Київський університет імені Тараса Шевченка

Война Олександр Андрійович

УДК 519.21

Статистичний аналіз та оптимізація частково спостережуваних стохастичних систем з дискретним втручанням випадку

01.05.01 - теоретичні основи інформатики та кібернетики

Автореферат

дисертації на здобуття вченого ступеня доктора фізико-математичних наук

Київ - 1997

Дисертацією є рукопис

Роботу виконано на кафедрі прикладної статистики Київського університету імені Тараса Шевченка

Науковий консультант:
доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент НАН України, професор
Анісімов Володимир Владиславович

Офіційні опоненти:
доктор фізико-математичних наук, академік НАН України, професор
Королюк Володимир Семенович
(Інститут математики НАН України, головний науковий співробітник)

доктор фізико-математичних наук, професор
Закусило Олег Каленикович
(Київський університет імені Тараса Шевченка, декан факультету кібернетики)

доктор фізико-математичних наук, професор
Ліньков Юрій Миколайович
(Інститут прикладної математики та механіки НАН України, м. Донецьк, завідувач відділу)

Провідна організація:
Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України, відділ математичних методів теорії надійності складних систем

Захист відбудеться "25" грудня 1997 року о 14.00 на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.09 Київського університету імені Тараса Шевченка, Київ, пр. Глушкова, 2, корп. 6, ф-т кібернетики, ауд. 40, (тел. 266-12-58, факс 266-12-49, E-mail rada@cyber.univ.kiev.ua)

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці Київського університету імені Тараса Шевченка, Київ, вул. Володимирська, 58.

Автореферат розіслано "____" листопада 1997 року.

Вчений секретар спеціалізованої ради Шевченко В.П.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ.

Актуальність теми.

Адекватні математичні моделі багатьох реальних стохастичних систем, що вивчаються в теорії масового обслуговування, в теорії керування запасами, теорії надійності, в біології, фізиці елементарних частинок, теорії кодування та розпізнавання мови, в соціологічних дослідженнях, при аналізі ризику (економічного, енергетичного, екологічного тощо) у батьох інших галузях науково-технічних досліджень та сферах практичної господарської діяльності, можуть бути побудовані тільки в рамках розривних випадкових процесів. Це в значній мірі визначило інтерес до вивчення різноманітних класів розривних процесів, серед яких слід відзначити процеси відновлення, процеси марковського відновлення, напівмарковські процеси, процеси з напівмарковським втручанням випадку, марковські процеси з дискретною компонентою, марковські процеси, однорідні за другою компонентою, точкові процеси, лінійчаті процеси, процеси з напівмарковськими перемиканнями, процеси, що перемикаються, випадкові еволюції та інші моделі, орієнтовані на певний клас прикладних стохастичних систем.

Розробка, проектування, оптимізація та аналіз функціонування стохастичних систем вимагає наявності повністю визначеної математичної моделі досліджуваної системи, що призводить до необхідності статистичної обробки даних, отриманих при спостереженні за реальними системами в процесі їх функціонування, і робить досить актуальними дослідження в галузі розробки та алгоритмічної реалізації методів такої обробки. Слід однак зазначити, що переважна більшість робіт у цій області стосується здебільшого неперервних процесів. Згадані вище класи розривних процесів вивчались значно менше, а для деяких із них статистичні задачі в умовах відсутності повної статистичної інформації не розглядались взагалі. Серед перших робіт, пов'язаних з виводом та дослідженням рекурентних рівнянь для оцінки станів частково спостережуваних розривних марковських процесів, слід відзначити роботи Р.Л.Стратоновича, А.И. Яшина, Р.Ш. Ліпцера, А.Н. Ширяєва, D. Snyder, M.Rudemo, а в області параметричного та непараметричного оцінювання, побудови критеріїв перевірки статистичних гіпотез для дискретних ланцюгів Маркова, ланцюгів Маркова з неперервним часом, та різноманітних спеціальних класів згаданих процесів - роботи А.М. Колмогорова, М.С. Бартлета, D.G. Kendall, P.A. Moran, П. Біллінгслі, A. Albert та ін. В останні роки інтерес до досліджень в області статистичного аналізу для різноманітних класів випадкових процесів значно зріс, що в великій мірі обумовлено прикладним характером подібних результатів.

Складність та велика розмірність адекватних математичних моделей стохастичних систем обумовлює необхідність розвитку асимптотичних методів їх аналізу. Метою таких методів є апроксимація точних моделей більш простими, придатнішими для подальшого аналізу, та оцінка впливу такої апроксимації на отримувані розв'язки. Важливу роль при дослідженні стохастичних систем великої розмірності відіграє проблема асимтотичного "укрупнення" її станів, тобто з'ясування умов, при яких різноманітні функціонали від досліджуваної системи можна апроксимувати відповідними функціоналами від "укрупненої" системи. Серед підходів до розв'язку вказаних задач відзначимо методи, розроблені в роботах В.С. Королюка , А.Ф. Турбіна, І. М. Коваленка, В.В. Анісімова. Аналіз конкретних стохастичних систем вимагає узагальнення цих методів, розробки ефективних алгоритмів їх реалізації з врахуванням специфіки досліджуваних систем.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Робота виконана у відповідності з планом наукових досліджень кафедри прикладної статистики факультету кібернетики Київського університету ім. Т.Шевченка.

Мета і задачі дослідження.

Метою роботи є розвиток теорії оптимальної нелінійної фільтрації та інтерполяції для розривних марковських процесів, розробка математичних методів параметричного та непараметричного оцінювання для багатовимірних частково спостережуваних марковських моделей та конструктивних алгоритмів оптимального оцінювання функціоналів від них, розробка методів асимптотичного аналізу та оптимізації стохастичних систем.

Наукова новизна одержаних результатів.

В роботі систематично з точки зору побудови статистичної теорії вивчається важливий клас марковських процесів з дискретним втручанням випадку - стрибкоподібних процесів з незалежними приростами у випадковому марковському середовищі. На відміну від традиційних в теорії нелінійної фільтрації та інтерполяції методів, доведення основних результатів проводиться оригінальним способом, конструктивним з точки зору створення ефективних алгоритмів чисельного розв'язку відповідних задач статистичного оцінювання. Розглянуті в роботі статистичні задачі для прихованих марковських моделей раніше не досліджувались, і запропоновані методи їх розв'язку дозволяють ефективно проводити статистичний аналіз широкого кола прикладних стохастичних моделей, про що свідчать наведені в роботі оригінальні приклади такого аналізу. Отримано ряд важливих з точки зору загальної теорії випадкових процесів граничних теорем для спеціальних класів процесів з дискретною компонентою, що дозволило значно розширити область застосування методів асимптотичного аналізу складних стохастичних систем.

Практичне значення одержаних результатів.

Основні теоретичні та прикладні результати цієї роботи є складовою частиною багатьох Держбюджетних науково-дослідницьких робіт та госпдоговірних науково-дослідницьких робіт. На базі теоретичних результатів, отриманих в даній роботі, розроблено ряд нових спецкурсів, що читаються на факультеті кібернетики Київського університету ім. Т.Шевченка. Результати по оптимальному статистичному оцінюванню стали основою для створення ефективних рекурентних алгоритмів статистичного аналізу марковських систем, частина з яких програмно реалізована.

Особистий внесок здобувача.

Всі результати дисертаційної роботи, що виносяться на захист, отримані особисто автором.

Апробація результатів дисертації.

Результати дисертації доповідались на другій Швецько-Українській конференції з математичної статистики (1997 р.); на п'ятій міжнародній Вільнюській конференції з теорії ймовірностей та математичної статистики (1989 р.); на всесоюзній науково-технічній конференції "Мікросистема-92" (Калінінград 1992 р.); на республіканському семінарі "Ергодична теорія марковських процесів" (Чернівці 1989 р.); на всесоюзній школі-семінарі "Методи дослідження інформаційно-обчислювальних систем" (Гродно 1989 р.); на п'ятій всесоюзній школі-семінарі по розподіленим автоматизованим системам масового обслуговування (Рига 1988 р.); на республіканській науково- виробничій конференції "Еволюційні стохастичні системи: теорія та застосування у фізиці та біології" (Кацивелі 1989 р.); на республіканській конференції "Математичне моделювання та експериментальне дослідження фізико-хімічних процесів у суцільних середовищах" (Алушта 1989 р.); на всесоюзній науково-технічній конференції "Застосування статистичних методів у виробництві та керуванні" (Пермь 1984 р.); на третій республіканській конференції "Обчислювальна математика в сучасному науково-технічному прогресі" (Канів 1982 р.); на наукових семінарах в Київському університеті ім. Т. Шевченка; Інституті математики НАН України. В цілому робота доповідалась на наукових семінарах в Київському університеті ім. Т.Шевченка; Інституті математики НАН України; Інституті кібернетики ім. В.М.Глушкова; Інституті прикладної математики та механіки НАН України (м. Донецьк).

Публікації.

Автором по темі дисертації опубліковано 33 роботи, перелік основних з яких наведено в кінці автореферату.

Структура та обсяг роботи.

Дисертація складається із вступу, п'яти розділів, висновків та списку використаних джерел, що налічує 182 найменування. Об'єм роботи 295 сторінок машинописного тексту.

ЗМІСТ РОБОТИ.

Перший розділ складається з чотирьох підрозділів.

У підрозділі 1.1 визначається стрибкоподібний процес з незалежними приростами у випадковому марковському середовищі, а саме.

Нехай $x(t), t\geq 0$- деякий дійснозначний марковський процес із значеннями у фазовому просторі $\left[\mathfrak{X}, \mathfrak{B}_X\right]$. $\mathfrak{M}_t^s = \sigma\left\{ x(u), t\leq u\leq s\right\}$ -σ-алгебра, що породжується траєкторією процесу $x(u)$ на проміжку часу $u\in[t,s]$. Для будь-якого процесу $\xi(t)$, $t\geq 0$ із значеннями у фазовому просторі $\left[\mathfrak{Y},\mathfrak{B}_Y\right]$, $\mathfrak{Y}\subseteq R_m$, визначимо

$$a_t^s(z) = \mathsf{M}\left\{exp\left\{i\left[z,\xi(s)-\xi(t)\right]\right\} \Big/ \mathfrak{M}_t^s\right\},\ t\leqslant s,\ z\in R_m.$$

$\left[\mathfrak{Z},\mathfrak{B}_Z\right]$ - вимірний простір, такий, що $\mathfrak{Z} = \mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}$, $z=(x,y)$, $x\in\mathfrak{X}$, $y\in\mathfrak{Y}$, а $\mathfrak{B}_Z = \mathfrak{B}_X\times\mathfrak{B}_Y$. Нехай $\mathfrak{L}_Y^{\varepsilon}$ - кільце борелівських множин із $\mathfrak{Y}$, що лежать поза сферою $\mathbf{S}_\varepsilon = \left\{y\in\mathfrak{Y};\ |y|<\varepsilon\right\}$. $\mathfrak{L}_Y^O = \bigcup_\varepsilon \mathfrak{L}_Y^\varepsilon$, а $\pi_t(x,A)$, $A\in\mathfrak{B}_Y$, $x\in\mathfrak{X}$, $t\geqslant 0$ - деяка функція, така, що при будь-яких фіксованих (t,x) $\pi_t(x,\cdot)$ є скінченною мірою на $\mathfrak{L}_Y^O$ такою, що $\int\limits_{\mathfrak{Y}} \frac{|y|^2}{1+|y|^2}\cdot\pi_t(x,dy) < \infty$.

Визначення. Випадковий процес $\xi(t),t\geqslant 0$ називається стрибкоподібним процесом з незалежними приростами з мірою стрибків $\pi_s(x,A)$ в випадковому марковському середовищі $x(t)$, якщо для будь-якого $t\geqslant 0$

$$a_0^t(z) = exp\left\{\int\limits_{\mathfrak{Y}}\int\limits_0^t\left[exp\left\{i(z,y)\right\} - 1\right]\pi_s(x(s),dy)ds\right\},$$

де $\{x(s),\ 0\leqslant s\leqslant t\}$ - траєкторія процесу $x(s)$ на проміжку часу $[0,t]$. Далі в цьому підрозділі вивчається структура цього процесу та його зв'язок з марковськими процесами, однорідними за другою компонентою.

В підрозділі 1.2 отримано рівняння оптимальної нелінійної фільтрації для умовної характеристичної функції марковського процесу за спостереженнями визначеного на ньому розривного процесу з незалежними приростами. Нехай $\xi(t),t\geqslant 0$- стрибкоподібний процес з незалежними приростами у випадковому марковському середовищі $x(t),t\geqslant 0$. Позначимо $\mathfrak{N}_s^t = \sigma\left\{\{\xi(u),s\leqslant u\leqslant t\}\right\}$ -мінімальну σ- алгебру, що породжується траєкторією процесу $\xi(u)$ на проміжку часу $u\in[s,t]$.

$$\varphi_s(t,z) = \mathsf{M}\left\{exp\{izx(t)\} \Big/ \mathfrak{N}_s^t\right\},\ z\in\mathbb{R}_1,\ s\leqslant t,$$

Тоді має місце наступний результат.

Теорема 1.2.1. Нехай $x(t),t\geqslant 0$ - з ймовірністю 1 неперервний справа марковський процес, для якого виконуються умови:

1.Існує деяка функція $\mathsf{q}(z,t,x)$ така, що для будь-якого $\Delta t>0$

$$(\Delta t)^{-1}\cdot\left|\mathsf{M}\left\{\left[exp\left\{iz(x(t+\Delta t)-x(t))\right\} - 1\right]\Big/ x(t)=x\right\}\right| \leqslant \mathsf{q}(z,t,x).$$

2.Для будь-яких $z\in\mathbb{R}_1$, $x\in\mathfrak{X}$ існує границя

$$\lim_{\Delta t\to 0} (\Delta t)^{-1}\cdot\left[\mathsf{M}\left\{\left[exp\left\{iz(x(t+\Delta t)-x(t))\right\} - 1\right] \Big/ x(t)=x\right\}\right] = \psi_t(z,x).$$

3.Міра стрибків $\pi_s(x,A), s\leqslant t, x\in\mathfrak{X}, A\in\mathfrak{B}_Y$ процесу $\xi(t)$ така, що для будь-якого $A\in\mathfrak{B}_Y$ $\pi_s(x,A)=\int\limits_A\pi_s^*(x,y)m(dy)$, де $m(dy)$ міра Лебега в $\mathbb{R}_m$; функція $\pi_t^*(x,y)$ неперервна за сукупністю змінних $(t,x), t\geqslant 0, x\in\mathfrak{X}$ і якщо $\Pi_s(x) = \pi_s(x,\mathfrak{Y}) = \int\limits_{\mathfrak{Y}}\pi_s^*(x,y)m(dy)$, то для будь-яких $z\in\mathbb{R}_1, x\in\mathfrak{X}$, $t\geqslant 0$ $\mathsf{M}q(z,t,x(t))\Pi_t(x(t))<\infty$, $\mathsf{M}\Pi_t(x(t))<\infty$.

Тоді для умовної характеристичної функції $\varphi_s(t,z)$ з ймовірністю 1 має місце співвідношення

$$d\varphi_0(t,z) = \mathsf{M}\left\{exp\{izx(t)\}\left[\psi_t(z,x(t))-(\Pi_t(x(t))-\hat{\Pi}_t)\right] \Big/ \mathfrak{N}_0^t\right\}dt +$$

$$+ \mathsf{M}\left\{exp\{izx(t)\}\left[\frac{\pi_t^*(x(t),d\xi(t))}{\hat{\pi}_t(d\xi(t))} - 1\right] \Big/ \mathfrak{N}_0^t\right\}dv(t),$$

$$\varphi_0(0,z) = \mathsf{M}\left\{exp\left\{izx(0)\right\} \Big/ \xi(0)\right\},$$

де $dv(t)=v(t)-v(t-0)$, $d\xi(t)=\xi(t)-\xi(t-0)$, $d\varphi_0(t,z)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left[\varphi_0(t+\Delta t,z)-\right.$ $\left.-\varphi_0(t,z)\right]$, $\hat{\Pi}_t = \mathsf{M}\left\{\Pi_t(x(t)) \Big/ \mathfrak{N}_0^t\right\}$, $\hat{\pi}_t(y) = \mathsf{M}\left\{\pi_t^*(x(t),y) \Big/ \mathfrak{N}_0^t\right\}$.

Нехай $\xi(t), t\geqslant 0$ стрибкоподібний процес з незалежними приростами з мірою стрибків $\pi_s(x,A)$ у випадковому марковському середовищі $x(t), t\geqslant 0$. Визначимо незалежну від процесів $\xi(t)$ та $x(t)$ сукупність випадкових величин $\{\xi(t,x,y), t\geqslant 0,\ x,y\in\mathfrak{X}\}$, незалежних при різних t, із значеннями в просторі $\mathfrak{Y}$, і позначимо

$$\psi_t(z,x,y) = \mathsf{M}exp\left\{i(z,\xi(t,x,y))\right\},\ t\geqslant 0,\ x,y\in\mathfrak{X}.$$

Позначимо, як і раніше, $\mathfrak{M}_t^s=\sigma\{x(u),\ t\leqslant u\leqslant s\}$ - σ- алгебру, що породжується траєкторією процесу $x(u)$ на проміжку часу $[t,s]$.Припустимо далі, що $x(t), t\geqslant 0$- чисто розривний процес із значеннями у фазовому просторі $(\mathfrak{X},\mathfrak{B}_X)$, перехідна функція якого

$$p(s,x,t,A) = \mathsf{P}\left\{x(t)\in A \Big/ x(s)=x\right\},\ 0\leqslant s\leqslant t,\ A\in\mathfrak{B}_X,\ x\in\mathfrak{X}$$

задовольняє умовам:

(A). Для будь-яких $t\geqslant 0, x\in\mathfrak{X}, A\in\mathfrak{B}_X$, та $h>0$

$$p(t,x,t+h,\{x\}) = 1-\lambda(t,x)h+o(h);\ p(t,x,t+h,A) = Q(t,x,A)h+o(h).$$

(B). Існує така функція $q(t,x,y)$, $x,y\in\mathfrak{X}$, що для будь-яких $t\geq 0, x\in\mathfrak{X}$, $A\in\mathfrak{B}_X$ $Q(t,x,A) = \int_A q(t,x,y)dy$.

Тоді будь-яка траєкторія $\{x(u),\ 0\leq u\leq t\}$ процесу $x(t)$ повністю визначається множиною пар $\{(x_0,\tau_1),\ (x_1,\tau_2),\ \ldots,\ (x_{k(t)-1},\tau_{k(t)}),$ $(x_{k(t)},t)\}$, де $\tau_0=0$, $\tau_k=\min\{s,\ s>\tau_{k-1}, x(s)\neq x(\tau_{k-1})\}$, $x_k=x(\tau_k), k\geq 0$, $k(t) = \max\{k,\ \tau_k\leq t\}$, $t\geq 0$. Визначимо випадковий процес $\zeta(t), t\geq 0$ як такий, умовна характеристична функція якого відносно $\mathfrak{M}_0^t$ дорівнює

$$\Phi_0^t(z) = \mathsf{M}\left\{exp\left\{i(z,\xi(t))\right\} \Big/ \mathfrak{M}_0^t\right\}\cdot\prod_{k=1}^{k(t)} \phi_{\tau_k}(z,x_{k-1},x_k).$$

Позначимо $\tilde{\mathfrak{N}}_t^s=\sigma\{\zeta(u), t\leq u\leq s\}$ – σ- алгебру, що породжується траєкторією процесу $\zeta(u)$ на проміжку часу $[t,s]$, а

$$\tilde{\varphi}_s(t,z) = \mathsf{M}\left\{exp\left\{izx(t)\right\} \Big/ \tilde{\mathfrak{N}}_s^t\right\},\ z\in R_1,\ s\leq t.$$

В підрозділі 1.2 також знайдено умови існування з ймовірністю 1 границі

$$d\tilde{\varphi}_0(t,z)=\lim_{h\to 0}\left[\mathsf{M}\left\{exp\left\{izx(t+h)\right\} \Big/ \tilde{\mathfrak{N}}_0^{t+h}\right\}-\mathsf{M}\left\{exp\left\{izx(t)\right\} \Big/ \tilde{\mathfrak{N}}_0^t\right\}\right]$$

та отримано відповідне стохастичне рівняння в термінах $p(s,x,t,A)$.

В підрозділі 1.3, з припущенням, що $x(t), t\geq 0$– чисто розривний марковський процес, що задовольняє умовам (A),(B), виводяться стохастичні рівняння для визначення оптимальної в середньому-квадратичному розумінні оцінки умовного розподілу марковського процесу, що визначає стан середовища відносно спостережень заданого на ньому чисто розривного процесу з незалежними приростами.

В підрозділі 1.4 розглянуто важливий з точки зору практичних застосувань частковий випадок результатів двох попередніх підрозділів, коли множина станів випадкового середовища $x(t), t\geq 0$– дискретна.

Другий розділ присвячено виводу рівнянь оптимальної нелінійної фільтрації та інтерполяції для багатовимірних частково спостережуваних чисто розривних марковських процесів у загальному випадку і, як наслідок,- відповідних рівнянь для розривних процесів з незалежними приростами у випадковому марковському середовищі. Зокрема, в підрозділі 2.1 отримано наступний результат. Розглянемо марковський процес $z(t)$, $t\geqslant 0$ з неперервним часом, із значеннями у фазовому просторі $\left[Z,\mathfrak{B}_Z\right]$, що визначається початковим розподілом $g_0(M) = \mathrm{P}\left\{ z(0)\in M \right\}$, $M\in\mathfrak{B}_Z$, та перехідною функцією $p(s,z;t,M) = \mathrm{P}\left\{z(0)\in M \Big/ z(0)=z\right\}$, $z\in Z$, $M\in\mathfrak{B}_Z$, $0\leqslant s<t$. Припустимо при цьому, що простір Z має вигляд $Z=X\times Y$, де $\left[X,\mathfrak{B}_X\right]$, $\left[Y,\mathfrak{B}_Y\right]$ – деякі вимірні простори, $\mathfrak{B}_Z=\mathfrak{B}_X\times\mathfrak{B}_Y$, а процес $z(t)$ можна подати у вигляді $z(t)=\left[x(t), y(t)\right]$, $t\geqslant 0$, $x(t)\in X$, $y(t)\in Y$.

Позначимо $\mathfrak{Y}_{[t,T]} = \sigma\left\{(y(s),\ t\leqslant s\leqslant T)\right\}$ – мінімальну σ-алгебру, що породжується траєкторією процесу $y(t)$ на проміжку часу $[t,T]$, а

$$\tilde{\pi}(t,A) = \mathrm{P}\left\{ x(t)\in A \Big/ \mathfrak{Y}_{[0,t]}\right\},\ t\geqslant 0,\ A\in\mathfrak{B}_X.$$

Знаходження $\tilde{\pi}(t,A)$ є однією із основних задач статистики випадкових процесів (задача фільтрації), оскільки ці умовні ймовірності є визначальними при знаходженні оптимальних у середньоквадратичному розумінні оцінок для багатьох характеристик частково спостережуваних процесів.

Надалі домовимось використовувати такі позначення. Якщо $A\in\mathfrak{B}_X$, а $y\in Y$, то символ $A_{(y)}$ буде позначати множину із $\mathfrak{B}_Z$ таку, що $A_{(y)} = A\times\{y\}=\{(x,y), x\in A\}$. Аналогічно для $x\in X$ та $H\in\mathfrak{B}_Y$ ${}_{(x)}H = \{x\}\times H = \{(x,y),\ y\in H\}$. Якщо $M\in\mathfrak{B}_Z$, то символ ${}^{(x)}M$ $x\in X$, позначає підмножину Y таку, що ${}^{(x)}M = \{\ y\in Y,\ (x,y)\in M\}$. Відповідно для $y\in Y$ $M^{(y)}$ позначає підмножину X, таку, що $M^{(y)} = \{\ x\in X,\ (x,y)\in M\}$.

Припустимо, що для випадкового процесу $z(t), t\geqslant 0$ виконуються умови.

$\boxed{\mathrm{A}}$ Для будь-якого $t\geqslant 0$, будь-яких $(x,y)\in Z$ та $H\in\mathfrak{B}_Y$ такій, що $y\notin H$, при досить малих Δt

$$p(t,(x,y);t+\Delta t,{}_{(x)}H) = \Lambda_t((x,y),H)\Delta t + o(\Delta t),$$

де $\Lambda_t(z,H)$ при будь-якому $H\in\mathfrak{B}_Y$ $\mathfrak{B}_Z$-вимірна по z функція, а при будь-якому $z=(x,y)\in Z$ $\Lambda_t(z,\cdot)$ – скінченна міра на $\left[Y,\mathfrak{B}_Y\right]$.

$\boxed{\mathrm{B}}$ Для будь-якого $t\geqslant 0$, будь-яких $(x,y)\in Z$ та $A\in\mathfrak{B}_X$ такій, що $x\notin A$, при досить малих Δt

$$p(t,(x,y);t+\Delta t,A_{(y)}) = M_t((x,y),A)\Delta t + o(\Delta t),$$

де $M_t(z,H)$ при будь-якому $A\in\mathfrak{B}_X$ $\mathfrak{B}_Z$-вимірна по z функція,а при будь-якому $z=(x,y)\in Z$ $M_t(z,\cdot)$ - скінченна міра на $[X,\mathfrak{B}_X]$.

[C] Для будь-якого $t\geq 0$, будь-яких $z\in Z$ та $M\in\mathfrak{B}_{Z\setminus\{z\}}$ такій, що ${}^{(x)}M=\emptyset$, $M^{(y)}=\emptyset$ при досить малих Δt

$$p(t,z;t+\Delta t,M) = \Gamma_t(z,M)\Delta t + o(\Delta t),$$

де $\Gamma_t(z,M)$ при будь-якому $M\in\mathfrak{B}_{Z\setminus\{z\}}$ $\mathfrak{B}_Z$-вимірна по z функція, а при будь-якому $z=\in Z$ $\Gamma_t(z,\cdot)$ - скінченна міра на $[Z\setminus\{z\},\mathfrak{B}_{Z\setminus\{z\}}]$.

[D] Для будь-якого $t\geq 0$,будь-яких $(x,y)\in Z$, при досить малих Δt

$$p(t,(x,y);t+\Delta t,\{(x,y)\}) = 1 - \lambda_t(x,y)\Delta t + o(\Delta t),$$

і при цьому $\lambda_t(x,y) = \Lambda_t((x,y),Y\setminus\{y\}) + M_t((x,y),X\setminus\{x\}) +$

$$+ \Gamma_t((x,y),Z\setminus[(\{x\}\times Y)\cup(X\times\{y\})]).$$

Зауважимо, що при виконанні умов [A], [B], [C], [D] - процес $z(t)$ є чисто розривним процесом, траєкторії якого з ймовірністю 1 ступінчаті функції. Отже спостережувана траєкторія $\{y(s),\ 0\leq s\leq t\}$ процесу $y(t)$ являє собою множину пар $\{(y_0,\tau_1),(y_1,\tau_2),\ldots,(y_{N_t-1},\tau_{N_t})$ $(y_{N_t},t)\}$, де $\tau_0=0$, $\tau_k = \min\{t>\tau_{k-1},\ y(t)\neq y(\tau_{k-1})$ - момент k-ї зміни стану процесу $y(t)$, $y_k = y(\tau_k)$, $k=0,1,\ldots$, а $N_t=\sum\limits_{s\leq t}\chi[y(s-0)\neq y(s)]$ рахуючий процес для $y(t)$, тобто кількість змін стану процесом $y(t)$ на проміжку часу $[0,t]$.

Теорема 2.1.1. Нехай X - сепарабельний метричний простір, виконані умови [A], [B], [C], [D] і крім того виконуються такі умови.

1. Існує така σ-скінченна міра $\rho_Y(\cdot)$ на вимірному просторі $[Y,\mathfrak{B}_Y]$, та $\mathfrak{B}_X$-вимірна по $x\in X$, $\mathfrak{B}_Y$-вимірна по $y\in Y$ та $v\in Y$ обмежена функція $l_t((x,y),v)$ така, що для будь-яких $t\geq 0$, $z=(x,y)\in Z$ та $H\in\mathfrak{B}_Y$ таких, що $y\notin H$ $\Lambda_t((x,y),H) = \int\limits_H l_t((x,y),v)\rho_Y(dv)$, і для будь-яких $t\geq 0$, $y\in Y$ та $H\in\mathfrak{B}_Y$ таких, що $y\notin H$ $M\Lambda_t((x(t),y),H) < \infty$.

2. Функція $M_t((x,y),A)$ така, що для будь-яких $t\geq 0$, $y\in Y$, $A\in\mathfrak{B}_X$

$$\mathsf{M}M_t((x(t),y),A\setminus\{x(t)\}) < \infty.$$

3. Існує така σ-скінченна міра $\rho_X(\cdot)$ на вимірному просторі $[X,\mathfrak{B}_X]$ та $\mathfrak{B}_Z$-вимірна по $z_1\in Z$ та $z_2\in Z$ обмежена функція $g_t(z_1,z_2)$ така, що для будь-яких $t\geqslant 0$, $z=(x,y)\in Z$ та $M\in\mathfrak{B}_{Z\setminus\{z\}}$

$$\Gamma_t(z,M) = \iint\limits_M g_t(z,z_2)\nu(dz_2),$$

де $\nu(dz) = \rho_X(dx)\rho_Y(dy)$, і при цьому для будь-якого $y\in Y$

$$\mathsf{M}\Gamma_t((x(t),y),Z\setminus\{(x(t),y)\}) < \infty.$$

4. Існує $\mathfrak{B}_Z$- вимірна функція $g_0^*(z) = g_0^*((x,y))$, така, що для будь-якого $M=A\times H\in\mathfrak{B}_Z$, $A\in\mathfrak{B}_X$, $H\in\mathfrak{B}_Y$ $g_0(M) = \iint\limits_{AH} g_0^*((x,y))\rho_X(dx)\rho_Y(dy)$.

Тоді для будь-якого $t\geqslant 0$ та $A\in\mathfrak{B}_X$ умовний розподіл $\tilde{\pi}(t,A)$ задовольняє рівнянню

$$\tilde{\pi}(t,A) = \tilde{\pi}(0,A) + \int\limits_0^t\Bigg[\int\limits_X M_s((x,y(s)),A\setminus\{x\})\tilde{\pi}(s,dx) -$$

$$-\int\limits_A\Big[\lambda_s(x,y(s)) - \tilde{\Lambda}_s(y(s)) - \tilde{\Gamma}_s(y(s))\Big]\tilde{\pi}(s,dx)\Bigg]ds +$$

$$+\sum_{s\leqslant t}\chi\Big[y(s-0)\neq y(s)\Big]\times\Bigg[\Big\{\int\limits_A l_s((x,y(s-0)),y(s))\tilde{\pi}(s,dx) +$$

$$+\int\limits_X\int\limits_{A\setminus\{x\}} g_s((x,y(s-0)),(u,y(s)))\rho_X(du)\tilde{\pi}(s,dx)\Big\}\times$$

$$\times\Big\{\tilde{l}_s(y(s-0),y(s)) + \tilde{G}_s(y(s-0),y(s))\Big\}^{-1} - \tilde{\pi}(s,A)\Bigg],$$

де

$$\tilde{\Lambda}_t(y) = \mathsf{M}\Big\{\Lambda_t((x(t),y),Y\setminus\{y\}\Big/\mathfrak{Y}_{[0,t]}\Big\},$$

$$\tilde{\Gamma}_t(y) = \mathsf{M}\Big\{\Gamma_t((x(t),y),Z\setminus\{(x(t),y)\})\Big/\mathfrak{Y}_{[0,t]}\Big\},$$

$$\tilde{l}_t(u,v) = \mathsf{M}\Big\{l_t((x(t),u),v)\Big/\mathfrak{Y}_{[0,t]}\Big\},$$

$$\tilde{G}_t(u,v) = \mathsf{M}\Big\{\int\limits_{X\setminus\{x\}} g_t((x(t),u),(w,v))\rho_X(dw)\Big/\mathfrak{Y}_{[0,t]}\Big\},$$

з початковою умовою

$$\tilde{\pi}(0,A) = \int_A g_0^*(x,y(0))\rho_X(dx) \times \left[\int_X g_0^*(x,y(0))\rho_X(dx)\right]^{-1}.$$

Як наслідок із **теореми 2.1.1** в підрозділі 2.2 отримано рівняння оптимальної нелінійної фільтрації для стрибкоподібного процесу з незалежними приростами у випадковому марковському середовищі.

Іншою важливою задачою статистики випадкових процесів, тісно пов'язаною з задачою фільтрації, є задача інтерполяції, розглянута в підрозділі 2.3. Задача інтерполяції для процесу $z(t), t\geqslant 0$, полягає у знаходженні умовних розподілів

$$\hat{p}_T(t,A) = \mathrm{P}\left\{ x(t)\in A \middle/ \mathfrak{Y}_{[0,T]} \right\},\ 0\leqslant t\leqslant T,\ A\in\mathfrak{B}_X.$$

В підрозділі 2.3 доведено справедливість такого твердження.

Теорема 2.3.1. Якщо виконані умови **теореми 2.1.1** і крім того існує така σ-скінченна міра $\rho_X(\cdot)$ на вимірному просторі $\{X,\mathfrak{B}_X\}$, $\mathfrak{B}_Y$-вимірна по $y\in Y$, $\mathfrak{B}_X$-вимірна по $x\in X$ та $u\in X$, обмежена і неперервна по $y\in Y$ функція $m(t,(x,y),u)$ така, що для будь-яких $t\geqslant 0$, $z=(x,y)\in Z$ та $A\in\mathfrak{B}_X$ $\mathrm{M}_t((x,y),A) = \int_A m(t,(x,y),u)\rho_X(du)$, і для будь-яких $t\geqslant 0$, $y\in Y$, та $A\in\mathfrak{B}_X$ $\mathrm{MM}_t((x(t),y),A\setminus\{x(t)\})<\infty$, то для довільних $0\leqslant t\leqslant T$, та довільної множини $A\in\mathfrak{B}_X$ умовний розподіл $\hat{p}_T(t,A)$ з ймовірністю 1 задовольняє рівнянню

$$\hat{p}_T(t,A) = \tilde{\pi}(T,A) - \int_T^t\left[\int_A\int_{X\setminus\{\xi\}} m(s,(\xi,y(s)),u)\cdot\left[h^*(s,u)\right]^{-1}\hat{p}_T(s,du)\times\right.$$
$$\left.\times\tilde{\pi}(s,d\xi) - \int_A\int_{X\setminus\{\xi\}} m(s,(x,y(s)),\xi)\cdot\tilde{\pi}(s,dx)\left[h^*(s,\xi)\right]^{-1}\hat{p}_T(s,d\xi)\right]ds -$$
$$-\int_T^t\left[\int_A\int_{X\setminus\{\xi\}} g(s-0,(\xi,y(s-0)),(u,y(s)))\cdot\left[\int_{X\setminus\{u\}} g(s-0,(x,y(s-0)),\right.\right.$$
$$\left.(u,y(s)))\tilde{\pi}(s-0,dx) + l(s-0,(u,y(s-0)),y(s))\cdot h^*(s-0,\xi)\right]^{-1}\times$$
$$\times\hat{p}_T(s,du)\cdot\tilde{\pi}(s-0,d\xi) + \int_A l(s-0,(\xi,y(s-0)),y(s))\cdot h^*(s-0,\xi)\cdot\left[\int_{X\setminus\{\xi\}} g(s-\right.$$
$$-0,(x,y(s-0)),(\xi,y(s)))\tilde{\pi}(s-0,dx) + l(s-0,(\xi,y(s-0)),y(s))\cdot$$
$$\left.\left.h^*(s-0,\xi)\right]^{-1}\cdot\hat{p}_T(s,d\xi) - \hat{p}_T(s,A)\right]dN(s),$$

де умовний розподіл $\tilde{\pi}(t,A)$, $t\geqslant 0$, $A\in\mathfrak{B}_X$ визначається **теоремою 2.1.1**, а $h^*(t,u)$, $t\geq 0$, $u\in X$ з ймовірністю 1 задовольняє такому стохастичному рівнянню

$$h^*(t,x) = g_0^*(x,y(0))\cdot\left[\int_X g_0^*(x,y(0))\rho_X(dx)\right]^{-1} + \int_0^t\left[\int_{X\setminus\{x\}} m(s,(u,y(s)),x)\cdot h^*(s,u)\rho_X(du) - \lambda(s,x,y(s))\cdot h^*(s,x) - h^*(s,x)\left\{\int_X\int_{X\setminus\{x\}} m(s,(u,y(s)),x)\cdot h^*(s,u)\rho_X(du)\rho_X(dx) - \int_X\lambda(s,x,y(s))\cdot h^*(s,x)\rho_X(dx)\right\}\right]ds +$$

$$\int_0^t\left[\left[l(s-0,(x,y(s-0)),y(s))\cdot h^*(s-0,x) + \int_{X\setminus\{x\}} g(s-0,(u,y(s-0)),(x,y(s)))\cdot h^*(s-0,u)\rho_X(du)\right]\cdot\left[\int_X l(s-0,(x,y(s-0)),y(s))\cdot h^*(s-0,x)\rho_X(dx) + \int_X\int_{X\setminus\{x\}} g(s-0,(u,y(s-0)),(x,y(s)))\cdot h^*(s,u)\rho_X(du)\rho_X(dx)\right]^{-1} - h^*(s-0,x)\right]dN(s),$$

при цьому, $dN(s) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } y(s-0) \neq y(s), \\ 0, & \text{якщо } y(s-0) = y(s). \end{cases}$

В підрозділі **2.4**, як наслідок **теореми 2.3.1**, отримано розв'язок задачі інтерполяції для розривного марковського процесу за спостереженнями визначеного на ньому стрибкоподібного процесу з незалежними приростами.

Досить часто статистичний аналіз стохастичних систем передбачає відновлення стану системи, що недоступний безпосередньому спостереженню, за відомими значеннями деякої її характеристики, розподіл якої залежить від цього стану на момент спостереження. Якщо при цьому функціонування системи описується деяким марковським процесом, то відповідна схема спостережень називається "Прихованою Марковською Моделлю" (Hidden Markov Models). Подібні моделі набули широкого застосування в техніці, медицині, соціологічних дослідженнях, при автоматичному розпізнаванні мови та інших галузях.

Розділ 3 присвячений розробці методів параметричного та непараметричного оцінювання для прихованих марковських моделей за наявними спотереженнями, що являють собою послідовність умовно незалежних випадкових величин, визначених на деякому ланцюгу Маркова.

Розглянуто також задачу побудови критеріїв перевірки статистичних гіпотез для марковських статистичних моделей.
В підрозділі **3.1** вивчаються багатовимірні марковські процеси $\zeta(t) = \{x(t), \xi(t)\}$, $t \geq 0$, що мають наступну структуру: $x(t)$, $t \geq 0$ - однорідний незвідний ланцюг Маркова з множиною станів $\mathbb{I} = \{1,2,\dots,k\}$, та матрицею перехідних ймовірностей за один крок $\mathbb{P} = \|p_{ij}\|$, $i,j \in \mathbb{I}$. $\xi(t)$, $t \geq 0$, являє собою послідовність умовно незалежних випадкових величин, визначених на ланцюгу $x(t)$, тобто $\xi(t) = \xi^{(t)}_{x(t)}$, $t \geq 0$, де $\left\{\xi^{(l)}_i,\ l=0,1,2,\dots;\ i \in \mathbb{I}\right\}$ - сукупність незалежних від процесу $x(t)$, $t \geq 0$, випадкових величин, незалежних при різних l, розподіл яких не залежить від індексу l. Припустимо далі, що перехідні ймовірності P ланцюга $x(t)$, та функції розподілу $\mathbf{F}_i(x) = \mathrm{P}\left\{\xi^{(l)}_i < x\right\}$ випадкових величин $\xi^{(l)}_i$ залежать від деякого параметру θ,

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}(\theta),\ \mathbf{F}_i(x) = \mathbf{F}_i(x,\theta),\ x \in \mathbb{R}_1,\ i \in \mathbb{I},\ \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}_r,$$

точне значення $\theta^{(0)}$ якого є внутрішньою точкою множини $\Theta \subset \mathbb{R}_r$, невідоме і має бути оціненим за спостереженнями $\xi^{(n)} = \{\xi(0),\dots,\xi(n)\}$ другої компоненты процесу $\zeta(t)$. Значення першої компоненты $\check{x}^{(n)} = \{x(0),\ \dots\ ,\ x(n)\}$ при цьому невідомі. Нехай $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$ - деяка функція дійсного аргументу. Визначимо статистики

$$\mathbf{q}^{(t)}_n = \frac{1}{n}\cdot\sum_{l=1}^{n} g(\xi(l))g(\xi(l+t)),\ t \geq 1;\quad \bar{\mathbf{q}}_n = \left\{\mathbf{q}^{(1)}_n,\dots,\mathbf{q}^{(r)}_n\right\}.$$

Позначимо

$$\mathbf{G}_i(\theta) = \mathrm{M}g(\xi^{(l)}_i) = \int_{\infty}^{\infty} g(x)d\mathbf{F}_i(x,\theta),\ i \in \mathbb{I},$$

і якщо $\pi(\theta) = \{\pi_1(\theta),\dots,\pi_k(\theta)\}$ - стаціонарний розподіл $x(t)$, $\pi(\theta) = \pi(\theta)\cdot\mathbb{P}(\theta)$, то нехай

$$\mathbf{q}_t(\theta) = \sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \pi_l(\theta)\mathbf{p}^{(t)}_{lj}(\theta)\mathbf{G}_l(\theta)\mathbf{G}_j(\theta),\ \bar{\mathbf{q}}(\theta) = \left\{\mathbf{q}_1(\theta),\dots,\mathbf{q}_r(\theta)\right\}.$$

У підрозділі **3.1** пропонується шукати оціку $\hat{\theta}_n$ параметра $\theta^{(0)}$, як розв'язок системи рівнянь $\bar{\mathbf{q}}(\theta) = \bar{\mathbf{q}}_n$. Доведена тут **Теорема 3.1.1** дає умови існування оцінок $\hat{\theta}_n$, встановлює їх спроможність та асимптотичну нормальність.

У підрозділі **3.2** розглянуто частковий випадок моделі підрозділу **3.1**, коли вдається забезпечити виконання умов **теореми 3.1.1** та вказати метод знаходження розв'язків системи рівнянь, що визначають оцінки невідомих параметрів. Зазначимо, що розглянута тут схема досить поширена при математичному описанні різноманітних стохастичних систем і дає можливість запропонувати метод непараметричного оцінювання для прихованих марковських моделей. А саме, припустимо, що матриця перехідних ймовірностей $\mathbb{P}$ повністю визначена і відома, а для кожного $i\in\mathbb{I}$ функція розподілу $\mathbf{F}_i(x) = \mathbf{F}_i(x,\theta_i), x\in\mathbb{R}_1$, $\theta_i\in\Theta_i$, залежить від деякого невідомого параметру θ_i, істине значення якого $\theta_i^0, i\in\mathbb{I}$ – внутрішня точка деякої відкритої множина Θ_i на числовій прямій.

Нехай виконується наступна умова.

(A). Існує така функція $\varphi(x), x\in\mathbb{R}_1$, що якщо

$$\mathbf{a}_i(\theta_i) = \mathrm{M}_{\theta_i}\varphi(\xi_i^{(1)}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)d\mathbf{F}_i(x,\theta_i),\ i\in\mathbb{I},$$

то для кожного $i\in\mathbb{I}$ функція $\mathbf{a}_i(\theta)$ неперервна в області $\theta\in\Theta_i$, і при цьому існує деякий окіл S_i точки $\mathbf{a}_i^0=\mathbf{a}_i(\theta_i^0)$, що для будь-якого $\alpha\in S_i$ рівняння $\mathbf{a}_i(\theta)=\alpha$ має єдиний розв'язок в області Θ_i, $(i\in\mathbb{I})$.

У підрозділі **3.2** показано, що в цьому випадку спроможні оцінки вектору параметрів θ^0 можна отримати вибравши відповідним чином функцію $\varphi(x)$ та побудувавши спроможні оцінки для вектора $\mathbf{a}^0=\left\{\mathbf{a}_1^0, \mathbf{a}_2^0,\dots,\mathbf{a}_k^0\right\}$, і знаючи асимптотичну поведінку оцінок $\alpha_n = \left\{\alpha_n^{(1)},\dots, \alpha_n^{(k)}\right\}$ вектора $\mathbf{a}^0$, можна визначити асимптотичну поведінку оцінок $\theta_n= \left\{\theta_n^{(1)},\dots,\theta_n^{(k)}\right\}$ вектора параметрів θ^0. Метод же побудови спроможних та асимптотично нормальних оцінок α_n вектора $\mathbf{a}^0$ дається в наступній теоремі.

Виберемо деяку функцію $\varphi(x)$, що задовольняє умову **(A)**, та визначимо статистики: $\mathbf{m}_n^{(p)} = \frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{t=0}^{n-1}\varphi(\xi(t))\varphi(\xi(t+p)),\ p=1,2,\dots,k.$

Теорема 3.2.1. Якщо ланцюг Маркова $x(t), t\geq 0$ незвідний, неперіодичний, $\pi=\left\{\pi_1,\dots,\pi_k\right\}$ – його стаціонарний розподіл, всі власні числа $\mu_1,\dots,\mu_k$ матриці $\mathbb{P}$ – дійсні, різні та відмінні від 0, а також для будь-яких $i,j,l\in\mathbb{I}$

$$\sum_{l=1}^{k}\frac{\sqrt{\pi_i\pi_j}}{\pi_l}\cdot p_{il}p_{jl}=\sum_{l=1}^{k}\frac{\pi_l}{\sqrt{\pi_i\pi_j}}\cdot p_{li}p_{lj},$$

то з ймовірністю, що прямує до 1 при $n\to\infty$, система рівнянь

$$\left\{\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\pi_i p_{ij}^{(p)}x_i x_j=m_n^{(p)}\\ p=1,\dots,k\end{array}\right.$$

де $\mathbb{P}^{(p)}=\|p_{ij}^{(p)}\|=\left[\mathbb{P}\right]^p$, $i,j\in\mathbb{I}$, $p=1,\dots,k$, матриця перехідних ймовірностей ланцюга $x(t),t\geqslant 0$ за p кроків, має дійсні розв'язки, один з яких є спроможною оцінкою вектора $\mathbf{a}^0=\left\{a_1^0,\dots,a_k^0\right\}$.

В процесі доведення **Теореми 3.2.1** пропонується метод отримання розв'язків згаданої там системи рівнянь, а також в підрозділі **3.2** вказана процедура визначення серед них спроможної оцінки вектора $\mathbf{a}^0$, та доведена її асимптотична нормальність.

У підрозділі **3.3** запропоновано ще один метод побудови спроможних та асимптотично нормальних оцінок параметрів частково спостережуваних марковських систем, який можна розглядати як узагальнення на такі моделі класичного методу моментів.

У підрозділі **3.4** вивчено умови існування оцінок максимальної правдоподібності параметрів марковських моделей з довільним фазовим простором, а також досліджено їх асимптотичні властивості. На підставі цих результатів побудовано критерій для перевірки статистичних гіпотез про ідентичність марковських моделей.

В четвертому розділі розглянуто ряд конкретних прикладів застосування результатів попередніх розділів до статистичного аналізу стохастичних систем. Так в підрозділі **4.1** пропонується підхід до оптимального оцінювання функціоналів типу моменту попадання в фіксовану множину станів та їм подібних для частково спостережуваних марковських та напівмарковських систем. Як ілюстрація запропонованого методу в підрозділі **4.2** наводиться розв'язок задачі, що в деякому розумінні є узагальненням класичної задачі "про розладку".

Розглянемо деяку стохастичну систему з дискретною множиною станів $\mathbb{E}=\left\{0,1,2,\dots\right\}$, математичною моделлю якої є напівмарковський процес $\eta(t),t\geqslant 0$, що задається напівмарківською матрицею

$$\mathbf{Q}(x) = \|Q_{ij}(x)\|, \ i,j\in\mathbb{E}, \ x\in[0,\infty),$$

та вектором початкового розподілу $\mathbf{p} = \left\{p_i, \ i\in\mathbb{E}\right\}$. Позначимо через $x(n), n\geqslant 0$,- вкладений ланцюг Маркова для напівмарковського процесу $\eta(t), t\geqslant o$, і нехай $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots$- послідовність довжин часових інтервалів між черговими змінами станів процесу $\eta(t)$.

$$\varkappa_0 = min\{n, \ n\geqslant 0, \ x(n)=0\}-$$

момент першого попадання вкладеного ланцюга $x(n)$ в стан $\{0\}$.

Припустимо далі, що є можливість спостерігати тільки випадкові величини $\left\{\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots\right\}$, що дорівнюють часу перебування напівмарковського процесу $\eta(t), t\geqslant 0$ у послідовних станах $x(0)$, $x(1), \ldots$, при цьому самі ці стани залишаються невідомими. Позначимо через $\mathfrak{A}_m^n(\tau) = \sigma\left\{\tau_m, \tau_{m+1}, \ldots, \tau_n\right\}$ –σ-алгебру, що породжується випадковими величинами $\tau_m, \tau_{m+1}, \ldots, \tau_n$, $\mathfrak{A}(\tau) = \left\{\mathfrak{A}_0^n(\tau), \ n=0,1,\ldots\right\}$ –потік σ-алгебр, що породжується послідовністю τ_0, τ_1, $\tau_2, \ldots$, і $\mathfrak{M}\left[\mathfrak{A}(\tau)\right]$– клас марковських моментів відносно потоку $\mathfrak{A}(\tau)$. Для довільного $\mu\in\mathfrak{M}\left[\mathfrak{A}(\tau)\right]$ покладемо $\mathfrak{E}_{\varkappa_0}(\mu) = \mathsf{M}|\varkappa_0-\mu|$. Марковський момент $\mu^*\in\mathfrak{M}\left[\mathfrak{A}(\tau)\right]$ назвемо оптимальною оцінкою моменту $\varkappa_0$, якщо

$$\mathfrak{E}_{\varkappa_0}(\mu^*) = \inf_{\mu\in\mathfrak{M}\left[\mathfrak{A}(\tau)\right]} \mathfrak{E}_{\varkappa_0}(\mu).$$

Нехай $p_{ij}=Q_{ij}(\infty)$, $\mathbf{P}=\|p_{ij}\|=\mathbf{Q}(\infty)$, $G_i(x)=\sum\limits_{j\in\mathbb{E}} Q_{ij}(x)$, $i\in\mathbb{E}$, $\left[\bar{s}\right]\tilde{\mathbf{N}}$- оператор нормування координат вектора, тобто якщо $\bar{s}=\{s_1, s_2, \ldots\}$- вектор з невід'ємними координатами, причому $\sum\limits_{j\in\mathbb{E}} s_j<\infty$, то $\left[\bar{s}\right]\tilde{\mathbf{N}}$ позначає вектор $s' = \left\{s'_1, s'_2, \ldots\right\}$ – з координатами $s'_k = s_k \cdot \left[\sum s_j\right]^{-1}$.

В підрозділі **4.1** доведено справедливість наступних тверджень.

Теорема 4.1.4. Якщо ланцюг Маркова з матрицею перехідних ймовірностей $\mathbf{P}$ - незвідний і для всіх $i\in\mathbb{E}$ та $x\geqslant 0$, $G_i(x) = \int\limits_0^x g_i(u)du$, то випадкова величина $\mu^* = \min\left\{n,\ n\geq 0,\ \hat{r}_n(0) \leqslant 0{,}5\right\}$ є моментом зупинки із класу $\mathfrak{M}\left[\mathfrak{A}(\tau)\right]$ (тобто $\mathrm{P}\left\{\mu^*<\infty\right\}=1$) і являє собою оптимальну оцінку моменту æ_0. При цьому $\hat{r}_n(0)=\sum\limits_{i\in\mathbb{E}}\hat{r}_n(\{i,0\})$, а вектор $\hat{R}_n=\left\{\hat{r}_n(\{i,0\}), i\in\mathbb{E},\ \hat{r}_n(\{i,1\}), i\in\mathbb{E}\right\}$ визначається рівністю

$$\hat{R}_n = \left[\mathbf{p}[\tau_0]\cdot\mathrm{R}[\tau_1]\cdot\mathrm{R}[\tau_2]\cdot\ldots\cdot\mathrm{R}[\tau_n]\right]\tilde{\mathbf{N}},$$

де $\mathbf{p}[\tau] = \left\{p_{(i,0)}[\tau],\ i\in\mathbb{E},\ p_{(i,1)}[\tau],\ i\in\mathbb{E}\right\}$ – вектор з координатами

$$p_{(i,0)}[\tau]=\mathrm{p}_i\cdot g_i(\tau),\ i\in\mathbb{E},\ i\neq 0;\ p_{(0,0)}[\tau]=0;\ p_{(0,1)}[\tau]=\mathrm{p}_0\cdot g_0(\tau);$$
$$p_{(i,1)}[\tau] = 0,\ i\in\mathbb{E},\ i\neq 0;$$

$\mathrm{R}[\tau] = \|R^{(j,k)}_{(i,l)}[\tau]\|$, $i,j\in\mathbb{E}$, $l,k\in\{0;1\}$, $\tau\in[0,\infty)$, при кожному фіксованому $\tau\geq 0$ – квадратна матриця, елементи якої визначаються співвідношеннями: $R^{(j,0)}_{(i,0)}[\tau] = p_{ij}\cdot g_j(\tau)$, $i\in\mathbb{E}$, $i\neq 0; j\in\mathbb{E}$, $j\neq 0$; $\tau\geq 0$;

$$R^{(0,0)}_{(i,0)}[\tau] = 0,\ i\in\mathbb{E},\ \tau\geq 0;\ R^{(0,1)}_{(0,0)}[\tau] = g_0(\tau),\ \tau\geq 0;$$
$$R^{(0,1)}_{(i,0)}[\tau] = p_{i0}\cdot g_0(\tau),\ i\in\mathbb{E},\ \tau\geq 0;\ R^{(j,0)}_{(i,1)}[\tau] = 0,\ i\in\mathbb{E},\ j\in\mathbb{Y},\ \tau\geq 0;$$
$$R^{(j,1)}_{(i,1)}[\tau] = p_{ij}\cdot g_j(\tau),\ i\in\mathbb{E},\ j\in\mathbb{E},\ \tau\geq 0.$$

Теорема 4.1.5. Послідовність векторів $\hat{R}_n$, $n=0,1,\ldots$ задовольняє наступному рекурентному рівнянню:

$$\hat{R}_0 = \left[\mathbf{p}[\tau_0]\right]\tilde{\mathbf{N}},\ \hat{R}_n = \left[\hat{R}_{n-1}\cdot\mathrm{R}[\tau_n]\right]\tilde{\mathbf{N}},\ n=1,2,\ldots$$

В підрозділі **4.2** наведено ще один приклад оптимального оцінювання послідовних моментів зміни стану та кількості змін стану на проміжку спостереження для частково спостережуваної марковської системи з дискретною компонентою. А саме, нехай на деякому ймовірносному просторі $\left\{\Omega,\mathfrak{F},\mathrm{P}\right\}$ задана марковська послідовність $\zeta(n), n\geq 0$, наступним чином: $\zeta(n)=\{\eta(n),\xi(n)\}\in\left\{1,2\right\}\times\mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ – деякий вимірний простір з σ-алгеброю вимірних множин $\mathfrak{B}_{\mathbb{X}}$.

$$\mathrm{P}\left\{\eta(0) = i,\ \xi(0)\in A\right\} = \pi_i\cdot G_i(A),\ i\in\left\{1,2\right\},\ A\in\mathfrak{B}_{\mathbb{X}},$$

$$\mathrm{P}\left\{\eta(n+1)=j,\ \xi(n+1)\in A \,\big/\, \eta(n)=i,\ \xi(n)\right\}=p_{ij}\cdot G_j(A),\ i,j\in\left\{1,2\right\},\ A\in\mathfrak{B}_{\mathbb{X}},$$

де $P = \|p_{ij}\|$, $i,j \in \{1,2\}$ – стохастична матриця, $G_1(x)$, $G_2(x)$ – деякі розподіли ймовірностей на X. Покладемо

$$\theta_1 = \min\left\{n, n \geq 0, \eta(n)=2\right\}, \ \theta_k = \min\left\{n, n \geq \theta_{k-1}, \eta(n-1) \neq \eta(n)\right\}$$

– послідовні моменти зміни станів дискретної компоненти $\eta(n), n \geq 0$.

Позначимо

$$\mathfrak{F}_n = \sigma\left\{\xi(0),\dots,\xi(n)\right\}, \ n=0,1,\dots -$$

σ-алгебру, що породжується випадковими величинами $\xi(0),\dots,\xi(n)$, а $\mathfrak{M}\left[\mathfrak{F}^{\xi}\right]$ – множину всіх моментів зупинки τ відносно системи σ-алгебр

$$\mathfrak{F}^{\xi} = \left\{ \mathfrak{F}_n = \sigma\left\{\xi(0),\dots,\xi(n)\right\}, \ n=0,1,\dots \right\}.$$

Нехай τ – деякий момент зупинки. Позначимо

$$S^{\tau}_{(k)} = M|\theta_k - \tau|, \quad S^{*}_{(k)} = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}\left[\mathfrak{F}^{\xi}\right]} M|\theta_k - \tau|,$$

$$\nu(n) = \max\left\{k, \ \theta_k \leq n\right\}, \quad \nu(n) = 0, \text{ якщо } \theta_1 > n.$$

І якщо μ_n – деяка дискретна випадкова величина, що набуває значень $\left\{0,1,\dots,n\right\}$, то покладемо

$$\mathfrak{m}(\mu_n) = M|\nu(n) - \mu_n|, \quad \mathfrak{m}^* = \inf_{\mu_n} \mathfrak{m}(\mu_n).$$

В підрозділі **4.2** знайдено оптимальну оцінку τ^*_k моменту θ_k, та оптимальну оцінку μ^*_k випадкової величини $\nu(n)$, що визначаються відповідно співвідношеннями $S^{\tau^*_k}_{(k)} = S^*_{(k)}$, та $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{m}(\mu^*_n)$, за спостереженнями $\tilde{\xi}_n = \left\{\xi(0),\dots,\xi(n)\right\}$ другої компоненти процесу $\zeta(n)$ на проміжку часу $0,\dots,n$.

З метою ілюстрації розроблених в підрозділах **3.1** та **3.3** методів оцінювання параметрів прихованих марковських моделей в підрозділі **4.3** розглянуто задачу побудови спроможних та асимптотично нормальних оцінок параметрів наступної частково спостережуваної системи масового обслуговування.

На вхід системи, що складається з одного обслуговуючого пристрою і не має місць для очікування початку обслуговування в черзі, надходить найпростіший потік вимог. Параметр вхідного потоку дорівнює λ. Якщо в момент надходження вимоги обслуговуючий прилад вільний, він негайно починає її обслуговувати. Час обслуговування –

випадкова величина, що має показниковий розподіл з параметром ν, і розподіл цей не залежить ні від моменту початку обслуговування, ні від того, що відбувалось в системі до цього моменту. Якщо в момент надходження чергової вимоги обслуговуючий прилад зайнятий - ця вимога втрачається. Позначимо t_k - момент надходження k-ї по порядку вимоги в систему, s_k - момент, коли ця вимога залишає систему. Введемо послідовність $\tau=\left\{\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_k,\ldots\right\}$, що являє собою впорядковану в порядку зростання суміш послідовностей $t=\left\{t_1,\ldots,t_k,\ldots\right\}$ та $s=\left\{s_1,\ldots,s_k,\ldots\right\}$. При цьому, якщо k-та за порядком вимога надходить в момент, коли обслуговуючий пристрій занятий обслуговуванням, то $t_k = s_k$.

Припустимо, що спостереженню доступний лише точковий процес τ_k, $k=1,2,\ldots$, при цьому повна інформація про те, які зміни відбуваються в системі в моменти τ_k , $k=1,2,\ldots$, - відсутня. Необхідно за вектором спостережень $\hat{\tau}_{(n)}=\left\{\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n\right\}$ знайти оцінку невідомих параметрів системи λ та μ.

Введемо статистики

$$\xi(k)=\tau_k-\tau_{k-1},\ k\geq1,\ \tau_0=0;\ q_n=\frac{1}{n}\cdot\sum_{l=1}^{n}\xi(l)=\frac{\tau_n}{n},\ G_n=\frac{1}{n}\cdot\sum_{l=1}^{n}\xi(l)\cdot\xi(l+1).$$

Тоді використання методу, запропонованого в підрозділі **3.1**, дає.

Теорема 4.3.1. Випадкова величина

$$\tilde{\lambda}_n=\left[q_n+\sqrt{q_n^2-G_n}\right]\cdot\left[1-\sqrt[4]{1-\frac{G_n}{q_n^2}}\right]\cdot G_n^{-1}$$

є спроможною і асимптотично нормальною оцінкою параметру λ.

Випадкова величина

$$\tilde{\nu}_n=\left[q_n+\sqrt{q_n^2-G_n}\right]\cdot\left[\sqrt[4]{1-\frac{G_n}{q_n^2}}\right]\cdot G_n^{-1}$$

є спроможною і асимптотично нормальною оцінкою параметру ν. Оцінки для параметрів цієї ж системи, отримані за методом, запропонованим в підрозділі **3.3**, мають вигляд.

Теорема 4.3.2. Випадкова величина

$$\lambda_n^*=\left[m_n\cdot\left[1+\sqrt[3]{\frac{M_n}{m_n^2}-1}\right]\right]^{-1}$$

є спроможною і асимптотично нормальною оцінкою параметру λ.

Випадкова величина

$$\nu^*_n = \sqrt[3]{\frac{M_n}{m_n^2} - 1} \cdot \left[m_n \cdot \left(1 - \sqrt[3]{\left[\frac{M_n}{m_n^2} - 1 \right]^2} \right) \right]^{-1}$$

є спроможною і асимптотично нормальною оцінкою параметру ν, де

$$m_n = q_n = \frac{\tau_n}{n}, \; M_n = \frac{1}{2n} \cdot \sum_{t=1}^{n} \left(\xi(t) \right)^2 .$$

Застосовуючи запропонований в **теоремі 3.2.4** метод непараметричного оцінювання для знаходження невідомих функцій розподілу в так званій моделі Кокса,що являє собою приховану марковську модель з двома станами, в підрозділі **4.4** знайдено явний вигляд оцінок для невідомих функцій розподілу випадкових величин, що визначають цю модель,та встановлено їх спроможність і асимптотичну нормальність.

Розділ 5 присвячено розробці методів асимптотичного аналізу складних стохастичних систем та застосуванню цих методів до знаходження наближених розв'зків в оптимізаційних задачах. У багатьох важливих з практичної точки зору випадках для побудови адекватної математичної моделі досліджуваної системи в класі марковських процесів виникає необхідність введення додаткових компонент з неперервною множиною станів, що значно ускладнює математичну модель. При цьому багато важливих характеристик стохастичних систем виражаються у вигляді адитивних функціоналів від їх траєкторій. Крім того характерною для систем, що функціонують в умовах дії випадкових збурень, є ситуація, коли фазовий простір системи складається із деякої кількості (як правило не дуже великої) класів, що відображають певний стан системи. При цьому зміна стану (перехід із одного класу фазового простору в інший) відбувається досить "рідко", в той час, коли поведінка системи розглядається на "великому" проміжку часу. В таких ситуаціях особливого значення набувають асимптотичні методи аналізу стохастичних систем, а при дослідженні згаданих вище адитивних характеристик систем ефективно можуть бути використані граничні теореми для схем підсумовування випадкових величин на відповідних класах випадкових процесів та результати по асимптотичному укрупненню станів стохастичних систем.

В підрозділі **5.1** даного розділу наведено ряд прикладів використання отриманих автором в роботах [1], [2] граничних теорем для схем підсумовування випадкових величин на випадкових процесах з довільним фазовим простором та теорем по асимптотичному укрупненню станів стохастичних систем, адекватними математичними моделями яких виступають марковські та напівмарковські процеси з довільною множиною станів, до асимптотичного аналізу систем, що не допускають математичну формалізацію в рамках дискретних процесів, та систем, що допускають асимптотичне укрупнення станів. В наступних підрозділах розглянуто ряд оптимізаційних задач для марковських моделей з дискретним втручанням випадку, та наведено приклади, які ілюструють можливість ефективного використання методів асимптотичного аналізу до оптимізації стохастичних систем, що характеризуються відсутністю стаціонарного режиму.

В підрозділі 5.2 досліджено умови ергодичності та запропоновано метод знаходження стаціонарного розподілу для одного класу марковських моделей регенеруючого типу, що можуть служити математичними моделями для стохастичних систем керування запасами. А саме, розглядається наступний клас марковських систем з дискретним втручанням випадку. Нехай функціонування стохастичної системи в "ідеальних" умовах описується випадковим процесом $\xi(t), t\geqslant 0$, з фазовим простором $(\mathfrak{X},\mathfrak{B}_{\mathfrak{X}})$. $\theta_n, n\geqslant 1$ - дійснозначний невід'ємний точковий процес, $(0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 < \ldots)$. $\mu(A)$, $A\in\mathfrak{B}_{\mathfrak{X}}$ - деяка ймовірносна міра на $(\mathfrak{X},\mathfrak{B}_{\mathfrak{X}})$. Процес $\tilde{\xi}(t), t\geqslant 0$, що відображає поведінку системи в "реальних" умовах, відрізняється від $\xi(t), t\geqslant 0$, тим, що незалежно від траєкторії $\left\{\xi(s),\ 0\leqslant s<\theta_n\right\}$ розподіл процесу $\tilde{\xi}(t)$ в моменти θ_n, $n\geqslant 1$, співпадає з $\mu(A), A\in\mathfrak{B}_{\mathfrak{X}}$. В проміжках часу $\theta_n<t<\theta_{n+1}$ процес $\tilde{\xi}(t)$ розвивається так само, як розвивався б процес $\xi(t)$ з врахуванням того, що його попередня траєкторія співпадає з $\left\{\tilde{\xi}(s),\ 0\leqslant s<\theta_n\right\}$. В підрозділі 5.2 вивчається процес $\tilde{\xi}(t)$ у випадку, коли $\xi(t)$ марковський процес. Досліджено умови існування стаціонарного розподілу у процесу $\tilde{\xi}(t)$, запропоновано метод його знаходження та розглянуто ряд прикладів розв'язку оптимізаційних задач;

В останніх двох підрозділах п'ятого розділу розробляються аналітичні методи дослідження функціоналів, що визначають ефективність фукціонування стохастичних систем керування запасами, та ієрархічних стохастичних систем і пропонується метод побудови наближених до оптимальних розв'язків оптимізаційних задач, що грунтується на використанні граничних теорем для спеціальних класів випадкових процесів з дискретним втручанням випадку.

В класичних стохастичних системах керування запасами, як правило, одним із основних припущень була наявність стаціонарного режиму у випадкових процесів, що служать математичними моделями для відповідних систем. При цьому оптимальні параметри системи вибирались із умови оптимізації фукціоналу якості в стаціонарному режимі. Характерною особливістю розглянутих в підрозділі **5.3** моделей є відсутність стаціонарного режиму у відповідних їм випадкових процесів. Наведемо один із результатів підрозділу **5.3**.

Нехай є запас деякого продукту об'єму V. j-те по порядку замовлення на продукт, що зберігається, надходить в момент часу

$$s_j = \tau^{(1)}(æ(1)) + \ldots + \tau^{(j)}(æ(j)), \quad j\geq 1,$$

і об'єм його дорівнює $\xi^{(j)}(æ(j))$. При цьому $æ(n)$, $n\geq 0$,- однорідний ланцюг Маркова з множиною станів $\mathbb{E} = \left\{1,2,\ldots,k\right\}$, матрицею перехідних ймовірностей за один крок $P=\|p_{ij}\|$, $i,j\in\mathbb{E}$, та початковим розподілом $q=\left\{q_i, i=1,\ldots,k\right\}$; $\left\{\left\{\tau^{(i)}(l),\xi^{(i)}(l)\right\}, l=1,\ldots,k\right\}, i\geq 0$,- сімейство не залежних від ланцюга $æ(n), n\geq 0$ випадкових векторів, компоненти яких з ймовірність 1 невід'ємні, незалежних при різних i, розподіл яких не залежить від індекса i.

Поповнюватись запас може тільки в деякі невипадкові моменти часу $\left\{k\theta,\ k=0,1,2,\ldots\right\}$, причому в кожний із цих моментів об'єм запасу поповнюється до рівня V. Якщо, до того ж, в момент поповнення є в наявності черга незадоволених вимог, то всі вони задовольняються. Параметр $\theta>0$ будемо називати періодом поповненя запасу. Вартість зберігання одиниці запасу протягом одиниці часу дорівнює c_1 ($c_1>0$). Якщо в момент надходження чергової заявки наявна в сховищі кількість продукту не дозволяє задовольнити її повністю, то нарахування штрафу може проводитись за одною з двох наступних схем:

Модель 1. Нехай $\zeta(s_j)$- об'єм запасу на складі в момент надходження j- ої заявки. Тоді сплачується штраф у розмірі

$$c_2\cdot max\left\{\xi^{(j)}(æ(j)) - \zeta(s_j);\ 0\right\},$$

і вимога залишає сховище.

Модель 2. Вимога, що залишилась невиконаною, чекає в сховищі чергового моменту поповнення запасу, вартість затримки на одиницю часу у виконанні замовлення на одиницю продукту дорівнює c_3.

Задача полягає у визначенні оптимального періоду θ_{opt} поповнення запасу, що мінімізує середні питомі витрати, пов'язані з роботою сховища. Іншими словами, якщо $W_l(t,V), l=1,2, t\geq 0$ - загальні витрати, пов'язані з роботою сховища на проміжку часу $(0,t)$ при умові, що початковий об'ем запасу дорівнює V відповідно для першої та другої моделі, то $\theta^{(l)}_{opt}$, $l=1,2$, вибирається із умови

$$\frac{MW_l(\theta^{(l)}_{opt},V)}{\theta^{(l)}_{opt}}=\min_{t>0}\frac{MW_l(t,V)}{t},\ l=1;2.$$

В підрозділі 5.3 знайдено явний вигляд перетворення Лапласа для функціоналів якості $MW_l(t,V), l=1,2$.

Для знаходження наближеного до оптимального розв'язку припустимо, що величини $\left\{\tau^{(l)}(i),\xi^{(l)}(i)\right\}, i=1,\dots,k,\ l\geq 1$, залежать від малого параметру $\varepsilon>0$ і прямують в деякому розумінні разом з ε до 0 та дослідимо модель, що отримується із заданої внаслідок граничного переходу при $\varepsilon\to 0$. В підрозділі 5.3 показано, що має місце наступний результат.

Теорема 5.3.5. Якщо виконані умови:

1) ланцюг Маркова $æ(n)$, $n\geq 1$ незвідний, неперіодичний і $\pi = \left\{\pi_1,\dots,\pi_k\right\}$- його стаціонарний розподіл;

2) для будь-яких s, z, таких, що $Re(s)>0$, $Re(z)>0$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\cdot\left[1-M\exp\left\{-s\tau^{(1)}_{\varepsilon}(i)\right\}\right]=sm(i),\ i=1,\dots,k;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\cdot\left[1-M\exp\left\{-z\xi^{(1)}_{\varepsilon}(i)\right\}\right]=za(i),\ i=1,\dots,k,$$

і не всі $m(i)$, $i=1,\dots,k$ рівні 0;

3) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot M\left[\xi^{(1)}_{\varepsilon}(i)\right]^2<\infty$ для любого $i=1,\dots,k$,

то для будь-яких фіксованих $v\geq 0$ та $t\geq 0$ існує границя

$$\lim_{\varepsilon\to 0}MW^{\varepsilon}_1(t,v)=\hat{W}_1(t,v),$$

і при цьому $$\hat{W}_1(t,v)=c_1\cdot\left[vt-t^2\cdot\sum_{i=1}^{k}\pi_i a(i)\cdot\left[2\sum_{i=1}^{k}\pi_i m(i)\right]^{-1}\right],$$

якщо $t\leq v\cdot\sum\limits_{i=1}^{k}\pi_i m(i)\cdot\left[\sum\limits_{i=1}^{k}\pi_i a(i)\right]^{-1}$;

і $\hat{W}_1(t,v) = c_2 \cdot \left[t \cdot \sum_{l=1}^{k} \pi_l a(l) \times \left[\sum_{l=1}^{k} \pi_l m(l) \right]^{-1} - v \right] +$

$$+ c_1 v^2 \cdot \sum_{l=1}^{k} \pi_l m(l) \cdot \left[2 \sum_{l=1}^{k} \pi_l a(l) \right]^{-1}, \text{ інакше;}$$

Якщо $2c_2 \geq c_1 v \cdot \sum_{l=1}^{k} \pi_l m(l) \cdot \left[\sum_{l=1}^{k} \pi_l a(l) \right]^{-1}$, то функція $\dfrac{\hat{W}_1(t,v)}{t}$ має єдиний мінімум в точці $\theta^{(1)}_{opt} = v \cdot \sum_{l=1}^{k} \pi_l m(l) \cdot \left[\sum_{l=1}^{k} \pi_l a(l) \right]^{-1}$; при цьому

$$\hat{W}_1(\theta^{(1)}_{opt}, v) = c_1 v^2 \cdot \sum_{l=1}^{k} \pi_l m(l) \cdot \left[\sum_{l=1}^{k} \pi_l a(l) \right]^{-1}.$$

Інакше функція $\dfrac{\hat{W}_1(t,v)}{t}$ монотонно спадає на всьому проміжку $t \in [0,\infty)$. Аналогічні твердження отримано також для **моделі 2**.

Модель, що досліджується в підрозділі **5.4**, може розглядатися, як математична формалізація для широкого кола прикладних стохастичних систем, що мають два рівні обслуговуючих пристроїв. Перший рівень (оперативне обслуговування) являє собою систему **M/M/n/0**. Другий (стаціонарне обслуговування) – систему **G/M/1/∞**. Вхідним для другого рівня є потік втрачених на першому рівні вимог, і вимоги, що потрапили на другий рівень, не можуть більше повернутись на перший, навіть якщо там є вільні прилади.

В підрозділі **5.4** знайдено умови існування стаціонарного режиму для описаної системи, та розв'язана задача оптимального з точки зору часу перебування вимог у системі розподілу інтенсивностей обслуговування між рівнями системи. Крім того в ситуації, коли кількість місць для чекання на другому рівні системи обмежена, з допомогою методу асимптотичного аналізу знайдено наближений розподіл часу до першої втрати вимоги в системі.

ВИСНОВКИ.

В дисертації отримано нові науково-обгрунтовані результати в галузі статистичного аналізу та оптимізації складних стохастичних систем, які в сукупності розв'язують важливу як з теоретичної так і з практичної точок зору наукову проблему оптимальної нелінійної фільтрації та інтерполяції розривних марковських процесів і статистичного оцінювання для спеціальних класів процесів з дискретною компонентою. Результати роботи дають можливість створення ефективних методів статистичного та асимптотичного аналізу і оптимізації стохастичних систем, а також значно розширюють коло прикладних моделей, що допускають такий аналіз.

Основними результатами даної дисертаційної роботи є:

- отримано рівняння оптимальної нелінійної фільтрації та інтерполяції для частково спостережуваних багатовимірних розривних марковських процесів;

- вивчено спеціальний клас випадкових процесів з дискретною компонентою - розривних процесів з незалежними приростами у випадковому марковському середовищі та розв'язано задачі оптимальної нелінійної фільтрації та інтерполяції для цього класу процесів;

- розроблено ряд методів параметричного та непараметричного оцінювання для прихованих марковських моделей і вивчено асимптотичні властивості отримуваних оцінок;

- досліджено можливість асимптотичного оцінювання для марковських статистичних моделей з довільним фазовим простором, та побудовано ряд статистичних критеріїв перевірки ідентичності математичних моделей для марковських систем;

- розв'язано задачу оптимального оцінювання для деяких класів функціоналів від частково спостережуваних марковських та напівмарковських систем, що дає можливість побудови ефективних методів оцінювання надійносних характеристик стохастичних систем в умовах відсутності повної статистичної інформації;

- проведено дослідження ряду конкретних складних стохастичних систем, що ілюструють широкі можливості практичного застосування отриманих теоретичних результатів, зокрема отримано явний розв'язок задачі непараметричного оцінювання для моделі Кокса частково спостережуваного напівмарковського процесу з двома станами;

- вивчено клас стохастичних систем з неперервною компонентою та систем, що допускають асимптотичне укрупнення станів, і наведено приклади асимптотичного аналізу ряду таких систем;

- досліджено умови ергодичності та запропоновано метод знаходження стаціонарного розподілу для одного класу марковських моделей регенеруючого типу, що можуть служити математичними моделями для стохастичних систем керування запасами, та проілюстровано можливість застосування цих результатів до розв'язку оптимізаційних задач;

- розроблено аналітичні методи дослідження функціоналів, що визначають ефективність фукціонування стохастичних систем керування запасами, та асимптотичні методи оптимізації стохастичних систем, що характеризуються відсутністю стаціонарного режиму, та ієрархічних стохастичних систем.

Результати роботи можуть бути ефективно використані при статистичному аналізі та оптимізації прикладних стохастичних систем, на їх основі створено та програмно реалізовано ряд рекурентних алгоритмів статистичного аналізу частково спостережуваних марковських систем.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ.

1. **Война А.А.** О суммировании случайных величин на процессах с произвольным расщепляющимся пространством состояний. // Доклады АН УССР, Сер. **А**.- 1978.- №6.- С. 483-486.

2. **Anisimov V.V., Voina A.A.** Limit theorems for summation schemes on random processes with an arbitrary state space. //Theor. Probability and Math. Statist..- 1980.- No.19.- P. 7-16.

3. **Анисимов В.В., Война А.А., Середа В.И.** Выбор оптимальных моментов контроля полумарковской системы с отказами. // Доклады АН УССР. Сер. **А**.- 1981.- №6.- С.79-82.

4. **Война А.А.** Асимптотический анализ систем с непрерывной компонентой. // Кибернетика.- 1982.- №4.- С. 98-103.

5. **Война А.А.** Оценка некоторых функционалов для марковских последовательностей с дискретной компонентой. // Доклады АН УССР, Сер. **А**.- 1982.- №11.- С. 6-9.

6. **Война А.А.** Одна модель оптимального регулирования запасами. // Доклады АН УССР, Сер. **А**.- 1983.- №1.- С. 11-14.

7. **Анисимов В.В., Война А.А., Лебедев Е.А.** Асимптотическое оценивание интегральных функционалов и укрупнение стохастических систем. // Вестник.Киевского университета. Моделирование и оптимизация сложных систем.- 1983.- Вып.2.- С. 41-50.

8. **Война А.А., С.Г.Пушкин.** Предельное поведение момента опустошения одной системы массового обслуживания. // Доклады АН УССР,

Сер. А.- I984.- №3.- С. 63-66.

9. **Война А.А.** Оценка параметров марковских систем в условиях неполной статистической информации. // Доклады АН УССР, Сер. А.- I986. - №3.- С. 7I-74.

10. **Война А.А.** Модель управления запасами с полумарковским входным потоком. // Исследование операций и АСУ.- I987.- Вып.29.- С.I0-I8.

11. **Voina A.A.** Statistical estimation in a scheme of random variables on Markov chains, with incomplete observations. // Theor. Probability and Math. Statist..- 1988.- No.37.- P. 19-28.

12. **Война А.А.** Задачи фильтрации скачкообразных процессов с независимыми приращениями в случайной среде. //Вестник Киевского университета. Моделирование и оптимизация сложных систем.- I989. - Вып.8.- С. 19-25.

13. **Война А.А.** Модель обслуживания с распределением заявок между оперативной и стационарной системами. // Исследование операций и АСУ.- I989.- Вып.33.- С.28-33.

14. **Война О.А.** Оптимальне регулювання регенеративного типу в марковських моделях. // Дослідження операцій та АСУ.- I992.- Вип.39.- С. 3-I0.

15. **Война А.А.** Критерій однорідності для скінченних марковських моделей. // Вісник Київського університету. Фіз.мат.науки.- I992. - Вип.7.- С. I2-I9.

16. **Война А.А.** Умовні марковські процеси та задачі оптимального оцінювання для напівмарковських процесів. // Вісник Київського університету. Фіз.мат.науки.- I993.- №2.- С. 88-97.

17. **Война А.А., Сидоров М.В-С.** Рівняння оптимальної нелінійної фільтрації та інтерполяції для частково спостережуваних марковських процесів. //Український математичний журнал.- I994.- т. 46. - №8.- С. 97I-976.

18. **Война А.А., Сидоров М.В-С.** Обернені рівняння оптимальної нелінійної інтерполяції для частково спостережуваних марковських процесів. // Доповіді НАН України.- I995.- №I.- С. 24-26.

19. **Война А.А.** Про фільтрацію розривних процесів з незалежними приростами у марковському середовищі. // Доповіді НАН України. - I995.- №II. С. 63-65.

20. **Война А.А.** Про умовний розподіл марковського процесу відносно спостережень визначеного на ньому стрибкоподібного процесу з незалежними приростами. //Доповіді НАН України.- I996.- №I0.- С.94-98.

В роботі [2] науковому консультанту належить постановка задачі та консультації в процесі написання роботи.

В роботі [3] науковому консультанту належить вибір моделі, автору - постановка оптимізаційних задач, вибір методу їх розв'язку та формулювання результатів, третім співавтором проведена реалізація доведень.

Робота [7] складається із трьох частин, написаних окремо кожним із співавторів. Атору належать результати другої частини.

В роботі [8] автору належить вибір моделі, постановка задач, формулювання результатів та вибір методу їх доведення. Співавтором проведена реалізація окремих доведень.

Роботи [17], [18] присвячені частковим випадкам задач, які розв'язуються в підрозділах 2.1 та 2.3 даної дисертації. Автору належать постановки задач, формулювання основних результатів та вибір методу їх доведення. Співавтором реалізовані доведення результатів у конструктивній формі, зручній для створення алгоритмів чисельного розв'язку відповідних задач.

Война О.А. Статистичний аналіз та оптимізація частково спостережуваних стохастичних систем з дискретним втручанням випадку.- Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.01- теоретичні основи інформатики та кібернетики - Київський університет ім. Тараса Шевченка, Київ, 1997.

Робота присвячена розробці математичних методів статистичного аналізу складних стохастичних систем, адекватними математичними моделями яких виступають розривні марковські процеси та спеціальні класи процесів з дискретним втручанням випадку. Розв'язано задачі оптимальної нелінійної фільтрації та інтерполяції для розривних марковських процесів, параметричного та непараметричного оцінювання в умовах відсутності повної статистичної інформації, оптимального оцінювання функціоналів від частково спостережуваних напівмарковських процесів, та досліджено властивості отримуваних оцінок. В роботі розроблено підхід до аналізу та оптимізації стохастичних систем, що базується на використанні асимптотичних методів теорії ймовірностей та граничних теорем для спеціальних класів випадкових процесів. Наведено багато прикладів, що ілюструють можливість ефективного практичного застосування отриманих результатів.

Ключові слова: марковські процеси, процеси з незалежними приростами у випадковому середовищі, приховані марковські моделі, фільтрація, інтерполяція, параметричне та непараметричне оцінювання, асимптотичний аналіз, моделі керування запасами.

Война А.А. Статистический анализ и оптимизация частично наблюдаемых стохастических систем с дискретным вмешательством случая.- Рукопись.

Дисертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.05.01- теоретические основы информатики и кибернетики - Киевский университет им.Тараса Шевченка, Киев, 1997.

Работа посвящена разработке математических методов статистического анализа сложных стохастических систем, адекватными математическими моделями которых являются разрывные марковские процессы и специальные классы процессов с дискретным вмешательством случая. Решены задачи оптимальной нелинейной фильтрации и интерполяции для разрывных марковских процессов, параметрического и непараметрического оценивания в условиях отсуствия полной статистической информации, оптимального оценивания функционалов от частично наблюдаемых полумарковских процессов и исследованы свойства получаемых оценок. В работе разработан подход к анализу и оптимизации стохастических систем, основанный на использовании асимптотических методов теории вероятностей и предельных теорем для специальных классов случайных процессов. Приведено много примеров, иллюстрирующих возможность эффективного практического применения полученых результатов.

Ключевые слова: марковские процессы, процессы с независимыми приращениями в случайной среде, скрытые марковские модели, фильтрация, интерполяция, параметрическое и непараметрическое оценивание, асимптотический анализ, модели управления запасами.

Voina O.A. The statistical analysis and optimization of the partially observed stochastic systems with the discrete interference of randomness. - Manuscript.

Thesis for a doctor's degree by speciality 01.05.01 - Theoretical Bases of Computer Science and Cybernetics.- Kyiv Taras Shevchenko University, Kyiv, 1997.

The dissertation is devoted to development of the mathematical methods of the statistical analysis of composite stochastic systems, wich are described of the discontinuous Markov processes and special classes of processes with the discrete interference of randomness. The taskes of optimal non-linear filtration and interpolation for the discontinuous Markov processes, the problems of parametric and nonparemetric estimation in the case when the complete statistical information are lacking are solved, the optimal estimation of the functionals of partially observed semi-Markov processes are constucted and the properties of the estimates are investigated. The examples of the applications of obtained results are presented.

Key words: Markov processes, the processes with independent increasses in random medium, hidden Markov models, filtration, interpolation, parametric and nonparemetric estimation, asymptotic analysis, model of store control.

Зам. 7-0916 Тираж 100
Надруковано у "Поліграфцентрі Київського університету
ім. Тараса Шевченка"
252017, Київ, бульвар Т.Шевченка, 14
тел. 224-01-05

chenko University. Kyiv, 1997.

The dissertation is devoted to development of the mathematical methods of the statistical analysis of composite stochastic systems, wich are described of the discontinuous Markov processes and special classes of processes with the discrete interference of randomness. The taskes of optimal non-linear filtration and interpolation for the discontinuous Markov processes, the problems of parametric and nonparametric estimation in the case when the complete statistical information are lacking are solved, the optimal estimation of the functionals of partially observed semi-Markov processes are constucted and the properties of the estimates are investigated. The examples of the applications of obtained results are presented.

Key words: Markov processes, the processes with independent increasses in random medium, hidden Markov models, filtration, interpolation, parametric and nonparametric estimation, asymptotic analysis, model-of-store control.