НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР

ФАРАФОНОВА Наталя Костянтинівна

УДК 514.76

ГРАСМАНОВ~~И~~І РОЗШАРОВАНІ ПРОСТОРИ НАД РІМАНОВИМ МНОГОВИДОМ

Спеціальність 01.01.04 – геометрія і топологія

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Харків - 1997

Typeset by $\mathcal{A}_M\mathcal{S}$-TeX

Робота виконана в Харківському державному університеті, міністерства освіти України

Науковий керівник

доктор фізико-математичних наук,
чл.-кор. НАН України, професор,
Борисенко Олександр Андрійович
Харківський госуніверситет,
мех.-мат. факультет,
зав. кафедрою геометрії

Офіційні опоненти:

Доктор фіз.-мат. наук, професор, **Берестовський Валерій Миколаєвич**, Омський держуніверситет, професор.

Доктор фіз.-мат. наук, професор, **Шарко Володимир Васильович**, Інститут математики НАН України, ведучий науковий співробітник.

Провідна установа

Казанський державний університет, кафедра геометрії, м. Казань.

Захист відбудеться " 30 " грудня 1997 р. о " 15⁰⁰ " годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.175.01 при Фізико - технічному інституті низьких температур ім. Б.І. Веркіна НАН України за адресою: 310164, Харків-164, пр.Леніна, 47

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці ФТІНТа за адресою: 310164 Харків-164, пр.Леніна, 47

Автореферат розісланий "28" листопада 1997 р.

В.О.Вченого секретаря
спеціалізованої вченої ради __________ Г.М.Фельдман

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Завдяки роботам таких математиків як Ересман та Ліхнерович, основи сучасної диференціальної геометрії зазнали якісних змін. З середини XX-го сторіччя основну роль у диференціальній геометрії починають грати розшаровані простори. При цьому геометрія многовидів і бази розшарованного простору, визначається за допомогою такого об'єкта, як переріз розшарування або як G- структура, або як зв'язність у розшаруванні.

Різні задачі диференціальної геометрії, насамперед задачі теорії груп перетворень ріманових многовидів, привели до проблеми піднімання (ліфта) геометрії бази у тотальний простір розшарування. Зв'язок між геометріями бази та тотального простору розшарування вивчався починаючи з робіт Лаптєва і Сасакі, що з'явилися у 50-х роках. На теперішній час вивчення геометрії розшаровних просторів виділилося в окремий напрямок. Інтерес до геометрії тотального простору розшарування зумовлюється двома чинниками. Поперше, можливістю моделювати нові ріманові метрики, а подруге, додатковими можливостями вивчення власне геометрії бази.

Проте до теперішнього часу ріманова геометрія вивчалась практично лише в векторних та сферичних розшаруваннях та в розшаруваннях реперів. Особливо актуальною є задача О.А. Борисенко про побудову метрики типа Сасакі на грасмановому розшаруванні над рімановим многовидом.

Тема дисертаційної роботи "Грасманови розшаровані простори над рімановим многовидом" затверджена на засіданні Вченої ради механіко-математичного факультету Харківського державного університету (протокол N 1 від 17.01.92р.). Тема є частиною планової теми кафедри геометрії Харківського держуніверситету "Питання геометрії в цілому у многовимірних просторах" (N держ. реєстрації 0826003475).

Мета роботи полягає в такому.

1. Побудова эфективного методу введення ріманова метричного тензору в локально тривіальних розшарованих просторах.

2. Розв'язування задачі Борисенко О.А. про побудову аналога метрики Сасакі для грасманова розшарування та дослідження її властивостей.

3. Знаходження зв'язку між тензором кривини тотального простору грасманового розшарування та тензором кривини бази.

4. Одержання оцінок на секційну кривину грасманова розшарування

у випадку, коли база є простір сталої кривини.

5. Визначення необхідних та достатніх умов ейнштейновості грасманового розшарування.

Наукова новизна. Усі результати роботи є нові. Запропоновано новий конструктивний метод введення ріманового метричного тензору у локально тривіальних розшарованих просторах. При цьому показана функторіальна, в смислі теорії категорій, природність запропонованої конструкції співставляння довільному ріманові многовиду (F, γ) ріманової метрики, асоційованої за допомогою зв'язності з γ в розшаруванні із стандартним шаром F над деяким фіксованним базовим рімановим многовидом. Застосування зазначенного методу до дотичного розшарування, до сферичного розшарування та до розшарування лінійних або отронормованих реперів, приводить до добре відомих метрик Сасаки і Мока. Вперше одержана эфективна формула для обчислювання ріманова метричного тензору, який введено за загальною схемою асоціювання за допомогою зв'язності в розшаруванні, шари якого є однорідні природно редуктивні простори. Розв'язана зазначена вище задача професора О.А.Борисенко. Одержано координатне представлення метрики грасманова розшарування, яке збігається у шарі з відомим представленням Вонга, та описаний геометричний зміст цієї метрики у термінах кутов та паралельних перенесень. Знайдено зв'язок між тензорами кривини грасманового розшарування та бази, тобто одержана специфікація рівнянь О'Нейла. Докладно вивчена геометрія грасманова розшарування у випадку, коли база є простір сталої кривини. Одержані точні оцінки на секційну кривину та кривину Річчі у характерних напрямках. Знайдено критерій ейнштейновості грасманова розшарування, аналог відомої теореми Ренати Грімальді для сферичного розшарування.

Метод дослідження – методи ріманової геометрії, лінійної алгебри, теорії однорідних просторів та зв'язностей у загальних локально тривіальних розшарованих просторах.

Практичне та теоретичне значення. Робота має теоретичний характер. Результати роботи можуть бути використовані для подальших досліджень в галузі геометрії розшарувань, геометрії підмноговидів, теорії розподілу, а також можуть знайти застосування в викладанні спецкурсів для студентів, які спеціалізуються у галузі диференціальної геометрії.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідались та обговорювались на Харківському міському семінарі з геометрії (кер. – акад. А.В.

Погорелов), на семінарі кафедри геометрії ХДУ (кер. – чл. кор. О.А. Борисенко), а також апробовувались на Всеросійській школі-колоквіумі по стахостичних методах геометрії та аналізу (Абрау-Дюрсо, 1994 р.), на міжнародній конференції з геометрії "в цілому" (м. Черкаси, 1995 р.), на міжнародній школі-семінарі з геометрії пам'яті Н.В.Єфімова (Абрау-Дюрсо, 1996 р.), на міжнародному семінарі з геометрії імени Н.І. Лобачевського (м. Казань, 1997 р.), на міжнародній конференції з геометрії "в цілому" (м. Черкаси, 1997 р.).

Публікації. По темі дисертації опубліковано 3 статті [1], [2], [3] та 5 тез доповідей [4], [5], [6], [7], [8].

Структура дисертації - вступ, 3 розділа. Повний обсяг дисертації – 139 сторінок, список використаних літературних джерел містить 62 найменування.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Перший розділ містить стислий огляд понять та фактів ріманової геометрії, геометрії розшарувань та теорії зв'язностей, що активно використовуються у дисертаційній роботі. В тому числі тут наведені конструкції ріманових метрик на дотичному, сферичному, нормальному розшаруваннях та розшаруваннях лінійних реперів, що мають широке застосування: метрики Сасакі, Борисенко-Ямпольського а також Мока. Наведені результати про геометрію цих розшарувань і многовидів, про зв'язок між геометріями тотального простору розшарування та базового многовиду. Розглядаються результати пов'язані з геометрією розшарованих просторів над просторами сталої кривини. В цьому ж розділі подана формула Вонга ріманової метрики на грасмановому многовиді і подано геометричний зміст віддалі для цієї метрики.

Другий розділ присвячено побудові загального методу введення ріманова метричного тензору в локально тривіальних розшарованих просторах зі зв'язністю. Нехай $P(M,G)$ – головний розшарований простір зі структурною групой Лі G, яка діє на P справа, проекцією π на базу M и тотальним простором P. Крім того, задана зв'язність в головном розшаруванні з формою зв'язності ω. Нехай також локально тривіальне розшарування $E(M,F,G,P)$ – це розшарування зі стандартним шаром F, проекцією π_E на базу M, асоційоване з головним розшаруванням P. В розшаруванні E визначена зв'язність, асоційована зі зв'язністю в головном розшаруванні.

Визначення 2.1. **Ріманів метричний тензор $\tilde{g}$ на E назвемо асоційо-**

ваним за допомогою зв'язності H з рімановами метричними тензорами: g на базі M і γ на стандартному шарі F, – якщо виконані наступні умови:

(1) проекція розшарування π_E є ріманова субмерсія,
(2) горизонтальний та вертикальний розподіли на E є взаємно ортогональні,
(3) відображення $u : F \to E_x$ у шар над $\pi(u) = x$ є ізометрія для кожного $u \in P$, тобто для будь-яких $A, B \in TF$

$$\tilde{g}(u_*(A), u_*(B)) = \gamma(A, B).$$

Доведено існування і єдиность метрики $\tilde{g}$, яка задовольняє визначенню 2.1.

Далі доводиться, що запропонована конструкція метрики в розшаруванні, асоційована з метрикою стандартного шару та метрикою бази, є узагальнення метрик Сасакі і Мока на дотичному розшаруванні і розшаруванні лінійних реперів. У випадку, коли стандартний шар (F, γ) – один з класичних однорідних просторів, пропонується ефективна формула для обчислення введенного ріманова метричного тензора. Однорідний просір $F = G/H$ називається природно редуктивним однорідним простором, якщо існує $\mathrm{ad}(H)$- інваріантне розкладання $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ групи Лі G в пряму суму алгебри Лі $\mathfrak{h}$ групи Лі H і підпростора $\mathfrak{m}$ ($\mathrm{ad}(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$), и існує білінійний симетричний функціонал B на $\mathfrak{m}$, який задовольняє умові

$$B(X, [Z, Y]_{\mathfrak{m}}) + B([Z, X]_{\mathfrak{m}}, Y) = 0, \ \forall X, Y, Z \in \mathfrak{m}.$$

Теорема 2.9. *Нехай $P(M, G)$ головне розшарування з формою зв'язності ω та проекцією π; $F = G/H$ природно редуктивний однорідний ріманів простір, на якому структурна група G діє транзитивно і ізометріями; $E(M, F, G, P)$ асоційоване розшарування з рімановим метричним тензором $\tilde{g}$, асоційованим за допомогою зв'язності з однорідним метричним тензором γ на стандартному шарі F і рімановим метричним тензором g на базі M. Якщо вектори $Q_t \in T_{uH}E$ та вектори $S_t \in T_uP$ $(t = 1, 2)$ зв'язані рівністю:*

$$R_{H*}S_t = Q_t, \quad R_H : P \to E \text{ – фактор-морфізм розшарування,} \qquad (2.19)$$

тоді справедлива рівність:

$$\tilde{g}(Q_1, Q_2) = g(\pi_* S_1, \pi_* S_2) + B([\omega(S_1)]_{\mathfrak{m}}, [\omega(S_2)]_{\mathfrak{m}}). \qquad (2.20)$$

Як слідство, одержана эфективна формула для обчислення метричного тензора на грасмановому розшаруванні $G^l(M)$ найможливіших l-вимірних підпросторів Π дотичного розшарування TM, асоційованого з канонічною симетричною метрикою грасманіана. У параграфі 2.3 введені локальні координати в грасмановому розшаруванні, аналогічні класичним координатам в грасмановому многовиді і одержано координатне представлення рімановоі метрики грасманова розшарування, яке допускає порівняння у вертикальних шарах з добре відомим координатним представленням для рімановоі метрики грасманова многовида, отриманим в 1967 р. Вонгом.

Пропозиція 2.18. *Ріманова метрика в розшаруванні l-вимірних підпросторів $G^l(M)$, асоційованая з канонічною симетричною рімановою метрикою грасманова многовида та рімановою метрикою ds^2 базового многовида M, має в локальних координатах (u, ξ) відносно ортонормованого кореперного поля χ наступний вид:*

$$d\tilde{s}^2 = ds^2 + \mathrm{Tr}(I_p + \xi\xi^t)^{-1}\Xi(I_l + \xi^t\xi)^{-1}\Xi^t, \tag{2.3.27}$$

$$\Xi = d\xi + \Gamma_p\xi - \xi\Gamma_\Delta + \xi\Gamma_\Delta^t\xi, \tag{2.3.28}$$

тут Ξ – матриця із диференціальних 1-форм розміра $l \times p$, а Γ_p, Γ_Δ *кутові підматриці у матриці Крістоффеля (2.3.26).*

Основний результат цього параграфа сформульований у теоремі 2.22, в якій прояснюється геометричний зміст рімановоі метрики грасманова розшарування у термінах кутів та паралельних перенесень в дусі того, як це відомо для метрик Сасакі і Мока. Нехай Π_1 и Π_2 – два l-вимірних підпростора. Позначимо через pr_1 и pr_2 оператори ортогонального проектування на підпростори Π_1 і Π_2, відповідно, і розглянемо власні вектори $X_1, \dots, X_l \in \Pi_1$ $(Y_1, \dots, Y_l \in \Pi_2)$ невідємно визначеного симетричного оператора $\mathrm{pr}_1\,\mathrm{pr}_2 : \Pi_1 \to \Pi_1$ $(\mathrm{pr}_2\,\mathrm{pr}_1 : \Pi_2 \to \Pi_2)$. Тоді існує ортонормовані базиси $\{X_i\}_{i=1}^l \subset \Pi_1$ и $\{Y_i\}_{i=1}^l \subset \Pi_2$ такі, що

$$\tilde{g}(X_i, Y_j) = \cos\theta_i\delta_{ij},\ \theta_i \in [0, \pi/2].$$

Кути θ_i називаються кутами між підпросторами Π_1 і Π_2.

Нехай Π_0 и Π_1 – достатно близькі l-вимініпідпростори з $G^l(M)$, які з'єднуються кривою $\tilde{\gamma}$, γ – проекція цієї кривої на M. Паралельно перенесем вдовж γ підпростор Π_0 у точку прикріплення підпростора Π_1. Позначимо через θ_i кути між Π_1 та результатом паралельного перенесення підпростора Π_0, а через $d\tilde{s}$ і ds – диференціали довжини дуги кривих $\tilde{\gamma}$ и γ, відповідно. Тоді

Теорема 2.22. $\widetilde{ds}^2 = ds^2 + d\vartheta_1^2 + \ldots + d\theta_m^2$, $m = \min\{l, p\}$.

Третій розділ присвячений дослідженню геометрії грасманова розшарування $G^l(M)$ з метрикою $\widetilde{g}$, асоційованою за допомогою зв'язності з метриками стандартного шару та бази, установленню зв'язку між геометричними характеристиками грасманова ризшарування та базового многовиду. В параграфі 3.1 приведен апарат технічних засобів для описання геометрії грасманова розшарування.

Визначення 3.1.6. Нехай pr і ort оператори ортогонального проектування на підпростори Π і його отогональний додаток $\Pi^\perp$, відповідно. (1,1)-тензори, які визначаються формулами

$$|Q|_\Pi = \mathrm{pr}\, Q\, \mathrm{pr} + \mathrm{ort}\, Q\, \mathrm{ort}, \tag{3.10}$$

$$\{Q\}_\Pi = \mathrm{pr}\, Q\, \mathrm{ort} + \mathrm{ort}\, Q\, \mathrm{pr}, \tag{3.11}$$

називаються, відповідно, внутрішньою і зовнішньою компонентами (1,1)-тензора Q на базі M відносно підпростора Π.

Параграф 3.2 присвячений побудові системи векторних полів на грасмановому розшаруванні $G^l(M)$, відносно якої виявляється можливим встановити зв'язок між геометричними характеристиками бази M та стандартного шару грасманіана G^l_n з одного боку, і розшарування $G^l(M)$ з іншого боку.

Визначення 3.16. Нехай Q – кососиметричне тензорне поле на M. Векторне поле $\overline{Q}^v$ на $O(M)$ будемо називати вертикальним ліфтом Q в $O(M)$, коли воно в кожній точці u із $O(M)$ задовольняє системі рівнянь

$$\pi_* \overline{Q}^v = 0, \qquad \omega_u(\overline{Q}^v) = u^{-1} \circ Q \circ u \tag{3.25}$$

Тут репер u стандартним чином ототожнюється з лінійним оператором із $\mathbb{R}^n$ на $T_{\pi(u)}M$.

Визначення 3.23. Нехай Q – кососиметричне тензорне поле на M. Векторне поле $\widetilde{Q}^v$ на $G^l(M)$ будемо називати вертикальним ліфтом Q в грасманове розшарування, коли воно отримане проекцією за допомогою R_H із вертикального ліфта $\overline{Q}^v$ такого ж тензорного поля Q в $O(M)$, тобто $\widetilde{Q}^v = R_{H*}\overline{Q}^v$.

Поняття горизонтального ліфта $\widetilde{Y}^h$ векторного поля Y на M в грасманове розшарування $G^l(M)$ вводиться стандартным чином, тобто як горизонтальне векторне поле, яке проектується в поле Y.

В параграфі 3.3 встановлено зв'язок між геометріями $G^l(M)$ та бази M, тобто отримані формули, які виражають такі геометричні об'єкти грасманова розшарування, як коваріантне диференціювання $\widetilde{\nabla}$, перетворення кривини $\widetilde{R}(\cdot,\cdot)$ і секційна кривина $\widetilde{K}$, через аналогічні геометричні об'єкти ∇, $R(\cdot,\cdot)$, K і ∇R базового ріманового многовиду M і геометрію стандартного шару, грасманіана G^l_n.

Теорема 3.35. *Для тензора кривини $\widetilde{R}$ грасманова розшарування, яка обчислюється в точці Π із $G^l(M)$ мають місто наступні рівності*

$$а)\widetilde{R}(Q^v,S^v)T^v = -\,[[\{Q\},\{S\}],\{T\}]^v,$$

$$б)\widetilde{R}(Q^v,S^v)Z^h = -\,\frac{1}{2}(\rho([\{Q\},\{S\}])Z)^h + \frac{1}{16}([\rho(\{Q\}),\rho(\{S\})]Z)^h,$$

$$в)\widetilde{R}(Q^v,Y^h)S^v = -\,\frac{1}{4}(\rho([\{Q\},\{S\}])Y)^h + \frac{1}{16}(\rho(\{Q\}),\rho(\{S\})Y)^h,$$

$$\begin{aligned} г)\widetilde{R}(X^h,Y^h)Z^h = {}& (R(X,Y)Z)^h - \frac{1}{8}(\rho(\{\rho(Z\wedge Y)\})X)^h + \frac{1}{2}(\nabla_Z R)(X,Y)^v - \\ & -\frac{1}{4}(\rho(\{\rho(X\wedge Y)\})Z)^h - \frac{1}{8}(\rho(\{\rho(Z\wedge X)\})Y)^h, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} д)\widetilde{R}(Q^v,Y^h)Z^h = {}& \frac{1}{4}((\nabla_Y\rho)(\{Q\})Z)^h + \frac{1}{2}[\{Q\},\rho(Y\wedge Z)]^v - \\ & -\frac{1}{8}(\rho(Y\wedge\rho(\{Q\})Z))^v, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} е)\widetilde{R}(X^h,Y^h)Q^v = {}& -\frac{1}{4}((\nabla_X\rho)(\{Q\})Y - (\nabla_Y\rho)(\{Q\})X)^h - \\ & -\frac{1}{8}(\rho([X\wedge Y,\rho(\{Q\})]))^v + [|\rho(X\wedge Y)|,\{Q\}]^v, \end{aligned}$$

де $[\cdot,\cdot]$ – комутатор тензорів на базі M,
$\{\ \}$ – зовнішня компонента тензора відносно підпростора Π,
ρ – оператор кривини M.

Наслідок 3.36. *Нехай X,Y – вектори, а Q, S – кососиметричні тензори в точці x многовиду M. Тоді для секційної кривини $G^l(M)$ в точці Π над x мають місце наступні рівності*

$$а)\widetilde{K}(Q^v\wedge S^v) = 2\frac{\|[\{Q\},\{S\}]\|^2}{\|\{Q\}\|^2\|\{S\}\|^2 - g(\{Q\},\{S\})^2},$$

$$б)\widetilde{K}(Q^v\wedge Y^h) = \frac{1}{8}\frac{\|\rho(\{Q\})Y\|^2}{\|Y\|^2\|\{Q\}\|^2},$$

$$в)\widetilde{K}(X^h\wedge Y^h) = K(X\wedge Y) - \frac{3\|\{\rho(X\wedge Y)\}\|^2}{8\|X\|^2\|Y\|^2 - g(X,Y)^2}$$

В правих частинах наведенних рівностей усі норми беруться для метрики g базового многовида M.

Показано, що адаптація формул, що отримані в теоремі 3.35 у випадку проективного розшарування, тобто при $l = 1$, приводить до відомих формул Борисенко-Ямпольського для сферичного розшарування.

Параграф 3.5 цього розділу присвячений вивченню грасманова розшарування $G^l(M)$ над простором M сталої кривини k.

Наслідок 3.45. *Нехай M – просторова форма секційної кривини, що дорівнює k. Тоді для секційної кривини $\widetilde{K}$ грасманова розшарування $G^l(M)$ с $n-l, l \geq 2$ ($n = \dim M$) мають місце наступні точні оцінки:*

$$а)\ 0 \leq \widetilde{K}(Q^v \wedge S^v) \leq 2,$$
$$б)\ 0 \leq \widetilde{K}(Q^v \wedge Y^h) \leq \frac{k^2}{4},$$
$$в)\ k - \frac{3}{4}k^2 \leq \widetilde{K}(X^h \wedge Y^h) \leq k.$$

Отримані вирази для обчислення тензора Річчі грасманова розшарування. Наступна теорема є аналог теореми Р.Грімальді для грасманова розшарування.

Теорема 3.47. *Для того, щоб грасманове розшарування $G^l(M)$ було ейнштейновим простором, необхідно і достатньо, щоб базовий многовид був двовимірним простором сталої кривини $k = 0$, або $k = 1$, та $l = 1$.*

Теорема 3.48. *Якщо базовий многовид M_k – просторова форма, вимірності n, то для кривини Річчі $\widetilde{r}$ грасманова розшарування $G^l(M)$ мають місце наступні точні оцінки:*

$$а)\ \widetilde{r}(Q^v) = n - 2 + \frac{1}{2}k^2,$$
$$б)\ k(n-1) - \frac{1}{2}k^2 \max\{p,l\} \leq \widetilde{r}(X^h) \leq k(n-1) - \frac{1}{2}k^2 \min\{p,l\}.$$

ВИСНОВКИ

Запропонован загальний метод введення ріманова метричного тензору в локально тривіальних розшарованих просторах зі зв'язністю. При цьому локально тривіальне розшарування E, як і зв'язність в ньому припускаються асоційованими з деяким головним розшаруванням P зі зв'язністю. Доведене існування і єдиность цієї метрики. Доведене, що запропонована конструкція метрики в розшаруванні, асоційована з метрикою стандартного шару і метрикою бази, є узагальнення метрик Сасакі і Мока на дотичному розшаруванні і розшаруванні лінійних реперів. В випадку коли стандартний шар – один з класичних однорідних просторів, отримана ефективна формула для обчислення введеного ріманова метричного тензора. Як слідство, отримана ефективна формула для обчислення метричного тензора на грасмановому розшаруванні $G^l(M)$ всіляких l-вимірних підпросторів дотичного розшарування TM, асоційованого з канонічною симетричною метрикою грасманіана. Введені локальні координати в грасмановому розшаруванні, аналогічні класичним координатам в грасмановому многовиді G^l_n і отримане координатне представлення ріманової метрики грасманова розшарування, яке допускає порівняння в вертикальних шарах з добре відомим координатним пердставленням для ріманової метрики грасманова многовида, отриманим в 1967 р. Вонгом. Прояснюється геометричний зміст ріманової метрики грасманова розшарування в термінах кутів і паралельних перенесень в дусі того, як це відомо для метрик Сасакі і Мока. Досліджена геометрія грасманова розшарування $G^l(M)$ з метрикою $\widetilde{g}$, асоційованою за допомогою зв'язності з метриками стандартного шару і бази. Побудована система векторних полів на грасмановому розшаруванні $G^l(M)$, відносно якої виявляється можливим встановити зв'язок між геометричними характеристиками бази M і стандартного шару грасманіана G^l_n, з одного боку, і розшарування $G^l(M)$, з іншого боку. Встановлений зв'язок між геометрією $G^l(M)$ і - - бази M, тобто отримані формули, які виражають такі геометричні об'єкти грасманова розшарування, як коваріантне диференціювання $\widetilde{\nabla}$, перетворення кривини $\widetilde{R}(\cdot,\cdot)$ і секційна кривина $\widetilde{K}$, через аналогічні геометричні об'єкти ∇, $R(\cdot,\cdot)$, K і ∇R базового ріманового многовиду M і геометрію стандартного шару, грасманіана G^l_n. Вивчене грасманово розшарування $G^l(M)$ над простором M сталої кривини k. Отримані точні оцінки на секційну кривину в характерних напрямках. Отримані вирази для обчислення тензора Річчі грасманова розшаруваня. Доведена теорема про ейнштейновость $G^l(M)$, що є аналогом теореми Р. Грімальдідля грасманова розшарування.

На закінчення хочу щиро подякувати наукового керівника члена кореспондента Національної Академії наук України професора О.А. Борисенко за постановку проблеми та допомогу в роботі над дисертацією.

СПИСОК РОБОТ АВТОРА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

[1]. *Фарафонова Н.К.* Римановы метрики в расслоенных пространствах I // Изв. вузов. Математика. - 1995. - N 7 (398). - с. 65-77.

[2]. *Фарафонова Н.К.* Римановы метрики в расслоенных пространствах II // Изв. вузов. Математика. - 1996. - N 2 (405). - С. 59-72.

[3]. *Фарафонова Н.К.* Геометрия грассманова расслоения I // Изв. вузов. Математика. - 1997. - N 9 (424). - С. 70-83.

[4]. *Фарафонова Н.К.* Метрика грассманова расслоения // Тезисы докладов Всероссийской школы-коллоквиума по стахостическим методам геометрии и анализа. - Абрау-Дюрсо (Россия). - 1994. - С. 114-115.

[5]. *Фарафонова Н.К.* Римановы метрики в локально тривиальных расслоениях // Тезисы докладов Международной конференция по геометрии "в целом". - Черкассы (Украина). - 1995. - С. 90-92.

[6]. *Фарафонова Н.К.* Грассманово расслоение над пространственной формой // Тезисы докладов Международной геометрической школы-семинара памяти Н.В. Ефимсва. - Абрау-Дюрсо (Россия). - 1996. - С. 27-28.

[7]. *Фарафонова Н.К.* Кривизна грассманова расслоения // Тезисы докладов Международного геометрического семинара имени Н.И. Лобачевского. - Казань (Россия). - 1997. - С. 122.

[8]. *Фарафонова Н.К.* Грассмановы расслоенные пространства // Тезисы докладов Международной конференции по геометрии "в целом". - Черкассы (Украина). - 1997. - С. 39-40.

Фарафонова Н.К. Грасманови розшаровані простори над рімановим многовидом. - Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико - математичних наук за спеціальністю 01.01.04 - геометрія і топологія. - Фізико- технічний ін ститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України, Харків, 1997.

Запропанован метод побудування ріманова метричного тензору в довільних локально тривіальних розшарованих просторах, який природно згідний з рімановими метричними тензорами бази і стандартного шару. Запропонованна метрика є узагальнення метрик Сасакі і Мока на розшарування більш загального виду. Повністю досліджена будова ріманової метрики грасманова розшарування. Одержані точні оцінки на секційну кривину и кривину Річчі грасманова розшарування у характерних напрямках. Знайдено критерій ейнштейновості грасманова розшарування.

Ключові слова: ріманов метричний тензор, локально тривіальне розшарування, грасманово розшарування, тензор кривини.

Фарафонова Н.К. Грассмановы расслоенные пространства над римановым многообразием. - Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико - математических наук по специальности 01.01.04 - геометрия и топология. - Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины, Харьков, 1997.

Предложен метод построения риманова метрического тензора в произвольных локально тривиальных расслоенных пространствах, который естественно согласован с римановыми метрическими тензорами базы и стандартного слоя. Предлагаемая метрика есть обобщение метрик Сасаки и Мока на расслоения более общего вида. Полностью исследовано строение римановой метрики грассманова расслоения. Получены точные оценки на секционную кривизну и кривизну Риччи грассманова расслоения в характерных направлениях. Найден критерий эйнштейновости грассманова расслоения.

Ключевые слова: риманов метрический тензор, локально тривиальное расслоение, грассманово расслоение, тензор кривизны.

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

Farafonova N.K. Grassmann fiber spaces over Riemannian manifold. - Manuscript.

Thesis for a candidate's degree in Physics and Mathematics by speciality 01.01.04 - geometry and topology. - The Verkin Physico - engineering institute of low temperatures of National Academy of Science of Ukraine, Kharkov, 1997.

The method of a construction of Riemannian metric tensor is offered in arbitrary locally trivial fiber spaces. This metric tensor is naturally concordant with Riemannian metric tensors on base both standard fiber. The offered metric is generalization of the metrics Sasaki and Mok on fiber spaces more general view. Structure of the Riemannian metric of Grassmannian fiber space is investigated completely. The exact estimates on sectional curvature and on curvature Ricci are obtained for Grassmannian fiber space in characteristic directions. The criterion is found when Grassmannian fiber space is the Einstein manifold.

Key words: Riemannian metric tensor, locally trivial fiber space, Grassmannian fiber space, tensor curvature.

Відповідальний за випуск Л.Л. Ваксман

Подписано к печати 18.11.1997 г. физ. п.л. 2
Уч.-изд. л. .Заказ N 39 , Тираж 100 экз.

Ротапринт ФТИНТ НАН Украины, Харьков 164, пр. Ленина, 47.