МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

РОНТО Андрій Миколайович

УДК 517.927.4

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ БАГАТОТОЧКОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

01.01.02 — диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 1997

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано на кафедрі інтегральних та диференціальних рівнянь Національного університету імені Тараса Шевченка.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор ПЕРЕСТЮК МИКОЛА ОЛЕКСІЙОВИЧ, Національний університет імені Тараса Шевченка, завідувач кафедрою інтегральних та диференціальних рівнянь

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник БОЙЧУК ОЛЕКСАНДР АНДРІЙОВИЧ, Інститут математики НАН України, провідний науковий співробітник

кандидат фізико-математичних наук, доцент ОРДИНСЬКА ЗОЯ ПАВЛІВНА, Київський політехнічний інститут, доцент

Провідна установа

Одеський державний університет імені І.І. Мечнікова, кафедра оптимального керування

Захист дисертації відбудеться «22» грудня 1997 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 01.01.21 при механіко-математичному факультеті Національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 252127, м. Київ, 127, пр. Глушкова, 6, ауд. 42.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: м. Київ, вул. Володимирська, 58.

Автореферат розісланий «21» листопаду 1997 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Курченко О.О.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Крайові задачі для різних типів диференціальних рівнянь, як відомо, часто виникають як математичні моделі різноманітних процесів в механіці та електротехніці, математичній біології та багатьох інших галузях науки і техніки. Численні застосування в теорії нелінійних коливань, теорії керування, теорії стійкості руху, яким присвячено значну кількість публікацій вітчизняних та зарубіжних вчених, наприклад, роботи Ю.О. Митропольського, А.М. Самойленка, І.Т. Кігурадзе, Є.О. Гребенікова, Г.М. Вайнікко, А.Ю. Лучки, J. Mawhin'а, М.В. Азбелєва, О.А. Бойчука, підтверджують актуальність досліджень в теорії крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь з імпульсами, інтегро-диференціальних рівнянь та більш складних класів функціонально-диференціальних рівнянь. Разом із подальшим розвитком вказаної теорії, важливого значення набувають методи, що дозволяють поряд із встановленням факту розв'язності задачі також одержувати апроксимації шуканих розв'язків.

Серед сучасних засобів вивчення нелінійних крайових задач досить широкого поширення набули так звані *чисельно аналітичні методи*, зокрема, *метод послідовних періодичних наближень*, запропонований А.М. Самойленком у 1965-му році для дослідження періодичних розв'язків ліпшицевих нормальних систем диференціальних рівнянь першого порядку. Певна універсальність ідеї методу та, у ряді випадків, простота його реалізації на практиці, спричинили серію активних досліджень щодо його узагальнення для застосування до більш широких класів дво- та багатоточкових крайових задач, оптимальному виборі схеми методу та покращення оцінок збіжності. Цим питанням було присвячено роботи Д.І. Мартинюка, М.О. Перестюка, П.П. Забрейка, Д. Байнова, M. Kwapisz'а, М.Й. Ронто, Ле Лионг Тая, О.П. Трофімчук та інших авторів. Недостатньо вивченими при цьому опинились, зокрема, багатоточкові крайові задачі, які задано за допомогою у певному розумінні *вироджених* крайових умов, таких, як, наприклад, умова вигляду $A_1x(t_1)+A_2x(t_2)=0$, де $x:[t_1,t_2]\to\mathbb{R}^n$, а для $n\times n$-матриць A_1 і A_2 виконано співвідношення

$$\left\{(k_1,k_2)\in\mathbb{R}^2:\det(k_1A_1+k_2A_2)\neq 0\right\}=\varnothing.$$

Виявилось, що розроблені раніше варіанти чисельно-аналітичного методу принципово не можуть бути застосовані до задач вказаного типу, у зв'язку з чим виникла проблема побудови нових схем методу, вільних від цього недоліку. Водночас, завдяки важливості крайових задач для ліпшицевих диференціальних рівнянь, бажано одержати ітераційні алгоритми, які є придатними до дослідження задач цього класу незалежно від значень відповідних констант Ліпшиця.

Дана дисертаційна робота частково розв'язує вказані проблеми.

Основною метою роботи є побудова та обгрунтування нових чисельно-аналітичних методів дослідження існування та наближеного відшукання розв'язків нелінійних (вироджених) багатоточкових крайових задач для ліпшицевих диференціальних рівнянь першого та другого порядків з великими сталими Ліпшиця.

Методи дослідження базуються на ідеях чисельно-аналітичного методу послідовних наближень А.М. Самойленка; теорії лінійних операторів на частково впорядкованих банахових просторах; методі Лере-Шаудера.

Наукова новизна результатів дисертації полягає в наступному:

- На базі запропонованого чисельно-аналітичного алгоритму отримано умови розв'язності багатоточкової крайової задачі для нормальної системи диференціальних рівнянь з гладкою правою частиною із, взагалі кажучи, виродженими крайовими умовами.
- Розроблено нову схему чисельно-аналітичного методу послідовних наближень для дослідження систем ліпшицевих диференціальних рівнянь першого порядку з лінійними багатоточковими крайовими умовами, яку може бути застосовано незалежно від значень сталих Ліпшиця. При цьому єдиним обмеженням на крайові умови є їх лінійна незалежність.
- Запропоновано нову схему методу для дослідження періодичної крайової задачі для диференціального рівняння другого порядку коливного типу, що не вимагає його зведення до системи у нормальній формі.
- На базі методу послідовних періодичних наближень знайдено нижні оцінки для періодів періодичних рухів у ліпшицевих динамічних системах в частково впорядкованих банахових просторах.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами: робота відповідає плану наукових робот Національного університету імені Тараса Шевченка в рамках науково-дослідницьких тем «Розробка методів дослідження інтегральних множин диференціальних рівнянь», № 0194U030931; «Дослідження коливних режимів та інтегральних множин детермінованих і стохастичних динамічних систем», № 97043

Теоретичне та практичне значення одержаних результатів: отримані в роботі результати узагальнюють та доповнюють відповідні твердження теорії чисельно-аналитичного методу. Запропоновані алгоритми можуть бути застосовані до аналізу більш загальних, порівняно з дослідженими в попередніх роботах з цієї тематики, багатоточкових крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь та певних класів функціонально-диференціальних рівнянь. Результати може бути використано для дослідження різних класів прикладних задач, розробки спеціальних курсів з теорії крайових задач, подальшого розвитку теорії.

Апробація роботи: основні результати дисертації доповідалися на Другій всеукраїнській конференції «Сучасні фізико-математичні дослідження молодих науковців вузів України» (16–18 травня 1995 р., м. Київ); міжнародній конференції «Nonlinear Differential Equations» (21—27 серпня 1995 р., м. Київ); П'ятому колоквіумі з якісної теорії диференціальних рівнянь (29 липня–2 серпня 1996 р., м. Сегед, Угорщина); Всеукраїнській конференції «Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування» (15–18 травня 1996 р., м. Чернівці); семінарі кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь механіко-математичного факультету Національного університету імені Тараса Шевченка (керівник — професор М.О. Перестюк); міжнародній науковій конференції «Асимптотичні та якісні методи в теорії нелінійних коливань» (18–23 серпня 1997 р., м. Київ); міжнародній конференції «Equadiff 9» (25–29 серпня 1997 р., м. Брно, Чехія).

Публікації: зміст дисертації відображено у 4 журнальних статтях, одному препринті та 5 тезах всеукраїнських та міжнародних наукових конференцій. Повну бібліографічну інформацію про ці роботи подано у загальному списку використаних джерел.

Особистий внесок здобувача: результати дисертації є новими і належать автору. З публікацій, що відображають зміст дисертації:

- роботи [1, 3] написано у співавторстві з доктором фізико-математичних наук, професором кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Національного університету імені Тараса Шевченка Перестюком М.О. Наведені у цій дисертаційній роботі результати статей [1, 3] одержані автором самостійно.
- Роботу [4] написано у співавторстві з докторами фізико-математичних наук, провідними науковими співробітниками Інституту математики НАН України Ронто М.Й. та Трофімчуком С.І. Викладені в цій дисертації результати [4] одержані автором самостійно.

Об'єм та структура роботи: дисертація складається із вступу, чотирьох розділів, одного додатку та висновків. Повний обсяг дисертації — 158 друкованих сторінок. Сумарний обсяг переліку умовних позначень, 13 рисунків, додатку, висновків та списку використаних джерел, який налічує 108 найменувань, складає 18 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ[1]

У першому розділі «*Багатоточкові крайові задачі для диференціальних рівнянь з гладкою нелінійністю*», що складається з підрозділів 1.1—1.3, пропонується новий чисельно-аналітичний алгоритм дослідження крайових задач вигляду

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [0,1], \tag{1}$$

$$l(x) := \sum_{k=0}^{r+1} A_k x(t_k) = d\,, \tag{2}$$

де $x:[0,1] \to \mathbb{R}^n$, $f:[0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^n$, Ω — замкнена область $\mathbb{R}^n$; $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_r < t_{r+1} = 1$ — деяке розбиття $[0,1]$, а $\{A_k\}_{k=0}^{r+1} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Розв'язком задачі (1), (2) вважається вектор-функція $x:[0,1] \to \mathbb{R}^n$ з абсолютно неперервними компонентами, яка має властивість (2) та для м.в. $t \in [0,1]$ задовольняє диференціальне рівняння (1).

Припускається виконання наступних умов.

H1) Існує деякий набір $n \times n$ — матриць $\{\Psi_k\}_{k=0}^{r+1}$, такий, що

$$\sum_{k=0}^{r+1} A_k \Psi_k = I_n\,, \tag{3}$$

де I_n — одинична матриця виміру n.[2]

H2) Функція Каратеодорі $f = (f^1, f^2, \ldots, f^n)$ задовольняє умову Ліпшіца за векторною змінною, тобто

$$\left|f^i(t,x_1) - f^i(t,x_2)\right| \le \sum_{j=1}^{n} L_{ij}(t)\left|x_1^j - x_2^j\right| \; (i = 1,2,\ldots,n; \;\; 0 \le t \le 1),$$

де $\{L_{ij}\}_{i,j=1}^{n} \subset L^1([0,1],\mathbb{R})$.

Тоді, коли $\Omega \ne \mathbb{R}^n$, вважаються виконаними ще такі два припущення:

H3) Для всіх $x \in \Omega$ та майже кожного $t \in [0,1]$ має місце оцінка $|f(t,x)| \le m(t)$, де

---

[1] Твердження тут позначено номерами, що співпадають з наведеними у тексті роботи

[2] Можна показати, що умова H1) еквівалентна лінійній незалежності складових вектор-функціонала l у (2). Отже, використання матричних коефіцієнтів $\{\Psi_k\}$ в умові невиродженості (3) дозволяє позбутися додаткових обмежень на структуру крайових умов (2), необхідних для застосування відомих раніше конструкцій

$m \in L^1([0,1], \mathbb{R}^n)$.

H4) Множина $\Omega(\rho_\Omega)$ тих точок $\xi \in \mathbb{R}^n$, що містяться в Ω разом із своїм $\rho_\Omega(\xi)$—околом,[3]

$$\rho_\Omega(\xi) := \max\left(\int_0^\tau m(s)ds,\ \int_\tau^1 m(s)ds\right) +$$

$$+ \max_{t\in[0,1]}|\Psi(t)|\left[\left|d - \sum_{k=0}^{r+1} A_k\xi\right| + \sum_{k=0}^{r+1}\left|A_k\int_\tau^{t_k} m(s)ds\right|\right],$$

не є порожньою.

В умові H4) τ—фіксована точка відрізку $[0, 1]$, а $\Psi : [0,1] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ — довільним чином обрана матричнозначна функція з абсолютно неперервними елементами, що «інтерполює» значення $\Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_{r+1}$ з умови H1):

$$\Psi(t_k) = \Psi_k \quad (k = 0, 1, \ldots, r+1).$$

Нехай U_ξ $(\xi \in \mathbb{R}^n)$— відображення в себе простору $D([0, 1], \mathbb{R}^n)$ вектор-функцій з абсолютно неперервними складовими, задане згідно з формулами:

$$[U_\xi x](t) := \xi + \int_\tau^t f(s, x(s))ds + \Psi(t)\cdot\Delta(\xi; x), \tag{4}$$

$$\Delta(\xi; x) := d - \sum_{k=0}^{r+1} A_k\left[\xi + \int_\tau^{t_k} f(s, x(s))ds\right]. \tag{5}$$

Доведено таку теорему про зведення крайової задачі (1), (2) до певного еквівалентного вигляду:

Теорема 1.1.1. *Функція $x \in D([0,1], \mathbb{R}^n)$ є розв'язком крайової задачі (1), (2) тоді, і тільки тоді, коли виконується система рівнянь*

$$x = U_\xi x, \tag{6}$$

$$\Delta(\xi; x) = 0. \tag{7}$$

При цьому оператор U_ξ відображає гіперплощину $l^{-1}(d)$ простору $D([0,1], \mathbb{R}^n)$ в себе.

З приводу розв'язання задачі (1), (2) шляхом її зведення до системи вигляду (6), (7) справедливе наступне твердження.

[3] Для довільного невід'ємного вектора ρ під ρ-околом точки $x \in \mathbb{R}^n$ розуміємо множину $B(x, \rho)$, що складається з тих $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, для яких $|\xi_i - x_i| \le \rho_i$ при всіх i.

Теорема 1.1.3. *Нехай виконуються умови H1), H2) (а, якщо $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, також H3), H4)), та, додатково, всі власні значення матриці qL, де*

$$q := \tfrac{1}{2} I_n + \max_{t\in[0,1]} \left|\Psi(t)\right| \sum_{k=0}^{r+1} \left|\left(t_k - \tfrac{1}{2}\right) A_k\right|,$$

за абсолютною величиною менші одиниці. Тоді для кожного $\xi \in \Omega(\rho_\Omega)$ оператор U_ξ має єдину нерухому точку $x(\cdot, \xi)$, яка при цьому співпадає з рівномірною границею послідовності

$$x_m(t,\xi) := \Psi(t) d + \left[I_n - \Psi(t) \sum_{k=0}^{r+1} A_k\right] \xi +$$
$$+ \int_0^t f(s, x_{m-1}(s,\xi)) ds - \Psi(t) \sum_{k=0}^{r+1} A_k \int_0^{t_k} f(s, x(s)) ds \quad (t \in [0,1],\ m \in \mathbb{N}),$$

де $x_0(\cdot,\xi) : [0,1] \to \Omega$, і кожна з функцій $\{x_m(\cdot,\xi)\}$ задовольняє лінійну багатоточкову крайову умову (2).

У підрозділі 1.2 за додаткових умов гладкості вигляду

$$\sup_{x\in\Omega} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \le L \quad \forall t \in [0,1], \tag{8}$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_2)\right| \le \Lambda |x_1 - x_2| \lambda \quad (\forall t \in [0,1]\ \forall \{x_1, x_2\} \subset \Omega), \tag{9}$$

де L, Λ — $n \times n$-матриці з невід'ємними елементами, а $\lambda \in \mathbb{R}^n_+$, встановлено ряд оцінок стосовно характеру залежності членів послідовності $\{x_m(\cdot,\xi)\}$ та їх границі $x(\cdot, \xi)$ від параметра ξ. Зокрема, в лемі 1.2.1 доведено, що при виконанні умов теореми 1.1.3 при $\xi \in \Omega(\rho_\Omega)$ справджується нерівність

$$\max_{t\in[0,1]} \left|\frac{\partial x}{\partial \xi}(t,\xi)\right| \le \Gamma Q,$$

де

$$\Gamma := (I_n - qL)^{-1},\ Q := I_n + \max_{t\in[0,1]} \left|\Psi(t)\right| \sum_{k=0}^{r+1} |A_k|.$$

З використанням одержаних у п. 1.2 оцінок встановлено теорему про розв'язність крайової задачі (2) для диференціального рівняння (1) з гладкою правою частиною.

Розділ 2 «*Чисельно-аналітичні методи дослідження ліпшицевих крайових задач*», до якого входять пп. 2.1—2.7, в основному присвячено узагальненню схеми розділу 1 на випадок, коли права частина ліпшицевого диференціального рівняння, можливо, має

велику константу Ліпшица. Показано, що для кожної задачі (1), (2) з диференціальним рівнянням (1) вказаного типу завжди можна побудувати збіжний чисельно-аналітичний метод послідовних наближень.

Підрозділ 2.1 містить декілька загальних тверджень, що стосуються абстрактних квазілінійних крайових задач вигляду

$$Lx = Fx, \tag{10}$$

$$lx = fx, \tag{11}$$

($L, F : X \to Y$, $l, f : X \to \mathbb{R}^N$, X, Y — певні банахові простори, $N \geq 1$), де виділену лінійну частину задано скрізь розв'язним відображенням

$$\begin{pmatrix} L \\ l \end{pmatrix} : X \to Y \times \mathbb{R}^N.$$

Центральною в підрозділі 2.1 є наступна

Теорема 2.1.4. *Припустимо, що в (10) оператор $L : X \to Y$ допускає сім'ю правих обернених $\{K_\xi\}_{\xi \in \Xi} : Y \to X$, таку, що*

$$\forall y \in Y \quad L^{-1}(y) = \{K_\xi y \mid \xi \in \Xi\}.$$

Нехай складові вектор-функціонала $l : X \to \mathbb{R}^N$ лінійно незалежні. Тоді задача (10), (11) еквівалентна системі рівнянь

$$x = (I - \Psi l) K_\xi Fx + \Psi fx, \tag{12}$$

$$lK_\xi Fx = fx, \tag{13}$$

*де $\Psi : \mathbb{R}^N \to X$ — довільний правий обернений до l.** *При цьому оператор*

$$T_\xi x := (I - \Psi l) K_\xi Fx + \Psi fx$$

інваріантно діє на множині

$$\Sigma_f := \{x \in X \mid lx = fx\}.$$

Запропоновані в розділах 2, 3 чисельно-аналітичні алгоритми, а також відомі раніше чисельно-аналітичні методи, описані в роботах А.М. Самойленка та співавторів, у певному розумінні є наслідками наведеної вище конструкції.

У підрозділі 2.2 розглядається багатоточкова крайова задача (1), (2), до якої застосовується схема зведення до системи рівнянь типу (6), (7). Як альтернатива до підходу п.п. 1.1—1.3, доводиться наступна

* Можна довести, що в умовах теореми 2.1.4 оператор l є оборотним справа.

Теорема 2.2.1. *Нехай справедливі припущення H1), H2) (а у випадку, коли $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, також H3), H4)).*

Тоді для кожного $\xi \in \Omega(\rho_\Omega)$ рівняння (6) має єдиний розв'язок $x(\cdot,\xi)$, якщо тільки матричнозначну функцію $\Psi(\cdot):[0,1] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ в (4) підібрано належним чином, так, що L^1-норми її компонентів є досить малими.

Підрозділ 2.3 присвячено зауваженням до теореми 2.2.1 та наслідкам з неї. У підрозділі 2.4 встановлюється ряд тверджень, що стосуються випадку періодичної крайової задачі

$$x'(t) = f(t, x(t)), \; t \in [0, T], \tag{14}$$

$$x(0) = x(T). \tag{15}$$

Зокрема, доводиться така лема.

Лема 2.4.1. *Нехай для (14) виконуються наступні умови:*

A) функція Каратеодорі $f:[0,1]\times\Omega \to \mathbb{R}^N$ при всіх $x \in \Omega$ та майже кожному $t \in [0, T]$ задовольняє оцінку $|f(t,x)| \le m(t)$, де $m \in L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$;

B) $|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le L(t)|x_1 - x_2|$ $(\forall\{x_1,x_2\} \subset \Omega$, м. в. $t \in [0,T])$, де $L(\cdot)$ — матричнозначна функція з інтегровними на $[0,T]$ компонентами;

C) підмножина $\Omega(\beta_\Psi)$ множини Ω, належність до якої точки $x \in \Omega$ характеризується виконанням включення $B(x,\beta_\Psi) \subset \Omega$, де $\beta_\Psi := \max\limits_{t\in[0,T]}(K_\Psi m)(t)$, а

$$(K_\Psi m)(t) := |I_n - \Psi(t)|\int_0^t m(s)ds + |\Psi(t)|\int_t^T m(s)ds \;\; (t \in [0,T]), \tag{16}$$

не є порожньою.

Тоді для всіх $\xi \in \Omega(\beta_\Psi)$ послідовні наближення вигляду

$$x_m(t,\xi) = \xi + \int_0^t f(s, x_{m-1}(s,\xi))ds - \Psi(t)\int_0^T f(s, x_{m-1}(s,\xi))ds \tag{17}$$
$$(0 \le t \le T, \; m \ge 1, \; x \in D([0,T],\Omega))$$

де $\Psi(\cdot):[0,T] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ — довільна абсолютно неперервна матричнозначна функція з властивістю $\Psi(T) - \Psi(0) = I_n$, рівномірно збігаються до границі $x(\cdot,\xi)$, якщо тільки L^1-норми компонентів $\Psi(\cdot)$ є настільки малими, що $r(K_\Psi \circ L) < 1$. При цьому *справджується оцінка*

$$|x_m - x| \le (K_\Psi L)^m (I - K_\Psi L)^{-1} |x_1 - x_0| \quad (m \ge 1).$$

З використанням леми 2.4.1 отримано наступну теорему про існування розв'язку періодичної крайової задачі (14), (15):

Теорема 2.4.5. *Нехай виконуються умови (А) – (С). Нехай $\Psi(\cdot)$ у (17) обрано так, що $r(K_\Psi \circ L) < 1$ (це завжди можна зробити). Припустимо, що для деякого $m \ge 0$ m -те визначальне рівняння*

$$\Delta_m(\xi) := \int_0^T f(t, x_m(t, \xi)) dt = 0$$

має у деякому околі $\omega \subset \Omega(\beta_\Psi)$ ізольований корінь ξ_m ненульового топологічного індекса. Нехай, додатково, при кожному ξ на границі $\operatorname{fr} \omega$ області ω хоча б одна із складових вектора $\int_0^T f(s, x_m(s, \xi)) ds$ за абсолютною величиною є меншою за відповідну координату вектора $\int_0^T L(s) |x_m(s, \xi) - x(s, \xi)| ds$.

Тоді періодична крайова задача (14), (15) має розв'язок.

Встановлено також спрощені варіанти теореми 2.4.5, перевірка умов яких не вимагає оцінки різниці $|x_m - x|$. Одержано деякі твердження з приводу обчислення спектрального радіуса оператора (16), які доповнюють відповідні результати цитованих у тексті робот О.П. Трофімчук та M. Kwapisz'a.

Підрозділ 2.5 присвячено розгляду того часткового випадку задачі (1), (2), коли матриці $\{A_k\}_{k=0}^{r+1}$ у (2) мають властивість

$$\det \sum_{k=0}^{r+1} A_k \ne 0.$$

У підрозділі 2.6 описаний у п. 2.2 метод застосовується до дослідження періодичної крайової задачі для системи лінійних диференціальних рівнянь

$$x'(t) = L(t)x(t) + b(t), \quad t \in [0, T],$$
$$x(0) = x(T).$$

У нерезонансному випадку доведено ефективність ітераційного алгоритму

$$x_m(t, \xi) = \xi + \int_0^t b(s) ds - \Psi(t) \int_0^T b(s) ds +$$
$$+ \int_0^t L(s) x_{m-1}(s, \xi) ds - \Psi(t) \int_0^T L(s) x_{m-1}(s, \xi) ds \quad (0 \le t \le T, \ m \ge 1),$$

де

$$\Psi(\cdot):[0,T] \to \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^N\right), \quad \Psi(T) - \Psi(0) = I_n.$$

Одержано формули для обчислення наближених визначальних функцій

$$\Delta_m(\xi) := \int_0^T \left[b(t) + L(t)x_m(t,\xi)\right]dt$$

та відповідної точної визначальної функції

$$\Delta(\xi) := \int_0^T \left[b(t) + L(t) \lim_{m\to\infty} x_m(t,\xi)\right]dt$$

(в термінах фундаментальної матриці).

Підрозділ 2.7 містить декілька модельних прикладів, що ілюструють застосування запропонованих в роботі алгоритмів. Досліджуються, зокрема, періодичні розв'язки рівняння типу Ріккаті (приклад 2.7.1) та одного лінійного функціонально-диференціального рівняння з відхиленням аргументу вигляду $(Sx)(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$ (приклад 2.7.2). Результати використання програмних пакетів символічних обчислень доповнено відповідними наборами рисунків.

Розділ 3 *«Періодична крайова задача для систем другого порядку»* присвячено побудові на базі теореми 2.1.4 чисельно-аналітичного методу дослідження періодичної крайової задачі для одного класу диференціальних рівнянь другого порядку.

У випадку T-періодичної крайової задачі для рівняння коливного типу

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = f\left(t, x(t), x'(t)\right), \tag{18}$$

$$x(0) = x(T), \;\; x'(0) = x'(T) \tag{19}$$

доведено наступне твердження.

Лема 3.1.1. *Всі розв'язки (18), (19) містяться серед (завжди T-періодичних разом з похідною) функцій $x(\cdot, \xi)$, що задовольняють рівняння*

$$\begin{aligned} x(t) = a_\Psi(t)\xi + \tfrac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega(t-s) f\left(s, x(s), x'(s)\right)ds - \\ - \tfrac{1}{\omega}\Psi_0(t)\int_0^T \sin\omega(T-s) f\left(s, x(s), x'(s)\right)ds - \\ - \Psi_1(t)\int_0^T \cos\omega(t-s) f\left(s, x(s), x'(s)\right)ds \quad (0 \le t \le T), \end{aligned} \tag{20}$$

де

$$a_\Psi(t) := \left(\cos\omega t \cdot I_n \quad \tfrac{\sin\omega t}{\omega} I_n\right) - \Psi(t)\left[\Phi(T,\omega) \otimes I_n - I_{2n}\right],$$

$$\Phi(T,\omega):=\begin{bmatrix}\cos\omega T & \omega^{-1}\sin\omega T\\ -\omega\sin\omega T & \cos\omega T\end{bmatrix},$$

а $\{\Psi_0,\Psi_1\}:[0,T]\to\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ *— довільні матриці з елементами класу* $W^{1,1}[0,T]$, *які мають властивості*

$$\begin{aligned}\Psi_0(T)&=I_n+\Psi_0(0), & \Psi_1(T)&=\Psi_1(0),\\ \Psi_0'(T)&=\Psi_0'(0), & \Psi_1'(T)&=I_n+\Psi_1'(0).\end{aligned}\tag{21}$$

Умовою, що виділяє розв'язки задачі (18), (19) з множини розв'язків $\{x(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\mathbb{R}^{2n}}$ *рівняння (20), є визначальне рівняння відносно параметра* $\xi\in\mathbb{R}^{2n}$:

$$\left[\Phi(T,\omega)\otimes I_n-I_{2n}\right]\xi=\begin{bmatrix}\frac{1}{\omega}\int_0^T\sin\omega(T-s)f(s,x(s,\xi),x'(s,\xi))ds\\ \int_0^T\cos\omega(T-s)f(s,x(s,\xi),x'(s,\xi))ds\end{bmatrix}.\tag{22}$$

Для ліпшіцевих крайових задач типу (18), (19) встановлено теорему, що гарантує розв'язність параметризованого рівняння (20) при належним чином підібраних функціях $\{\Psi_0,\Psi_1\}:[0,T]\to\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ (теорема 3.1.2).

У підрозділі 3.2 наведено ряд тверджень про розв'язність нерезонансних крайових задач вигляду (18), (19) у випадках, коли функція f задовольняє умову Ліпшіца за останніми двома змінними (теорема 3.2.3, наслідок 3.2.6), або має підлінійне зростання на нескінченності (теорема 3.2.7).

У четвертому розділі роботи — *«Метод послідовних періодичних наближень для диференціальних рівнянь у банахових просторах»* — розглядається питання реалізації методу послідовних періодичних наближень у випадку періодичної крайової задачі для диференціального рівняння у частково впорядкованому банаховому просторі. У п. 4.1 наведено схему методу послідовних періодичних наближень для періодичної задачі для функціонально-диференціального рівняння вигляду

$$x'=Fx,\tag{23}$$

$$x(0)=x(T),\tag{24}$$

де $x:[0,T]\to X$ — частково впорядкований нормований простір з модулем $m:X\to X$, (див. додаток А), який має наступні властивості:

(i) *для довільної множини* M, *такої, що*

$$\exists\xi_M\in X_+:\ M\subset\{x\in X:-\xi_M\preceq x\preceq\xi_M\},$$

існує число $k_M>0$, *таке, що* $\forall x\in X\ \|x\|\le k_M$;

(ii) $\exists c > 0 \ \ \forall x \in X \ \ \|m(x)\| \le c\|x\|$.

(iii) *звуження* $m|_{X_+}$ *є ізотонним оператором.*

Вважається, що F — деяке неперервне відображення $C([0,T],X)$ в себе з властивістю типу Ліпшиця:

$$m(Fx_1 - Fx_2) \preceq L \circ m(x_1 - x_2) \quad \forall \{x_1, x_2\} \subset X, \tag{25}$$

де лінійний неперервний оператор L залишає інваріантним конус

$$C_+([0,T],X) := \{x \in C([0,T],X) \mid x(t) \succeq 0 \ \ \forall t \in [0,T]\}$$

невід'ємних функцій простору $C([0,T],X)$ (природнє часткове впорядкування $C([0,T],X)$, породжене порядком "$\preceq$", тут позначається у той самий спосіб).

Встановлено справедливість наступного твердження, яке можна розглядати як частковий випадок теореми 2.1.4:

Теорема 4.1.2. *Абстрактна функція* $x : [0,T] \to X$ *є розв'язком (23), (24) з початковою умовою* $x(0) = \xi$ *тоді, і тільки тоді, коли*

$$x = \xi + P \circ J \circ Fx \tag{26}$$

$$(I - P) \circ J \circ Fx = 0, \tag{27}$$

де

$$(Px)(t) := x(t) - tT^{-1}[x(T) - x(0)], \quad t \in [0,T]$$

а J *— операція інтегрування,*

$$(Jx)(t) := \int_0^t x(s)ds, \quad t \in [0,T].$$

Доведено, що за умов (i)–(iii) має місце наступна

Теорема 4.1.4. *Нехай у (23) оператор* F *задовольняє умову (25), причому* $r(A_{[T]} \circ L) < 1$, *де* $A_{[T]}$ *— лінійний інтегральний оператор, що діє в* $C([0,T],X)$ *за формулою*

$$(A_{[T]}x)(t) := (1 - tT^{-1})\int_0^t x(s)ds + tT^{-1}\int_t^T x(s)ds, \quad t \in [0,T].$$

Тоді рівняння (26) однозначно розв'язне для довільного $\xi \in X$, *та його розв'язок* $x(\cdot, \xi)$ *є границею послідовних наближень*

$$x_m(\cdot, \xi) = \xi + P \circ J \circ Fx_{m-1}(\cdot, \xi) \quad (m \in \mathbb{N})$$

при будь-якому $x_0(\cdot, \xi)$.

В останньому підрозділі 4.2 показано, як із використанням вказаних тверджень можна одержати наступний результат:

Теорема 4.2.6. *Нехай виконано умови (i)-(iii). Припустимо, що оператор F залишає інваріантним підпростір* $C_{const}([0,T],X) \cong X$ *сталих функцій з* $C([0,T],X)$.

Тоді T-періодична задача (23), (24) має лише сталі розв'язки.

З теореми 4.2.6, зокрема, випливає [4], що період T кожного відмінного від положення рівноваги періодичного руху автономної системи $x' = f(x)$, у якій $f: X \to X$ — неперервне відображення, що задовольняє умову Ліпшиця

$$m(f(x_1) - f(x_2)) \preceq \Lambda\, m(x_1 - x_2) \quad \forall \{x_1, x_2\} \subset X$$

з деяким $\Lambda \in \mathcal{L}(X)$, таким, що $\Lambda X_+ \subset X_+$, задовольняють нерівність

$$T\kappa \geq 1/r(\Lambda),$$

де $\kappa \approx 0.2927$ є більший додатний корінь рівняння

$$\kappa = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \exp\tfrac{t(t-1)}{\kappa}\,dt.$$

Додаток А містить формулювання означень та тверджень, що використовуються у четвертому розділі. В кінці дисертаційної роботи наведено підсумкові висновки та список використаних джерел.

Автор висловлює щиру подяку своєму науковому керівникові — професору Миколі Олексійовичу Перестюку — за постійну увагу до роботи та цінні поради.

ВИСНОВКИ

Основні результати дисертаційної роботи є наступні.

- Побудовано та обгрунтовано нову чисельно-аналітичну схему дослідження розв'язності багатоточкових крайових задач для систем нелінійних диференціальних рівнянь нормальної форми з гладкими правими частинами. Метод дозволяє вивчати і такі класи крайових задач з виродженими умовами, до яких застосування відомих варіантів методу було неможливим.
- Розроблено такий варіант чисельно-аналітичного методу послідовних наближень для нелінійних диференціальних рівнянь з лінійними багатоточковими крайовими умовами, для доведення збіжності якого не вимагається малості констант Ліпшиця

диференціального рівняння.

- Ідеї запропонованих методів поширено на дослідження періодичної крайової задачі для диференціального рівняння другого порядку коливного типу без його зведення до системи у нормальній формі.
- З використанням виконаних теоретичних побудов встановлено нові достатні умови існування розв'язків досліджуваних задач.
- Метод послідовних періодичних наближень узагальнено на вивчення періодичних розв'язків диференціальних рівнянь в частково впорядкованих банахових просторах. На базі цих результатів встановлено нові нижні оцінки для періодів періодичних розв'язків ліпшіцевих автономних диференціальних рівнянь в частково впорядкованих банахових просторах.

Основні результати дисертації опубліковано в наступних роботах:

1. Перестюк Н.А., Ронто А.Н. Об одном методе построения последовательных приближений для исследования многоточечных краевых задач // Укр. мат. журн. — 1995. — 47, № 9. — С. 1243–1253. ISSN 0041-6053.
2. Ronto A. On the boundary value problems with linear multipoint restrictions // Publ. Univ. Miskolc. Series D, Natural Sciences. — 1995. —Vol. 36. — № 1 (Mathematics). — P. 81–89. ISSN 1219-4255.
3. Perestyuk M., Ronto A. Numerical-analytic method for the equations of non-linear oscillator // Publ. Univ. Miskolc. Series D, Natural Sciences. — 1995. — Vol. 36. — № 2 (Mathematics). — P. 115-124. ISSN 1219-4255.
4. Ronto A.N., Rontó M., Trofimchuk S.I. Numerical-analytic method for differential and difference equations in partially ordered Banach spaces, and some its applications. — Miskolc, 1996. — 51 p. — (Preprint / University of Miskolc, Institute of Mathematics; 96–02).
5. Ронто А.Н. Об одной итерационной схеме приближённого решения нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Збірка праць студентів і аспірантів Київського університету імені Тараса Шевченка. Природничі науки (випуск 2) / Київ. ун-т. — Київ, 1995. — С. 17–22. — Бібліогр.: 3 назв. — Рос. — Деп. у ДНТБ України 4.09.95, № 2033 – Ук 95.
6. Ронто А. Про крайові задачі з лінійними дискретними обмеженнями // Всеукраїнська конференція «Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування». Чернівці, 15–18 травня 1996 р.: Тези доповідей. — Київ, 1992. — С. 163.

Ронто А.М. Чисельно-аналітичні методи дослідження багатоточкових крайових задач — Рукопис.

Дисертація на здобуття вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння. — Національний університет імені Тараса Шевченка.

Побудовано нові чисельно-аналітичні методи дослідження крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь із у певному розумінні виродженими афінними багатоточковими крайовими умовами. Для ліпшіцевих диференціальних рівнянь розроблено схему чисельно-аналітичного методу послідовних наближень, яку може бути застосовано незалежно від значень констант Ліпшіца. Побудовано абстрактну реалізацію методу послідовних періодичних наближень у випадку періодичної крайової задачі для диференціального рівняння у частково впорядкованому банаховому просторі.

Ключові слова: багатоточкова крайова задача, умова Ліпшіца, частково впорядкований простір, диференціальне рівняння у банаховому просторі.

Ронто А.Н. Численно-аналитические методы исследования многоточечных краевых задач. -- Рукопись.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения. — Национальный университет имени Тараса Шевченко.

Построены новые численно-аналитические методы исследования краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с вырожденными в определённом смысле аффинными многоточечными краевыми условиями. Для липшицевых дифференциальных уравнений разработана схема численно-аналитического метода последовательных приближений, применимая независимо от значений постоянных Липшица. Построена абстрактная реализация метода последовательных периодических приближений в случае периодической краевой задачи для дифференциального уравнения в частично упорядоченном банаховом пространстве.

Ключевые слова: многоточечная краевая задача, условие Липшица, частично упорядоченное пространство, дифференциальное уравнение в банаховом пространстве.

Ronto A.N. Numerical-analytic methods of investigating multipoint boundary value problems. — Manuscript.

Thesis for a Kandidat (Ph.D.) degree by the speciality 01.01.02 — differential equations. — National Taras Shevchenko University.

New numerical-analytical methods of investigating boundary value problems for systems of ordinary differential equations with degenerate in a sense affine boundary conditions are developed. For Lipschitzian differential equations, a scheme of the numerical-analytic successive approximation method has been developed which is applicable independently of the values of the Lipschitz constants. An abstract realization of the periodic successive approximation method in case of the periodic boundary value problem for differential equation in a partially ordered Banach space has been built.

Key words: multipoint boundary value problem, Lipschitz condition, partially ordered space, differential equation in a Banach space.

Підп. до друку 17.11.97. Формат 60х84/16. Папір друк. Офс.друк. Ум. друк. арк. 1,16. Ум. фарбо-відб. 1,16. Обл.-вид.арк. 1,0. Тираж 100 пр. Зам. 180. Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3

434279