НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Свердан Михайло Леонович

УДК 517.911

СТІЙКІСТЬ ІМПУЛЬСНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З ВИПАДКОВИМИ ЗБУРЕННЯМИ

01.01.02 - диференціальні рівняння

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

КИЇВ - 1997

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана в Чернівецькому державному університеті ім.Ю.Федьковича Міністерства освіти України.

Науковий консультант: габілітований доктор математики Латвійського університету, професор ЦАРКОВ Євген Федорович - директор Інституту математичної статистики факультету автоматики і обчислювальної техніки Ризького технічного університету.

Офіційні опоненти: академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор КОРОЛЮК Володимир Семенович - головний науковий співробітник Інституту математики НАН України;
доктор фіз.-мат. наук, професор ПЕРЕСТЮК Микола Олексійович - завідувач кафедри, декан факультету Київського національного університету ім.Тараса Шевченка;
доктор фіз.-мат. наук, професор СЛЮСАРЧУК Василь Юхимович - завідувач кафедри Української державної академії водного господарства.

Провідна установа: Одеський державний університет ім.І.Мечнікова Міністерства освіти України, кафедра оптимального керування і економічної кібернетики.

Захист відбудеться "16" грудня 1997 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.66.02 при Інституті математики НАН України за адресою: 252601, Київ-4, вул.Терещенківська,3.
З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України за адресою: 252601, Київ-4, вул.Терещенківська,3.
Автореферат розіслано "11" листопада 1997 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Лучка А.Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. На більшість реальних динамічних систем діють постійні випадкові збурення. Ця обставина дуже ускладнює можливості кількісного аналізу моделей та використання методів математичного моделювання на ЕОМ. Особливо складним у даній ситуації є дослідження асимптотики, бо присутність випадкових параметрів при моделюванні вимагає багатократного розігрування моделей на великих часових інтервалах з великою кількістю звертань до датчика випадкових чисел. Тому для аналізу стохастичних динамічних систем основну роль відіграють якісні методи, а саме: другий метод Ляпунова, граничні теореми теорії ймовірностей, асимптотичні методи нелінійної теорії коливань тощо. Якщо дослідження дискретних динамічних систем започатковано ще в працях А.Пуанкаре, то дискретні динамічні системи з випадковими параметрами у сучасній математичній літературі з'явилися порівняно недавно. З найбільш відомих монографій слід назвати роботу М.Вазана "Стохастическая аппроксимация" (М.:Мир, 1972.- 295 с.). У цій роботі описано популярні в інженерній практиці ітераційні методи розв'язання алгебраїчних рівнянь при наявності випадкових збурень. Найбільш змістовною є монографія М.Б.Невельсона, Р.З.Хасьмінського "Стохастическая аппроксимация и реккурентное оценивание" (М.:Наука, 1972.- 304 с.), в якій автори дуже вдало використали ідеї другого методу Ляпунова для аналізу асимптотики ітераційних стохастичних процедур. Говорячи про застосування другого методу Ляпунова до дискретних стохастичних систем, необхідно назвати монографію А.Халаная, Д.Векслера "Качественная теория импульсных систем" (М.:Мир, 1971.- 307с.).

Більш глибоке застосування граничних теорем теорії ймовірностей до аналізу асимптотики розв'язків різницевих рівнянь з випадковими параметрами проведено у монографії В.В.Анісімова "Случайные процессы с дискретной компонентой" (К.:Наук. думка, 1988.- 242с.).

У останні десятиріччя питанням стійкості різницевих рівнянь присвячені дослідження сучасних математиків О.М.Шарковського, Ю.Л.Майстренка, С.М.Шиманова, В.В.Калашникова, В.Ю.Слюсарчука, В.С.Рябенького, А.Ф.Філіпова, В.Б.Демідовича, Я.Н.Ройтенберга, В.М.Старжинського, Є.Ф.Царкова, В.А.Якубовича, В.А.Янсона та інших. Різницеві рівняння з випадковими збуреннями вінерівського, марковського або напівмарковського типів вивчалися у роботах В.С.Королюка, В.В.Анісімова, З.П.Анісімової, В.М.Хижняк-Царкової, Є.Ф.Царкова, М.Б.Невельсона, Д.А.Калниня, В.М.Константинова, Ан.А.Матвєєва, О.І.Жданка, Д.Г.Коренівського, Д.Я.Хусаїнова, Д.А.Еглiте, Г.С.Юдаєва та інших.

Однією з математичних моделей описання імпульсної взаємодії об'єктів є система диференціальних рівнянь, права частина якої є узагальнена функція. Однак у застосуваннях, як правило, моменти імпульсної взаємодії розділені за часом, і тоді можна використати методику монографії А.М.Самойленка, М.О.Перестюка "Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием" (К.:Вища школа, 1987.- 287с.).

Одним з найбільш розповсюджених методів дослідження динамічних систем є метод усереднення за часом. У випадку імпульсних систем принцип усереднення обгрунтовано у вищезгаданій монографії А.М.Самойленка, М.О.Перестюка, а при випадкових збуреннях - у роботі А.М.Самойленка, О.М.Станжицького "О флуктуациях в схеме усреднения для дифференциальных уравнений со случайным импульсным воздействием" (Укр. мат. журн.- 1989.- 41,N5.- С.631-641) та В.В.Анісімова "Принцип усереднення для процесів, що перемикаються" (Теорія ймовірностей та математична статистика.- 1992.- N46.- С.1-13).

У дев'яності роки нашого сторіччя появилася велика кількість наукових праць стосовно імпульсних систем як детермінованих, так і стохастичних (з марковськими та напівмарковськими збуреннями) відомих математиків Ю.О.Митропольського, А.В.Скорохода, В.С.Королюка, М.М.Красовського, А.М.Самойленка, В.В.Анісімова, О.М.Перестюка, Р.Габасова, К.Г.Валеєва, Е.Джурі, Р.З.Хасьмінського, О.І.Клімушева, D.D.Bainova, G.S.Papanicolaou, G.L.Blankenship, A.Dishliev, D.Stoykov, H.J.Greenberg, V.Lakshmitkantham, D.D.Raino, Lin Xinzhi, Li Wu, R.Medina, N.I.Ronto, A.Tuzsou, L.Arnold, F.Ziegler, G.Shuleer, L.Martin, A.Brown, C.Peary, R.S.Bucy, L.Ionin, T.Morosan та інших.

Слід вказати на вагомі за ідеями та змістом в цьому напрямку наукові труди:

Королюк В.С., Свищук А.В. Полумарковские случайные эволюции.- К.:Наук. думка, 1992.- 256с.

Korolyuk V.S. Averaging and Stability of Dynamical Systems with Rapid Markov Switchings.- Univ. of Umea, 1991.- 15p.

Korolyuk V.S. Singular perturbed stochastic systems // Укр. мат. журн.- 1997.- 49,N1.- С.25-35.

Korolyuk V.S., Korolyuk V.V. Stochastic Models of Systems.- Kluwer, 1997.

Королюк В.С. Устойчивость автономной динамической системы с бы-

стрыми марковскими переключениями // Укр. мат. журн.- 1991.- 42,N9.- С.1176-1181.

Тому актуальною проблемою є розробка другого методу Ляпунова дослідження стійкості диференціальних рівнянь з імпульсними марковськими перемиканнями, методу усереднення та стійкості імпульсних систем з марковськими перемиканнями; стійкості розв'язків різницевих рівнянь з випадковими параметрами, а також застосування теоретичних положень у стохастичному моделюванні складних динамічних систем.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційні дослідження пов'язані безпосередньо з науковими темами:

- Асимптотичні та чисельно-аналітичні методи дослідження коливань та стійкості нелінійних систем (01820090796; 1981-1985рр.),

- Асимптотичні та чисельно-аналітичні методи дослідження нелінійних диференціальних та диференціально-функціональних рівнянь (01860060694; 1986-1991рр.),

і отримали гранти:

- Latvian Scientistic Council Grant (N 93.0639; N 96.0540),

- Методи теорії операторів і еволюційні детерміновані та стохастичні системи (0194U028024; 1994-1996 рр.).

Мета і задачі дослідження полягають у:

1) розробці другого методу Ляпунова для дослідження різницевих рівнянь з марковськими параметрами;

2) побудові асимптотичного розкладу квадратичних функцій Ляпунова для лінійних різницевих рівнянь при наявності малих марковських збурень в коефіцієнтах;

3) отриманні необхідних і достатніх умов асимптотичної L_q^p -стійкості $(p \geq q)$, а також рівномірної асимптотичної L_q^p -стійкості розв'язків лінійних різницевих рівнянь з випадковими коефіцієнтами;

4) розробці другого методу Ляпунова для дослідження диференціальних рівнянь під дією марковських імпульсних збурень;

5) побудові асимптотичного розкладу квадратичних функціоналів для лінійних імпульсних динамічних систем з марковськими збуреннями;

6) доведенні закону великих чисел типу методу усереднення та граничних теорем дифузійного типу для імпульсних марковських динамічних систем;

7) застосуванні одержаних теоретичних результатів до розв'язання конкретних задач:

- дослідження динаміки стохастичного осцилятора при наявності постійно діючих малих імпульсних марковських збурень;

- вивчення умов стабілізації коливання струни під дією імпульсних збурень;

- дослідження віброударних систем при випадкових коефіцієнтах поновлення швидкостей.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі особисто автором одержано такі нові результати:

- розроблено методику застосування другого методу Ляпунова для лінійних дискретних динамічних систем марковського типу;

- доведено теореми про стійкість майже скрізь, стійкість за лінійним наближенням, стійкість у середньому квадратичному для лінійних різницевих рівнянь з марковськими коефіцієнтами;

- побудовано розклад у ряд Лорана квадратичного функціоналу для одержання необхідних і достатніх умов стійкості у середньому квадратичному марковських лінійних дискретних динамічних систем;

- одержано необхідні та достатні умови стійкості у середньому квадратичному лінійних різницевих рівнянь (ЛРР) у просторі Гільберта;

- отримано необхідні та достатні умови асимптотичної L_q^p-стійкості $(p \geq q)$, а також рівномірної асимптотичної L_q^p-стійкості розв'язків ЛРР з випадковими збуреннями;

- введено оператор типу Ляпунова, за допомогою якого для імпульсних систем з марковськими параметрами обгрунтовано стійкість при постійно діючих збуреннях; зроблено аналіз стану рівноваги, проведено аналіз других моментів, одержано необхідні та достатні умови експоненціальної p-стійкості;

- доведено закон великих чисел типу методу усереднення для імпульсних марковських динамічних систем (ІМДС);

- доведено граничну теорему дифузійного типу для ІМДС;

- обгрунтовано можливість дослідження стійкості ІМДС за допомогою граничного усереднення або дифузійного рівняння;

- досліджена динаміка стохастичного осцилятора при наявності малих постійно діючих марковських збурень;

- одержано умови стабілізації у середньому квадратичному коливання струни під дією імпульсних збурень;

- одержано необхідні та достатні умови стійкості у середньому квадратичному віброударних систем при випадкових коефіцієнтах поновлення швидкостей.

Теоретичне та практичне значення одержаних результатів.
Теоретична цінність полягає у:
- обгрунтуванні стохастичного варіанту другого методу Ляпунова для дискретних та імпульсних динамічних систем марковського типу;
- доведенні можливості представлення у вигляді ряду типу Лорана квадратичних функцій Ляпунова, що дають необхідні та достатні умови стійкості у середньому квадратичному лінійних дискретних та імпульсних динамічних систем у критичному випадку;
- доведенні граничної теореми дифузійного типу для імпульсних динамічних систем марковського типу.

Практичну цінність результатів роботи засвідчено успішним застосуванням розробленої методики для аналізу динаміки стохастичного осцилятора з імпульсними випадковими збуреннями; для вивчення умов стійкості віброударних систем при випадкових коефіцієнтах поновлення швидкості, для одержання необхідних та достатніх умов стабілізації коливань струни при постійно діючих імпульсних незалежних збуреннях.

Особистий внесок здобувача. Наукові дослідження, представлені в дисертації, є результатом самостійної 25-річної роботи автора. Вони є узагальненням результатів, які одержані особисто автором або за участю співавторів. У монографії [1] "Устойчивость стохастических импульсных систем" (1994р.) автору належить розділ 2; з розділу 3 пункти 3.2, 3.3, 3.4, пункти 4.2 та 4.4 розділу 4, тобто 176 сторінок монографії. Автор брав безпосередню участь у постановках задач та обговоренні результатів робіт [15-17], [19], [26-28], а також оформляв вище перераховані статті та тези наукових конференцій. Наукові результати у вигляді теорем, лем і наслідків одержано у статтях [3-6], [12-13], [21-22], [24-25], [29], [32], [34-35].

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися на Першій українсько-скандінавській конференції "Стохастичні динамічні системи: теорія і застосування" (Ужгород, 30 вересня - 6 жовтня 1995р.), міжнародній математичній конференції, присвяченій пам'яті Ганса Гана (Чернівці, 10-15 жовтня 1994 р.), міжнародній математичній конференції, присвяченій пам'яті академіка Кравчука (Київ-Луцьк, 22-28 вересня 1992), республіканській конференції "Диференціальні та інтегральні рівняння" (Одеса, 1987р.), всесоюзному симпозіумі "Новые методы исследования шумов и вибраций и кибернетической диагностики машин и механизмов" (Каунас, 1970р.), Другій Всесоюзній конференції "Нелинейные колебания механических систем" (Горький, 1990р.), республіканських конференціях "Моделирование и исследование устойчивости процессов" (Київ, 1991-1997рр.), Других Боголюбовських читаннях (Київ, 1992р.), республіканському семінарі "Теорія ймовірностей і математична статистика" (керівник - академік НАН України Королюк В.С., 1996-1997 рр.), Латвійському ймовірнісному семінарі (керівник - габілітований доктор математики, професор Царков Є.Ф., 1992-1995рр.), семінарі "Стійкість, оптимізація та керування стохастичними системами" Чернівецького державного університету (керівник - доктор фіз.-мат. наук, професор Ясинський В.К., 1994-1997рр.); республіканському семінарі "Сучасні проблеми математики" (Чернівці, керівник - доктор фіз.- мат. наук, професор Ленюк М.П., 1995-1997 рр.).

Публікації. Результати дисертації опубліковані у одній монографії [1], 12 статтях у наукових журналах ([2-8],[13],[15-17],[19]), 9 статтях у збірниках наукових праць ([9-12],[18],[20-23]), 3 препринтах ([24-26]), 2 депонованих роботах ([27-28]), матеріалах і тезах наукових конференцій - 9 ([14],[29-36]).

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається із вступу, чотирьох розділів (з яких розділи 1, 2 та 3 носять суто теоретичний характер, а розділ 4 містить розв'язання важливих прикладних задач) та списку використаних джерел (160 найменувань). Загальний обсяг роботи складає 277 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У першому розділі вивчається стійкість розв'язків різницевих рівнянь з випадковими параметрами.

Пункт 1.1 містить аналіз збіжності стохастичних ітерацій. Об'єктом дослідження є різницеве рівняння вигляду

$$x_{n+1} = f_{n+1}(x_n, \xi_{n+1}), \tag{1}$$

де $\{\xi_n, n \in \mathbf{N}\}$ - послідовність незалежних випадкових величин зі значеннями у $(\mathbf{Y}, \sum_{\mathbf{Y}})$; $\{f_n, n \in \mathbf{N}\}$ - послідовність $\sum_{\mathbf{X}} \times \sum_{\mathbf{Y}}$ - вимірних відображень простору $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ у $\mathbf{X}$. Якщо $x_n = x$, то співвідношення

$$x_{n+1} = f_{n+1}(x_n, \xi_{n+1}) \equiv X_n^{n+1} x \tag{2}$$

визначає сім'ю операторів$X_k^n \equiv X_{n-1}^n X_{n-2}^{n-1} \cdots X_k^{k+1}, \quad n > k \geq 0$. Довизначимо цю сім'ю операторами $X_n^n = I, \quad n \geq 0$, де I - тотожне відображення $\mathbf{X}$ у $\mathbf{X}$. Ясно, що при всіх $n \geq k \geq s \geq 0$ виконується рівність $X_k^n X_s^k \equiv X_s^n$. Цю рівність будемо називати еволюційною властивістю. Визначимо при

$n \geq k > 0$ σ-алгебру $\mathfrak{F}_k^n$, відносно якої є вимірними випадкові величини $\xi_k, \xi_{k+1}, ..., \xi_n$.

Лема 1.1.1. Нехай $\mathbf{X}$ - сепарабельний метричний простір, $v(x, \omega)$ - $\sum_{\mathbf{Y}} \times \mathfrak{F}$ - вимірне відображення $\mathbf{X} \times \Omega$ у $\mathbf{R}_+$, яке неперервне по x майже напевно та має математичне сподівання при всіх $x \in \mathbf{X}$. Якщо ξ є $\mathfrak{F}$-вимірна випадкова величина зі значеннями у $\mathbf{X}$ та існує $\mathbf{E}\{v(\xi(\omega), \omega)\}$, то

$$\mathbf{E}\{v(\xi(\omega), \omega)|\mathfrak{F}\} = \mathbf{E}\{v(x, \omega)\}|_{x=\xi(\omega)}. \tag{3}$$

Для довільного набору випадкових величин $\eta_1, ..., \eta_k$ позначимо через $\mathfrak{N}(\eta_1, ..., \eta_k)$ мінімальну σ-алгебру, відносно якої вимірні ці величини, та нехай $\mathfrak{F}_k^n \equiv \mathfrak{N}(\xi_k, \xi_{k+1}, ..., \xi_{k+n})$.

Теорема 1.1.1. Якщо $\mathbf{X}$ - сепарабельний метричний простір, $f_n(x, \xi_n)$ неперервні майже напевно по x при всіх $n \in \mathbf{N}$, випадкові величини $\{\xi_n \equiv \xi_n(\omega)\}$ незалежні між собою, то рівність $P(k, x, n, A) \equiv \mathbf{P}(X_k^n x \in A)$ визначає перехідну функцію ланцюга Маркова на $(\mathbf{X}, \sum_{\mathbf{X}})$.

Нехай $\{g(n, x), n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{X}\}$ - послідовність скалярних неперервних функцій на $\mathbf{X}$. Використовуючи (1), визначимо оператор

$$(Lg)(n, x) = \mathbf{E}\{g(n+1, X_n^{n+1} x)\} - g(n, x) =$$

$$= \int_{\mathbf{X}} P(n, x, n+1, dy) g(n+1, y) - g(n, x), \tag{4}$$

якщо права частина існує при всіх $x \in \mathbf{X}$ та $n \geq 0$. Оператор L назвемо дискретним оператором Ляпунова для (1) та позначимо його область визначення через $\mathfrak{D}(L)$.

Теорема 1.1.3. Якщо математичне сподівання існує, то при всіх $n \geq n_0$

$$\mathbf{E}\{g(\tau_G(t+1), X_{n_0}^{\tau_G(t+1)} x_0)\} = \mathbf{E}\{g(n_0, x_0)\} + \mathbf{E}\{\sum_{k=n_0}^{\tau_G(n)} (Lg)(k, X_{n_0}^k x_0)\}, \tag{5}$$

де $\tau_G(t)$ - момент першого виходу розв'язку (1) з області $G \subset \sum_{\mathbf{X}}$.

Наслідок 1.1.1. Якщо $g(n, x) \geq 0$ та $(Lg)(n, x) \leq 0$ при всіх $n \geq n_0$ і $x \in G$, то існує математичне сподівання $\mathbf{E}\{g(n_0, x_0)\}$, то $\{g(\tau_G(n), X_{n_0}^{\tau_G(n+1)} x_0), \mathfrak{N}^n\}$ - невід'ємний супермартингал.

Вищеописана конструкція невід'ємних супермартингалів дозволила отримати зручні для застосувань критерії збіжності рекурентних процедур вигляду (1).

У пункті 1.2 досліджується рівняння (1) у $\mathbf{R}^m$, причому припускається виконання умови $f_n(0, y) \equiv 0$ для всіх $n \in \mathbf{Z}$.

Ясно, що рівняння (1) має тривіальний розв'язок $x_n \equiv 0$. Вивчається питання про поведінку розв'язків (1), які починаються в деякому околі нуля простору $\mathbf{R}^m$.

Тривіальний розв'язок $x_n \equiv 0$ рівняння (1) називається:

- p-стійким (при деякому $p > 0$), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $x \in U \equiv \{x \in \mathbf{R}^m \,|\, |x| < \delta\}$ і $n \geq s \geq 0$ виконується нерівність

$$\mathbf{E}\{|X_s^n x|^p\} < \varepsilon;$$

- стійким за ймовірністю, якщо для довільних $\varepsilon > 0, \gamma > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $x \in U_\delta$ і $n \geq s \geq 0$ виконується нерівність

$$\mathbf{P}\{|X_s^n x| \geq \varepsilon\} < \gamma;$$

- майже напевно (з ймовірністю одиниця) стійким, якщо для довільних $\varepsilon > 0, \gamma > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $x \in U_\delta$ і $n \geq s \geq 0$ виконується нерівність

$$\mathbf{P}\{\sup_{k \geq n} |X_s^k x| \geq \varepsilon\} < \gamma;$$

- стійким в цілому в розумінні попередніх означень, якщо вказані вище нерівності виконуються для всіх $x \in \mathbf{R}^m$, починаючи з деякого $n = n(x, \varepsilon, \gamma)$;

- асимптотично стійким в розумінні попередніх означень, якщо він стійкий і існує $\delta_1 > 0$ таке, що ліві частини приведених нерівностей збігаються до нуля при $n \to \infty$ для всіх $x \in U_\delta$;

- експоненціально p-стійким, якщо існують $M > 0, \gamma > 0$ такі, що для всіх $t \geq s \geq 0$ виконується нерівність

$$\mathbf{E}\{|X_s^n x|^p\} \leq M|x|^p e^{-\gamma(t-s)};$$

- асимптотично стохастично стійким, якщо він стійкий майже напевно і для довільного $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що для всіх $x \in U_\delta$ і $s \geq 0$ виконується нерівність

$$\mathbf{P}\{\lim_{t \to +\infty} X_s^t x = 0\} \geq 1 - \varepsilon.$$

Стійкість в тому чи іншому розумінні при $p = 2$ називається стійкістю в середньому квадратичному.

Зауважимо також, що із p-стійкості випливає αp-стійкість для довільного $\alpha \in (0, 1]$, оскільки

$$\mathbf{E}\{|X_s^n x|^p\} \geq (\mathbf{E}\{|X_s^n x|^{\alpha p}\})^{1/\alpha}.$$

Теорема 1.2.1. Якщо існує функція Ляпунова $g(n, x)$ та число $N > 0$ такі, що при всіх $n \geq N$ і $x \in \mathbf{R}^m$ виконується умова

$$(Lg)(n, x) \leq 0, \tag{6}$$

то тривіальний розв'язок (1) стійкий майже напевно.

Припустимо, що різницеве рівняння у $\mathbf{R}^m$ має вигляд

$$x_{n+1} = A(\xi_{n+1})x_n, \tag{7}$$

де $\{\xi_n\}$ - послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин зі значеннями у метричному просторі $\mathbf{Y}$, $A(y)$ - неперервна по $y \in \mathbf{Y}$ матрична функція, причому $\sup\limits_{y \in \mathbf{Y}} \|A(y)\| = a < \infty$.

Теорема 1.2.2. Якщо тривіальний розв'язок (7) стійкий майже напевно, то він p-стійкий при всіх досить малих $p > 0$.

Теорема 1.2.3. Якщо тривіальний розв'язок (7) асимптотично p-стійкий, то він експоненціально p-стійкий.

Теорема 1.2.4. Якщо тривіальний розв'язок (7) асимптотично стійкий майже напевно, то існує функція Ляпунова $g(x)$ така, що

$$|x|^p \leq g(x) \leq \hat{\gamma}|x|^p,$$

$$(Lg)(x) \leq -cg(x),$$

$$g(x_1 + x_2) \leq g(x_1) + g(x_2)$$

для всіх $x, x_1, x_2 \in \mathbf{R}^m$ і досить малих $p > 0, \hat{\gamma} > 0, c \in (0, 1)$.

Нехай різницеве рівняння має вигляд

$$x_{n+1} = A(\xi_{n+1})x_n + a_n(\xi_{n+1}, x_n), \tag{8}$$

де $\{\xi_n, n \in \mathbf{N}\}$ - послідовність однаково розподілених незалежних випадкових величин зі значеннями у $\mathbf{Y}$; $x \in \mathbf{R}^m$; $\{a_n(\xi, x)\}$ - послідовність функцій на $\mathbf{Y} \times \mathbf{R}^m$, які задовольняють умови Ліпшица по x у кожній кулі U_r у формі

$$|a_n(\xi, x_1) - a_n(\xi, x_2)| \leq c_r b(\xi)|x_1 - x_2|, \tag{9}$$

причому $c_r \to 0$ при $r \to 0$. Рівняння (8) будемо називати рівнянням збуреного руху, а (7) - рівнянням лінійного наближення для (8).

Теорема 1.2.5. Нехай виконується умова Ліпшица (9), існують $\hat{p} > 0$ та $\beta > 0$ такі, що $\sup\limits_{r>0} c_r^{\hat{p}} \mathbf{E}\{|b(\xi_1)|^{\hat{p}}\} = \beta$ та при всіх $\xi \in \mathbf{Y}$ і $n \in \mathbf{N}$:

$a_n(\xi, 0) = 0$. Тоді при досить малому β з асимптотичної стійкості майже напевно тривіального розв'язку (7) випливає асимптотична стійкість майже напевно тривіального розв'язку (8).

Розглянемо лінійне різницеве рівняння вигляду

$$x_{n+1} = Ax_n + \xi_{n+1} B x_n, \tag{10}$$

де $\{\xi_n\}$ - послідовність однаково розподілених незалежних скалярних випадкових величин, для яких $\mathbf{E}\{\xi_1\} = 0, \mathbf{E}\{|\xi_1|^{p_0}\} < \infty$ при деякому $p_0 > 0$.

Теорема 1.2.6. Існування

$$g \in \mathbf{V}^p \equiv \{g \in \mathbf{R}^1 \quad | \quad c_1|x|^p \leq g(x) \leq c_2|x|^p, \quad c_1, c_2 > 0\}$$

при $p \in (0, p_0]$, для якої $-(L^{(10)}g) \in \mathbf{V}^p$, є необхідною і достатньою умовою експоненціальної p-стійкості тривіального розв'язку (10).

У пункті 1.3 вивчається стійкість у середньому квадратичному лінійних різницевих рівнянь з незалежними коефіцієнтами. Розглядається лінійне різницеве рівняння вигляду (10), де $x \in \mathbf{R}^m, \{\xi_n, n \in \mathbf{N}\}$ - послідовність скалярних однаково розподілених випадкових величин з $\mathbf{E}\{\xi_1\} = 0$, $\mathbf{E}\{\xi_1^2\} = 1$. Визначимо при $n \geq k \geq 0$ матриці

$$X_k^n = \begin{cases} (A + \xi_n B) \cdots (A + \xi_{k+1} B) & \text{при} \quad n > k, \\ I & \text{при} \quad n = k. \end{cases} \tag{11}$$

Ясно, що розв'язок (10) з початковими умовами $x_{n_0} = x$ має вигляд $\{X_{n_0}^n x, n \geq n_0\}$, $\mathfrak{F}_{n_0+1}^n$-вимірний та визначає перехідну ймовірність $P(n, x, C) \equiv \mathbf{P}(X_k^{n+k} x \in C)$ при всіх $n \geq 0, x \in \mathbf{R}^m$ та $C \in B^m$, де B^m- σ-алгебра борелевих множин з $\mathbf{R}^m$. У множині $m \times m$ дійсних матриць $\mathbf{M}(\mathbf{R})$ підмножину симетричних матриць позначимо через $\mathbf{V}$, а через $\mathbf{K} \subset \mathbf{V}$ - множину невід'ємно визначених матриць:

$$\mathbf{K} \equiv \{q \in \mathbf{V} \quad | \quad (qx, x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}^m\}.$$

Система різницевих рівнянь (10) визначає сім'ю операторів $\{T(n), n \geq 0\} \subset L(\mathbf{V})$ за допомогою рівностей:

$$(T(n)qx, x) \equiv \mathbf{E}\{(qX_k^{k+n}x, X_k^{k+n}x)\} \tag{12}$$

для будь-яких $k \geq 0, q \in \mathbf{V}, x \in \mathbf{R}^m$, причому $T(0) = I$.

Лема 1.3.1. При будь-якому $n \in \mathbf{N}$ оператор $T(n)$ залишає інваріантною множину $\mathbf{K}$.

Лема 1.3.2. При будь-яких $n \geq 0$ та $k \geq 0$ справедлива рівність
$$T(n+k) = T(n)T(k).$$

Теорема 1.3.1. Тривіальний розв'язок (10) експоненціально стійкий у середньому квадратичному тоді і тільки тоді, коли спектр оператора T лежить всередині кола $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$.

Визначимо оператор G за допомогою рівності
$$Gq = \sum_{k=0}^{\infty} T^k q \tag{13}$$
та будемо писати $q \in \mathfrak{D}(G)$, якщо цей ряд збігається для даного $q \in \mathbf{V}$.

Наслідок 1.3.1. Тривіальний розв'язок (10) експоненціально стійкий у середньому квадратичному тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $r \in \dot{\mathbf{K}} \equiv \{q \in V \mid (qx, x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}^m\}$ існує таке $q \in \mathbf{K}$, що $(T - I)q = -r$.

Теорема 1.3.3. Для того, щоб тривіальний розв'язок (10) був експоненціально стійкий у середньому квадратичному, необхідно й досить, щоб при будь-якому $a \in \mathbf{R}^m$ виконувалася нерівність
$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\{(X_0^n x, a)^2\} \leq c\mathbf{E}\{|x|^2\}|a|^2$$
для деякого $c > 0$ та всіх випадкових векторах x, які мають другий момент і не залежать від $\mathfrak{F}_0^\infty$.

Одержані результати у пункті 1.4 узагальнюються на випадок простору Гільберта.

У пункті 1.5 вивчається різницеве рівняння у формі
$$x_{n+1} = A(\xi_{n+1})x_n, \tag{14}$$
де $\{\xi_n, n \in \mathbf{N}\}$ - однорідний феллерівський ланцюг Маркова на метричному фазовому просторі $\mathbf{Y}$ з перехідною ймовірністю $P(y, B) \equiv \mathbf{P}(\xi_{n+1} \in B | \xi_n = y)$.

Позначимо через $\mathbf{Q}$ простір симетричних неперервних відображень простору $\mathbf{E}$ у $M_m(\mathbf{R})$. Для кожного $q \in \mathbf{Q}$ визначимо оператор $\mathbf{A}$ за допомогою рівності
$$(\mathbf{A}q)(y) \equiv \int\limits_{\mathbf{Y}} A^T(u)q(u)A(u)P(y, du). \tag{15}$$
Якщо $A(y)$ неперервна по y та $\mathbf{Y}$ - компакт, то $\mathbf{A} \in \mathbf{L}(\mathbf{Q})$.

Для рівнянь (14) при дослідженні стійкості у середньому квадратичному в якості функцій Ляпунова природньо взяти відображення $\mathbf{R}^m \times \mathbf{Y}$ у $\mathbf{R}_+$, які задовольняють нерівності

$$c_1|x|^2 \le g(x,y) \le c_2|x|^2$$

при всіх $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{Y}$ та деяких додатних c_1 і c_2. Ці умови задовольняють квадратичні форми $(q(y)x,x)$, де $\{q(y)\} = q$ є елемент із $\mathbf{Q}$, який задовольняє умову рівномірної додатності:

$$(q(y)x,x) \ge c_1|x|^2 \tag{16}$$

для всіх $x \in \mathbf{R}^m, y \in \mathbf{Y}$. Виділимо в $\mathbf{Q}$ множину $\hat{K}$ невід'ємно визначених матриць, тобто

$$\hat{K} = \{q \in \mathbf{Q} \quad | \quad (q(y)x,x) \ge 0, \forall y \in \mathbf{Y}, x \in \mathbf{R}^m\}.$$

Теорема 1.5.1. Для експоненціальної стійкості у середньому квадратичному тривіального розв'язку (14) необхідно й досить, щоб розв'язок рівняння Ляпунова

$$Lq = -I \tag{17}$$

належав множині $\hat{K}$.

Теорема 1.5.2. Тривіальний розв'язок (14) експоненціально стійкий у середньому квадратичному тоді й тільки тоді, коли для будь-якого $p \in \hat{\mathbf{K}} \equiv \{q \in Q \,|\, (q(y)x,x) > 0,\ \forall y \in \mathbf{Y}, x \in \mathbf{R}^m\}$ існує єдине $q \in \hat{\mathbf{K}}$ таке, що $Lq = -p$. Розглянуто також випадок малих збурень.

У пункті 1.6 вивчаються лінійні різницеві рівняння з випадковими коефіцієнтами

$$x_{n+1} = A_n(\omega)x_n, \tag{18}$$

$$x_n(\omega)|_{n=n_0} = x_{n_0}(\omega). \tag{19}$$

Досліджено тривіальний розв'язок системи (18) на асимптотичну L^p_q-стійкість ($p \ge q$) (у вигляді необхідних та достатніх умов), також одержано необхідні і достатні умови рівномірної асимптотичної L^p_q-стійкості.

Другий розділ присвячено розгляду питань стійкості диференціальних рівнянь при імпульсних збуреннях. У пункті 2.1 введено основні позначення.

Нехай $(\Omega, F, \mathbf{P})$ - ймовірнісний простір, $\{\xi(t), t \ge 0\}$ - феллерівський марковський процес зі значеннями у метричному просторі $\mathbf{Y}$, перехідною ймовірністю $P(s,y,t,\Gamma)$; $\{\eta_k, k \ge 0\}$ - феллерівський марковський ланцюг зі значеннями у метричному просторі $\mathbf{H}$ та ймовірністю переходу на k-му кроці $P_k(h, G)$.

Нехай задані:

1) вимірні за сукупністю змінних відображення $f : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ та $g : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbf{H} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, які задовольняють за останнім аргументом умову Ліпшица

$$|f(t, y, x_1) - f(t, y, x_2)| + |g(t, y, h, x_1) - \\ -g(t, y, h, x_2)| \leq \Lambda |x_1 - x_2| \tag{20}$$

і умову

$$\sup_{t \geq 0, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}} (|f(t, y, 0)| + |g(t, y, h, 0)|) = \alpha < \infty; \tag{21}$$

2) $S = \{t_n, n \in \mathbf{N}\}$ - монотонно зростаюча послідовність моментів часу, яка прямує до нескінченності;

3) число $t_0 \geq 0$ та вектор $x_0 \in \mathbf{R}^n$.

Вектор-функцію $\{x(t), t \geq 0\}$ назвемо розв'язком задачі Коші

$$x(t_0) = x_0 \tag{22}$$

для диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(t, \xi(t), x) \tag{23}$$

з імпульсними збуреннями

$$\Delta x|_{t_k} = g(t_k-, \xi(t_k-), \eta_k, x), \quad t_k \in S, \tag{24}$$

якщо для неї виконується (22) і якщо для будь-яких реалізацій марковського процесу $\{\xi(t)\}$ і марковського ланцюга $\{\eta_k\}$ виконуються рівності

$$x(t) = x(s) + \int_s^t f(\tau, \xi(\tau), x(\tau)) d\tau \tag{25}$$

для всіх $s \in (t_k, t_{k+1}), t \in (s, t_{k+1}), t_k > t_0$;

$$x(t_k) = x(t_k-) + g(t_k-, \xi(t_k-), \eta_k, x(t_k-)) \tag{26}$$

для будь-яких $t_k \geq t_0$ та $k \geq \inf\{m \in \mathbf{N} \quad | \quad t_m \geq t_0\}$.

Функція $\{x(t)\}$ у цьому означенні є неперервною справа.

Обмеження, накладені на S, g та f, забезпечують існування єдиного розв'язку (25),(26) для будь-яких $t_0 \geq 0, x_0 \in \mathbf{R}^n$ та заданих марковського процесу $\{\xi(t), t \geq t_0\}$ і марковського ланцюга $\{\eta_k, k \geq k_0\}$. Оскільки реалізації розподілів єдиним чином визначаються за початковими значеннями $\xi(t_0) = y$ і $\eta_{k_0} = h$, то ймовірнісні характеристики розв'язку можна однозначно визначити за початковими даними, і записати його у вигляді $x(t, t_0, y, h, x_0)$.

Позначимо через $P_k((y,h), \Gamma \times G)$ ймовірність переходу марковського ланцюга $\{\xi(t_k), \eta_k\}$ на k-му кроці. Введемо функцію

$$P_k((y,h,x), \Gamma \times G \times C) \equiv \mathbf{P}_{y,h}^{t_k}(x(t_{k+1}, t_k, y, h, x) \in C, \xi(t_{k+1}) \in \Gamma, \eta_{k+1} \in G) \tag{27}$$

для будь-якого $t_k \in S \cup \{t_0\}, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}, x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}$ та борелівської $C \subset \mathbf{R}^n, \Gamma \subset \mathbf{Y}, G \subset \mathbf{H}$. Ця функція дозволяє визначити на послідовності вимірних скалярних функцій $v_k(y,h,x)$ оператор

$$(Lv_k)(y,h,x) \equiv \int\limits_{\mathbf{Y} \times \mathbf{H} \times \mathbf{R}^n} P_k((y,h,x), du \times dz \times dw) v_{k+1}(u,z,w) - v_k(y,h,x), \tag{28}$$

який назвемо дискретним оператором Ляпунова для диференціального рівняння (23) з імпульсними збуреннями (24).

Якщо $t_k = k\beta$ для всіх $k \in \mathbf{N}$ та деякого $\beta > 0$, функції f та g не залежать від t, марковський процес $\{\xi(t)\}$ і марковський ланцюг $\{\xi_k(t)\}$ однорідні, то система (23) - (24) називається автономною, а індекс k функцій $P_k((y,h,x), \Gamma \times G \times C)$ опускаємо і відповідно дискретний оператор Ляпунова описуємо за допомогою рівності

$$(Lv)(y,h,x) \equiv \int\limits_{\mathbf{Y} \times \mathbf{H} \times \mathbf{R}^n} P((y,h,x), du \times dz \times dw) v(u,z,w) - v(y,h,x). \tag{29}$$

Послідовність невід'ємних функцій $v_k(y,h,x)$ назвемо функцією Ляпунова, якщо:

1) для будь-яких $k \geq 0, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, x \in \mathbf{R}^n$ визначений вираз (28);

2)

$$\inf_{\substack{k \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{Y}, \\ h \in \mathbf{H}, |x| \geq r}} v_k(y,h,x) = \bar{v}(r) \to \infty \quad \text{при} \quad r \to \infty; \tag{30}$$

3)

$$\sup_{\substack{k \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{Y}, \\ h \in \mathbf{H}, |x| \leq r}} v_k(y,h,x) = \underline{v}(r) \to 0 \quad \text{при} \quad r \to 0. \tag{31}$$

У пункті 2.2 одержано необхідні оцінки розв'язку (22)-(24) на інтервалах (t_k, t_{k+1}) за допомогою розв'язків у точках t_k.

Лема 2.2.1. Якщо виконуються умови (20),(21) і $\{x(t)\}$ є розв'язком задачі (22)-(24), то для всіх $k \in \mathbf{N}$ справедлива нерівність

$$\sup_{t_k \le t \le t_{k+1}} |x(t)| \le (1+\Lambda)[|x(t_k)| + \alpha(t_{k+1} - t_k)]e^{\Lambda(t_{k+1}-t_k)} \tag{32}$$

для будь-яких реалізацій марковського процесу $\{\xi(t)\}$ та марковського ланцюга $\{\eta_k\}$.

При вивченні стійкості (23),(24) у (21) вважаємо $\alpha = 0$ і говоримо про стійкість тривіального розв'язку. Систему (23),(24) назвемо:

- стійкою за ймовірністю, якщо для довільних $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що із нерівності $|x| < \delta$ випливає нерівність

$$\mathbf{P}\{\sup_{t \ge t_0} |x(t, t_0, y, h, x)| > \varepsilon_1\} < \varepsilon_2$$

для всіх $y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}$ і $t_0 \ge 0$;

- асимптотично стійкою за ймовірністю, якщо вона стійка за ймовірністю і можна вказати такі $\delta_1 > 0$ і $\delta_2 > 0$, що майже для всіх реалізацій, які задовольняють нерівність

$$\sup_{t \ge t_0} |x(t, t_0, y, h, x)| < \delta_1,$$

справджується

$$\lim_{t \to +\infty} |x(t, t_0, y, h, x)| = 0$$

для всіх $t \ge 0, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}$ і $|x| \le \delta_2$;

- асимптотично стохастично стійкою, якщо вона стійка за ймовірністю і для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta_1 > 0$ таке, що

$$\lim_{T \to +\infty} \mathbf{P}\{\sup_{t \ge T} |x(t, t_0, y, h, x)| > \varepsilon\} = 0$$

для всіх $|x| \le \delta_1, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}$ і $t_0 \ge 0$;

- p-стійкою (при деякому $p > 0$), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що із нерівності $|x| < \delta$ випливає нерівність

$$\mathbf{E}\{|x(t, t_0, y, h, x)|^p\} < \varepsilon$$

при всіх $y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, t \ge t_0 \ge 0$;

- асимптотично p-стійкою, якщо вона p-стійка і існує $\delta_1 > 0$ таке, що з нерівності $|x| < \delta_1$ випливає

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{y\in\mathbf{Y},h\in\mathbf{H}} \mathbf{E}\{|x(t,t_0,y,h,x)|^p\} = 0$$

для всіх $t \geq t_0$;

- експоненціально p-стійкою, якщо існує таке $\delta > 0$, що із нерівності $|x| < \delta$ випливає нерівність

$$\mathbf{E}\{|x(t,t_0,y,h,x)|^p\} \leq Me^{-\gamma(t-t_0)}|x|^p$$

при деяких $M > 0, \gamma > 0$ і всіх $y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, t \geq t_0 \geq 0$.

Якщо вказані вище нерівності виконуються для всіх $x \in \mathbf{R}^n$, то до відповідної назви стійкості будемо додавати слова "в цілому".

Теорема 2.2.1. Якщо довжини інтервалів (t_k, t_{k+1}) не перевищують $\Delta > 0$, виконується умова Ліпшица (20) та існують функції Ляпунова $v_k(y,h,x)$ і $a_k(y,h,x)$, для яких в силу системи (23),(24):

$$(Lv_k)(y,h,x) \leq -a_k(y,h,x) \tag{33}$$

для будь-яких $k \in \mathbf{N}$, $\in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}$ та $x \in \mathbf{R}^n$, то імпульсна система (23),(24) є асимптотично стохастично стійкою в цілому.

Наслідок 2.2.1. Нехай довжини інтервалів (t_k, t_{k+1}) не перевищують числа $\Delta > 0$, виконується умова Ліпшица (20) та існує функція Ляпунова v_k, для якої в силу (23),(24) виконується нерівність:

$$(Lv_k)(y,h,x) \leq 0 \tag{34}$$

для всіх $k \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}$ та $x \in \mathbf{R}^n$. Тоді імпульсна система (23),(24) стійка за ймовірністю в цілому.

Теорема 2.2.2. Якщо виконуються умови теореми 2.2.1, функції Ляпунова v_k та a_k задовольняють нерівності

$$c_1|x|^p \leq v_k(y,h,x) \leq c_2|x|^p, \tag{35}$$

$$c_3|x|^p \leq a_k(y,h,x) \leq c_4|x|^p \tag{36}$$

для деяких $p > 0, c_1 > 0, c_3 > 0$ та всіх $k \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}$ і $x \in \mathbf{R}^n$, то імпульсна система (23),(24) є асимптотично p-стійкою в цілому.

Наслідок 2.2.2. Якщо виконуються умови наслідку 2.2.1 і нерівність (35), то імпульсна система (23),(24) є p-стійкою в цілому.

Теорема 2.2.3. Якщо виконуються умови теореми 2.2.2 та існує число $\Delta_1 > 0$ таке, що

$$t_{k+1} - t_k \geq \Delta_1, \quad \forall k \in \mathbf{N}, \tag{37}$$

то імпульсна система (23),(24) експоненціально p-стійка в цілому.

У пункті 2.3 вивчається стійкість при постійно діючих збуреннях. Припустимо, що імпульсна система має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = f_0(t, \xi(t), x) + f_1(t, \xi(t), x), \tag{38}$$

$$\Delta x|_{t_k} = g_0(t, \xi(t_k-), \eta_k, x(t_k-)) + g_1(t, \xi(t_k-), \eta_k, x(t_k-)). \tag{39}$$

Назвемо імпульсну систему

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = f_0(t, \xi(t), \tilde{x}), \tag{40}$$

$$\Delta \tilde{x}|_{t_k} = g_0(t, \xi(t_k-), \eta_k, \tilde{x}(t_k-)) \tag{41}$$

системою першого наближення для (38),(39).

Нехай $w(t, y, h, x)$ така скалярна невід'ємна функція, що послідовність $v_k(y, h, x) \equiv w(t_k, y, h, x)$ є функцією Ляпунова. Для дискретного оператора Ляпунова (28) в силу (38),(39) збережемо позначення L, а для аналогічного оператора в силу (40),(41) введемо позначення L_0.

Визначимо C-інфінітезимальний оператор $\hat{L}$ рівністю

$$(\hat{L}u)(y) \equiv \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} [\mathbf{E}_y\{u(\xi(t))\} - u(y)], \tag{42}$$

де $u \in D(\hat{L}) \subset C(\mathbf{Y})$. Збережемо це позначення для продовження $\hat{L}$ у простір неперервних, але не обов'язково обмежених відображень $\mathbf{Y}$ в $\mathbf{R}$. Вважаємо, що $\{\xi(t)\}$ не залежить від ланцюга Маркова $\{\eta_k\}$. Нехай $w(t, y, h, x)$ - неперервна за сукупністю і неперервно диференційовна по t і x невід'ємна функція. Пара $\{\xi(t), \tilde{x}(t)\}$, де $\tilde{x}(t)$ - розв'язок рівняння (40), утворює феллерівський марковський процес, і можна ввести оператор

$$(Qw)(t, y, h, x) \equiv \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{1}{\tau} [\mathbf{E}^{(t)}_{y,x}\{w(t+\tau), \xi(t+\tau), h, \tilde{x}(t+\tau))\} - w(t, y, h, x)], \tag{43}$$

де індекси у математичного сподівання означають умови $\xi(t) = y, \tilde{x}(t) = x$. Будемо вважати, що введена вище функція лежить в області визначення оператора Q, якщо границя (43) існує в розумінні рівномірної збіжності в деякому околі точки (y,x) рівномірно по $h \in \mathbf{H}$. Цю границю можна обчислити у вигляді

$$(Q_0 w)(t,y,h,x) = \frac{\partial w(t,y,h,x)}{\partial t} + (\hat{L}_y w)(t,y,h,x) +$$
$$+((\nabla_x w)(t,y,h,x), f_0(t,y,x)), \tag{44}$$

де дужки $(\cdot,\cdot)$ означають скалярний добуток у $\mathbf{R}^n$, ∇_x - оператор градієнта за змінною x, $\hat{L}_y$ - згадане вище продовження C-інфінітезимального оператора марковського процесу $\{\xi(t)\}$, яке діє на $w(t,y,x)$ за змінною y за правилом (42).

Якщо границя (43) обчислюється в силу рівняння (38), то відповідний оператор позначимо Q_1. Зрозуміло, що

$$(Q_1 w)(t,y,h,x) = (Q_0 w)(t,y,h,x) +$$
$$+((\nabla_x w)(t,y,h,x), f_1(t,y,x)). \tag{45}$$

Тепер введемо оператор Ляпунова R_0, пов'язаний з імульсною дією (41) в момент $t_k \in S$. Цей оператор діє на послідовність функцій $w(t_k,y,h,x)$ за змінними $k \in \mathbf{N}, h \in \mathbf{H}, x \in \mathbf{R}^n$ при кожному фіксованому $y \in \mathbf{Y}$ за правилом

$$(R_0 w)(t_k,y,h,x) = \mathbf{E}_h^{(k)}\{w(t_k,y,\eta_{k+1},x+$$
$$+g_0(t_k,y,h,x))\} - w(t_k,y,h,x), \tag{46}$$

де індекси в математичному сподіванні означають $\eta_k = h$, а число k відповідає моменту часу t_k. Будемо писати $w \in D(R_0)$, якщо математичне сподівання в (46) існує при всіх $t_k \in S, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, x \in \mathbf{R}^n$. Якщо позначити $\tilde{P}_k(h,\Gamma)$ перехідну імовірність ланцюга Маркова на k-му кроці, то (46) можна переписати у формі

$$(R_0 w)(t_k,y,h,x) = \int_{\mathbf{H}} (w(t_k,y,z,x+g_0(t_k,y,h,x))\tilde{P}_k(h,dz) -$$
$$-w(t_k,y,h,x). \tag{47}$$

Теорема 2.3.1. Припустимо, що $\sup(t_{k+1}-t_k) = \Delta < \infty$, виконані накладені вище обмеження і, крім того, марковський процес $\{\xi(t)\}$ стохастично неперервний. Якщо існує така невід'ємна функція $w \in D(Q_0)$, що

$$\inf_{\substack{t\geq 0, y\in \mathbf{Y},\\ h\in\mathbf{H}, |x|\geq r}} w(t,y,h,x) = \bar{w}(r) \to \infty \quad \text{при} \quad r \to \infty; \tag{48}$$

$$\sup_{\substack{t\geq 0, y\in \mathbf{Y},\\ h\in \mathbf{H}, |x|\leq r}} w(t,y,h,x) = \underline{w}(r) \to 0 \quad \text{при} \quad r \to 0; \tag{49}$$

$$(Q_0 w)(t,y,h,x) \leq 0, \tag{50}$$

$$(R_0 w)(t,y,h,x) \leq 0 \tag{51}$$

при всіх $t \geq 0, t_k \in S, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}$ і $x \in \mathbf{R}^n$, то імпульсна система (38), (39) стійка за ймовірністю в цілому.

Наслідок 2.3.1. Якщо виконані умови теореми 2.3.1 і існує таке число $\gamma \in (0,1)$, що при всіх $t_k, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}$ і $x \in \mathbf{R}^n$

$$(R_0 w)(t_k,y,h,x) \leq -\gamma w(t_k,y,h,x), \tag{52}$$

то імпульсна система (40),(41) асимптотично стійка за ймовірністю в цілому.

Наслідок 2.3.2. Якщо $\inf(t_{k+1}-t_k) = \Delta_1 > 0$, виконані умови теореми 2.3.1 і існує таке додатне число γ, що

$$(Q_0 w)(t,y,h,x) \leq -\gamma w(t,y,h,x) \tag{53}$$

при всіх $t \geq 0, t_k \in S, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}$ і $x \in \mathbf{R}^n$, то імпульсна система (40),(41) асимптотично стохастично стійка в цілому.

Теорема 2.3.2. Нехай для імпульсної системи (40),(41) існує така функція Ляпунова $v_k(y,h,x)$, що

$$c_1|x|^p \leq v_k(y,h,x) \leq c_2|x|^p; \tag{54}$$

$$(L_0 v_k)(y,h,x) \leq -c_3|x|^p; \tag{55}$$

$$|v_k(y,h,x) - v_k(y,h,x_1)| \leq c_4|x-x_1|^p \tag{56}$$

при деяких $p > 0, c_1 > 0, c_3 > 0, c_4 > 0$ і всіх $k \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, x \in \mathbf{R}^n, x_1 \in \mathbf{R}^n$. Якщо $\sup(t_{k+1}-t_k) \leq \Delta$, а збурення f_1 і g_1 задовольняють рівномірно по t, y і h глобальну умову Ліпшица, причому

$$|f_1(t,y,h,x)| + |g_1(t,y,h,x)| \leq K|x|$$

і константа K досить мала, то імпульсна система (38),(39) експоненціально p-стійка в цілому.

Пункт 2.4 присвячений локальному аналізові стану рівноваги.

Припустимо, що в (38),(39) функції f_0 і g_0 задовольняють умову Ліпшица (20) і умови:

$$f_0(t,y,0) \equiv 0, \quad g_0(t,y,h,0) \equiv 0, \tag{57}$$

а для f_1 і g_1 виконується локальна умова Ліпшица, тобто

$$|f_1(t,y,x_1) - f_1(t,y,x_2)| + |g_1(t,y,h,x_1) - g_1(t,y,h,x_2)| \leq$$
$$\leq \Lambda_r |x_1 - x_2| \tag{58}$$

для всіх $t \geq 0, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}$ і $x_1, x_2 \in S_r = \{|x| \leq r\}$, а також умова рівномірної обмеженості

$$\sup_{t \geq 0, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}} [|f_1(t,y,0)| + |g_1(t,y,h,0)|] = \alpha < \infty. \tag{59}$$

Теорема 2.4.1. Нехай $\Delta \equiv \sup(t_{k+1} - t_k) < \infty$ і виконані обмеження (57)-(59), причому $\lim\limits_{r \to 0} \Lambda_r = 0$, а в (59) $\alpha = 0$. Якщо існує функція Ляпунова $v_k(y,h,x)$, яка задовольняє умови (54)-(56), то імпульсна система (38),(39) асимптотично стійка за ймовірністю.

У пункті 2.5 досліджується стійкість лінійних імпульсних стохастичних систем. Розглянемо лінійне диференціальне рівняння в $\mathbf{R}^n$

$$\frac{dx}{dt} = A(\xi(t))x, \tag{60}$$

де $\{\xi(t), t \geq 0\}$ - однорідний феллерівський марковський процес на компакті $\mathbf{Y}, \{A(y), y \in \mathbf{Y}\}$ - неперервна матрична функція. Припустимо, що розв'язок (60) в моменти часу $t_k = k\Delta, k \in \mathbf{N}$, задовольняє умову

$$x(t_k) = B(\eta_k)x(t_k-), \tag{61}$$

де $\{\eta_k, k \in \mathbf{N}\}$ - феллерівський однорідний ланцюг Маркова на компакті $\mathbf{H}$, незалежний від $\{\xi(t)\}, B(h)$ - неперервна матрична функція від $h \in \mathbf{H}$.

Теорема 2.5.1. Тривіальний розв'язок (60),(61) експоненціально стійкий в середньому квадратичному тоді і тільки тоді, коли існує таке число $\rho \in (0,1)$, що $\sigma(\mathbf{A}) \subset \{\lambda \in \mathbf{C} \quad | \quad |\lambda| < \rho\}$, де оператор $\mathbf{A}$ визначається так:

$$(\mathbf{A}q)(y,h) \equiv \mathbf{E}^{t_k}_{y,h}\{X^T(t_{k+1},t_k)B^T(\eta_{k+1})q(\xi(t_{k+1}),\eta_{k+1})B(\eta_{k+1})X(t_{k+1},t_k)\},$$

$X(t,s)$ - матриця Коші рівняння (60).

Наслідок 2.5.1. Якщо оператор $\mathbf{A}$ квазікомпактний, то тривіальний розв'язок (60),(61) експоненціально стійкий в середньому квадратичному тоді і тільки тоді, коли спектральний радіус $\mathbf{A}$ менший від одиниці.

У пункті 2.6 розглядається питання стійкості в середньому квадратичному при малих збуреннях лінійних диференціальних рівнянь в $\mathbf{R}^n$. В цьому ж пункті одержано необхідні і достатні умови експоненціальної p-стійкості імпульсної системи (60),(61). Вивчається також стійкість вихідної системи за її лінійним наближенням.

Третій розділ присвячений дослідженню питань усереднення та стійкості імпульсних систем з марковськими перемиканнями.

У пункті 3.1 досліджуються імпульсні системи з марковськими перемиканнями. Нехай задано ймовірнісний простір $(\Omega, F, \mathbf{P})$. Припустимо, що однорідний марковський процес $\{y(t)\}$ зі значеннями у метричному фазовому просторі $\mathbf{Y}$ має кусково постійні реалізації, а інтервали між моментами часу перемикання $\{\tau_j, j \in \mathbf{N}\}$ цього процесу мають умовний експоненціальний розподіл

$$\mathbf{P}\{(\tau_j - \tau_{j-1}) > t | y(\tau_{j-1}) = y\} = e^{-a(y)t}$$

для всіх $j \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{Y}$ та $t \in \mathbf{R}_+$. Тут і далі $\tau_0 = 0$, функція $a(y)$ додатна і неперервна. У моменти часу перемикання фазова координата процесу $\{y(t)\}$ утворює однорідний феллерівський ланцюг Маркова з перехідною ймовірністю $p(y, A)$, тобто

$$\mathbf{P}\{y(\tau_j) \in A | y(\tau_{j-1}) = y\} \equiv p(y, A)$$

для довільних $j \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{Y}$ і $A \in \sum_{\mathbf{Y}}$. Припускаємо, що в момент часу τ_j обов'язково відбувається перемикання фазової координати, тоді будемо вважати $p(y, \{y\}) = 0$. Для задання марковського процесу $\{y(t)\}$ можна скористатись його локальними характеристиками, які визначають так званий С-інфінітезимальний оператор Q цього процесу:

$$(QV)(y) \equiv \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{1}{\Delta}[\mathbf{E}_y\{V(y(\Delta))\} - V(y)],$$

де V належить простору всіх обмежених неперервних функцій $C(\mathbf{Y})$. У нашому випадку легко знайти явний вираз С-інфінітезимального оператора

$$(QV)(y) = a(y) \int_{\mathbf{Y}} [V(z) - V(y)] p(y, dz). \qquad (62)$$

Для спрощення припустимо, що $\mathbf{Y}$ є компактом. Тоді Q належить простору лінійних функціоналів $L(C(\mathbf{Y}))$, а з додатності $a(y)$ випливає експоненціальна ергодичність процесу $\{y(t)\}$. Це означає, що існує єдина інваріантна міра $\mu \in C^*(\mathbf{Y})$ в ядрі спряженого оператора Q^*, причому при будь-якому $y \in \mathbf{Y}$ і $A \in \sum_{\mathbf{Y}}$ перехідна ймовірність $P(t, y, A)$ процесу $\{y(t)\}$ експоненціально прямує до $\mu(A)$, тобто існує така константа $\rho > 0$, що

$$|P(t, y, A) - \mu(A)| \le e^{-\rho t}, \quad \forall t \ge 0.$$

Описаний вище процес $\{y(t)\}$ можна також задати за допомогою стохастичного диференціального рівняння з інтегралом за пуассонівською мірою. У монографії: Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов.- М.:Наука, 1975.- Т.3.- 496 с. доведено, що існують такий вимірний простір $(\Theta, \sum_\Theta)$, міра $\pi(d\theta)$, вимірне відображення $r : \mathbf{Y}\times\Theta \to \mathbf{Y}$ такі, що $\{y(t)\}$ задовольняє рівняння

$$dy(t) = \int\limits_\Theta r(y(t), \theta)\nu(d\theta, dt), \tag{63}$$

де пуассонівська міра $\nu(d\theta, dt)$ має параметр $\mathbf{E}\{\nu(d\theta, dt)\} = \pi(d\theta)dt$. Міра $\pi(d\theta)$ і функція $r(y, \theta)$ задовольняють співвідношення

$$\pi(\{r(y(t), \theta) \neq 0\}) = a(y), \quad \pi(\{r(y(t), \theta) \in A\}) = a(y)p(y, A)$$

для всіх $y \in \mathbf{Y}$ і $A \in \sum_\mathbf{Y}, \theta \in A$.

Визначимо потенціал П марковського процесу $\{y(t)\}$ за допомогою рівності (Дынкин Е.Б. Марковские процессы.- М.:Наука, 1969.- 359 с.)

$$(\Pi V)(y) \equiv \int\limits_0^\infty \int\limits_\mathbf{Y} (P(t, y, dz) - \mu(dz))V(z)dt. \tag{64}$$

Згідно з припущенням про експоненціальну ергодичність процесу $\{y(t)\}$ оператор П визначений на всьому $C(\mathbf{Y})$ і діє в $C(\mathbf{Y})$, тобто $\Pi \in L(C(\mathbf{Y}))/0$, причому при всіх $V \in C(\mathbf{Y})$ виконується рівність

$$Q\Pi V(y) = \Pi Q V(y) = -V(y) + \bar{V}, \tag{65}$$

де за означенням

$$\bar{V} \equiv \int\limits_\mathbf{Y} V(y)\mu(dy).$$

Нехай неперервний справа випадковий процес $\{x(t)\}$ із значеннями в $\mathbf{R}^m$ при всіх $t \in (\tau_{j-1}, \tau_j), j \in \mathbf{N}$, задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(x, y(t), \varepsilon); \tag{66}$$

при всіх $t \in \{\tau_j, j \in \mathbf{N}\}$ задовольняє умову стрибка

$$x(t) = x(t-) + \varepsilon g(x(t-), y(t-), \varepsilon) \tag{67}$$

і при $t = 0$ - початкову умову $x(0) = x$. Припустимо, що функції f і g можуть бути представлені у вигляді

$$f(x, y, \varepsilon) = f_1(x, y) + \varepsilon f_2(x, y) + \varepsilon f_3(x, y, \varepsilon), \tag{68}$$

$$g(x, y, \varepsilon) = g_1(x, y) + \varepsilon g_2(x, y) + \varepsilon g_3(x, y, \varepsilon), \tag{69}$$

де $f_1(x, y)$ і $g_1(x, y)$ неперервні і мають дві обмежені неперервні похідні по x; $f_2(x, y), f_3(x, y, \varepsilon), g_2(x, y)$ і $g_3(x, y, \varepsilon)$ неперервні і мають неперервну обмежену похідну по x, причому для всіх $y \in \mathbf{Y}$ і $\varepsilon \in (0, 1)$ можна записати

$$\|Df_3(x, y, \varepsilon)\| + \|Dg_3(x, y, \varepsilon)\| \leq \beta(\varepsilon), \tag{70}$$

де $\beta(\varepsilon)$ - нескінчено мала при $\varepsilon \to 0$. Тут і далі D^k означає k-ту похідну Фреше по $x \in \mathbf{R}^m$. Зрозуміло, що згадані вище обмеження гарантують виконання глобальної умови Ліпшица для правої частини рівняння (66), і тому процес $\{x(t)\}$ однозначно визначається початковим значенням $x(0) = x$.

Лема 3.1.1. Якщо виконані вказані вище припущення, то пара $\{x(t), y(t)\}$ є феллерівським марковським процесом на фазовому просторі $\mathbf{R}^m \times \mathbf{Y}$ з слабким інфінітезимальним оператором

$$(LV)(x, y) = \varepsilon(f(x, y, \varepsilon), \nabla)V(x, y) + QV(x, y) + \varepsilon G^\varepsilon V(x, y), \tag{71}$$

де ∇ - x-градієнт, оператор Q діє по змінній y, а оператор G^ε визначається рівністю

$$G^\varepsilon V(x, y) = \varepsilon^{-1} a(y) \int_{\mathbf{Y}} [V(x + \varepsilon g(x, y, \varepsilon), z) - V(x, z)] p(y, dz).$$

Лема 3.1.2. Якщо виконані вказані вище умови, то розв'язки імпульсної системи (66),(67) задовольняють нерівність

$$\mathbf{E}_{x,y}\{|x(t)|^2\} \leq (1 + |x|^2) \exp\{\varepsilon \alpha t\}$$

при всіх $x \in \mathbf{R}^m, y \in \mathbf{Y}, t \geq 0, \varepsilon \in (0, 1)$ і деякому $\alpha \in \mathbf{R}$.

Лема 3.1.3. Якщо виконані вказані вище обмеження, то для всіх $T > 0$, $\delta > 0, y \in \mathbf{Y}$ і $x \in \mathbf{R}^m$ можна записати

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{E}_{x,y}\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t/\varepsilon) - x^\varepsilon(t)|^2\} = 0. \tag{72}$$

Пункт 3.2 містить аналіз принципу усереднення імпульсних систем з марковськими перемиканнями.

Надалі введемо такі позначення:

$\{y^\varepsilon(t)\}$ - розв'язок стохастичного рівняння

$$dy^\varepsilon(t) = \int\limits_\Theta r(y^\varepsilon(t), \theta)\nu_\varepsilon(d\theta, dt),$$

де $\nu_\varepsilon(d\theta, dt)$ - пуассонівська міра з параметром $\varepsilon^{-1}\pi(d\theta)dt; \{y_\varepsilon(t)\}$ - розв'язок стохастичного рівняння

$$dy_\varepsilon(t) = \int\limits_\Theta r(y_\varepsilon(t), \theta)\nu_{\varepsilon^2}(d\theta, dt);$$

$$F_j(x,y) = f_j(x,y) + a(y)g_j(x,y); \quad b_j(x) = \int\limits_{\mathbf{Y}} F_j(x,y)\mu(dy), \quad j = 1,2.$$

Розглянемо систему імпульсних рівнянь у формі

$$\frac{dx^\varepsilon}{dt} = f_1(x^\varepsilon, y^\varepsilon(t)) \tag{73}$$

для $t \in (\tau_{j-1}, \tau_j), j \in \mathbf{N}$;

$$x^\varepsilon(t) = x^\varepsilon(t-) + \varepsilon g_1(x^\varepsilon(t-), y^\varepsilon(t-)) \tag{74}$$

для $t \in \{\tau_j, j \in \mathbf{N}\}$, з початковою умовою

$$x^\varepsilon(0) = x. \tag{75}$$

Завдяки (72) розв'язки (73),(74) та (66),(67) між собою ε-близькі.

Слабкий інфінітезимальний оператор марковського процесу $\{x^\varepsilon(t), y(t)\}$ має вигляд

$$(L(\varepsilon)V)(x,y) = (f_1(x,y), \nabla)V(x,y) + \frac{1}{\varepsilon}QV(x,y) + G(\varepsilon)V(x,y),$$

де $(\cdot,\cdot)$ - скалярний добуток, а

$$G(\varepsilon)V(x,y) = \frac{1}{\varepsilon}a(y)\int\limits_{\mathbf{Y}}[V(x+\varepsilon g_1(x,y), z) - V(x,z)]p(y,dz).$$

Поряд з (73),(74) розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{du}{dt} = b_1(u), \tag{76}$$

яке будемо називати усередненим рівнянням для імпульсної системи (66),(67). В силу зроблених припущень розв'язок (76) існує і єдиний при довільній початковій умові $u(0) = u$.

За допомогою лем 3.1.1 - 3.1.3 доведено принцип усереднення.

Теорема 3.2.1 (принцип усереднення). *Якщо виконані згадані вище умови, то для будь-яких $r > 0$ і $T > 0$ розв'язок (66),(67) у формі $x(t/\varepsilon)$ збігається за ймовірністю при $\varepsilon \to 0$ до розв'язку $u(t,x)$ усередненого рівняння (76) з початковою умовою $u(0) = x$ рівномірно по $x \in S_r$ і $t \in [0,T]$, тобто при будь-якому $\delta > 0$*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in S_r, y \in \mathbf{Y}} \mathbf{P}(\sup_{0 \le t \le T} |x(t/\varepsilon) - u(t,x)| > \delta) = 0,$$

де $S_r \equiv \{x \in \mathbf{R}^m | \, |x| < r\}$.

У пункті 3.3 розглянуто імпульсну систему (66),(67) за умови

$$f(0,y,\varepsilon) \equiv g(0,y,\varepsilon) \equiv 0. \tag{77}$$

Легко бачити, що в цьому випадку

$$a(y)|g_1(x,y)| + |f_1(x,y)| \le k|x|, \tag{78}$$

$$a(y)|g(x,y,\varepsilon)| + |f(x,y,\varepsilon)| \le k|x|, \tag{79}$$

для деякого $k > 0$ та всіх $\varepsilon \in (0,1), y \in \mathbf{Y}$ і $x \in \mathbf{R}^m$, а також $|b_1(u)| \le k|u|$ при всіх $u \in \mathbf{R}^m$.

Припустимо, що тривіальний розв'язок усередненого рівняння (76) експоненціально стійкий, тобто існують такі додатні сталі M і γ, що

$$|u(t,x)| \le M e^{-\gamma t} |x| \tag{80}$$

при всіх $x \in \mathbf{R}^m$ і $t \ge 0$.

Теорема 3.3.1. *Якщо виконуються приведені вище умови, то існують такі додатні числа ε_0, M_1 і γ_1, що розв'язки (66),(67) допускають оцінку*

$$\mathbf{E}_{x,y}\{|x(t)|^2\} < M_1 e^{-\gamma_1 \varepsilon t} |x|^2 \tag{81}$$

при всіх $y \in \mathbf{Y}, x \in \mathbf{R}^m, t \ge 0$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

За допомогою функціоналу Ляпунова

$$V(x,y) = \int_0^T \mathbf{E}_{x,y}\{|u(t,x)|^2\} dt, \quad T > 0, \tag{82}$$

доводиться

Наслідок 3.3.1. В умовах теореми 3.3.1 при довільних малих $\varepsilon > 0$ розв'язок (66),(67) прямує до нуля при $t \to \infty$.

У пункті 3.4 досліджено рівномірну обмеженість розв'язків імпульсних систем з марковськими перемиканнями.

Пункт 3.5 присвячено аналізу питання про слабку збіжність розв'язків стохастичних імпульсних систем. Позначимо

$$X_\varepsilon(t) \equiv \varepsilon^{-1/2}[x(\frac{t}{\varepsilon}) - u(t,x)], \tag{83}$$

де $\{x(t)\}$ - розв'язок системи (66),(67) за початковими даними $x(0) = x$, а $u(t,x)$ - розв'язок усередненого рівняння (76) за початковою умовою $u(0) = x$. Випадковий процес $\{X_\varepsilon(t)\}$ називають нормованим відхиленням розв'язку імпульсної системи від відповідного розв'язку усередненого рівняння.

Вивчено умови, за яких нормовані відхилення (83) $\{X_\varepsilon(t), 0 \le t \le T\}$ для довільних $x \in \mathbf{R}^m, y \in \mathbf{Y}$ і $T > 0$ при $\varepsilon \to 0$ слабо збігаються до дифузійного марковського процесу $\{X(t), 0 \le t \le T\}$, який задовольняє стохастичне рівняння

$$dX = Db_1(u(t,x))X dt + \bar{A}(u(t,x))dw(t) \tag{84}$$

з початковою умовою $X(0) = 0$, де симетрична невід'ємно визначена $\bar{A}(x)$ визначається рівністю

$$|\bar{A}(x)c|^2 = 2\int\limits_{\mathbf{Y}} \{(F_1(x,y) - b_1(x), c)(\Pi F_1(x,y), c) -$$

$$-(g_1(x,y),c)(f_1(x,y) - b_1(x) + \frac{1}{2}a(y)g_1(x,y),c)\}\mu(dy) \tag{85}$$

з довільним вектором $c \in \mathbf{R}^m$, а $\{w(t)\}$ - стандартний процес броунівського руху в $\mathbf{R}^m$.

Розділ IV містить модельні приклади застосування викладених у розділах I-III теоретичних результатів: розглянуто модель стохастичного осцилятора з імпульсними збуреннями; стабілізацію коливання струни при імпульсних випадкових збуреннях; віброударні системи при випадкових коефіцієнтах поновлення швидкості.

ВИСНОВКИ

- в дисертації вперше розроблено методику застосування другого методу Ляпунова для лінійних дискретних динамічних систем з марковськими параметрами;

- доведено загальні теореми про стійкість тривіального розв'язку в різних ймовірносних інтерпретаціях для лінійних різницевих рівнянь з марковськими коефіцієнтами;

- вперше побудовано розклад у ряд Лорана квадратичного функціоналу для одержання необхідних та достатніх умов стійкості другого моменту розв'язків марковських лінійних дискретних динамічних систем;

- одержано необхідні та достатні умови стійкості тривіального розв'язку в середньому квадратичному лінійних різницевих рівнянь в просторі Гільберта;

- вперше в дисертації введено аналог оператора Ляпунова для імпульсних динамічних систем з марковськими збуреннями коефіцієнтів;

- обгрунтовано стійкість при постійно діючих випадкових збуреннях;

- проведено аналіз других моментів розв'язків імпульсних динамічних систем з марковськими параметрами;

- зроблено аналіз стану рівноваги для імпульсних систем марковського типу;

- в дисертації вперше доведено закон великих чисел типу методу усереднення для імпульсних динамічних систем з марковськими перемиканнями;

- доведено граничну теорему дифузійного типу для імпульсних марковських динамічних систем;

- вперше обгрунтовано можливість дослідження стійкості імпульсних марковських динамічних систем за допомогою граничного усереднення або стохастичного рівняння Іто.

Теоретична цінність дисертації полягає в

1) строгому математичному обгрунтуванні стохастичного варіанту другого методу Ляпунова для дискретних та імпульсних систем з марковськими перемиканнями;

2) у доведенні можливості представлення у вигляді ряду Лорана квадратичних стохастичних функцій Ляпунова, за допомогою яких знайдено необхідні та достатні умови стійкості другого моменту розв'язків лінійних дискретних та імпульсних динамічних систем у критичному випадку;

3) у доведенні граничної теореми дифузійного типу для імпульсних динамічних систем дифузійного типу.

Практичне значення здобутих результатів ілюструється успішним їх застосуванням до вивчення умов стійкості віброударних систем при випадкових коефіцієнтах поновлення швидкості; для аналізу динаміки стохастичного осцилятора з імпульсними випадковими збуреннями марковського типу; для одержання необхідних та достатніх умов стабілізації коливань струни при незалежних імпульсних збуреннях.

Обгрунтування достовірності наукових результатів базується на другому методі Ляпунова, методі теорії малих збурень лінійних операторів, на стохастичному варіанті методу усереднення; на граничних теоремах у просторі Скорохода.

Розроблені методи в дисертації можуть успішно застосовуватися для якісного дослідження поведінки реальних динамічних систем з імпульсними збуреннями марковського типу, для формування допустимих меж зміни значень параметрів динамічних моделей

при створенні систем автоматичного проектування машинобудування, радіоелектроники, літакобудування тощо.

У наукових дослідженнях відомих математиків В.С.Королюка, А.М.Самойленка, В.Ю.Слюсарчука, М.О.Перестюка та інших якісно досліджувалися імпульсні системи, в яких імпульсні збурення відбувалися у фіксовані моменти часу. В дисертаційній роботі вивчається проблема узагальнення другого методу Ляпунова і методу усереднення для динамічних систем з марковськими збуреннями параметрів та імпульсними перемиканнями у випадкові моменти часу.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ АВТОРОМ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Свердан М.Л., Царьков Е.Ф. Устойчивость стохастических импульсных систем.- Рига: РТУ, 1994.- 300 с.

2. Свердан М.Л. Второй метод Ляпунова исследования устойчивости уравнений с импульсными возмущениями и марковскими коэффициентами // Укр. мат. журн.- 1996.- Т.48,N6.- С.826-833.

3. Свердан М.Л., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Асимптотична поведінка розв'язків імпульсних систем з малим параметром та марковськими перемиканнями. 1. Рівномірна обмеженість розв'язків // Укр. мат. журн.- 1996.- Т.48,N10.- С.1375 - 1385.

4. Свердан М.Л., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Асимптотична поведінка розв'язків імпульсних систем з малим параметром та марковськими пере-

миканнями. 2. Слабка збіжність розв'язків // Укр. мат. журн.- 1996.- Т.48,N12.- С.1691-1704.
5. Свердан М.Л., Царков Є.Ф. Метод усереднення в імпульсних системах з марковськими перемиканнями // Укр. мат. журн.- 1995.- Т.47,N10.- С.1376-1386.
6. Свердан М.Л., Царков Є.Ф. Про стійкість лінійних імпульсних стохастичних систем // Теорія ймовірностей та математична статистика.- 1996.- Вип. 53.- С.160-168.
7. Свердан М.Л. Дослідження стійкості лінійних імпульсних систем з марковськими коефіцієнтами другим методом Ляпунова // Докл. АН Украины.- 1994.- N11.- С.7-11.
8. Свердан М.Л. Аналіз малих марковських збурень методом Ляпунова для диференціальних рівнянь // Докл. АН Украины.- 1994.- N12.- С.13-21.
9. Свердан М.Л. Аналіз поведінки розв'язків стохастичних імпульсних систем // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложение: Зб. наук. пр.- К.: Ін-т математики НАН України, 1995.- С.251-255.
10. Sverdan M.L. On Existence of the Optimal Control for the Differential-Functional Equation with Poisson's Switchings // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр.- К.:Ін-т математики НАН України, 1995.- Вип.10.- С.134-143.
11. Sverdan M.L. Investigation of the Stability of the Impulse Differential Systems with Markov Parameters // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр.- К.:Ін-т математики НАН України.- Вип.11.- С.209-218.
12. Свердан М.Л., Царькова В.Н. Устойчивость решений линейных разностных систем со случайными коэффициентами в пространстве Гильберта // Топологические пространства и отображения в них.- Рига:Латв. ун-т, 1976.- Вып. 2.- С.68-75.
13. Свердан М.Л. Царьков Е.Ф. О линейных разностных уравнениях со случайными коэффициентами // Изв. ВУЗов. Математика.- 1972.- N5.- С.80-83.
14. Свердан М.Л. Усереднення та стійкість імпульсних систем з марковськими перемиканнями // Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана.- Чернівці: Рута, 1995.- С.296-310.
15. Свердан М.Л., Ясинский В.К. Устойчивость решений линейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений в критическом случае // Изв. ВУЗов. Математика.- 1982.- N6.- С.53-56.
16. Свердан М.Л., Ясинская Л.И. Экспоненциальная устойчивость стоха-

стических дифференциально-функциональных уравнений при постоянно действующих случайных возмущениях // Докл. АН Украины. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки.- 1987.- N4.- С.18-21.

17. Свердан М.Л., Юрченко І.В., Ясинський В.К. Про одну задачу стохастичного керування // Укр. мат. журн.- 1995.- Т.47, N11.- С.1566-1573.

18. Свердан М.Л. Усереднення у стохастичних диференціальних рівняннях із післядією та пуассонівськими збуреннями // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложение: Зб. наук. пр.- К.: Ін-т математики НАН України, 1995.- С.255-258.

19. Свердан М.Л., Ясинская Л.И., Ясинский В.К. Стабилизация решений стохастических линейных уравнений в частных производных при наличии пуассоновских возмущений // Кибернетика и вычислительная техника.- 1988.- Вып. 81.- С.7-12.

20. Свердан М.Л. Метод усреднения для квазилинейных стохастических дифференциально-функциональных уравнений // Інтегральні пере- творення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр.- К.:Ін-т математики НАН України.- Вип.11.- С.197-208.

21. Свердан М.Л., Царков Є.Ф. Стабілізація коливань струни при імпульсних випадкових збуреннях // Дослідження математичних моделей: Зб. наук. пр.- К.:Ін-т математики НАН України, 1997.- С.179-183.

22. Свердан М.Л., Царков Є.Ф. Стохастичний осцилятор з імпульсними збуреннями //Дослідження математичних моделей: Зб. наук. пр.- К.:Ін-т математики НАН України, 1997.- С.184-187.

23. Свердан М.Л. Устойчивость тривиального решения линейных систем со случайными параметрами // В кн. Мартынюк Д.И. Лекции по качественной теории разностных уравнений.- К.:Наук. думка, 1973.- С.166-196.

24. Свердан М.Л., Царькова В.Н. Устойчивость решений разностных уравнений со случайными параметрами // Предельные теоремы для реккурентно связанных случайных процессов.- Киев, 1989.- С.24-43 (Препринт / АН УССР. Ин-т математики, 89-31).

25. Свердан М.Л., Царькова В.Н. Устойчивость решений разностных уравнений со случайными параметрами // Предельные теоремы для реккурентно связанных случайных процессов.- Киев, 1989.- С.24-43 (Препринт / АН УССР, Ин-т математики, N 89.31).

26. Свердан М.Л., Ясинская Л.И. Экспоненциальная устойчивость в среднем квадратическом решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений при наличии пуассоновских возмущений // Об асимптотическом поведении решений некоторых стохастических си-

стем дифференциальных уравнений.- Киев, 1985.- С.20-26 (Препринт / АН УССР. Ин-т математики, N 85.41).

27. Свердан М.Л., Ясинская Л.И., Ясинский В.К. Некоторые свойства функционально-дифференциальных уравнений // Черновиц. ун-т.- Черновцы, 1982.- 47 с.- Рус.- Деп. в ВИНИТИ 9.10.82.- N 6202.- 82 Деп.

28. Свердан М.Л., Ясинская Л.И., Ясинский В.К. Устойчивость стохастических дифференциально-разностных систем // Черновиц. ун-т.- Черновцы, 1982.- 36 с.- Рус.- Деп. в ВИНИТИ 9.07.82.- N 3668.- 82 Деп.

29. Свердан М.Л., Іванів І.І. Теорема про стійкість по лінійному наближенню для диференціальних рівнянь з імпульсними збуреннями та марковськими параметрами // Міжнародна математична конференція, присвячена пам'яті академіка М.П.Кравчука: Тези доп.- Київ, 1992.- С.188.

30. Свердан М.Л. Стійкість стохастичних систем з імпульсними марковськими збуреннями // International Conference "Modelling and Investigation of Systems Stability. Systems Investigation". Thesis of conference reports.- Kiev, 1997.- P.61.

31. Свердан М.Л. Стійкість стохастичних систем з імпульсними марковськими збуреннями // Укр. конф. "Моделирование и исследование устойчивости систем":Тезисы докл.- Киев, 1996.- С.118.

32. Свердан М.Л., Ясинская Л.И.,Ясинский В.К. Устойчивость решений стохастических дифференциальных уравнений с частными производными при наличии пуассоновских возмущений // Труды респ. научн. конф. "Дифф. и интегр. уравнения и их приложения".- Одесса, 1987.- С.92-94.

33. Свердан М.Л. Аналіз стійкості лінійних імпульсних систем з марковськими параметрами // Всеукр. конф. "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування": Тези доп.- Київ, 1996.- С.171.

34. Свердан М.Л., Ясинская Л.И., Ясинский В.К. Исследование потери устойчивости стержня в динамических системах с учетом стохастических возмущений // Нелинейные колебания механических систем: 2-я Всесоюзная конф. "Нелинейные колебания механических систем".- Т.2.- Горький, 1990.- С.31-32.

35. Свердан М.Л., Царков Є.Ф. Стійкість лінійних систем з марковськими коефіцієнтами // Міжнародна математична конференція, присвячена пам'яті Г.Гана: Тези доп.- Чернівці:Рута, 1994.- С.151.

36. Свердан М.Л., Царьков Е.Ф. О статистическом запасе устойчивости дискретных систем // Материалы Всесоюзного симпозиума "Новые методы исследования шумов и вибраций и кибернетическая диагностика машин и механизмов"- Каунас, 1970.- С.32-33.

Свердан М.Л. Стійкість імпульсних динамічних систем з випадковими збуреннями.- Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 - диференціальні рівняння.- Інститут математики НАН України, Київ, 1997.

Захищається 176 сторінок монографії "Стійкість стохастичних імпульсних систем" (Рига:РТУ, 1994.- 300 с.) та 35 наукових праць, які містять теоретичні дослідження стійкості динамічних систем, які описуються системою диференціальних рівнянь з фелерівськими марковськими параметрами и марковським ланцюгом у перемиканнях за часом. Обгрунтовано метод усереднення та вивчені питання стійкості імпульсних систем з марковськими перемиканнями. Досліджена стійкість розв'язків різницевих рівнянь з випадковими коефіцієнтами. Розглянуто чотири важливі стохастичні модельні задачі.

Ключові слова: стохастичні імпульсні системи, марковські перемикання, феллерівські марковські параметри, різницеві рівняння, випадкові коефіцієнти, стійкість.

Свердан М.Л. Устойчивость импульсных динамических систем со случайными возмущениями.- Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения.- Институт математики НАН Украины, Киев, 1997.

Защищается 176 страниц монографии "Устойчивость стохастических импульсных систем" (Рига: РТУ, 1994.- 300с.) и 35 научных работ, которые содержат теоретические исследования устойчивости динамических систем, описываемых системой дифференциальных уравнений с феллеровскими марковскими параметрами и марковской цепью в переключениях по времени. Обоснован метод усреднения и изучены вопросы устойчивости импульсных систем с марковскими переключениями. Исследована устойчивость решений разностных уравнений со случайными коэффициентами. Рассмотрены четыре важные стохастические модельные задачи.

Ключевые слова: стохастические импульсные системы, марковские переключения, феллеровские марковские параметры, разностные уравнения, случайные коэффициенты, устойчивость.

Sverdan M.L. Stability of Impulse Dynamic Systems with Stochastic Disturbances.- Manuscript.

Thesis for a doctor's degree by speciality 01.05.02 - differential equations.- Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 1997.

The dissertation is devoted to the defending of 176 pages of the monography "Stability of Stochastic Impulse System" (Riga: RTU, 1994.- 300p) and 35 of scientific articles which contain theoretical investigations of dynamical systems stability. These systems are described by the system of differential equations with Feller Markov parameters and Markov chain with switchings on time. Averaging method and stability of impulse systems with Markov switchings are investigated. Stability of difference equations solutions with stochastic coefficients is investigated. Four stochastic modelling problems are considered.

Key words: stochastic impulse systems, Markov switchings, Feller Markov parameters, difference equations, random coefficients, stability.

Sverdan M.L. Stability of Impulse Dynamic Systems with Stochastic Disturbances.- Manuscript.

Thesis for a doctor's degree by speciality 01.01.02 - differential equations. Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 1997.

The dissertation is devoted to the defending of 176 pages of the monography "Stability of Stochastic Impulse Systems" (Riga, RTU, 1994, 306 p.) and 15 scientific articles which contain theoretical investigations of dynamical systems stability. These systems are described by the system of differential equations with the Markov parameters and Markov chain with switchings on time. Averaging method and stability of impulse systems with Markov switchings are investigated. Stability of difference equations solutions with stochastic coefficients is investigated. Four stochastic modelling problems are considered.

Key words: stochastic impulse systems, Markov switchings, finite Markov parameters, difference equations, random coefficients, stability.

Підписано до друку 22.09.97.
Формат 60x84/16. Папір офсетний.
Друк офсетний. Ум.друк.арк. 1,9.
Обл.-вид. арк. 2,0. Тираж 100 прим.
Зам. 006.

Друкарня видавництва "Рута" Чернівецького держуніверситету
274012, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2