

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

С. Янчук

На правах рукопису

ЯНЧУК Сергій Володимирович

УДК 517.9

**ДОСЛІДЖЕННЯ НЕАВТОНОМНИХ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ
ТА СИСТЕМИ ЧУА**

01.01.02 — диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на одбуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 1997

17.95



00751764 (U)

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі звичайних деформованих рідин Інституту математики НАН України

Науковий керівник академік НАН України
доктор фізико-математичних наук
професор САМОЙЛЕНКО
АНАТОЛІЙ МИХАЙЛОВИЧ,
директор Інституту математики НАНУ

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук професор
ПЕРЕСТЮК МИКОЛА ОЛЕКСІЙОВИЧ,
Національний університет ім. Тараса Шевченка,
декан механіко-математичного факультету

кандидат фізико-математичних наук
КОЛОМІСЦЬ ВІКТОР ГРИГОРОВИЧ,
Інститут математики НАНУ,
старший науковий співробітник

Провідна установа:

Чернівецький державний університет імені Ю. Федьковича,
кафедра прикладної математики і механіки, м. Чернівці

Захист відбудеться "16" "12" 1997 р. о "15" години на засіданні спеціалізованої ради Д.01.66.02 при Інституті математики НАН України за адресою: 252601 Київ - 4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики.

Автореферат розісланий "12" "11" 1997 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради

ЛУЧКА А. Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дана робота присвячена дослідженню розв'язків крайових задач для систем неавтономних звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь із запізненням. Особлива увага приділяється періодичним розв'язкам. Окремо розглянуто систему Чуа диференціальних рівнянь третього порядку.

У зв'язку з науково-технічним прогресом в останні роки виріс інтерес до всестороннього та глибокого вивчення нелінійних процесів, що виникають в системах електро- і радіотехніки, вібротехніки, небесної механіки, приладобудування, економіки, регулювання і т.п. Математичними моделями багатьох таких задач є різні класи диференціальних рівнянь і рівнянь із запізненням, точні розв'язки яких, як правило, не вдається виразити через елементарні функції або в квадратурах. Ось чому особливого значення набувають ріноманітні чисельно-аналітичні методи, що дозволяють одночасно досліджувати існування розв'язку, а також дають схему його наближеного знаходження.

Дослідженням вастосування та умов збіжності чисельно-аналітичного методу послідовних наближень А.М. Самойленка для різних класів задач займалися ряд авторів. Зокрема, ці питання розглядалися в працях А.М. Самойленка, Д.І. Мартинюка, М.О. Перестюка, М.І. Ронто, С.І. Трофімчука та ін.

Окрім ітеративного методу, в обчислювальній практиці часто вастосовуються інші методи, до яких відносяться варіаційні, проєкційні, рівницеві та двосторонні. Останнім часом з'явилися методи, що поєднують у собі ідеї кількох методів. Відмітимо тут роботи А.Ю. Лучки, В.В. Петришина, М.С. Курпеля, В.Г. Гальоркіна та ін.

Не вважаючи на велику кількість робіт по цій тематиці, деякі питання, на наш погляд, були вивчені не в повній мірі. Зокрема, це стосується питань існування та наближеної побудови розв'язків крайових задач для диференціальних рівнянь із запізненням. Крім того, на сьогоднішній день актуальною є проблема охоплення якомога ширшого кола задач, що можуть бути досліджені за допомогою чисельно-аналітичного методу.

ЛНБ ім. В. Стефаніка
АН України

Слід зазначити, що досить активно останнім часом досліджується система Чуа диференціальних рівнянь третього порядку в кусково-лінійною правою частиною в роботах Чуа Л., Самойленка А.М., Шильникова Л.П., Шарковського О.М. та інших математиків. Значною мірою це пов'язано з наявністю хаотичного режиму в цій системі при деяких значеннях параметрів, зручністю її дослідження та реалізації у вигляді електричного кола з одним нелінійним елементом. Крім того, інтерес до вивчення цієї системи викликаний усе більш широким застосуванням таких моделей, динаміка яких описується кусково-лінійними динамічними системами.

У зв'язку з цим дослідження системи Чуа є новою та досить перспективною математичною задачею.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота проводилась згідно з загальним планом досліджень відділу звичайних диференціальних рівнянь Інституту математики НАН України.

Мета і задачі дослідження. Метою даної роботи є побудова таких чисельно-аналітичних алгоритмів, які дозволяють розв'язувати нові класи диференціальних рівнянь та рівнянь із запіненням, а також доведення існування, побудова та вивчення властивостей періодичних розв'язків системи Чуа.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, наступні:

1. Вказана схема чисельно-аналітичного методу послідовних наближень знаходження періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із запіненням, яка дозволяє досліджувати існування та наближено знаходити періодичні розв'язки нових класів вищезгаданих рівнянь.
2. Вперше обґрунтована чисельно-аналітична схема для системи нелінійних диференціальних рівнянь із запіненням, які розглядаються при двоточкових умовах, що не розділяються.
3. Для канонічної системи третього порядку звичайних диференціальних рівнянь в кусково-лінійною правою частиною отримані необхідні умови існування періодичних розв'язків, рівняння у варіаціях, співвідношення між параметрами та коренями характеристичного рівняння. Цим самим

були узагальнені результати А.М.Самойленка та Л.Чуа. Проведені чисельні розрахунки розв'язків рівняння для складової x , що має імпульсну дію.

4. Вперше вивчаються явища озв'язування розв'язків у вузол та ковзаючого режиму для складових нормальної системи диференціальних рівнянь із гладкою правою частиною.

Практичне значення отриманих результатів. Отримані результати узагальнюють та доповнюють відповідні дослідження по системі Чуа та крайових задачах для рівнянь із запізненням. Розроблені в дисертації чисельно-аналітичні методи можуть бути перенесені на рівняння в більш загальними крайовими умовами. При якісному дослідженні однієї зі складових системи звичайних диференціальних рівнянь може бути використана методика п. 2.3. Запропоновані результати можуть бути вастосовані при розв'язку конкретних прикладних задач.

Особистий внесок одобувача. Визначення загального плану діяльності та постановка задач належать науковому керівнику – А.М.Самойленку. Доведення всіх результатів дисертації проведене особисто автором.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на семінарах відділу звичайних диференціальних рівнянь Інституту математики НАН України; на засіданнях математичної школи в нелінійних коливань (жовтень 1995 р., Чернівці); на міжнародній конференції "Contemporary problems in theory of dynamical systems" (липень 1996 р., Нижній Новгород); школах-семінарах "Нелінійні крайові задачі математичної фізики та їх вастосування" (жовтень 1996 р., Кам'янець-Подільський; червень 1997 р., Нальчик); міжнародній конференції Треті Боголюбовські читання "Асимптотические и качественные методы в теории нелинейных колебаний" (серпень, 1997 р., Київ).

Публікації. За темою дисертації опубліковано 8 праць, з них: 6 праць написано без співавторів, 3 статті в провідних наукових фахових виданнях, 3 статті в збірниках наукових праць.

Структура та об'єм дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, двох розділів, розбитих на 6 параграфів, та списку цитованої літератури з 80 назв і викладена на 111 сторінках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовано актуальність теми, проаналізовано сучасний стан проблеми, сформульовано задачі дослідження та коротко викладено основні результати.

У першому розділі дисертації досліджено три чисельно-аналітичні схеми. Зокрема, в параграфі 1.1 наведений чисельно-аналітичний метод дослідження та наближеної побудови періодичних розв'язків неавтономних диференціальних рівнянь із запізненням виду

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), x(t - \tau)). \quad (1)$$

Шуканий розв'язок $x(t)$ буде визначатися періодичним продовженням на початкову множину.

Згідно з загальною схемою методу, послідовні наближення до періодичного розв'язку (1) визначаються за формулою

$$x_{m+1}(t, x_0) = x_0 + Lf(t, x_m(t), x_m(t - \tau, x_0) - x_m(t, x_0)), \quad (2)$$

де оператор L має вигляд

$$Lf(t) = \int_0^t (f(t) - \overline{f}(t)) dt,$$

$\overline{f}(t)$ — інтегральне середнє функції f .

Будемо припускати, що в області $D = \{-\infty < t < \infty, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ функція неперервна за сукупністю змінних, обмежена та задовольняє умову Ліпшица, тобто

$$|f(t, x, y)| \leq M, \quad |f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \leq K_1|x_1 - x_2| + K_2|y_1 - y_2|, \quad (3)$$

де M, K_1, K_2 — деякі додатні константи.

Для методу (2) отримані умови обіжності та оцінка похибки.

Теорема 1.1.1. При зроблених припущеннях, якщо константи M, K_1, K_2 задовольняють умови

$$b - a \geq \frac{MT}{2}, \quad c \leq -\alpha_1(\tau)M \leq \alpha_1(\tau)M \leq d, \quad \frac{T}{2}K_1 + \alpha_1(\tau)K_2 < 1,$$

де $\alpha_1(\tau) = 2\tau(1 - \frac{\tau}{T})$, послідовність періодичних за t періоду T функцій (2) обігається рівномірно при $m \rightarrow \infty$ відносно

$$t \in (-\infty, \infty), \quad a + \frac{MT}{2} \leq x_0 \leq b - \frac{MT}{2} \quad (4)$$

до функції $x_\infty(t, x_0)$, що визначена в області (1), періодична, та є єдиним періодичним розв'язком рівняння

$$x(t, x_0) = x_0 + Lf(t, x(t), x(t - \tau, x_0) - x(t, x_0)). \quad (5)$$

Швидкість обіжності методу характеризується нерівністю

$$|x_\infty(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \leq |Q_0^m(E - Q_0)^{-1}| \frac{MT}{2},$$

де $Q_0 = (T/2, \alpha_1(\tau))^T(K_1, K_2)$.

Теорема 1.1.2 встановлює залежність між розв'язком інтегрального рівняння (5) та (1). А саме, якщо рівняння (1) задовольняє умови теореми 1.1.1 та має періодичний періоду T розв'язок $x = \varphi(t)$, що проходить при $t = 0$ через точку $\varphi(0) = x_0$ в відрізку $a + \frac{MT}{2} \leq x_0 \leq b - \frac{MT}{2}$, то $\varphi(t) = x_\infty(t, x_0)$.

Використовуючи тісний зв'язок чисельно-аналітичного методу та задачі керування для періодичної задачі (1), встановлені достатні умови існування періодичних розв'язків (1). Для цього використовувались послідовності функцій

$$\Delta_m(x_0) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x_m(t, x_0), x_m(t - \tau, x_0) - x_m(t, x_0)) dt.$$

Теорема 1.1.3. Нехай права частина рівняння (1) задовольняє умови теореми 1.1.1 та для деякого m функція $\Delta_m(x_0)$ задовольняє нерівності

$$\min_{a + \frac{MT}{2} \leq x \leq b - \frac{MT}{2}} \Delta_m(x) \leq -d_m, \quad \max_{a + \frac{MT}{2} \leq x \leq b - \frac{MT}{2}} \Delta_m(x) \geq d_m,$$

де $d_m = kQ_0^m(E - Q_0)^{-1}(MT/2, \alpha_1(\tau)M)^T$, $k = (K_1, K_2)$. Тоді рівняння (1) має періодичний періоду T розв'язок $x(t)$, для якого $a \leq x(t) \leq b$, $a + \frac{MT}{2} \leq x(0) \leq b - \frac{MT}{2}$.

Порівняльний аналіз, що зроблений в кінці параграфа, свідчить про те, що даний метод дозволяє охопити нові класи рівнянь виду (1), для яких виконуються теореми 1.1.1 - 1.1.3.

У параграфі 1.2 досліджується система нелінійних диференціальних рівнянь із запізненням

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad x, f \in E_n, \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

які розглядаються при двочкових умовах, що не розділяються

$$\begin{aligned} Ax(0) + Bx(T) &= d, \\ x(t \in [-\tau, 0]) &= \gamma(t), \end{aligned} \quad (7)$$

де f — неперервна функція в області $[0, T] \times D \times D$, B — невинроджена матриця, $\gamma(t)$ — неперервна в $I = [-\tau, 0]$.

Задачу (6), (7) було зведено до початкової виду

$$\begin{aligned}\dot{\psi}(t) &= f_1(t, \psi(t), \psi(t - \tau), a), \\ \psi(0) &= 0, \quad \psi(t \in I) = \gamma(t) - a - tm(a),\end{aligned}\tag{8}$$

де $f_1(t, x, y, a) = f(t, x + a + tm(a), y + a + (t - \tau)m(a)) - m(a)$, $m(a) = \frac{1}{T}B^{-1}(d - (A + B)a)$, a — деякий параметр.

Теорема 1.2.1. Якщо $\tilde{\psi}(t, a)$ є розв'язком початкової задачі (8), а a^* задовольняє рівняння $\tilde{\psi}(T, a^*) = 0$, то функція $\tilde{\psi}(t, a^*) + a^* + tm(a^*)$ буде розв'язком крайової задачі (6), (7).

У параграфі 1.2.2 до даної задачі застосовується чисельно-аналітичний метод. При цьому припускається, що для деяких цілих чисел k_1, k_2 матриця $k_1A + k_2B$ не винроджена. Згідно із загальною схемою методу, розглядається послідовність функцій виду

$$\begin{aligned}x_m(t > 0, x_0) &= x_0 + \int_0^t [f(s, x_{m-1}(s, x_0), x_{m-1}(s - \tau, x_0)) - \\ &\frac{1}{T} \int_0^T f(s, x_{m-1}(s, x_0), x_{m-1}(s - \tau, x_0)) ds] dt + k_1 Hd(x_0) + \frac{t}{T}(k_2 - k_1) Hd(x_0), \\ x_m(t < 0, x_0) &= \gamma(t), \quad m = 1, 2, \dots \\ x_0(t, x_0) &= x_0 + k_1 Hd(x_0) + \frac{t}{T}(k_2 - k_1) Hd(x_0),\end{aligned}\tag{9}$$

де $H = (k_1A + k_2B)^{-1}$, $d(x_0) = d - (A + B)x_0$.

Нехай функція $f(t, x, y)$ визначена для всіх $t \in [0, T]$, $x \in D$, $y = x(t - \tau) \in D$, неперервна за сукупністю змінних та задовольняє нерівності (3), а також виконані умови:

I. Множина D_β точок $x_0 \in E_n$ таких, що точки $x_0 + k_1 Hd(x_0) = z_0(x_0)$ належать області D разом зі своїм β -околом, не порожня:

$$D_\beta \neq \emptyset, \quad \text{де } \beta = \frac{T}{2}M + \beta_1(x_0), \quad \beta_1(x_0) = |(k_2 - k_1)Hd(x_0)|.$$

II. Найбільше власне значення $\lambda(Q)$ матриці $Q = (K_1 + K_2)(\frac{T}{3} + \frac{3}{2T}\tau^2(1 - \frac{\tau}{T})^2)$ не перевищує одиницю.

Тоді послідовність функцій $x_m(t, x_0)$ виду (9) рівномірно збігається при $m \rightarrow \infty$ відносно області $(t, x_0) \in [0, T] \times D_\beta$ до граничної функції $x^*(t, x_0)$.

При цьому $x^*(t, x_0)$ буде розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = x_0 + k_1 H d(x_0) + \int_0^T [f(t, x(t), x(t-\tau)) - \overline{f(t, x(t), x(t-\tau))}] + \\ + \frac{1}{T} (k_2 - k_1) H d(x_0) dt \quad (10)$$

і проходить при $t = 0$ через точку $x^*(0, x_0) = x_0 + k_1 H d(x_0)$, тобто є розв'язком крайової задачі

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t-\tau)) + \Delta(x_0), \quad t \neq \tau,$$

$$Ax_0 + Bx_0 = d, \quad x(I) = \gamma(t),$$

де $\Delta(x_0) = \frac{1}{T}(k_2 - k_1)Hd(x_0) - \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x(t), x(t-\tau))dt$.

Для відхилення $x^*(t, x_0)$ від $x_m(t, x_0)$ вірна оцінка

$$|x^*(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \leq \sigma_1(t)W(x_0), \quad m = 1, 2, \dots \quad (11)$$

$$W(x_0) = Q^{m-1}(E - Q)^{-1}[(K_1 + K_2)\beta_1(x_0) + QM].$$

При виконанні вищезгаданих умов доведено, що для будь-якої точки $x_0 \in D_\beta$ існує єдине значення керуючого параметра

$$\mu(x_0) = \frac{1}{T}(k_2 - k_1)Hd(x_0) - \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x^*(t, x_0), x^*(t-\tau, x_0))dt, \quad (12)$$

при якому розв'язок $x(t) = x^*(t, x_0)$ системи диференціальних рівнянь з параметром

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t-\tau)) + \mu,$$

що при $t = 0$ має початкове значення $x(t \in I) = \gamma(t)$, $x(0) = x_0 + k_1 H d(x_0)$, $x_0 \in D_\beta$, буде задовольняти крайову умову (7).

Теорема 1.2.4 встановлює критерій того, що гранична функція послідовності (9) $x^*(t, x_0)$ буде розв'язком крайової задачі (6), (7). При виконанні умов попередніх теорем, цей критерій можна записати у вигляді рівності $\mu(x_0) = 0$. Причому, для відхилення точного розв'язку $x^*(t) = x^*(t, x_0)$ задачі (6), (7) від наближеного $x_m(t, x_0)$ виконується нерівність (11).

Для того, щоб отримати достатні умови існування розв'язків крайової задачі (6), (7), розглядається наближене рівняння

$$\Delta_m(x_0) = \frac{1}{T}(k_2 - k_1)Hd(x_0) - \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x_m(t, x_0), x_m(t-\tau, x_0))dt = 0. \quad (13)$$

Теорема 1.2.5. Припустимо, що виконані умови теореми 1.2.4 і, крім того:

1. Існує замкнена, випукла область $D_1 \subset D_\beta$ така, що для деякого фіксованого $m \geq 1$ відображення $\Delta_m : D_\beta \rightarrow E_n$ має в D_1 єдину особливу точку $x_0 = x_{0,m}$ ненульового індексу, тобто наближене рівняння (13) має в D_1 єдиний розв'язок ненульового індексу.

2. На межі S_1 області D_1 виконана нерівність

$$\inf_{x_0 \in S_1} |\Delta_m(x_0)| > \frac{T}{3} \left[K_1 + K_2 \left(1 - \frac{\tau}{T} \right)^2 \right] W(x_0),$$

де $W(x_0)$ визначено в (11).

Тоді задача (6), (7) має розв'язок $x = x^*(t)$, для якого початкове значення $x^*(t) = \gamma(t)$, $x^*(0) = x_0^* + k_1 Hd(x_0^*)$ та визначається тим значенням $x_0 = x_0^*$, що належить $D_1 : x_0 = x_0^* \in D_1$.

У параграфі 1.3 для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x), \quad x, f \in E_n, \quad (14)$$

пропонується метод двосторонніх наближень до розв'язку задачі Коші. Головна відмінність його від раніше відомих методів Курпеля, Чаплигіна та ін. полягає в тому, що в ньому використовується відомий розв'язок лінійної системи $x' = A(t)x$, тобто фундаментальна матриця розв'язків Ω_a^t . Це дозволяє в ряді випадків покращити швидкість обіжності методу.

На функцію f накладаються наступні умови:

1. $f(t, x)$ в деякій області D може бути представлена у вигляді $f(t, x) = F(t, x, x)$ так, що з нерівностей $(u_1 \leq u_2)$, $(v_1 \geq v_2)$ випливає $F(t, u_1, v_1) \leq F(t, u_2, v_2)$.

2. Функція F неперервна за сукупністю змінних та задовольняє в області D умову Ліпшица

$$|F(t, x, y) - F(t, x', y')| \leq M_1|x - x'| + M_2|y - y'|$$

для будь-яких $t \in [a, b]$.

Введемо наступні позначення: $(\Omega_s^{t+})_{ij} = \sup\{(\Omega_s^t)_{ij}, 0\}$, $\Omega_s^{t-} = \Omega_s^t - \Omega_s^{t+}$, де через $(\cdot)_{ij}$ позначена i, j -компонента матриці,

$$K_1(t, s, u, v) = \Omega_s^{t+} F(s, u, v) + \Omega_s^{t-} F(s, v, u),$$

$$K_2(t, s, u, v) = \Omega_s^{t+} F(s, v, u) + \Omega_s^{t-} F(s, u, v) = K_1(t, s, v, u).$$

Тоді двосторонній процес визначається згідно з формулами

$$u_{n+1}(t) = \Omega_a^t x_a + \int_a^t K_1(t, s, u_n(s), v_n(s)), \quad (15)$$

$$v_{n+1}(t) = \Omega_a^t x_a + \int_a^t K_2(t, s, u_n(s), v_n(s)),$$

$$u_0(t) \geq \Omega_a^t x_a + \int_a^t K_1(t, s, u_0(s), v_0(s)), \quad (16)$$

$$v_0(t) \leq \Omega_a^t x_a + \int_a^t K_2(t, s, u_0(s), v_0(s)),$$

причому $\forall t \in [a, b] : v_0(t), v_0(t) \in D$.

Для побудованої таким чином послідовності наближень має місце *Теорема 1.3.1.* Нехай функція $F(t, p, q)$ задовольняє умови 1 і 2, існують функції $u_0(t)$ та $v_0(t)$, що задовольняють (16). Тоді на сегменті $[a, b]$ для послідовностей (15) виконуються нерівності

$$u_0(t) \geq u_1(t) \geq \dots \geq u_n(t) \geq \dots \geq x^*(t) \geq \dots \geq v_n(t) \geq \dots \geq v_1(t) \geq v_0(t).$$

При цьому має місце рівномірна та монотонна збіжність послідовностей $\{u_n(t)\}$ і $\{v_n(t)\}$, відповідно, зверху та знизу до єдиного розв'язку $x^*(t) \in C[a, b]$ рівняння (14) та справедлива оцінка

$$\sup_{t \in [a, b]} \|v_n(t) - u_n(t)\| \leq \frac{[\Phi(M_1 + M_2)(b-a)]^{n-1}}{n!} (b-a) \sup_{t \in [a, b]} \|v_0(t) - u_0(t)\|, \quad (17)$$

де Φ -- константа, визначена наступним чином: $\Phi > 0 : \|\Omega_s^t\| \leq \Phi \quad \forall (s, t) \in [a, b] \times [a, b]$, $|\Omega_s^t|$ -- матриця в компонентах $(|\Omega_s^t|)_{ij} = |(\Omega_s^t)_{ij}|$.

Якщо матрицант лінійної системи буде задовольняти умову $\|\Omega_s^t\| \leq N \exp\{\alpha(t-s)\}$ в деяких α і $N > 0$, то доводиться наступна оцінка збіжності методу

$$\sup_{t \in [a, b]} \|v_n(t) - u_n(t)\| \leq \frac{[(M_1 + M_2)Ng(\alpha)]^n}{n!} \sup_{t \in [a, b]} \|v_0(t) - u_0(t)\|,$$

де $g(\alpha) = \frac{\exp\{\alpha(b-a)\} - 1}{\alpha}$. У деяких випадках ця оцінка виявляється кращою за (17).

В кінці параграфа наведено приклад застосування методу до системи

$$x' = -x + y^2 - x^2 + 1, \quad y' = -y + x^3$$

з початковими умовами $x(0) = y(0) = 0$. В даному випадку вже друга ітерація дає хороше наближення до розв'язку на відрізку $[0, 1]$.

У другому розділі досліджується кусково-лінійна система диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x + \beta y + \gamma z + m f_1(x), \\ \frac{dy}{dt} &= x + \delta z, \\ \frac{dz}{dt} &= y + \eta z, \end{aligned} \quad , \quad f_1(x) = \begin{cases} x - 1, & x > 1, \\ 0, & |x| \leq 1, \\ x + 1, & x < -1, \end{cases} \quad (18)$$

яка має шість параметрів $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, m$. Система Чуа в неї отримується при $\beta = \gamma$. Вона є канонічною в тому розумінні, що для будь-якого векторного поля із сімейства неперервних полів

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A\xi, \quad |\xi| \leq 1, \\ \dot{\xi} &= B\xi + b, \quad |\xi| > 1, \end{aligned}$$

де $\xi = (x, y, z)$, A, B — постійні матриці, b — постійний вектор, знайдеться топологічно спряжене йому векторне поле із 6-параметричного сімейства (18).

Якщо покласти $\beta = 0$, то система (18) зводиться до двовимірної, яка розглядається у параграфі 2.1. Для неї вказуються всі можливі топологічно-нееквівалентні випадки розгашування циклів, отримуються характеристичні рівняння. Крім доведення існування конкретних видів циклів та їх представлення за допомогою чисельних методів, доведено існування областей в просторі параметрів з певними властивостями. Таким чином, було доведено, що при всіх значеннях параметрів, таких що

$$\begin{aligned} -\left(\frac{1+m_1-\delta_1}{2}\right)^2 < \alpha < -\left(\frac{1-\delta_1}{2}\right)^2, \\ -1+m_1 < \delta_1 < -1, \quad m_1 < 0, \end{aligned}$$

існує стійкий цикл типу фокус-вузол. Якщо

$$m_1 > 0, \quad -1 < \delta_1 < m_1 - 1, \quad \alpha < \min \left\{ -\left(\frac{1-\delta_1+m_1}{2}\right)^2, -\left(\frac{1-\delta_1}{2}\right)^2 \right\},$$

то існує нестійкий цикл типу фокус-фокус. Якщо ж параметри системи задовольняють умови

$$m_1 < 0, \quad m_1 - 1 < \delta_1 < -1, \quad \alpha < \min \left\{ -\left(\frac{1-\delta_1+m_1}{2}\right)^2, -\left(\frac{1-\delta_1}{2}\right)^2 \right\},$$

то вона має стійкий цикл типу фокус-фокус. Тут $\gamma_1 = \alpha - \eta - \gamma \delta$, $\delta_1 = \alpha \delta$, $m_1 = \alpha m$, а класифікація циклів проводиться в залежності від характеру особливих точок в областях $|z| \leq 1$ та $|z| > 1$.

У параграфі 2.2 для системи (18) отримані рівняння для складових x, y, z . Зокрема, для складової x отримане рівняння має імпульсну дію:

$$\begin{aligned} L[x] &= m(\chi_1(x)l(x) + \delta\sigma_1(x)), \quad |x| \neq 0, \\ \Delta x''|_{|x|=1} &= m|x'|\text{sign}(x), \end{aligned} \quad (19)$$

де $L[x] = l(x') - \alpha l(x) - \beta l_1(x) - \gamma x$, $l_1(x) = x' - \eta x$, $l(x) = x'' - \eta x' - \delta x$,

$$\chi_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| > 1 \\ 0 & \text{при } |x| \leq 1 \end{cases}, \quad \sigma_1(x) = \chi_1(x)\text{sign}(x).$$

Для (19) проводяться чисельні розрахунки, в яких демонструються різноманітні цикли як притягуючі, так і відштовхуючі, а також розв'язки більш складної структури. Для складової y спостерігались явища ковзання та зав'язування розв'язків у вузол, як і в системі Чуа. Представлені умови виходу із ковзаючого режиму. Крім того, було отримане рівняння у варіаціях, яке має вигляд

$$L[z'] = m\chi_1(l(z))l(z'), \quad (20)$$

якщо розглядати z' як варіацію розв'язку $z(\tau)$. Використовуючи (20), отримуються необхідні умови існування періодичних розв'язків, які мають вигляд залежності між параметрами цього розв'язку:

$$\begin{aligned} \min_{\xi} \left[\left(\alpha + \beta \frac{\delta(\eta - \gamma) - \gamma x}{x + (x + \delta)^2} \right)^2 + x \left(\frac{(x + \delta)^2 + \gamma - \eta - \delta}{x + (x + \delta)^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} &\leq \\ &\leq \sqrt{2}|m| \sqrt{S^2 + \frac{p^2}{3}}, \end{aligned}$$

де $x \in \{(k\omega)^2 | k \neq 0, k \in Z\} \subset R$, S — ймовірність знаходження точки $\xi(\tau)$ в області $|\xi| > 1$ фазового простору системи (18), p пропорційне кількості перетинів траєкторією площин $|\xi| = 1$.

В одній із робіт Самойленко А.М. та Чуа Л. вказали, що для y складової системи Чуа спостерігаються явища ковзання та зав'язування розв'язків у вузол. Те ж саме твердження справедливе і для системи (18), як впливає в результаті параграфу 2.2. Виявляється, що ці явища характерні не тільки

для кусково-лінійних систем, а й для систем із гладкою правою частиною, що були об'єктом дослідження параграфу 2.3:

$$x' = f(t, x), \quad x \in R^q, \quad f_i \in C^{q+1}, \quad i = \overline{1, q}. \quad (21)$$

Коротко нагадаємо, що означають терміни ковзання та зав'язування у вузол. Відомо, що система (21) в деяких випадках може бути зведена до еквівалентного диференціального рівняння порядку q . Але таке рівняння може не існувати для кожної з складових x_i . Можуть виникнути наступні випадки: фазовий простір $(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(q-1)})$ складової x_1 поділяється на кілька областей, в кожній з яких рух відбувається відповідно з деяким диференціальним рівнянням порядку q . Якщо ці області будуть перетинати одна одну, то будемо говорити, що розв'язки зав'язуються у вузол. Якщо у тому ж фазовому просторі виникає множина нульової міри, в якій розв'язок знаходиться протягом деякого часу, то назвемо це ковзаючим режимом.

Позначимо операції

$$D : Dg(t, x_1, \dots, x_q) = \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{i=1}^q f_i \frac{\partial g}{\partial x_i},$$

та нехай $F_1(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(t, x)$, $F_2(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} Df_1(t, x)$, \dots , $F_q(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} D^{q-1}f_q(t, x)$. Розглядатимемо відображення $\xi = F(\eta) : R^{q+1} \rightarrow R^{q+1}$ фазового простору системи (21) у фазовий простір складової x_q :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \eta_1, \quad \xi_2 = \eta_{q+1}, \\ \xi_i &= F_{i-2}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{q+1}), \quad i = \overline{3, q+1}. \end{aligned}$$

Нехай G — область, в якій існує розв'язок (21). Тоді розглянемо таку множину точок у фазовому просторі системи (21):

$$S = \left\{ (t, x) \in G : \frac{\partial(F_1 \dots F_{q-1})}{\partial(x_1 \dots x_{q-1})} = S(t, x) = 0 \right\}.$$

Множина S_{q+1} є об'єднанням відкритих (у R^{q+1}) підмножин множини S .

Доведено, що якщо S не порожня, то фазовий простір системи (21) розбивається на області Π_i , $i \in I$, яким відповідають області $F(\Pi_i)$ фазового простору рівняння для компоненти x_q , в яких розв'язок задовольняє деяке диференціальне рівняння порядку q . При цьому межа між областями буде складатися з точок виду $F(S)$. Зокрема, частина межі, що задовольняє

$\text{grad } S(t, x) \neq 0$, буде q -вимірною поверхнею. Якщо S_{q+1} не порожня, то розв'язок рівняння для компоненти x_q являє собою ковзаючий режим на множині $M = F(S_{q+1})$ нульової міри.

Отримані результати були застосовані до системи виду

$$\begin{aligned}x' &= \alpha x + \beta y + \gamma z + m f(x), \\y' &= x + \delta z, \\z' &= y + \eta z,\end{aligned} \quad f \in C^1(\mathbb{R}). \quad (22)$$

Наслідок 2.3.4.

1. Розв'язки рівнянь для x і z компонент системи (22) не зав'язуються у вузол і не мають ковзаючого режиму і, таким чином, можуть бути представлені єдиним диференціальним рівнянням третього порядку у всьому фазовому просторі.
2. Фазовий простір для y -компоненти системи (22) розбивається на області $K_i, (i \in I)$ поверхнями $F(x_i)$, які відповідають площинам $x = x_i$ фазового простору (x, y, z) , де $g'(x_i) = 0$, $g(x) = f(x) + \frac{\eta}{m}x$. В кожній області рівняння може бути представлене одним диференціальним рівнянням порядку q . Виключення складають області, що відповідають відрізкам $[a, b] : \forall x \in [a, b] g'(x) = 0$. В таких областях буде відбуватися ковзаючий режим. Для того, щоб розв'язок для компоненти y зав'язувався у вузол, необхідно і достатньо, щоб функція $g(x)$ була немонотонною.

ВИСНОВКИ

1. Досліджено існування періодичних розв'язків нових класів диференціальних рівнянь із запізненням за допомогою чисельно-аналітичного методу послідовних наближень.
2. Обґрунтована чисельно-аналітична схема для системи нелінійних диференціальних рівнянь із запізненням, які розглядаються при двочкових умовах, що не розділяються.
3. Запропонована схема двосторонніх наближень розв'язку задачі Коші для системи з виділеною лінійною частиною.

4. Досліджено періодичні розв'язки канонічної системи третього порядку звичайних диференціальних рівнянь в непарно-періодичною, кусково-лінійною правою частиною. Зокрема, отримані необхідні умови існування таких розв'язків.
5. Досліджено явища вав'язування розв'язків у вузол та ковзаючого режиму для складових нормальної системи диференціальних рівнянь о гладкою правою частиною.

Основні результати дисертації опубліковано в наступних роботах:

1. Янчук С.В. Увагальнена канонічна система Чуа. Рівняння для компонент // Системи еволюційних рівнянь в іслідію. - Київ: Ін-т математики НАН України.- 1994. - С. 140-149.
2. Али Н.А., Янчук С.В. Вращательные движения импульсных автономных систем // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения.- Киев: Ин-т математики НАН Украины.- 1996.- С.8-10.
3. Yanchuk S.V. Qualitative Investigation of Some System of Differential Equations // Abstracts of International Conference on Contemporary problems in theory of dynamical systems.-Nizhny Novgorod (Russia).-1996.-P.53-54.
4. Али Н.А., Янчук С.В. Вращательные движения автономных систем с импульсным воздействием // Укр. мат. журн.-1997.-Т. 49, N 4.-С.591-596.
5. Янчук С.В. Чисельно-аналітичний метод дослідження розв'язків диференціальних рівнянь із запізненням // Доп. НАН України. -1997.- №6.- С.49-52.
6. Янчук С.В. Про поведінку розв'язків рівняння для компоненти нормальної системи диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн.-1997.-Т. 49, N 10.-С.1436-1440.
7. Янчук С.В. Об асимптотическом интегрировании импульсных линейных расширенных динамических систем на торе // Нелинейные краевые задачи математической и их приложения. -Киев: Ин-т математики НАН Украины.-1997.-С.293-294.

8. Yanchuk S.V. Application of numerical-analytic method to the boundary value problem for delay differential equations // Третий Боголюбовские чтения. Международная научная конференция "Асимптотические и качественные методы в теории нелинейных колебаний". - Киев.- 1997. - С. 198-199.

Янчук С.В. Дослідження неавтономних диференціальних рівнянь та системи Чуа. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння.- Інститут математики НАН України, Київ, 1997.

В дисертації запропоновано та обґрунтовано нові модифікації чисельно-аналітичного методу А.М.Самойленка для дослідження розв'язків крайових задач для диференціальних рівнянь із запізненням, метод двосторонніх наближень для задачі Коші системи звичайних диференціальних рівнянь з відокремленою лінійною частиною. Для системи третього порядку із непарно-симетрично, трьохсегментною кусково-лінійною правою частиною отримані рівняння для складових, рівняння у варіаціях, залежність між параметрами та коренями характеристичного рівняння а також необхідні умови існування періодичних розв'язків.

Ключові слова: крайова задача, відхилення аргумента, чисельно-аналітичний метод, ітеративний метод, двосторонні наближення, система Чуа, ковання розв'язків, зав'язування розв'язків у вузол.

Янчук С.В. Исследование неавтономных дифференциальных уравнений и системы Чуа. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения.- Институт математики НАН Украины, Киев, 1997.

Предложены и обоснованы новые модификации численно-аналитического метода А.М.Самойленко решений краевых задач для дифференциальных уравнением с запаздыванием, метод двусторонних приближений для задачи Коши системы обыкновенных дифференциальных уравнений с выделенной линейной частью. Для системы третьего порядка с нечетно-симметричной,

трехсегментной кусочно-линейной правой частью получены уравнения для компонент, уравнения в вариациях, зависимость между параметрами и корнями характеристического уравнения а также необходимые условия существования периодических решений.

Ключевые слова: краевая задача, отклонение аргумента, численно-аналитический метод, итеративный метод, двусторонние приближения, система Чуа, скольжение решений, возбуждение решений в узел.

Yanchuk S.V. The investigation of nonautonomous differential equations and Chua's system.- Manuscript.

Thesis for candidate degree by speciality 01.01.02 - differential equations.- The Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 1997.

The thesis is devoted to a study of Chua's system and nonautonomous differential equations by means of numerical-analytic methods. The new modifications of Samoilenko's method are suggested. Due to that a solutions of boundary value problem for certain classes of delay differential equations are studied. A two-sided approximation method for equations with separated linear part is proposed. While investigating the Chua's system we obtain the equations for the component, relationship between the parameters and the roots of the characteristic equation and necessary conditions for existence of periodic solutions.

Key words: boundary value problem, time lag, numerical-analytic method, iterative method, two-sided approximation, Chua's system, sliding mode, knotting of solution.

Підп. до друку 15.04.97. Формат 60×84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,16. Ум. фарбо-відб. 1,16. Обл.-вид. арк. 0,8.
Тираж 100 пр. Зам. 170. Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601, Київ 4, МСП, вул. Терещківська, 3.

AB 38815

AB 38815