку деякої задачі для диференційних рівнянь другого або четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами неминуче впливає готовий розв'язок аналогічної задачі зі змінними коефіцієнтами, якісно відмінними від коефіцієнтів вихідної задачі.

Авторські назви та можливості методів слідує:

– метод оберненої функції, яким розв'язується задача зі змінними коефіцієнтами, оберненими до коефіцієнтів вихідної задачі;

– метод лінійно незалежної функції та його модифікація, яким розв'язується задача зі змінними коефіцієнтами, що зв'язані з коефіцієнтами вихідної задачі функціональною залежністю типу визначника Вронського; модифікований варіант відрізняється від свого аналогу тим, що при побудові груп перетворень вилучається процедура інтегрування відповідних функцій;

– метод циклічних перетворень та його модифікація, що поєднує методи оберненої та лінійно незалежної функції, відповідно до якого розв'язується задача з коефіцієнтами, в яких міститься довільна кількість

незалежних сталих; в модифікованому варіанті виключено процедури інтегрування відповідних функцій.

Встановлено широкі можливості та ефективність методу циклічних перетворень або його модифікації, що впливають з властивостей і характеру одержуваних цим методом розв'язків, відповідно до чого при належних умовах реалізується:

- довільне число випадків з найпростішими (фундаментальними) змінними характеристиками, за яких задача розв'язується в замкнутому вигляді;
- довільне число випадків точних розв'язків задач зі змінними характеристиками, що містять відповідно довільну кількість незалежних сталих;
- керування властивостями і поведінкою об'єкту розрахунку шляхом належного підбору цих сталих на стадії проектування;
- наблизений розрахунок об'єктів з заданими змінними характеристиками шляхом їх апроксимації функціями, що припускають побудову точних розв'язків.

Узагальнено і на основі зазначених методів розвинуто підходи, що пов'язані з проблемою зниження порядку розв'язуючих диференційних рівнянь методом факторизації, виходячи з встановлених при цьому аналітичних критеріїв реалізації методів факторизації в залежності від типу конкретної задачі.

Показано ефективність та фундаментальне значення розроблених методів, як джерела нових рішень, при допомозі низки прикладів точного розв'язку різнотипних технічних задач про коливання, стійкість, статичне деформування, а також - додатковими цільовими прикладами, що стосуються оптимізації, наближеного визначення частот коливань, розрахунку напружено-деформованого стану вибраних об'єктів, які застосовуються в практиці втомних випробувань.

На основі ґрунтового розгляду і розв'язків ряду традиційних прикладних задач про коливання стержнів, балок та пластинок встановлено ті закономірності та особливості їх поведінки, які дозволили використати ці елементи для розробки ефективних експериментальних методів вивчення витривалості матеріалів. На базі цього запропоновано низку експериментальних методичних розробок, частина з яких захищена 7-ома авторськими свідоцтвами. Сформульовано основні принципи, при виконанні яких можливе найбільш раціональне використання пружних елементів при втомних випробуваннях, в зв'язку з чим з'ясовано питання про необхідність розвитку методів розрахунку елементів змінної жорсткості.

Визначено характеристики опору втомі низки різнотипних металічних матеріалів при високочастотному циклічному згині та встановлено експериментальні залежності цих характеристик від впливу різних умов і факторів, серед яких, зокрема, можна виділити наступні результати:

– одержано експериментальну залежність опору втомі від співвідношення  $\sigma_2/\sigma_1$  для високоміцної сталі, що вивчена в умовах плоского напруженого стану з головними напруженнями  $\sigma_1, \sigma_2$  одного знаку, чим підтверджено встановлене раніше для інших матеріалів суттєве пониження опору втомі в безпосередній близькості до умов рівномірного двохосного розтягу-стискання, тобто при  $\sigma_2/\sigma_1 \approx 1$ ;

– встановлено експериментальну залежність циклічної міцності мікрошаруватих конденсатів системи залізо-мідь від кількості та товщини прошарків, завдяки чому знайдено оптимальну товщину прошарків, за якої витривалість матеріалу максимальна;

– одержано експериментальну залежність опору втомі листового технічного титану від товщини та виду тонкоплівкових нітридних покриттів, в результаті чого встановлено підвищення втомної міцності з ростом товщини покриття до меж, обумовлених конкретною технологією одержання покриттів.

Супутнім результатом проведених досліджень стало підтвердження ефективності розроблених експериментальних методів.

Запропоновано аналітичне співвідношення для розрахунку опору втомі в умовах високочастотного навантаження при плоскому напруженому стані зі синфазною дією симетричними циклами головних напружень одного знаку.

Запропоновано співвідношення для оцінки витривалості матеріалів у випадку циклічного згину при різних товщинах тонкоплівкових покриттів при умові виконання відповідних обмежень, що пов'язані з особливостями технологічного процесу одержання таких покриттів.

Практична цінність роботи. Розрахункові методи, запропоновані або розвинуті в роботі, являють собою ефективний засіб аналізу коливань пружних систем зі змінними характеристиками в тому числі і тих, які є або, які можуть стати фізичними моделями елементів для втомних випробувань.

Застосування розроблених точних методів розрахунку дозволяє:

– керувати властивостями об'єкту розрахунку зі змінними конструктивними характеристиками на стадії проектування, забезпечити задоволення наперед заданим оптимальним вимогам по геометричній формі, габаритам, масі, власним (резонансним) частотам і формам коливань, по величині та розподілу циклічних напружень;

– використовувати точні розв'язки як еталонні для якісного опису та аналізу властивостей пружного елемента, що коливається, по частотам, формам коливань, напружено-деформованому стану;

– одержувати наближені результати розрахунку частот, форм коливань, циклічних напружень реального об'єкту шляхом апроксимації його характеристик належним чином вибраною функцією, що дозволяє побудову точного розв'язку; при цьому точність розрахунків підвищується зі збільшенням числа довільно варійованих сталих в апроксимуючій функції;

– використовувати їх як теоретичну базу для вдосконалення або розробки нових експериментальних засобів втомних випробувань, підвищення їх надійності та достовірності очікуваних результатів.

Розроблений комплекс оригінальних експериментальних методик дозволяє оперативно і з достатньою вірогідністю проводити масові втомні випробування матеріалів різного призначення в залежності від їх структури, властивостей і т. п. при різних видах циклічного деформування як в спеціалізованих, так і в заводських лабораторіях на серійному обладнанні. В зв'язку з цим розроблено нормативно-технічні документи.

Запропоновані методики, які базуються на резонансному принципі, є завдяки цьому, як правило, високочастотними і тому відповідають сучасній концепції прискорення втомних випробувань, за якої скорочується тривалість та забезпечується здешевлення випробувань.

Одержані експериментальні дані по опору втомі різних матеріалів та встановлені тут експериментальні залежності втомч від впливу низки умов та факторів дозволили в кожному окремому випадку атестувати ці матеріали по критеріям втомної міцності, запропонувати рекомендації підприємствам-замовникам по оптимізації технологічних або конструкторських рішень.

Запропоноване аналітичне співвідношення для розрахунку витривалості матеріалів в умовах високочастотного навантаження при плоскому напруженому стані, яке одержало задовільне експериментальне підтвердження, може бути використано для прогнозування циклічної довговічності конструкційних елементів пластичного та оболонкового типу. Завдяки зручній аналітичній структурі запропонованого співвідношення, яке не містить в собі неозначених коефіцієнтів, трудомістки та дорогі випробування при плоскому напруженому стані, що подібні до проведених в роботі, в подальшому можуть бути замінені найпростішими експериментами при одновісьовому навантаженні.

Запропоноване розрахункове співвідношення для оцінки опору втомі матеріалів з покриттями, що задовільно узгоджується з одержаними експериментальними даними, може стати ґрунтом для розробки методів прогнозування несучої здатності елементів з покриттями, які піддаються вібронавантаженнями при експлуатації.

Реалізація роботи. Методики та результати експериментальних досліджень використані:

– на Київському механічному заводі ім. О.К.Антонова (витривалість тонколистового алюмінієвого сплаву при плоскому напруженому стані);

– на ВО "Екватор", м. Миколаїв (характеристики витривалості клапанної пружинної стрічки для герметичних компресорів);

– на Київському ВО "Арсенал" (втомна оптика оптичних ситалів);

- в ІЕЗ ім. Є.О.Патона НАН України (вплив наплавки бронзи на втому сталі - для Кіровоградського заводу "Гідросила"; характеристики циклічної міцності вакуумних конденсатів - для ВО "Астрофізика", Москва);

- в Інституті загальної фізики АН СРСР, Москва (втома конструкційних високопористих матеріалів для адаптивних елементів силової оптики);

- на підприємстві п/с Р-6521, Москва (циклічна міцність жаростійкої сталі при плоскому напруженому стані та високих частотах навантаження).

Сумарний одноразовий економічний ефект від впровадження цих результатів сягає за 1 млн. карбованців в цінах до 1991 р.

Основні положення, що виносяться на захист:

- методологія аналізу коливань пружних систем з позицій задоволення умовам, необхідним для використання цих систем в практиці втомних випробувань, а також вивід основних співвідношень, здовільняючих цим умовам;

- розробка та обґрунтування аналітичних методів побудови нових розв'язків задач механіки для пружних систем змінної жорсткості (задачі теорії коливань, стійкості, статичного деформування та ін.);

- позитивні якості та ефективність розроблених методів, що полягають в можливості суттєвого розширення кількості задач, які розв'язуються в замкненій формі, а в окремих випадках (задачі для рівнянь другого порядку і деякі із задач четвертого порядку) це розширення стає безмежним;

- особливі позитивні якості методу циклічних перетворень і його модифікованого варіанту, що полягають в можливості точного розв'язку задач, які містять в собі змінні парам. три з довільним числом невизначених незалежних сталей;

- результати або алгоритм аналітичного розв'язку низки різнотипних задач, що ілюструють ефективність запропонованих методів і їх фундаментальне значення;

- практичні позитивні якості та ефективність запропонованих експериментальних методів вивчення втомної міцності матеріалів при різних умовах та видах навантаження;

- результати експериментального вивчення втомної міцності і встановлені при цьому експериментальні закономірності їх зміни в залежності від впливу різних умов та факторів;

- розрахункові співвідношення для визначення опору втомі матеріалів при плоскому напруженому стані або для оцінки їх витривалості при циклічному одновісьовому згині в залежності від товщини тонкоплівкових покриттів.

Апробація роботи. Основні результати роботи доповідались і обговорювались на семінарах, конференціях та симпозіумах різного рівня: на Всесоюзних семінарах (Київ, 1975, 1978, 1981), Міжнародному симпозіумі (Київ, 1984) та Всесоюзній НТК (Київ, 1979) по темі "Міцність

матеріалів і елементів конструкцій при звукових та ультразвукових частотах навантаження"; на Всесоюзній НТК "Зниження металоємності та підвищення ресурсу машин на основі удосконалення стандартів по розрахунку і випробуванням на міцність" (Москва, 1982); на XIV Республіканській науковій конференції по розсіюванню енергії при коливаннях механічних систем (Чернігів, 1986); на Всесоюзній НТК "Створення компресорних машин і установок, що забезпечують інтенсивний розвиток галузей паливно-енергетичного комплексу" (Суми, 1989); на II Міжнародному симпозиумі по трибофатичі (Москва, 1996); на наукових семінарах відділів № 7, № 8, № 11 і № 17, на семінарах "Колівання, хвильові процеси та імпульсне навантаження", "Втома і термовтома" Інституту проблем міцності НАН України; на науковому семінарі кафедри "Динаміка, міцність машин та опір матеріалів" Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут".

Публікації. За темою дисертації опубліковано 47 наукові роботи, включаючи одну монографію, 7 авторських свідоцтв на винаходи, два нормативно-технічні документи, статті, доповіді та тези доповідей:

Структура і обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, п'яти розділів, загальних висновків, списку використаних джерел з 291 найменування та додатку. Дисертація має повний обсяг 444 сторінки, включаючи 56 рисунків та 16 таблиць.

Особистий внесок автора. Автором виконано методичні розробки і їх обґрунтування, одержано теоретичні та більшість експериментальних результатів, проведено їх аналіз, сформульовано ідеї наукових результатів, розроблено методологію їх втілення при розв'язанні теоретичних або прикладних задач.

## ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовується актуальність розроблюваної в дисертації науково-технічної проблеми, дано коротку характеристику загального стану і методів її вирішення. Формулюється постановка задачі та мета роботи, обґрунтовується її важливе наукове та практичне значення. Коротко викладено зміст дисертації по розділам, визначено наукову новизну і практичну значимість результатів, що одержані в роботі.

Перший розділ присвячено розгляду основних передумов розвитку аналітичних методів в задачах механіки, загальному аналізу відомих методів розрахунку пружних систем у взаємозв'язку з розвитком техніки, методам розрахунку коливань (задачі на власні значення) та експериментальним методам вивчення втоми матеріалів на основі збудження резонансних високочастотних коливань пружних елементів із аналізу, зіставлення та порівняння загальновживаних до цього часу методів

розв'язку задач на власні значення зроблено висновок про переважаюче використання в цих випадках наближених методів і підходів в порівнянні з точними методами. Підтверджено недостатність уваги до досліджень по розвитку цих останніх. Із розгляду та аналізу відомих розв'язків задач, одержуваних в замкненій формі, зроблено висновок про обмежені можливості відомих точних методів в задачах про коливання пружних систем зі змінними характеристиками. Із виконаного огляду технічних рішень, що містять елементи зі змінними характеристиками, із аналізу застосовуваних в наш час методичних рішень при високочастотних втомних випробуваннях витікає висновок, що основою успішного розвитку експериментальної методичної бази втомних випробувань при резонансних підходах є досягнення теорії коливань, її методів розрахунку. При цьому встановлено, що аналітичні методи розрахунку систем зі змінними характеристиками в випадку високочастотного резонансного методу навантаження є практично найбільш прийнятними, а в окремих випадках навіть єдино можливими.

В другому розділі, присвяченому застосуванню відомих аналітичних методів в вибраній сфері практики – для розрахунку коливальних систем, які застосовуються при резонансних втомних випробуваннях, викладено основні методичні принципи і задачі, що покладені в основу розробки раціональних резонансних способів втомних випробувань, наведено розв'язки та аналіз відповідних задач, одержано необхідні аналітичні залежності, за якими реалізуються встановлені закономірності та особливості в вигляді окремих методик, методичних рекомендацій, обмежувальних умов, розрахункових співвідношень тощо.

Уточнено окремі питання вільних повздожних та крутильних коливань стержнів, на яких базується методологія втомних випробувань при розтягу-стисканні або циклічному крученні. Уточнення, зокрема, стосуються – встановлення відмінностей в величинах похибок розрахунку, що не враховує поперечних деформацій за рівнянням Похгаммера в залежності від виду закріплення стержня; способу розрахунку частот при певних умовах для стержня з масою без розв'язання трансцендентного частотного рівняння; встановлення особливостей в розподілі вузлів переміщень та пучностей деформацій в стержнях різного обрису і аналізу відмічених обставин з точки зору їх використання або урахування на практиці; умов співпадання власних частот коливань стержнів сталого і змінного поперечного перерізу, а також – умов співпадання частот повздожних і крутильних коливань стержня змінного перерізу. Запропоновано два типи зразків для втомних випробувань при плоскому напруженому стані в випадку  $\sigma_2/\sigma_1 \leq 0$ , в яких реалізовано ці останні умови, а також – конструкцію концентратора повздожньо-крутильних

переміщень. Запропоновано модель розрахунку стержня з покриттям, яка враховує динамічну жорсткість сполучення покриття з основою, викладено аналітичний розв'язок задачі про статичне та циклічне деформування такого стержня. Наведено опис методики втомних випробувань при циклічному високочастотному крученні, в якій практично реалізовано один із можливих способів трансформування повздовжніх коливань системи в крутильні коливання зразка.

Досліджено окремі питання та задачі про поперечні (згинні) коливання балок і пластинок з точки зору використання особливостей їх деформування для розробки або розвитку втомних випробувань при циклічному згині. Сформульовано основні вимоги, які висувуються до коливальних систем як таких, що слугують позначеній цілі, – простота і вірогідність розрахунку, забезпечення втомного руйнування в обумовленому місці; зручність практичного використання. Запропоновано низку методик для різних варіантів і ситуацій, що виникають при випробуваннях на втому при згині (рис. 1). Принципи, що покладені в основу кожної із схематично показаних методик, вбачаються безпосередньо із рисунків. При цьому обов'язковий принципний розподіл амплітуд переміщень та напружень, вказаний на рисунках, забезпечується в кожному окремому випадку вибором відповідних цілком визначених розмірів або інших параметрів, що забезпечується виключно в результаті розв'язку та ґрунтового аналізу відповідних задач, наведених в роботі. Загальним положенням, поєднуючим ці схеми, є забезпечення гарантованого втомного руйнування зразків на віддаленні від опорних пристроїв, а для схеми з пластинкою (рис. 1e) – також і на віддаленні від вільного краю. Перша вимога пов'язана з необхідністю виключення впливу на результати розрахунку низки неконтрольованих факторів (контактної корозії, ефектів закріплення та ін.), які б могли суттєво спотворити результати, а друга вимога пов'язана з неможливістю розрахункового визначення напружень на вільному краї в межах технічної теорії пластинок. Схема рис. 1a ілюструє варіант застосування балочних зразків з галтелями або балок, що містять ділянки сталі жорсткості, розрахунок напружень в яких легко виконується, якщо відомі результати виміру координат вузлів переміщень  $x_1, x_2$ . По схемі рис. 1b випробовуються призматичні зразки 1 із матеріалу  $E_1, \gamma_1$ , що закріплюються на несучій балці 2 із матеріалу  $E_2, \gamma_2$ , конструкція якої забезпечує еквівалентність цієї складеної системи та балки сталі жорсткості із матеріалу  $E_2, \gamma_2$  – по частоті, формі власних коливань резонансній довжині і жорсткості на згин. В цьому випадку така система легко піддається розрахунку на основі відомих співвідношень. Схема рис. 1в реалізує ідею, що ґрунтується на розміщенні ступеневого переходу в вузлі напружень ( $\sigma=0$ ), чим забез-

печується втомне руйнування на вузькій (робочій) частині зразка. Ця ж схема при зміні вузького ступеня окремим елементом із іншого матеріалу слугує для випробувань зразків або деталей (труби, вісі, вали, дрід тощо) сталі жорсткості. Для цієї ж цілі призначено схему випробувань по рис. 1г при певних співвідношеннях між розмірами  $a$  і  $b$ . Схема рис. 1д ілюструє застосування при втомних випробуваннях балки змінної ширини, яка змінюється в даному випадку по експоненті. Методика, що відповідає рис. 1е, розроблена раніше для випробувань при плоскому напруженому стані в випадку  $\sigma_2/\sigma_1 > 0$  (напруження одного знаку). В круглій пластинці, що закріплена ексцентрично в точці, збуджуються спеціальні форми згинних коливань, при яких гарантується руйнування в обумовленому місці, наприклад, в центрі пластинки, як показано на схемі. Зміненням ексцентриситету варіюється відношення  $\sigma_2/\sigma_1$  в місці руйнування.

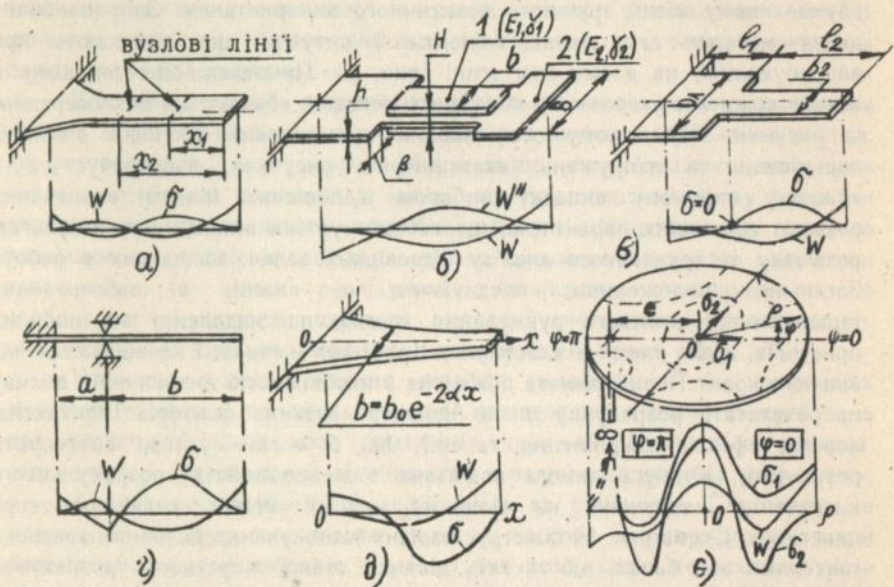


Рис. 1. Схеми для методик втомних випробувань при циклічному згині: а – балка з ділянкою незмінного поперечного перерізу; б – комбінована балка, що еквівалентна балці сталі жорсткості; в – ступінчата балка; г – балка з проміжною опорою; д – балка змінної жорсткості; е – кругла пластинка з точечною опорою.

Окрім розв'язків та аналізу задач, покладених в основу перелічених методик, в розділі розглянуто також деякі додаткові питання. Наприклад,

вказано на практичний спосіб урахування податливості опори при втомних випробуваннях, для балки по схемі рис. 1в наведено розв'язок, яким враховано зсуви та інерцію обертання (згідно з Тимошенком), обговорено основні умови раціонального використання кругових пластинок змінної товщини як зразків, моделей або натурних елементів, що підлягають втомним випробуванням. В розділі наведено необхідні аналітичні викладки, доведення принципових положень і кінцеві співвідношення, що обгрунтовують одержані результати.

Третій розділ присвячено розробці та узагальненню нових аналітичних методів розрахунку коливань пружних елементів зі змінними характеристиками. Попередньо на основі математичних аналогій встановлено перелік задач механіки, а також із інших розділів математичної фізики, що об'єднані формальною подібністю диференційних рівнянь, з'ясовано проблему пошуку нових аналітичних методів їх розв'язку. Сформульовано ідею вирішення проблеми, яка ґрунтується на виконанні спеціальним чином побудованих груп перетворень, що реалізують симетрію відповідних диференційних рівнянь, внаслідок чого розв'язуючі рівняння розглядуваної задачі повинні залишатись інваріантними до цих груп перетворень.

Пріоритет цієї ідеї належить, певно, Д.Бернуллі, яку він використав при розв'язанні одного із окремих випадків спеціального рівняння Рикатті ще в 1724 р., що обговорено в першому розділі. В подальшому цей підхід не зазнав розвитку, незважаючи на те, що подібний принцип по суті покладено, наприклад, в основу конформних перетворень, пов'язаних з заміною систем координат (для рівнянь Лапласа, Гельмгольца та ін.). В зв'язку з цим відмічено праці С.Лі а також його послідовників, які відродили цікавість до його підходів в останні два-три десятиріччя (Г.Біркгофф, Л.Ф.Овсянников, П.Олвер, Н.Х.Ібрагімов та ін.). Варте уваги те, що незважаючи на майже трьохсторіччя цієї проблеми та на підвищений інтерес до неї, який спостерігається в останні роки, по відношенню до задач на власні значення не було помічено просування вперед порівняно з відомими результатами Г.Кірхгофа, А.Н.Динника, Д.Нікольсона, Н.Мононобе (балки змінного перерізу), Х.Конвея, Д.Ейрі, А.Д.Коваленко (пластинки змінної товщини) та ін. В розділі крім розробки нових, описаних під авторськими назвами методів, розвивається та узагальнюється в прикладанні до деяких задач частковий метод факторизації, що приводить, як відомо, до зниження порядку розв'язуючих рівнянь.

Методом оберненої функції розв'язується задача зі змінними коефіцієнтами оберненими до коефіцієнтів вихідної задачі. Реалізація ідеї симетрії при цьому методі здійснюється наступним чином. Дано рівняння другого порядку

$$W'' + F' W' / F + k^2 W = 0 \quad (3.1)$$

( $F=F(x)$  – змінний коефіцієнт;  $k^2$  – власне значення;  $W=W(x)$  – шукана власна функція), яким безпосередньо описуються форми вільних повздовжніх або крутильних коливань стержня, розв'язуються задачі про повздовжній удар, крутильні коливання диску, одна із задач теорії теплопровідності, задача про проходження струму через пластинку та ін. Якщо покласти

$$W_1 = F W; \quad F = 1/F_1, \quad (3.2)$$

то після внесення цих величин в (3.1) одержимо нове рівняння для  $W_1(x)$  і  $F_1(x)$ , що аналогічне вихідному рівнянню (3.1), тобто

$$W_1'' + F_1' W_1' / F_1 + k^2 W_1 = 0. \quad (3.3)$$

Розв'язок цього рівняння визначається першим із співвідношень (3.2) при умові, що  $F_1 = 1/F$ .

Якщо дано рівняння четвертого порядку

$$(F W''')'' - k^4 F W = 0 \quad (3.4)$$

яким, наприклад, описуються форми коливань балки змінної ширини  $F(x)$  при сталій товщині, то після введення групи перетворень

$$W_1 = F W''; \quad F_1 = 1/F, \quad (3.5)$$

одержимо рівняння, що аналогічне вихідному (3.4), тобто

$$(F_1 W_1'')'' - k^4 F_1 W_1 = 0. \quad (3.6)$$

Відповідно до (3.5) розв'язок цього рівняння безпосередньо витікає із розв'язку рівняння (3.4), якщо  $F_1 = 1/F$ .

Подібним чином вводяться групи перетворень для більш складних рівнянь другого та четвертого порядку, приклади яких наведено в дисертації.

Методом лінійно незалежної функції розв'язується задача зі змінними коефіцієнтами, що пов'язані з коефіцієнтами вихідної задачі функціонально залежністю типу визначника Вронського. Покладемо в рівнянні другого порядку (3.1)  $W = V(x) W_1$ . Для того, щоб одержане при цьому рівняння мало вигляд вихідного, що записане в формі (3.3), необхідно також покласти

$$F_1 = V^2 F; \quad V = \int \frac{dx}{F} + C \quad (C - \text{стала}). \quad (3.7)$$

Значення змінного коефіцієнту  $F_1(x)$  відповідно до (3.7) буде виражено через вихідний коефіцієнт  $F(x)$ , а розв'язок породженого рівняння виду (3.3) – через  $W(x)$  по формулах

$$F_1 = F \left( C_1 + C_2 \int \frac{dx}{F} \right)^2; \quad W_1 = W / \left( C_1 + C_2 \int \frac{dx}{F} \right). \quad (3.8)$$

Як бачимо, метод оберненої функції і метод лінійно незалежної функції дозволяють лише однократне перетворення і тому процедура їх подальшого проведення не може мати продовження. Принципова перевага методу лінійно незалежної функції перед методом оберненої функції полягає в тому, що цей метод дозволяє на основі задачі з характеристикою

$F(x)$  розглянути і розв'язати задачу з характеристикою  $F_1(x)$ , яка містить в собі довільну сталу  $C$ . Наприклад, якщо  $F = F_0 x^{2m}$ , то при  $m = 1/2$  одержимо  $F_1 = F_{01} x (\ln x + C)^2$ , в решті випадків  $F = F_{01} (x^{1-m} + Cx^m)^2$ .

Шляхом послідовного чередування викладених методів можна прийти до нескінченної послідовності циклів однотипових сумішених перетворень вихідного рівняння, оскільки кожна із створених при цьому функцій  $F_m(x)$  буде, як слід чекати, залишатись лінійно незалежною від всіх попередніх. Оснований на цій ідеї метод, який названо методом циклічних перетворень, дозволяє, зокрема, реалізувати слідуєчі принципи проблеми: одержати розв'язок задачі при  $F_m(x)$  ( $m$  – порядковий номер циклу) в любых функціях, із яких особливий інтерес для практиків можуть мати насамперед добре вивчені функції, наприклад, елементарні; розширити до нескінченності число найпростіших випадків  $F(x)$ , при яких відповідна задача має точний розв'язок і якими в даному випадку будуть ті із породжених функцій, в яких вилучено незалежні сталі; одержати точний розв'язок задачі з характеристикою  $F(x)$ , що містить нескінченну кількість незалежних сталей. Очевидно, що в зв'язку з останньою обставиною, характеристика  $F(x)$  може бути оптимізована належним вибором сталей так, щоб в принципі задовольнити любій із вимог, що поставлені умовами задачі. Проілюструємо ці положення викладенням схеми проведення методу для рівняння (3.1).

Відповідно до методу оберненої функції одержимо рівняння для  $W_1$  у вигляді (3.1). З урахуванням групи перетворень методу незалежної функції

$$W_2 = W_1/V_1; \quad F_2 = F_1 V_1^2; \quad V_1 = \int \frac{dx}{F_1} + C_1$$

одержимо рівняння для  $W_2$  також у вигляді (3.1). Завдяки цьому одержимо співвідношення для  $W_2$  при  $F_2$ , що виражені через параметри  $W$  і  $F$  вихідної задачі

$$F_2 = (\int F dx + C_1)^2 / F; \quad W_2 = F W' / (\int F dx + C_1). \quad (3.9)$$

Таким чином, в результаті першого циклу перетворень одержано результати (3.9), що містять в собі одну довільну незалежну сталу  $C_1$ . Якщо продовжити перетворення по такій же схемі, то для рівняння

$$W_n' + F_n' W_n' / F_n + k^2 W_n = 0 \quad (3.10)$$

одержимо при  $n = m$  та  $n = m + 1$  в загальному вигляді відповідно

$$F_m = 1/F_{m-1}; \quad F_{m+1} = F_m \left( \int \frac{dx}{F_m} + C_m \right)^2;$$

$$W_m = F_{m-1} W_{m-1}; \quad W_{m+1} = W_m / \left( \int \frac{dx}{F_m} + C_m \right); \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.11)$$

Наприклад, при  $m = 3$  одержимо  $F_3 = 1/F_2; \quad F_4 = F_3 \left( \int \frac{dx}{F_3} + C_3 \right)^2;$

$W_3 = F_2 W_2'$ ;  $W_4 = W_3 / \left( \int \frac{dx}{F_3} + C_3 \right)$ . Якщо урахувати при цьому (3.9), то

одержимо співвідношення для розв'язку  $W_4$  і характеристики  $F_n$ , які виражені через вихідні функції  $W$  і  $F$ . Зокрема при

$F_4 = F \left( \left( \int F dx + C_1 \right)^2 / F \right) dx + C_3 \bigg)^2 / \left( \int F dx + C_1 \right)^2$ , де міститься дві незалежні сталі  $C_1$  і  $C_2$ , розв'язок рівняння (3.10)

$W_4 = [FW' + k^2(\int F dx + C_1)W] / \left\{ \left( \int F dx + C_1 \right)^2 / F \right\} dx + C_3$  буде точним, якщо відомо точний розв'язок рівняння (3.1) при заданому  $F$ . Якщо в (3.11) покласти  $m = 5$ , то в виразі для  $F_6$ , крім  $C_1$  та  $C_3$ , з'явиться третя стала  $C_5$ ; якщо далі прийняти  $m=7$ , то одержимо додатково ще  $C_7$  і т. д.

Запропоновані також – модифікований метод лінійно незалежної функції та модифікований метод циклічних перетворень, які відрізняються від своїх аналогів тим, що при побудові груп перетворень вилучається процедура інтегрування в співвідношеннях типу (3.11).

Розвинуто та узагальнено підходи, що зв'язані з проблемою пониження порядку диференціальних рівнянь методом факторизації. Встановлено границі застосування цього методу на основі знайдених критеріїв для окремих задач. Наприклад, для рівняння

$$(JW'')'' - k^4 FW = 0, \quad (3.12)$$

що описує коливання балки змінного поперечного перерізу або при  $J = F^3$  – коливання оболонки з товщиною стінки  $F(x)$ , можливість представлення його в вигляді двох рівнянь другого порядку

$$\left( A \frac{d^2}{dx^2} + B \frac{d}{dx} + C \right) W \pm D^2 W = 0 \quad (3.13)$$

буде досягнуто, якщо виконати умову (критерій) в вигляді нелінійного рівняння

$$JB'' = \text{const}, \quad (3.14)$$

де також  $A^2 = J/F$ ;  $B = (AF)'/F$ ;  $2C = -B'$ ;  $D^2 = \sqrt{k^4 + \chi}$  ( $\chi = \text{const}$ ),

$J$  – момент інерції;  $F$  – площа поперечного перерізу.

Розв'язавши рівняння (3.14), з'ясуємо випадки змінних  $J$  та  $F$ , при яких реалізується метод факторизації. Якщо в (3.12) покласти  $J=F$ , то аналогічним чином досліджується рівняння (3.4) для пластинкової балки змінної ширини. Рівняння (3.12) вивчалось при допомозі цього методу А.І.Ананьїним, проте критерій методу не був доведений до загальної форми типу (3.14), що вірогідно не дозволило автору знайти багатьох випадків, при яких також можлива реалізація методу. Для рівняння осесиметричних коливань круглої пластинки змінної товщини критерій методу має вигляд

$$\{xH^2[(x^\mu H')'/x^\mu]\}' = xH\{[(x^\mu H')'/x^\mu]^2 - \chi\}, \quad (3.15)$$

де  $H(x)$  – товщина,  $x$  – змінний радіус,  $\mu = (1-3\nu)/2$ ,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона,  $\chi$  – довільна стала.

Розширення можливостей методу факторизації можна досягти шляхом поєднання його з методом оберненої функції. Наприклад, методом оберненої функції перетворимо рівняння (3.12) в рівняння  $(J_1 W_1'')'' - k^4 F_1 W_1 = 0$  при умові, що  $W_1 = J W''$ ,  $J_1 = 1/F$ ;  $F_1 = 1/J$ , а це останнє – в вигляді двох рівнянь другого порядку типу (3.13). Виявляється, що функції  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і стала  $D$  повністю співпадають з виразами, одержаними при побудові (3.14), однак аналогом критерію (3.14) в цьому випадку буде рівняння

$$B''' / F = \text{const} = C_1, \quad (3.16)$$

яке відрізняється від (3.14). Звідси випливає, що при  $C_1 = 0$  результати розв'язку цих рівнянь будуть співпадати. Проте при  $C_1 \neq 0$  одержимо нові випадки, при яких реалізується метод факторизації. Таким чином, поєднання двох методів дозволяє розширити кількість задач четвертого порядку, що можуть бути розв'язані в аналітичному вигляді.

Оскільки метод циклічних перетворень в прикладанні до задач другого порядку дає достатньо простий алгоритм своєї реалізації, то зведення рівнянь вищих порядків до системи рівнянь другого порядку по методу факторизації дає схему застосування методу циклічних перетворень і в цьому випадку. Про можливості і межі такого підходу можна судити із прикладу для рівняння (3.4) задачі про коливання балки змінної ширини, що наведено в дисертації.

Четвертий розділ містить виклад результатів розгляду низки прикладних задач для коливальних систем зі змінними характеристиками. Основна увага приділена новим випадкам точних розв'язків, одержання яких стало можливим виключно завдяки застосуванню приєдених вище методів та підходів.

При допомозі методу циклічних перетворень розглянуто задачу про повздовжні або крутильні коливання стержня змінного поперечного перерізу і на основі математичної аналогії – задачу про крутильні коливання диска змінної товщини. В цьому випадку об'єктом аналізу буде рівняння форм коливань, записане в вигляді (3.1) або в вигляді

$$(FW')' + k^2 FW = 0. \quad (4.1)$$

Покладемо  $F = F_0 x^2$ , тобто породжуючою буде задача про коливання кінцевого стержня, що має розв'язок в замкненій формі  $W = (A \sin kx + B \cos kx)/x$ . Дотримуючись співвідношення (3.14), утворимо декілька функцій  $F_n$  та  $W_n$ , задовільнившись номерами  $n = 1 + 4 -$

$$\begin{aligned} F_1 &= F_{01}/x^2; F_2 = F_{02}(x^2/3 + C_1/x)^2; F_3 = F_{03}[3x/(x^3 + 3C_1)]^2; \\ F_4 &= F_{04}[3x(x^5/45 + C_1 x^2/3 - C_1^2/x + C_3)/(x^3 + 3C_1)]^2; \\ W_1 &= x^2 W'; W_2 = 3x^2 W'/(x^3 + 3C_1); W_3 = x^2 W' + k^2(x^3/3 + C_1)W; \\ W_4 &= 45x[x^2 W' + k^2(x^3/3 + C_1)W]/(x^6 + 15C_1 x^3 + 45C_3 x - 45C_1^2). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Розглянемо випадок для  $n = 3$ . При задоволенні граничних умов для вільного стержня  $W_3'(0) = W_3'(1) = 0$  враховуємо, що в даному випадку має місце залежність  $W_3' = -k^2(F dx + C_1)W'$ , тому ці умови можна

замінити умовами  $W'(0)=W'(1)=0$ , встановленими для вільного конічного стержня. Звідси випливає, що частотні рівняння, а тому і власні частоти стержня конічного та сімейства стержнів, що задані функцією  $F_3$  відповідно до (4.2), будуть повністю співпадати при довільних значеннях незалежної сталої  $C_1$ . На рис. 2 наведено деякі профілі таких стержнів, які побудовано відповідно до залежності для  $F_3$ , вираженої в формі

$$F^{1/2} = D = D_0 x(1+C)/(x^3+C), \quad (4.3)$$

що забезпечує умови нормування  $D(1)=D_0$ , а також – профіль конуса еквівалентний по частоті цим стержням. На прикладі цього сімейства стержнів досліджено їх здатність підсилювати коливання, оскільки стержні змінного поперечного перерізу широко застосовується як концентратори переміщення. Одержано, наприклад, залежність коефіцієнта підсилення для стержнів (4.3) в вигляді  $\xi_3 = \xi C/(1+C)$ , де  $\xi$  – коефіцієнт підсилення конуса, з чого випливає, що максимальне підсилення коливань таких стержнів обмежено лише значеннями сталої  $C$ , вибір якої обумовлено практичними міркуваннями.

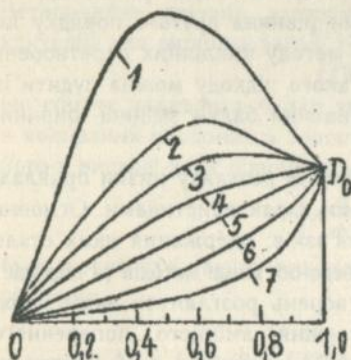


Рис. 2. Обриси стержнів, що еквівалентні по власній частоті повздовжніх коливань: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 - графіки функції (4.3) при  $C=1/6; 11/24; 3/4; 13/8; -15/8; -31/24$  відповідно; 5 - графік конуса  $D=D_0x$ .

Далі розглянуто деякі інші практичні питання, наприклад, про оптимальний вибір стержнів по масі і підсиленню коливань. Показано, які із сімейства (4.3) можна вибрати такі, що при рівності їх підсилення з підсиленням відомих стержнів типу  $F = F_0 x^m$  вони будуть суттєво меншими по масі (~ на 20%) порівняно з цими останніми.

Викладено розв'язок задачі про стійкість стержня змінного поперечного перерізу, яку розглянуто методом циклічних перетворень. Наведено приклади процесу побудови нових замкнутих розв'язків, одержано відповідні характеристичні рівняння та обчислено критичні сили для ряду випадків змінення жорсткостей, що мають в своєму складі довільні сталі. Оскільки рівняння стійкості  $y''+k^2 F^2(t)y=0$  легко одержати із рівняння (4.1) шляхом заміни

змінних  $W(x)=y(t); t = \int \frac{dx}{F}$ , то в принципі побудова нових розв'язків в цій задачі обумовлена аналогічною проблемою для задач на основі рівняння (4.1). Як один з прикладів, наведено докладно розглянутий і доведений до обчислення критичних сил новий випадок  $1/F^2 = t^4(1+C/t)^{2n/(n-1)}$ , де  $C$  і  $n$  – довільні сталі.

Досліджено задачу про згинні коливання балки змінної жорсткості. Наведено ряд прикладів нових замкнених розв'язків, що одержані методом факторизації, для балок круглого та прямокутного поперечного перерізу і викладено схему побудови нових розв'язків при поєднанні методів оберненої функції та факторизації. Наведено розв'язок для  $R=R_0x^{4/5}$  (радіус перерізу –  $R$ ), вказано на випадки реалізації методу факторизації, серед яких – для круглого перерізу  $R=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\theta$ , для прямокутного ( $b$  – ширина,  $h$  – висота):  $b=e^{nx}$ ,  $h=(e^{-nx/2}, e^{-nx/4})$ ;  $b=x^3$ ,  $h=cx^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\theta$ ,  $b=x^4$ ,  $h=(e^{ax}\cos ax, e^{ax}\sin ax, e^{ax}, ch ax \cos ax, ch ax \sin ax, sh ax \cos ax, sh ax \sin ax)$ . Для останнього випадку при  $b=x^4$  дійсні також лінійні комбінації виду  $h = ch ax(A\cos ax+B\sin ax)+sh ax(C\cos ax+D\sin ax)+e^{ax}(Q\sin ax+G\cos ax)$ ;  $h=A_1ch ax+B_1sh ax+C_1\cos ax+D_1\sin ax+Q_1e^{ax}$ , де  $\alpha, A_1, B_1, C_1, D_1, Q, G$ , – довільні сталі. Часткові випадки із загального виразу  $R=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\theta$ , розглядалися в різний час різними авторами – випадок  $R=x$  вперше розглянуто Г.Кірхгоффом, а потім Н.Мононобе, Х.Конвеем та ін. В узагальнюючій праці Є.Кранча і А.Адлера відмічена можливість одержання розв'язку при  $R=(x, x^2, x^3)$ , а також при  $R=x^{4/5}$ . Для прямокутного перерізу в дисертації наведено обширні результати, які містять в собі, як часткові, раніше вивчені іншими авторами випадки –  $b=const$ ,  $h=x$  (Г.Кірхгофф, Н.Мононобе);  $b=x^n$ ,  $h=x$  (А.Н.Динник);  $b=x^2$ ,  $h=x^2$  (А.А.Іллюшин);  $b=x^n$ ,  $h=(x^{-n/2}, x, x^2, x^3, x^{1-n/4})$  (Ж.Нікольсон, А.І.Ананьїн, Е.Кранч і А.Адлер). При використанні критерію (3.16) одержано, наприклад, розв'язок в функціях Бесселя для нового випадку  $R=R_0x^4$ . Для прямокутного перерізу критерій (3.16) приймає вигляд лінійного рівняння відносно  $h(x)$ ; а саме

$$(2h'+b'h/b)'''+Cbh=0 \quad (C=const), \quad (4.4)$$

тому його розв'язки навіть при  $C \neq 0$  одержати порівняно легко при різних  $b(x)$ . Очевидно, що всі розв'язки цього рівняння при  $C \neq 0$  мають бути новими, оскільки критерій (3.16) та його частковий випадок (4.4) одержано на новій основі. Якщо обмежитись важливими для практики крайніми випадками  $h=const$ ;  $b=b(x)$  та  $h=h(x)$ ;  $b=const$ , то, наприклад, із розгляду рівняння (3.4) для балки змінної ширини  $F(x)=b(x)$  одержимо нові випадки  $b=b_0(e^{\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x}, x^4, x^{-4})$ , при яких рівняння (3.4) розпадеться на два рівняння другого порядку. Розв'язок задачі для часткового випадку  $b=b_0e^{\alpha x^2}$  викладено в наших роботах, посилання на які наведено в дисертації, в якій, однак, містяться повні розв'язки задач для випадків  $b=(x^4, x^{-4})$ , що виражені в елементарних функціях. Розв'язок для випадку  $b=b_0e^{x^3}$  з використанням методу циклічних перетворень застосовано при розгляді задачі про коливання балки з галтелями. Для балки змінної ширини  $b(x)$  встановлено можливі випадки реалізації методу циклічних перетворень. Наприклад, для рівняння (3.4), де  $F(x)$  замінено на  $b(x)$ , в

рамках одержаної групи перетворень  $W_1=W/V$ ;  $b_1=b(C_1+C_2) \int b^{-1/2} dx$ ;  
 $V=(C+\int b^{-1/2} dx)^2$ , в окремому випадку одержимо

$$b=b_0 x^{2-1/\beta}, \quad b_1=b_{01} x^{2+1/\beta}, \quad V=V_0 x^{1/\beta}. \quad (4.5)$$

Утворимо із (4.5) послідовність при різних значеннях  $1/\beta$ :  $\beta=1/2$ ,  $b=const$ ,  
 $b_1=x^4$ ,  $V=x^2$ ;  $\beta=1/6$ ,  $b=x^{-4}$ ,  $b_1=x^8$ ,  $V=x^6$ ;  $\beta=1/10$ ,  $b=x^{-8}$ ,  $b_1=x^{12}$ ,  $V=x^{10}$ ;  
 $\beta=1/14$ ,  $b=x^{-12}$ ,  $b_1=x^{16}$ ,  $V=x^{14}$ . Якщо її продовжити, то в підсумку отримаємо нескінчену послідовність функцій

$$b=const; x^{\pm 4}; x^{\pm 8}; x^{\pm 12}; \dots x^{\pm 4n} \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots), \quad (4.6)$$

для яких задача про коливання балки змінної ширини буде мати точний розв'язок, оскільки такий розв'язок нам відомо для випадку  $b=const$ . Техніка побудови розв'язків рівняння (3.4) при ширині  $F=b$ , означеній функціями (4.6), безпосередньо витікає із методу циклічних перетворень, який в поєднанні з методом оберненої функції дає програму всіх необхідних при цьому дій. Наведено, як приклад, хід та розв'язок задачі для  $b=b_0 x^{-8}$ , результат якого має вигляд  $W=x^8[(W_0/x^2)^n/x^2]^n$ , де  $W_0$  – розв'язок при  $b=const$ . Задача при  $b=b_0 x^n$  для різних  $n$  розв'язувалась неодноразово методом рядів С.П.Тимошенко, Д.Бенксом і Г.Куровським, Х.Мабі і С.Роджерсом та ін.

Із (4.5) можлива побудова ще двох послідовностей  $b=x^{\pm 2}$ ;  $x^{\pm 6}$ ;  $x^{\pm 10}$ ;  
 $\dots x^{\pm(4n-2)}$ ,  $b=x^{\pm 1}$ ;  $x^{\pm 3}$ ;  $x^{\pm 5}$ ;  $\dots x^{\pm(2n-1)}$ , які мають ті ж властивості, що і послідовність (4.6). Тому при знайдених тим чи іншим шляхом розв'язках задачі при одному із номерів  $n$  негайно будуть знайдені розв'язки і при інших  $n$ . Наприклад, якщо методом рядів розв'язано задачу для  $b=b_0 x$ , то розв'язок по приведеному для випадку  $b=b_0 x^{-8}$  алгоритму можна трансформувати в розв'язки для  $b=b_0(x^{-1}, x^{\pm 3})$  і т. д.

При розгляді та аналізі відомих результатів для задачі про коливання балки змінної товщини  $h(x)$  при  $b=const$  відмічено, що цей випадок відомий лише розв'язками при товщинах  $h=(x, x^2, x^3)$  (Кірхгофф, Мононобе, Ананьїн, Кранч і Адлер). Із критерію (4.4) при  $b=const$  легко впливають нові варіанти, а саме: при  $c=-\lambda^4 < 0$  –  $h=sh \lambda x$ ,  $ch \lambda x$ ,  $\sin \lambda x$ ,  $\cos \lambda x$ ,  $e^{\lambda x}$ ; при  $c=4\lambda^4 > 0$  –  $h=sh \lambda x \sin \lambda x$ ,  $ch \lambda x \sin \lambda x$ ,  $sh \lambda x \cos \lambda x$ ,  $ch \lambda x \cos \lambda x$ ,  $e^{\lambda x} \sin \lambda x$ ,  $e^{\lambda x} \cos \lambda x$ . Крім цього виникає можливість утворити лінійні комбінації виду  $h=Ash \lambda x + Bch \lambda x + C \sin \lambda x + D \cos \lambda x + Qe^{\lambda x}$ ; та  $h=sh \lambda x(A_1 \sin \lambda x + B_1 \cos \lambda x) + ch \lambda x(D_1 \sin \lambda x + C_1 \cos \lambda x) + e^{\lambda x}(Q_1 \sin \lambda x + G_1 \cos \lambda x)$ , де  $\lambda$ ,  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$ ,  $Q_i$ ,  $G$  – довільні сталі. Як приклад, наведено загальний розв'язок задачі при  $h=h_0 e^{\lambda x}$ , виражений в функціях Бесселя. Шляхом поєднання методу оберненої функції з процедурою взаємного перетворення рівнянь про коливання балок змінної ширини та змінної товщини одержано розв'язок в елементарних функціях для нового випадку  $h=h_0 x^4$  при  $b=const$ , який має вигляд  $W=\{x^2[x^4(x^2(F'))']\}'/x^5$ , де  $F=Asin kx^{1+} + Bcos kx^{1+} + Csh kx^{1+} + Dch kx^{1+}$ .

Розглянуто задачу про осесиметричні коливання замкненої кругової циліндричної оболонки зі змінною товщиною стінки та показано, що на основі математичної аналогії вона зводиться до задачі про коливання балки змінної товщини, розглянутої вище.

Досліджено задачу про згинні осесиметричні коливання круглої пластинки змінної товщини  $H(x)$  ( $x$  – змінний радіус), в результаті чого наведено схему побудови аналітичних розв'язків, виходячи з критерію (3.15) та приклади відомих і деяких, напевно, нових розв'язків для  $H \approx H_0 x^\alpha$  при різних значеннях коефіцієнта Пуассона  $\nu$ . Відомі, наприклад, розв'язки для  $H=x(\nu=1/3)$  – Х.Конвей, Д.Ейрі;  $H=x^{2/3}(\nu=1/9)$  – Х.Конвей;  $H=x^{6/7}(\nu=5/21)$  – Д.Ейрі. Наведено розв'язки для випадків не встановленого нами авторства  $H=x^3(\nu=1/9)$ ,  $H=x^{11/4}$ ,  $H=x^{3/4}(\nu=1/9)$ . Запропоновано закон змінення товщини в вигляді  $H=ax^2+\beta x+\gamma$ , при якому реалізується метод факторизації на основі рівняння (3.15). Показано, що розв'язки відповідних рівнянь в цьому випадку можливо одержати на основі використання точних розв'язків, встановлених методом циклічних перетворень для рівнянь другого порядку, оскільки вони можуть містити в собі довільну кількість варійованих незалежних сталих.

Наведено ряд різнотипних прикладів нових точних розв'язків задач, що не відносяться до розглянутих вище задач про власні значення, – про осесиметричне деформування оболонки, про згин круглої пластинки змінної товщини, про осесиметричний розтяг диска змінної товщини в полі відцентрових сил, – чим додатково підтверджено фундаментальність розроблених методів розв'язку.

З метою показу застосування запропонованих методів в задачах оптимізації коливальних систем або наближеного їх розрахунку на основі оптимального вибору апроксимуючих функцій, що описують геометрію досліджуваного об'єкту, також наведено деякі приклади. За допомогою модифікованого методу циклічних перетворень проведено оптимізацію акустичного концентратора повздожних (крутильних) переміщень по масі (довжині), підсиленню та частоті власних коливань. На рис. 3 для порівняння в масштабі наведено ескізи еквівалентних по підсиленню і резонансній частоті сталевих концентраторів зі співпадаючими приєднувальними розмірами  $D$  і  $d$ , але таких, що відрізняються по масі та повздожнім розмірам. При допомозі методу циклічних перетворень одержано наближений розв'язок задачі про повздожні коливання експоненціального стержня з похибкою визначення двох перших частот 1,6% та 0,12%, для чого використовувалась апроксимуюча функція виду (4.3), графіки якої показані на рис. 2. Встановлено при допомозі методу оберненої функції наближений розв'язок задачі про крутильні коливання диска з товщиною  $x^{-3}e^{-x^2}$ , похибка визначення перших двох частот якого

склала 0,66% та 0,28% порівняно з відомими для цієї задачі результатами Л. Коллатца, що одержані методом нескінчених рядів.

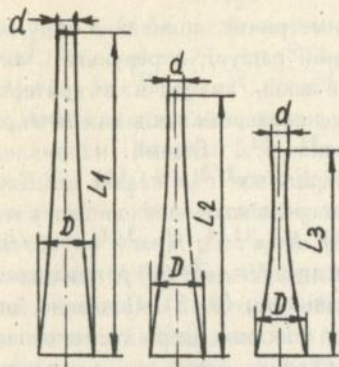


Рис. 3. Ескізи сталевих концентраторів, що еквівалентні по підсиленню та резонансній частоті: частота 20 кГц;  $d=6$  мм;  $D=20$  мм;  $L_1=127$  мм,  $L_2=102$  мм,  $L_3=80$  мм.

розробленим експериментальним методикам. Виконане дослідження широкого обсягу різнотипних матеріалів в залежності від впливу різних умов і факторів – виду напруженого стану, частоти навантаження, шерохатості поверхні, внутрішньої структури, сортаменту, виду покриття та ін. – підтвердило ефективність використаних експериментальних методів, їх придатність для проведення масових випробувань не тільки в спеціалізованих, але і в заводських лабораторіях на серійному обладнанні.

При дослідженні опору втомі листових матеріалів в умовах плоского напруженого стану при  $\sigma_2/\sigma_1 > 0$  використано методику по схемі рис. 1е, а при  $\sigma_2/\sigma_1 = -1$  – методику з використанням стержньових зразків, підданих циклічному крученню. Раніше було випробувано при високій частоті (біля 10 кГц) алюмінієвий АМг6-БМ та титановий ОТ4-1 сплави, латунь Л62, сталь 10, а потім – високоміцну сталь ВНС-25, а також при крученні високоміцні – титановий сплав ВТЗ-1 і сталь ВНС-25. Результати випробувань дозволили експериментальним шляхом встановити залежність втоми від значень  $\sigma_2/\sigma_1$ , для якої характерне суттєве пониження витривалості в умовах, що близькі до  $\sigma_2/\sigma_1 \approx 1$  (рис. 4). Запропоновано аналітичний критерій граничного стану для випадку  $\sigma_2/\sigma_1 > 0$  в формі

$$\sigma_{\cdot 1} = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2) / (\sigma_1 - \nu \sigma_2), \quad (5.1)$$

На закінчення розв'язано задачу про поперечні коливання призматичної балки з радіусними переходами (галтелями), для чого використано апроксимуючу функцію  $b = b_0 e^{ax^3}$ , що дозволяє реалізацію методу факторизації для рівняння (3.12). Одержані в результаті цього два рівняння другого порядку було розв'язано при допомозі методу циклічних перетворень з використанням функції типу (4.3) як змінного коефіцієнту. На основі цього було обчислено переміщення та напруження. Виходячи з аналізу та оцінки похибки розрахунків при знехтуванні галтелями, подано рекомендації по використанню такої балки при згинних втомних випробуваннях.

В п'ятому розділі викладено результати експериментальних досліджень по втомі матеріалів, що одержані завдяки

що витікає із співвідношення, яке відображає деяку питому роботу, виконану еквівалентним напруженням  $\sigma_{екв} = \sigma_1$  на переміщенні  $\xi_{max} = (\sigma_1 - \nu\sigma_2)/E$ . Передумови виводу залежності (5.1) базуються на поєднанні відомої енергетичної концепції, побудованої на припущенні про відсутність практичного впливу на руйнування енергії зміни об'єму, і того встановленого при наших експериментах факту, що втомні тріщини у всіх без винятку досліджених матеріалів при  $\sigma_2/\sigma_1 \geq 0$  розташовані перпендикулярно напрямку дії більшого із двох головних напружень  $\sigma_1$ , тобто напрямку максимального по абсолютній величині деформування.

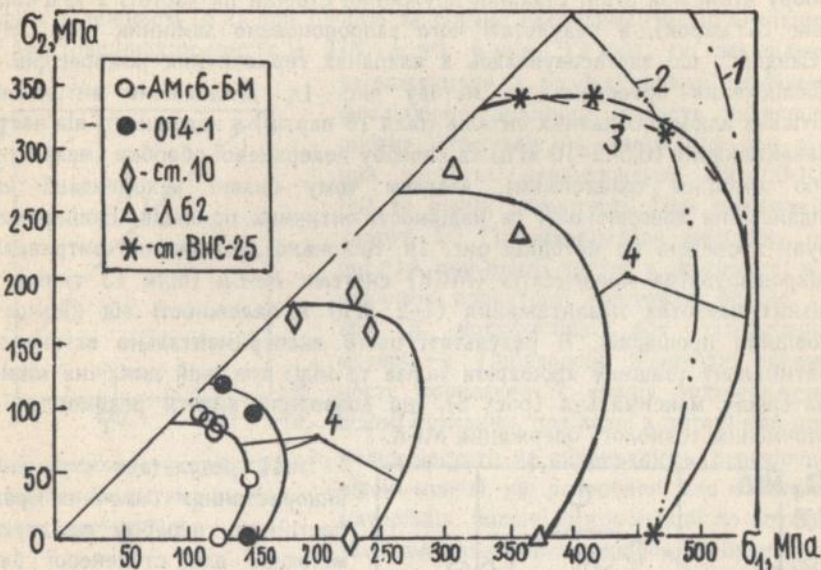


Рис. 4. Порівняння експериментальних результатів втомних випробувань з енергетичним критерієм (крива 1), критерієм Писаренка-Лебедева (криві 2 і 3 при різних значеннях відповідних параметрів) та співвідношенням (5.1) (криві 4).

На рис. 4 подано експериментальні результати і побудовані по співвідношенню (5.1) граничні криві 4, що задовільно узгоджується між собою. Там же для порівняння зображено граничні криві 2, 3 критерію Писаренка-Лебедева та енергетичного критерію енергії формоутворення. Як видно, класичний випадок (крива 1) в області  $\sigma_2/\sigma_1 \approx 0,7+1,0$  не відображає реальної картини втомної міцності, в той же час узагальненим критерієм Писаренка-Лебедева при належному виборі наявних в ньому коефіцієнтів

(крива 3) можна досягти задовільних результатів. Критерій (5.1) зручний тим, що не містить в собі неозначених коефіцієнтів і тому може бути безпосередньо використаний для оцінки витривалості по меншій мірі в випадку  $\sigma_2/\sigma_1 > 0$  при підвищених частотах, якщо відомо опір втомі при  $\sigma_2/\sigma_1 = 0$ , який знайдено, наприклад, при циклічному згині балочних зразків. Подальші експериментальні дані, що одержані при високочастотному згині, крім демонстраційного, мають також самостійне прикладне значення в тому числі із точки зору можливості розрахункової оцінки їх витривалості при плоскому напруженому стані. Одержано характеристики опору втомі при згині сталюї пружинної стрічки на частоті 2 кГц (більш ніж 15 марок), в результаті чого запропоновано заміник сталі фірми "Сандвік", що застосовувалась в клапанах герметичних компресорів. Це дослідження проведено по методу рис. 1д. Досліджено витривалість літєвих алюмосилікатних ситалів (біля 16 партій) в залежності від частоти навантаження (0,5–2–10 кГц) та способу поверхневої обробки (механічного або хімічним травленням), завдяки чому видані рекомендації щодо підвищення довговічності та надійності оптичних приладів. Експерименти були проведені по методиці рис. 1в. Виконано дослідження витривалості мікрошаруватих конденсатів (МСК) системи Fe-Cu (біля 13 типів) при різних частотах навантаження (1–2 кГц) в залежності від кількості і товщини прошарків. В результаті цього експериментально встановлено оптимальну товщину прошарків заліза та міді, при якій циклічна міцність матеріалу максимальна (рис. 5), що дозволило видати рекомендації по уточненню технології одержання МСК.

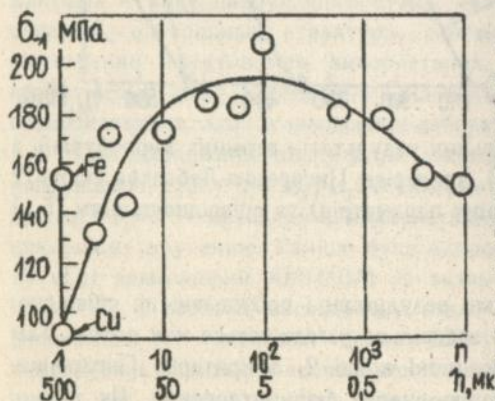


Рис. 5. Експериментальна залежність циклічної міцності  $\sigma_1$  конденсатів Fe/Cu від кількості  $n$  та товщини  $h$  прошарків.

Ці результати отримано з використанням балочних зразків постійного перерізу по варіанту методики для ступеневої балки (рис. 1в), виготовленої із різно-рідних матеріалів. Визначено характеристики опору втомі для біметалів сталь-бронза (біля 11 груп) по методиці рис. 1в на частоті навантаження 400 Гц, завдяки чому видано практичні рекомендації, що використані при розробці технології наплавки бронзи на деталі гідроприводу. По цій же методиці одержано характеристики опору втомі технічного титану ВТ1-0 з покрит-

тями на основі нітрідів титану і хрому. Для оцінки опору втомі в залежності від товщини тонкоплівкових покриттів запропоновано розрахункову залежність в формі

$$\sigma_{\cdot 1} = \sigma_{\cdot 10} (h_0 + Ch_n) / (h_0 + 6h_n), \quad (5.2)$$

де  $\sigma_{\cdot 10}$  – опір втомі основи;  $h_0, h_n$  – товщини основи і покриття відповідно;  $C$  – коефіцієнт, що відображує невідомі інтегральні властивості покриття та перехідної зони, який визначається експериментально. Співвідношення (5.2) отримано, виходячі із моделі згину балки з покриттям, що побудована методом еквівалентних жорсткостей при припущенні абсолютно жорсткого зв'язку основи з покриттям, причому  $h_0 \gg h_n$ . На рис. 6 зображено частину графіка залежності (5.2) при  $C=3,08$  та подано експериментальні значення  $\sigma_{\cdot 1}$  при товщинах покриття із  $TiN - h_n=0; 6 \text{ мкм}; 12 \text{ мкм}$ , які задовільно

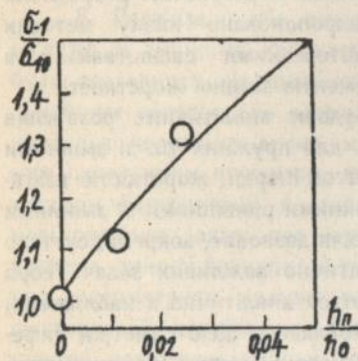


Рис. 6. Залежність опору втомі  $\sigma_{\cdot 1}$  технічного титану від товщини покриття  $TiN$ .

узгоджуються з розрахунковим графіком. Досліджено циклічну міцність високопористих матеріалів на основі міді при різних частотах навантаження ( $50-300-10^4$  Гц) та різній пористості. При понижений частоті 50 Гц використано методику по рис. 16, при решті частот в залежності від величини пористості – методику по рис. 1в або її модифікацію для різномірних матеріалів. Побудовано відповідні залежності, проведено їх аналіз, підтверджено відомі уявлення, пов'язані з питаннями про вплив частоти на витривалість, перевірено відомі моделі, що розроблені для пористих матеріалів, видано рекомендації по оптимізації цільових конструкцій із високопористих матеріалів по параметрам довговічності та надійності.

Наведені в розділі обширні експериментальні дані – більш як 110 кривих витривалості, що побудовані в основному на базі  $10^8$  циклів навантаження, крім наочного підтвердження дієздатності та ефективності розроблених методик свідчать, зокрема, про перевагу височастотних методів перед традиційними, при яких одержання в реальні строки подібної великої кількості експериментальної інформації уявляється малоймовірним.

В кінці кожного розділу наведено висновки, що узагальнюють одержані результати, а в кінці дисертації – загальні висновки по роботі, а в додатку – відомості про випроодження експериментальних результатів.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

1. Виконано дослідження комплексу задач і супутніх питань, що відносяться до повздовжніх або крутильних коливань стержнів, поперечних коливань балок і пластинок з точки зору використання особливостей їх деформування для розробки, розвитку, уточнення, підвищення вірогідності або обґрунтування резонансних методів втомних випробувань. Коливання пружних елементів в даному випадку розглядаються в межах відомих досягнень теорії та аналітичних методів розрахунку, які відносяться в основному та передусім до задач для об'єктів незмінної жорсткості або до задач, що в підсумку зводяться до цих останніх. В результаті розроблено окремі питання загального характеру, запропоновано низку методик втомних випробувань, захищених 7-а авторськими свідоцтвами, та поставлено питання розрахунку пружних елементів змінної жорсткості.

2. Розроблено комплекс методів побудови аналітичних розв'язків задач теорії коливань, стійкості, згину та ін. для пружних тіл зі змінними характеристиками (модулем пружності, моментом інерції, жорсткістю взагалі), які математично моделюються диференційними рівняннями зі змінними коефіцієнтами. Алгоритм реалізації цих методів дозволяє, зокрема, суттєво розширити кількість точних розв'язків практично важливих задач теорії коливань в тому числі і задач, які розв'язуються аналітично в наближеній постановці. В основу розроблених методів покладено ідею симетрій диференційних рівнянь, яку реалізовано для кожного з методів за допомогою різних спеціальним чином побудованих груп перетворень.

3. Запропоновано метод оберненої функції, відповідно до якого при певних умовах розв'язується задача зі змінними коефіцієнтами, які обернені до коефіцієнтів вихідної задачі.

4. Запропоновано метод лінійно незалежної функції та його модифікацію, якими при певних умовах розв'язується задача зі змінними коефіцієнтами; що пов'язані з коефіцієнтами вихідної задачі функціональною залежністю типу визначника Вронського. Модифікований метод відрізняється від свого аналогу тим, що при побудові необхідних груп перетворень вилучено процедуру інтегрування відповідних функцій.

5. Запропоновано метод циклічних перетворень та його модифікацію, що поєднує методи оберненої та лінійно незалежної функції, відповідно до якого розв'язується задача зі змінними коефіцієнтами, в яких міститься в окремих випадках довільна кількість незалежних сталих.

6. Встановлено широкі можливості цього методу, відповідно до якого при певних передумовах реалізується: довільне число випадків змінних коефіцієнтів, при наявності яких задача розв'язується в замкненому вигляді;

довільне число випадків точних розв'язків задач зі змінними характеристиками, що містять відповідно довільну кількість незалежних сталих; керування властивостями і майбутньою поведінкою об'єкту розрахунку при коливаннях шляхом незалежного підбору цих сталих на етапі проектування; наближений аналіз або розрахунок об'єктів з заданими змінними характеристиками шляхом їх апроксимації функціями, що дозволяють отримувати точні розв'язки відміченими методами.

7. Розвинуто та узагальнено підходи, що пов'язані з проблемою пониження порядку диференційних рівнянь методом факторизації, відповідно до яких: встановлено межі реалізації цього методу на основі знайдених аналітичних критеріїв; розширено межу застосування методу на основі його поєднання з методом оберненої функції та методом циклічних перетворень.

8. Розв'язано або визначено алгоритм розв'язку низки задач для об'єктів зі змінними характеристиками, випадки яких раніше неможливо було розглянути відомими аналітичними методами. При цьому: методом циклічних перетворень одержано нові розв'язки задач про повздовжні та крутильні коливання диска змінної товщини, про стійкість стержня зі змінним поперечним перерізом, про згинні коливання балки змінної ширини; методом факторизації, поєднаним з методом оберненої функції, одержано нові розв'язки задач про згинні коливання балки змінної жорсткості і, зокрема, змінної товщини, а також на основі математичної аналогії – задачі про осесиметричні коливання оболонки змінної товщини та ін.; методом факторизації досліджено задачу про згинні осесиметричні коливання круглї пластинки змінної товщини; одержано нові точні розв'язки для задач статичного деформування – згин пластинки змінної товщини, осесиметричне розтягнення диска в полі відцентрових сил, осесиметричне деформування оболонки.

9. Підтверджено ефективність запропонованих аналітичних методів також на окремих прикладах задач оптимізації або наближеного розрахунку коливальних систем. При цьому: виконано оптимізацію акустичного концентратора повздовжніх або крутильних переміщень по масі (довжині), підсиленню амплітуд переміщень та частоті власних коливань, для чого використано розв'язок в елементарних функціях, одержаний модифікованим методом циклічних перетворень; отримано при допомозі методу циклічних перетворень наближений розв'язок задачі про повздовжні коливання експоненціального стержня з похибкою визначення перших двох частот 1,6% та 0,12%; одержано при допомозі методу оберненої функції наближений розв'язок задачі про крутильні коливання диска змінної товщини спеціального виду з похибкою визначення перших двох частот 0,66% та 0,28% порівняно з результатами, отриманими для цієї ж задачі Л.Коллатцом при допомозі методу нескінченних рядів; розв'язано задачу про згинні коливання балки з

галтелями, приведено оцінку похибок її розрахунку в випадку знехтування галтелями.

10. Виконано експериментальне дослідження опору втомі низки різнотипних матеріалів в залежності від впливу різноманітних умов – виду напруженого стану, частоти навантаження, шерехатості поверхні, внутрішньої структури, сортаменту, виду покриття та ін., в результаті чого підтверджено дієздатність та практичну цінність розроблених експериментальних методів. При цьому одержано характеристики опору втомі при високочастотному згині: високоміцної сталі в умовах плоского напруженого стану при частоті 10 кГц в діапазоні співвідношення головних напружень  $\sigma_2/\sigma_1=0+-1$ , а також при  $\sigma_2/\sigma_1 \approx -1$ ; сталі стальної пружинної стрічки на частоті 2 кГц (біля 15 марок); літєвих алюмосилікатних оптичних ситалів (біля 16 партій) в залежності від частоти (0,5–2–10 кГц) та способу поверхневої обробки (механічного або хімічним травленням); мікросаруватих конденсованих матеріалів (МСК) системи Fe-Cu (біля 13 типів) при частотах 1–2 кГц в залежності від кількості та товщини прошарків; біметалів сталь-бронза при частоті 400 Гц (біля 14 груп); технічного титану ВТ1-0 з тонкоплівковими покриттями при частоті навантаження 10 кГц; високопористих матеріалів на основі міді в залежності від частоти навантаження (50–300–10<sup>4</sup> Гц) та пористості.

11. Встановлено або підтверджено експериментальні залежності втомі від деяких факторів: при плоскому напруженому стані підтверджено пониження опору втомі в умовах близьких до  $\sigma_2/\sigma_1 \approx 1$ ; для МСК встановлено підвищення циклічної міцності зі зменшенням товщини прошарків до деякого оптимального діапазону, в якому опір втомі максимальний; для титану встановлено підвищення опору втомі з ростом товщини тонкоплівкових покриттів до меж, зумовлених технологією їх одержання; для високопористих матеріалів підтверджено монотонне пониження їх циклічної міцності з підвищенням пористості.

12. Запропоновано аналітичні критеріальні залежності, що задовільно узгоджуються з одержаними при експериментах результатами, для випадків розрахунку або наближеної оцінки: опору втомі матеріалів при високочастотних симетричних циклах навантаження в умовах плоского напруженого стану при дії синфазних головних напружень одного знаку ( $\sigma_2/\sigma_1 > 0$ ); опору втомі матеріалів з тонкоплівковими покриттями при високочастотному циклічному згині.

Основні положення дисертації опубліковано в слідуючих роботах:

1. Трапезон А.Г. Расчет упругих элементов при резонансных усталостных испытаниях. – Киев: Наук. думка, 1983. – 96 с.

2. Трапезон А.Г. О частотах и формах колебаний свободной по контуру круглой пластинки с точечным закреплением // Пробл. прочности. – 1976. – № 8. – С. 100 – 105.

3. Трапезон А.Г. К методике испытаний на усталость тонколистовых материалов при плоском изгибе на высоких частотах нагружения // Пробл. прочности. – 1977. – № 3. – С. 38 – 41.

4. Писаренко Г.С., Трапезон А.Г. К анализу напряженного и деформированного состояния подверженной поперечным колебаниям круглой пластинки с точечной опорой // Пробл. прочности. – 1977. – № 8. – С. 3 – 7.

5. Трапезон А.Г. К анализу напряженного и деформированного состояния образцов для усталостных испытаний при плоском изгибе // Прочность материалов и элементов конструкций при звуковых и ультразвуковых частотах нагружения – Киев: Наук. думка, 1980. С. 369 – 374.

6. Трапезон А.Г. О собственных колебаниях и напряженном состоянии балки переменной ширины, изменяющейся по закону  $e^{ax^2}$  // Пробл. прочности. – 1980. – № 1. – С. 91 – 94.

7. Трапезон А.Г. Изгибные колебания балки переменной ширины, изменяющейся по параболе четвертого порядка // Пробл. прочности. – 1980. – № 9. – С. 110 – 112.

8. К анализу напряженного состояния ступенчатых образцов, применяемых при усталостных испытаниях на изгиб / В. А. Кузьменко, А. Г. Трапезон, Б. З. Крук, Н. Н. Письменный // Пробл. прочности. – 1980. – № 12. – С. 45 – 50.

9. Трапезон А.Г. К решению задачи о поперечных колебаниях балки переменной ширины // Пробл. прочности. – 1981. – № 2. – С. 117 – 120.

10. Трапезон А.Г., Письменный Н.Н. Методика усталостных испытаний материалов при резонансных изгибных колебаниях // Прочность материалов и элементов конструкций при звуковых и ультразвуковых частотах нагружения. – Киев: Наук. думка, 1983. – С. 287 – 294.

11. Исследование усталости ситалов при циклическом изгибе / Н. Н. Письменный, А. Г. Трапезон, Л. А. Петренко и др. // Там же. С. 46 – 52.

12. Трапезон А.Г., Луговской Ю.Ф. Методика усталостных испытаний материалов при крутильных колебаниях на высокой частоте нагружения // Прочность материалов и элементов конструкций при звуковых и ультразвуковых частотах нагружения: Материалы международного симпозиума. – Киев: Наук. думка, 1986. – С. 253 – 267.

13. Усталость высокопористых материалов на основе меди / В.В. Аполлонов, М.С. Грановский, А.М. Прохоров, А.Г. Косторнов, А.Г. Трапезон и др. // Там же. С. 16 – 20.

14. Трапезон А.Г., Луговской Ю.Ф. К методике усталостных испытаний при изгибе на образцах постоянного поперечного сечения // Пробл. прочности. – 1987. – № 2. – С. 40 – 44.

15. Механические свойства конденсированных материалов *Fe-Si* при циклическом нагружении / Б.А. Мовчан, Ю.Ф. Луговской, Н.И. Гречанюк, В.А. Кузьменко, Л.Н. Пушечникова, А.Г. Трапезон // Пробл. спец. электротехнологии. – 1987. – № 3. – С. 36 – 41.

16. Определение характеристик сопротивления усталости клапанной ленты герметичных компрессоров / В.А. Кузьменко, А.Г. Трапезон, Ю.Л. Сонкин и др. // Пробл. прочности. – 1987. – № 6. – С. 97 – 100.

17. Трапезон А.Г. К расчету продольных колебаний стержней // Пробл. прочности. – 1990. – № 2. – С. 120 – 122.

18. Трапезон А.Г. Метод и некоторые примеры получения новых замкнутых решений в задаче об устойчивости стержня // Пробл. прочности. – 1993. – № 5. – С. 87 – 96.

19. Трапезон А.Г. Об одном преобразовании и его свойствах в задаче о продольных колебаниях стержней // Пробл. прочности. – 1993. – № 10. – С. 71 – 77.

20. Трапезон А.Г., Ляшенко Б.А. О продольных колебаниях стержня с покрытием // Пробл. прочности. – 1994. – № 10. – С. 68 – 74.

21. Трапезон А.Г., Ляшенко Б.А., Рутковский А.В. О влиянии вакуумных покрытий на сопротивление усталости технического титана // Пробл. прочности. – 1995. – № 11. – С. 32 – 40.

22. Методические рекомендации МР91-84. Метод испытаний на усталость при высоких звуковых частотах поперечных колебаний образцов / В.А. Кузьменко, А.Г. Трапезон, Б.З. Крук, А.М. Сулима и др. М.: Госстандарт (ВНИИНМАШ), 1984. – 25 с.

23. А. с. 847154 СССР, МКИ<sup>4</sup> G 01 N 3/32. Способ испытания материалов на усталость при поперечном изгибе / В.А. Кузьменко, А.Г. Трапезон, Н.Н. Письменный. – Оpubл. 15.07.81. Бюл. № 26.

24. А. с. 859853 СССР, МКИ<sup>4</sup> G 01 N 1/00, G 01 N 3/32. Образец для усталостных испытаний на растяжение-сжатие и кручение / С.В. Гришаков, Ю.Ф. Луговской, А.Г. Трапезон, А.Д. Шевчук – Оpubл. 30.08.81. Бюл. № 32.

25. А. с. 1037139А СССР, МКИ<sup>4</sup> G 01 N 3/32. Способ испытания материала на сопротивление усталости / А.Г. Трапезон, Н.Н. Письменный. – Оpubл. 23.08.83. Бюл. № 31.

26. А. с. 1045069А СССР, МКИ<sup>4</sup> G 01 N 3/32. Образец для испытания материала на усталость / А.Г. Трапезон, Н.Н. Письменный. – Оpubл. 30.09.83. Бюл. № 36.

27. А. с. 1150045 СССР, МКИ<sup>4</sup> В 06 В 3/00 Ультразвуковой концентратор продольно-крутильных волн / А.Г. Трапезон, Н.Н. Письменный. – Оpubл. 15.04.85. Бюл. № 14.

28. А. с. 1231429 А1 СССР, МКИ<sup>4</sup> G 01 N 3/32. Способ испытаний материалов на усталость при поперечном изгибе / А.Г. Трапезон, Ю.Ф. Луговской. – Оpubл. 15.05.86. Бюл. № 18.

29. А. с. 1272166 А1 СССР, МКИ<sup>4</sup> G 01 N 3/32. Способ испытаний материалов на усталость при изгибе / В.А. Кузьменко, А.Г. Трапезон, Ю.Ф. Луговской. – Оpubл. 23.11.86. Бюл. № 43.

30. Сопротивление усталости и трещиностойкость сталей с наплавленным слоем оловянистой бронзы / А.Г. Трапезон, Н.Н. Письменный, Ю.Ф. Луговской, Ю.Л. Сонкин // Прочность материалов и элементов конструкций при звуковых и ультразвуковых частотах нагружения: Тезисы докладов международного симпозиума. – Киев: Наук. думка, 1984. – С. 43.

31. Трапезон А.Г. К расчету стержней переменной жесткости, применяемых при резонансных усталостных испытаниях // Прочность материалов и элементов конструкций при звуковых и ультразвуковых частотах нагружения: Тезисы докладов Всесоюзной конференции. – Киев: Наук. думка, 1988. – С. 111.

32. Трапезон А.Г., Кальпета О.А. Сопротивление усталости жаропрочной стали при одно- и двухосном изгибе // Там же. – С. 15.

33. Трапезон А.Г., Ляшенко Б.А., Рутковский А.В. Оптимизация вакуум-плазменной технологии нанесения покрытий по усталостной и контактно-усталостной прочности титановых сплавов // II Международный симпозиум по трибофатике. – М.: 15 - 17 октября 1996 г.: Тезисы докладов. – М.: ИПМАШ, 1996. – С. 65.

Трапезон О.Г. Методи розрахунку коливань механічних систем та їх використання при експериментальному вивченні втомних матеріалів. – Рукопис. Дисертація на здобуття вченого ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 05.02.09 – динаміка та міцність машин. – Інститут проблем міцності НАН України, Київ, 1997.

Захищається 40 наукових робіт та 7 авторських свідоцтв, в яких містяться результати розробки аналітичних методів розрахунку коливань, опис нових методик втомних випробувань, їх розрахунково-теоретичне та експериментальне обґрунтування. Викладені обширні результати розв'язку задач про коливання систем зі змінною жорсткістю, джерелом одержання яких стали нові точні методи. Узагальнено одержані дані по втомі, приведено низку експериментальних та розрахункових залежностей

Ключові слова: коливання, змінна жорсткість, аналітичні методи, втома матеріалів, експериментальні методики, характеристики витривалості.

Трапезон А.Г. Методы расчета колебаний механических систем и их использование при экспериментальном изучении усталости материалов. – Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 05.02.09 – динамика и прочность машин. – Институт проблем прочности НАН Украины, Киев, 1997.

Защищается 40 научных работ и 7 авторских свидетельств, в которых содержатся результаты разработки аналитических методов расчета колебаний, описание новых методик усталостных испытаний, их расчетно-теоретическое и экспериментальное обоснование. Изложены обширные результаты решения задач о колебаниях систем с переменной жесткостью, источником получения которых явились новые точные методы. Обобщены полученные данные по усталости, приведен ряд экспериментальных и расчетных зависимостей.

Ключевые слова: колебания, переменная жесткость, аналитические методы, усталость материалов, экспериментальные методики, характеристики выносливости.

Trapezon A.G. Methods for calculation of mechanical systems vibration and their use in experimental study of material fatigue. – Manuscript. Thesis for doctor's degree of technical sciences, speciality 05.02.09 – dynamics and strength of machines. – Institute for Problems of Strength of the National Academy of Science of Ukraine, Kyiv, 1997.

This thesis includes 40 scientific articles and 7 certificates of authorship which illustrate results of working out of analytical methods of vibration calculation, has description of new fatigue testing methods, their theoretical and experimental basis. It also includes numerous results of solving variable rigidity vibration systems problems. These results were deduced by using the new precise methods. Besides fatigue data were summarised and a number of experimental and analytical correlations are given here.

Key words: vibrations, variable rigidity, analytical methods, exact solution, fatigue of materials, experimental techniques, characteristics of endurance.





Підл. до друку 22.10.97. Формат 60x84/16. Папір офс.  
Офс. друк. Ум. друк. арк. 1,75. Ум. фарбо-відб. 1,87.  
Обл.-вид. арк. 1,88. Тираж 100 прим. Замовл. 176.

Дільниця оперативного друку ВНТІ ІПМіц. НАНУ  
252014, Київ-14, вул. Тимірязєвська, 2

434075

AB 38.756  
**AB 38.756**