

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР
ім. Б.І. ВЕРКІНА

ЩЕРБИНА Марія Володимирівна

УДК 531.19

**МОДЕЛІ СЕРЕДНЬОГО ПОЛЯ У СТАТИСТИЧНІЙ
ФІЗИЦІ ТА ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ МАТРИЦЬ**

01.01.03—математична фізика

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Харків 1997

АВ 39.070

Дисертація є рукописом.

Робота виконана у Фізико-технічному інституті низьких температур НАН України.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Гончар Микола Семенович, зав. відділом Інституту теоретичної фізики НАН України (м. Київ)

доктор фізико-математичних наук, член-кор. НАН України,
професор Петрина Дмитро Якович,
зав. відділом Інституту математики НАН України (м. Київ)

доктор фізико-математичних наук, Чуешов Ігор Дмитрович,
професор Харківського державного університету

Провідна установа:

Інститут проблем передачі інформації Російської АН, м. Москва.

Захист відбудеться 29. 12 1997 р.
о 11 год. на засіданні спеціалізованої
ради Д 02.35.01 в Фізико-технічному інституті низьких температур ім.
Б.І. Веркіна НАН України за адресою: 310164, м. Харків, пр. Леніна,
47.

З дисертацією можна ознайомитись в науковій бібліотеці Фізико-технічного інституту низьких температур, Харків, пр. Леніна, 47.

Автореферат розісланий 26. 11 1997 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
доктор фізико-математичних наук

В.П. Козляров

ЛНБ України ім.В.Стефаника



00737601 (0)

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми.

Різні моделі середнього поля завжди грали важливу роль в математичній фізиці. Прикладами таких моделей є моделі Кюрі-Вейса або сферична в статистичній фізиці та ансамбль Вігнера в теорії випадкових матриць. Ці моделі, з одного боку, на відміну від більш реалістичних, мають аналітичне рішення, а з іншого боку, дозволяють зрозуміти багато важливих якісних характеристик макроскопічної системи (а часто дають і дуже важливу кількісну інформацію про таку систему).

Нова хвиля інтересу до моделей середнього поля у статистичній фізиці була визвана розвитком теорії неупорядкованих систем, зокрема, теорій спінового скла та нейронних сіток. Непорядковані спінові системи мають велике значення у багатьох галузях теоретичної та математичної фізики. Серед множини важливих проблем цих теорій питання існування та природи фазових переходів є одними з найбільш цікавих та складних. Відповідні методи та проблеми складають зараз велику галузь, що має чимало важливих перетнів та широко застосовуються у багатьох галузях фізики, математики, біології, економіки та інших.

На жаль, отримати достатню інформацію про фазові переходи реалістичних моделей спінового скла є дуже складною проблемою. Тому, згідно до звичайної практики статистичної фізики, доцільно поперше розглянути та вивчити аналоги цих моделей із взаємодією типу середнього поля.

Така модель була запропонована у 1975 році Шерінгтоном та Кіркпатріком (SK). Користуючись так званним методом реплік, вони одержали вираз для середньої вільної енергії цієї моделі. Проте цей SK-розв'язок не може бути вірним у найбільш цікавому низькотемпературному районі, тому що не задовольняє загальним важливим вимогам, таким як невід'ємність ентропії, вимоги стабільності та інші.

Дальше інтенсивне вивчення цієї моделі в фізичній літературі виявило багато нових аспектів та понять, що не мають аналогів у теорії впорядкованих систем та не зрозумілі щільно і досі. Згідно до теорії Парізі SK- модель має фазовий перехід деякого нового типу, що відбувається, коли ми перетинаємо так звану лінію Алмейда - Таулеса (AT) на $T - h$ площині, де T - температура а h напрута магнітного поля системи. Над цією лінією параметр порядку моделі (параметр

Едвардса-Андерсона системи) самоусереднюється у термодинамічній границі та SK-вираз для вільної енергії є вірним, тоді як нижче цієї лінії параметр порядку є випадковою величиною навіть у термодинамічній границі, а його функція розподілу та вільна енергія моделі мають бути знайденими із складної варіаційної проблеми.

Але, на жаль, до наступного часу математичне обґрунтування теорії Парізі для моделі Шерінгтона-Кіркпатріка залишається відчиненим питанням. Більшість математичних результатів у цій галузі вивчають високотемпературну поведінку моделі, а використані методи не витримують обурення гамільтоніану магнітним полем. Тому отримання будь-яких регулярних результатів для низьких температур або при наявності магнітного поля є дуже актуальною проблемою.

Іншою важливою моделлю середнього поля теорії спінового скла є так звана модель Хопфілда. Вона була запропонована спочатку як модель чоловічої пам'яті, але її термодинамічні властивості виявилися такими різноманітними та цікавими, що зараз модель Хопфілда є навіть більш популярною у теорії спінового скла ніж SK-модель.

Вивчення цієї моделі за допомогою методу реплік дало результати, схожі до відповідних результатів у випадку SK, зокрема реплічно симетричний вираз для вільної енергії не може бути вірним у низькотемпературному районі, якщо α -ємкість моделі достатньо велика. Розв'язок з порушенням реплічної симетрії, що долає ці труднощі, було отримано також методом реплік і тому ці результати не можна вважати регулярним.

Теорія випадкових матриць є розділом математичної фізики, що безпосередньо прилягає до статистичної механіки за своїми методами та проблемами. Серед цих методів вивчення моделей типу середнього поля є одним з пайбільш поширених. Зокрема, цей метод у теорії випадкових матриць дає дуже реалістичну картину флуктуацій спектру складних квантових систем, таких як важкі ядра, маленькі металеві частки, системи з квантовим хаосом та інші.

Останнім часом моделі середнього поля у теорії випадкових матриць стали особливо популярними завдяки їхнім зв'язкам із сучасною квантовою теорією поля, теорією квантової гравітації та теорією бозонних струн, які інтенсивно використовують так звані матричні моделі або унітарно-інваріантні ансамблі випадкових матриць.

Велику роль в усіх математичних та фізичних задачах, пов'язаних з

унітарно -інваріантними ансамблями, грає нормована лічильна функція власних значень, аналіз якої, звичайно, є першим кроком у вивченні моделі. На жаль, ця функція досі була відома тільки у кількох окремих випадках, тому отримання її явного вигляду у загальному випадку є важливою проблемою.

Нормована лічильна функція надає можливості вивчати поведінку власних значень у випадку макроскопічної відстані поміж рівнями. Але у багатьох фізичних теоріях треба вивчати асимптотичний розподіл власних значень на мікроскопічних відстанях. Цей розподіл описує гіпотеза універсальності локальної поведінки власних значень унітарно -інваріантних ансамблів, що була сформульована Дайсоном - Мехтою багато років тому, і є одним з найважливіших фактів в теорії випадкових матриць. Вона стверджує, що на відміну від макроскопічного, локальний розподіл власних значень не залежить від конкретного вигляду ансамблю, а є однаковим для всіх ансамблів. Доведення гіпотези універсальності є одним з найважливіших питань теорії унітарно-інваріантних ансамблів.

Великий інтерес до моделей середнього поля в теорії невпорядкованих систем, їх численні зв'язки з багатьма сучасними фізичними теоріями, такими як теорії спінового скла та нейронних сіток, квантова хромодинаміка та теорія квантової гравітації, у сукупності з відсутністю коректних математичних результатів у цих галузях роблять тему дисертації дуже актуальною.

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами.

Роботу виконано згідно з науковими темами та планами Математичного відділення Фізико-технічного інституту низьких температур НАН України у галузі статистичної фізики та теорії невпорядкованих матриць.

Мета роботи.

Метою роботи є коректне математичне обґрунтування ряду гіпотез теоретичної фізики про моделі середнього поля в статистичній фізиці та теорії випадкових матриць.

Методика дослідження.

У роботі застосовуються методи статистичної фізики та спектральної теорії випадкових матриць. Зокрема, важливу роль грають методи теорії середнього поля.

Наукова новизна одержаних результатів.

Для моделі Шерінгтона-Кіркпатрика вперше

- доведено, що самоусереднення параметру Едвардса - Андерсона є необхідною та достатньою умовою того, щоб реплічно-симетричний вираз для вільної енергії моделі був вірним;

- доведено, що у низькотемпературному районі параметр Едвардса - Андерсона не самоусереднюється, якщо магнітне поле не дуже велике;

- знайдена область параметрів моделі Шерінгтона -Кіркпатрика, в якій реплічно-симетричний вираз для вільної енергії є вірним. На відміну від відомих раніш результатів, ця область містить низькотемпературний район з досить міцним полем, а також весь високотемпературний район ($\beta J > 1$).

Для моделі Хопфілда отримано такі нові результати:

- знайдена границя вільної енергії при $\alpha \rightarrow 0$;

- побудовано асимптотичне розв'язання вільної енергії та параметрів порядку моделі по ступеням α ;

- доведено, що параметр Едвардса -Андерсона самоусереднюється тоді та тільки тоді, коли параметри порядку моделі задовольняють системі реплічно-симетричних рівнянь;

- доведено, що у низькотемпературному районі параметр Едвардса - Андерсона не самоусереднюється, якщо магнітне поле моделі є достатньо малим, а ємкість α - достатньо великою.

Для унітарно-інваріантних ансамблів випадкових матриць вперше

- знайдено граничну функцію розподілу власних значень;

- доведено гіпотезу універсальності локального розподілу власних значень.

Отримано оцінки типу великих відхилень для норм ансамблів Вігнеру, деформованого Вігнеру та Ветнеру випадкових матриць. Ці оцінки дозволяють зробити висновок, що коли n досить велике, із ймовірністю 1 норма матриці розташована довільно близько до краю граничного неслучайного спектру.

Запропоновано ефективний метод вивчення тих граничних задач статистичної фізики, що приводять до моделей середнього поля, наприклад, границя нульової температури в класичній моделі Гейзенберга.

Розроблено метод вивчення сферичної границі n -векторної моделі у непорядкованому випадку. Цей метод дозволяє знайти та проаналізувати сферичні границі для моделей з випадковою взаємодією типу Шерінгтона - Кіркпатріка або Хопфілда, моделей з випадковою анізотропією, та інших.

Теоретичне значення.

Результати та методи, розроблені в дисертації, активно використовуються у дальших дослідженнях в галузях теорії спінового скла та нейронних сіток, теоріях випадкових матриць та ортогональних поліномів. Результати першої та другої глав використано у книжці проф. Б.Тіроші по теорії нейронних сіток. Вони використовуються також у регулярному курсі по теорії непорядкованих спінових систем для студентів Римського Університету- I.

Результати, отримані в дисертації, можуть бути корисними у дослідженнях в галузі математичної фізики, що проводяться у Фізико-технічному інституті низьких температур НАН України (Харків), Інституті математики НАН України (Київ), Інституті передачі інформації Російської АН, Римського університету-І (Італія), Паризького університету-7 (Франція), та Рурського університету (Бохум, Німеччина)

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації отримано автором самостійно. Вклад кожного з співавторів чітко виділено в дисертаційній роботі.

Апробація результатів.

Матеріали дисертації доповідались та обговорювались на XI Міжнародному конгресі з математичної фізики (Париж, Франція, 1994 р.), 5-му Європейському Симпозіумі по стохастичному аналізу (Бонн, Німеччина, 1994 р.), Міжнародній конференції з методів стохастичного аналізу у статистичній механіці, фінансах та біології (Білефельд, Німеччина, 1994 р.), Міжнародній конференції з теорії непорядкованих спінових систем (Берлін, Німеччина, 1996 р.), Міжнародній школі з статистичної механіки (Білефельд, Німеччина, 1996 р.), Міжнародній конференції "Математична фізика - сьогодні, пріоритетні технології завтра" (Київ, 1997 р.), семінарах з математичної фізики Римського університету-І (Італія), Паризького університету-7 (Франція),

Рурського університету (Бохум, Німеччина), та Фізико-технічного інституту низьких температур НАН України (Харків).

Публікації.

За матеріалами дисертації у фахових журналах опубліковано 14 наукових статей та вийшла монографія в серії "Phase Transition and Critical Phenomena", де автором самостійно написані 4-й та 5-й розділи.

Об'єм та структура. Дисертація викладена на 256 сторінках та складається з вступу, п'яти глав, висновків та списку цитованої літератури, що містить 125 джерел.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **першій** главі вивчається термодинамічна поведінка головної моделі теорії середнього поля для спінового скла - моделі Шерінгтона - Кіркпатріка.

У параграфі 1.1 подан короткий огляд літератури за темою та сформульовано головні результати дисертації про модель Шерінгтона - Кіркпатріка.

У параграфі 1.2 на базі методу, запропонованого у [2], вивчено зв'язок між поведінкою параметра Едвардса -Андерсона моделі Шерінгтона -Кіркпатріка та реплічно-симетричним виразом для вільної енергії. Основним результатом тут є

Теорема 1.1

Розглянемо модель Шерінгтона - Кіркпатріка з гамільтоніаном вигляду:

$$H(J, t) = -\frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{i \neq j} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - t \sum_i h_i \sigma_i, \quad (1)$$

де J_{ij} ($1 \leq i < j \leq N$) - незалежні однаково розподілені випадкові величини з середнім θ , дисперсією J^2 та обмеженим третім моментом

$$E\{|J_{ij}|^3\} \leq C < \infty, \quad (2)$$

а зовнішнє поле h_i ($i = 1, \dots, N$) задано незалежними гаусівськими величинами з середнім θ та дисперсією 1.

Тоді, якщо параметр Едвардса - Андерсона моделі

$$q_N = \frac{1}{N} \sum_i \langle \sigma_i \rangle^2 \quad (3)$$

самоусереднюється в термодинамічній границі, тобто

$$\Delta_N = E\{(q_N - E q_N)^2\} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \quad (4)$$

для будь-яких значень J, β, T із деяких інтервалів $J \in (J_0, J_0 + \epsilon)$, $\beta \in (\beta_0, \beta_0 + \epsilon)$ та $t \in (0, \epsilon)$, де $\epsilon > 0$, то вільна енергія $E\{f_N\}$ моделі в термодинамічній границі має вигляд

$$\beta f_{SK} = -(\beta J)^2/4(1-q)^2 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \log 2 \cosh(\beta J q^{1/2} u + \beta t) e^{-u^2/2} du \quad (5)$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tanh^2(\beta J q^{1/2} u + \beta t) e^{-u^2/2} du. \quad (6)$$

Але, так як добре відомо, що реплічно-симетричний вираз для вільної енергії дає негативну ентропію у низькотемпературній зоні, цей результат надає можливість зробити висновок про відсутність властивості самоусереднення у параметра Едвардса - Андерсона в низькотемпературній зоні.

Вивчення реплічно-симетричного виразу для вільної енергії продовжено у параграфі 1.3, де доведена

Теорема 1.2

Розглянемо SK модель вигляду (1). Нехай для деяких (J, β, t) виконується умова:

$$\frac{(\beta J)^2}{2\pi} \int_0^1 d\zeta \int \int dudh_1 e^{-h_1^2/2} e^{-u^2/2} \cosh^{-4}(\beta J(q\zeta)^{1/2} u + \beta t h_1) \leq 1, \quad (7)$$

де q є рішенням реплічно симетричного рівняння (6). Тоді вільна енергія моделі $E\{f_N\}$ у термодинамічній границі $N \rightarrow \infty$ має вигляд (5).

Зауважимо, що хоча оцінка для границі реплічно-симетричної зони параметрів для моделі Шерінгтона - Кіркпатріка, яку надає Теорема 1.2, і не співпадає з тою, що очікується з у фізичній літературі (так звана АТ-лінія), але ця оцінка цілком містить високотемпературну зону $\beta J \leq 1$, та має вірну поведінку, коли температура прямує до 0 ($\beta \rightarrow \infty$).

Цей результат опубліковано в роботі [3].

У **другій** главі вивчається поведінка головної моделі теорії нейронних сіток - моделі Хопфілда з гамільтоніаном

$$H = -\frac{J}{2N} \sum_{\mu=1}^p \sum_{i,j=1}^N \xi_i^\mu \xi_j^\mu \sigma_i \sigma_j - \sum_{i=1}^N \tilde{h}_i \sigma_i, \quad \frac{p}{N} \rightarrow \alpha, \quad N \rightarrow \infty, \quad (8)$$

де $J \geq 0$, $\xi_i^\mu = \pm 1$ ($i = 1, \dots, N$, $\mu = 1, \dots, p$) незалежні випадкові величини з нульовим середнім, та деяким випадковим зовнішнім полем \tilde{h}_i .

Ця модель, запропонована спочатку як модель чоловічої пам'яті, демонструє таку цікаву термодинамічну поведінку, що зараз розглядається фахівцями теорії спінового скла поруч з моделлю Шерінгтона - Кіркпатрика. Одним з головних об'єктів інтересу в моделі Хопфілда є поведінка параметрів

$$\langle m^\mu \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \langle \sigma_i \rangle, \quad (9)$$

що відповідають за "розпізнання образів (патернів)".

У параграфі 2.1 подано стислий огляд літератури за темою та сформульовано головні проблеми та результати.

Параграфи 2.2 та 2.3 присвячені вивченню моделі Хопфілда у границі $\alpha \rightarrow 0$. У параграфі 2.3 доведено теорему про вільну енергію моделі Хопфілда у границі $\alpha \rightarrow 0$. Це доведення оснований на ідеї використання "апроксимуючого" гамільтоніану, що була запропонована вперше у роботах Н.Н.Боголюбова (мол.).

Теорема 2.1

Розглянемо модель Хопфілда (8) із зовнішнім полем, паралельним першому патерну.

$$\tilde{h}_i = h^1 \xi_i^1$$

Тоді для будь-якого h^1 вільна енергія $E\{f(H_N(h^1))\}$ задовольняє нерівності

$$|E\{f(H(h^1))\} - \min_m f_0(m, h^1)| \leq \text{const} \sqrt{\alpha}, \quad (10)$$

де

$$f_0(m, h^1) = \frac{Jm^2}{2} - \frac{1}{\beta} \log 2 \cosh \beta(m + h^1), \quad (11)$$

і тому вільна енергія моделі Хопфілда у границі $\alpha \rightarrow 0$ співпадає з вільною енергією Кюрі-Вейса:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} E\{f(H(h^1))\} = \min_m f_0(m, h^1).$$

У параграфі 2.3 побудовано асимптотичні ряди по ступеням α для вільної енергії та параметрів порядку моделі та доведено відповідні оцінки для остаточної членів у цих рядах. Головним технічним засобом тут є застосування формул гаусівського інтегрування.

У параграфі 2.4 на базі методу, запропонованого у [6], вивчено зв'язок між самоусередненням параметру порядку моделі Хопфілда та системою реплічно-симетричних рівнянь для параметрів порядку моделі. Головний результат має вигляд:

Теорема 2.2.

Розглянемо модель Хопфілда (8) із зовнішнім полем складного вигляду, що потрібен з технічних різонів:

$$\tilde{h}_i = -h^1 \xi_i^1 - \sum_{\mu=2}^s (d_N + \gamma^\mu) \xi_i^\mu - \varepsilon_1 \sum_{\mu=s+1}^p \gamma^\mu \xi_i^\mu - \varepsilon_2 h_i \quad (12)$$

де $s = [\log^{1/2} N]$, ε_1 та ε_2 - додатні параметри, $d_N = s^{-2/3}$, та γ^μ , h_i - незалежні гаусівські величини з нульвим середнім та дисперсією 1.

Позначимо

$$\Delta = E\{p^{-1} \sum_{\mu > s, i \geq 1} \langle (m^\mu - \langle m^\mu \rangle)(\sigma_i - \langle \sigma_i \rangle) \rangle^2\}. \quad (13)$$

Тоді для майже усіх J , h^1 , ε_1 , ε_2 α та β параметри порядку моделі: \bar{q}_N вигляду (3), m^1 вигляду (9) та \bar{r}_N вигляду

$$r_N = \alpha^{-1} \sum_{\mu=s+1}^p \langle m^\mu \rangle^2 \quad (14)$$

задовольняють системі рівнянь

$$\begin{aligned}
 m^1 &= E\left\{ \int \frac{dv \exp(-\frac{v^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} \xi_1^1 \tanh \beta((\alpha \bar{r}_N(\varepsilon_1))^{1/2} v + (h^1 + Jm^1)\xi_1^1 + \right. \\
 &\quad \left. J \sum_{\nu=2}^s c^\nu \xi_1^\nu + \varepsilon_2 h_1) \right\} + O(\Delta_N^{1/2}) + o(1), \\
 \bar{r}_N &= \frac{\bar{q}_N + \varepsilon_1^2 J^2 \beta^2 (1 - \bar{q}_N)^2}{(1 - \beta J(1 - \bar{q}_N))^2} + O(\Delta_N^{1/2}) + o(1), \\
 \bar{q}_N &= E\left\{ \int \frac{dv \exp(-\frac{v^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} \tanh^2 \beta((\alpha \bar{r}_N(\varepsilon_1))^{1/2} v + (h^1 + Jm^1)\xi_1^1 + \right. \\
 &\quad \left. J \sum_{\nu=2}^s c^\nu \xi_1^\nu + \varepsilon_2 h_1) \right\} + O(\Delta_N^{1/2}) + o(1),
 \end{aligned} \tag{15}$$

де параметри c^ν у свою чергу задовольняють рівнянням:

$$\begin{aligned}
 c^\nu &= E\left\{ \int \frac{dv \exp(-\frac{v^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} \xi_1^\mu \tanh \beta((\alpha \bar{r}_N(\varepsilon_1))^{1/2} v + (h^1 + Jm^1)\xi_1^1 + \right. \\
 &\quad \left. J \sum_{\nu=2}^s c^\nu \xi_1^\nu + \varepsilon_2 h_1) \right\} + O(\Delta_N^{1/2}) + o(1),
 \end{aligned} \tag{16}$$

а

$$\bar{r}_N(\varepsilon_1) = J^2 \bar{r}_N + \frac{2J\beta\varepsilon_1^2}{1 - \beta J(1 - \bar{q}_N)} + \varepsilon_1^2.$$

Незвичайний вигляд поля \bar{h}_i в Теоремі 2.2 пояснюється бажанням відділити патерни, які конденсуються (тобто можуть бути ненульовими у термодинамічній грайші), від тих, що не конденсуються (дорівнюють нулю, коли $N \rightarrow \infty$). У нашому випадку поле обрано так, що тільки перші s патернів можуть бути конденсованими.

Для того, щоб вивчити вплив конденсованих патернів на вільну енергію, ми використовуємо таку лему

Лема 2.1.

Розглянемо "апроксимуючий" гамільтоніан вигляду:

$$\begin{aligned}
 H^a(c^1, \dots, c^s) &= H - J \sum_{\nu=1}^s c^\nu \sum_{i=1}^N \xi_i^\nu \sigma_i - d_N \sum_{\nu=2}^s \sum_{i=1}^N \xi_i^\nu \sigma_i - \\
 &\quad \sum_{\nu=2}^s \gamma^\nu t^\nu - h^1 \sum_{i=1}^N \xi_i^1 \sigma_i + J \frac{N}{2} \sum_{\nu=1}^s (c^\nu)^2,
 \end{aligned} \tag{17}$$

де H визначен формулою (8) з полем \tilde{h} вигляду (12). Тоді вільні енергії гамільтоніанів H та H^a задовольняють нерівності

$$0 \leq \min_{c^1, \dots, c^s} E\{f(H^a(c^1, \dots, c^s))\} - E\{f(H)\} \leq o(1)$$

Одна з головних технічних труднощів у вивченні моделі Хопфілда порівняно із моделлю Шерінгтона - Кіркпатрика полягає в тому, що змінні $t^\mu \equiv \sqrt{N}m^\mu$ ($\mu > s$), які виконують тут роль спінів, не обмежені. Щоб подолати цю трудність, ми використовуємо таку лему:

Лема 2.2

Розглянемо множину точок

$$\mathcal{M} \equiv \left\{ \mathbf{m} = (m^1, \dots, m^p) : \max_{\nu \geq s+1} |m^\nu| \geq 5\delta_N \right\},$$

де $\delta_N = s^{-1/3} = d_N^{1/2}$. Хай $\chi_{\mathcal{M}}(\mathbf{m})$ позначає характеристичну функцію множини \mathcal{M}

$$\chi_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{m} \in \mathcal{M} \\ 0, & \mathbf{m} \notin \mathcal{M}. \end{cases}$$

Тоді для будь-якого $n > 0$ існує стала C_n (незалежна від N), така що

$$\text{Prob}\{\langle \chi_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}) \rangle \leq e^{-\beta J N d_N^2 / 75}\} \geq 1 - C_n N^{-n}. \quad (18)$$

Як і аналогічний результат для моделі Шерінгтона - Кіркпатрика, Теорема 2.2 дозволяє зробити висновок про відсутність самоусереднення параметру порядку у низькотемпературній зоні або при досить великих α .

Користуючись методом, розробленим в першій главі для моделі Шерінгтона- Кіркпатрика, у п.2.4.2 доведен результат аналогічний Теоремі 1.2

Теорема 2.3

Розглянемо модель Хопфілду вигляду (8) із зовнішнім полем \tilde{h} вигляду (12). Якщо параметри α та β задовольняють нерівності

$$\beta^2 \alpha (1 + \sqrt{\alpha})^2 \leq 1, \quad (19)$$

то параметри r_N та q_N самоузгоджуються у термодинамічній границі та задовольняють реплічно-симетричній системі рівнянь (15).

У параграфі 2.6 метод параграфу 2.4 поширено на випадок, коли існує взаємодія між патернами.

$$H = -\frac{1}{2N} \sum_{\mu=1}^p \sum_{i,j=1}^N a_{\mu-\nu} \xi_i^\mu \xi_j^\nu - \varepsilon N \sum_{\nu=1}^p c^\nu m^\nu \sigma_i \sigma_j - \varepsilon_1 \sum_{\nu=1}^p \gamma^\nu t^\nu - \varepsilon_2 \sum_{i=1}^N h_i \sigma_i. \quad (20)$$

Тут матриця $\mathcal{A} = \{a_{\mu-\nu}\}_{\mu,\nu=1}^p$, що задає взаємодію між патернами, є Тепліцевою з періодичними граничними умовами $a_{\mu+p} = a_\mu$. Поведінка такої моделі співпадає з результатами біологічних експериментів, в яких послідовність патернів є впорядкованою за часом з кореляціями, які залежать від відстані у часі. Ця модель була проаналізована методом реплік у кількох фізичних роботах.

У параграфі 2.6 доведена

Теорема 2.4

Розглянемо гамільтоніан (20), з $a_\mu > 0$ та $\sum_{\mu=1}^p a_\mu < \infty$. Тоді його параметри $\langle m^\mu \rangle$, \bar{q}_N та \bar{r}_N задовольняють системі рівнянь

$$\begin{aligned} \langle m^\mu \rangle &= E \left\{ \int \frac{dv \exp(-\frac{v^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} \xi_1^\mu \tanh \beta [(\alpha \bar{r}_N(\varepsilon_1))^{1/2} v + \right. \\ &\quad \left. (\text{Am. } \xi_1) + \varepsilon(\xi_1, \mathbf{c}) \right\} + O(\tilde{\Delta}_N^{1/2}) + o(1), \\ \bar{r}_N &= \frac{\bar{q}_N}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx a^2(x)}{(1 - \beta(1 - \bar{q}_N) a(x))^2} + O(\tilde{\Delta}_N^{1/2}) + o(1), \\ \bar{q}_N &= E \left\{ \int \frac{dv \exp(-\frac{v^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} \tanh^2 \beta [(\alpha \bar{r}_N(\varepsilon_1))^{1/2} v + \right. \\ &\quad \left. (\text{Am. } \xi_1) + \varepsilon(\xi_1, \mathbf{c}) \right\} + O(\tilde{\Delta}_N^{1/2}) + o(1), \end{aligned} \quad (21)$$

де

$$\tilde{\Delta}_N = E \{ (q_N - \bar{q}_N)^2 \}, \quad a(x) = a_0 + 2 \sum_{l=1}^p a_l \cos lx.$$

У **третій** главі методами теорії середнього поля вивчається розподіл власних значень унітарно-інваріантного ансамблю випадкових Ермітових матриць, що визначається густиною розподілу:

$$p_n(M)dM = Z_n^{-1} \exp\{-n\text{Tr}V(M)\}dM, \quad (22)$$

де M - $n \times n$ Ермітова матриця,

$$dM = \prod_{j=1}^n dM_{jj} \prod_{j < k} d\Im M_{jk} d\Re M_{jk},$$

а V - дійсна функція, що задовольняє умовам:

- (a) $V(\lambda)$ обмежена знизу;
- (b) $V(\lambda) \geq (2 + \epsilon) \ln |\lambda|$ з деяким $\epsilon > 0$, для досить великих $|\lambda|$;
- (c) існує $\gamma > 0$ таке, що для будь-якого $L > 0$

$$|V(\lambda_1) - V(\lambda_2)| \leq C(L)|\lambda_1 - \lambda_2|^\gamma, \quad \text{якщо} \quad |\lambda_1|, |\lambda_2| \leq L. \quad (23)$$

Простішою, але дуже важливою характеристикою розподілу власних значень матриці M , є нормована лічильна функція власних значень

$$N_n(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{\lambda_i^* < \lambda} 1, \quad (24)$$

де $\{\lambda_i^*\}_{i=1}^n$ - повний набір власних значень матриці M . Для вивчення цієї, а також інших спектральних характеристик матриць M зручно, користуючись унітарною інваріантністю розподілу (22), перейти до розподілу власних значень

$$p_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = Q_n^{-1} \exp\left\{-n \sum_{i=1}^n V(\lambda_i)\right\} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j| \quad (25)$$

Легко бачити, що цей розподіл має вигляд Гібсівського розподілу одномірної системи n часток з гамільтоніаном

$$H_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^n V(\lambda_i) - \frac{1}{n} \sum_{i < j} \ln |\lambda_i - \lambda_j| \quad (26)$$

при температурі n^{-1} . А маргінальні гушини, відповідні до розподілу (25)

$$p_l^{(n)}(\lambda_1, \dots, \lambda_l) = \int p_n(\lambda_1, \dots, \lambda_l, \lambda_{l+1}, \dots, \lambda_n) d\lambda_{l+1} \dots d\lambda_n \quad (27)$$

співпадають з кореляційними функціями цієї системи. Так як гамільтоніан (26) має фактор n^{-1} перед взаємодією, він може бути проаналізованим за допомогою методів теорії середнього поля. У параграфі 3.2, користуючись таким методом, розробленим в [11], доведена

Теорема 3.1.

Хай ансамбль випадкових матриць має густину розподілу (22), де функція $V(\lambda)$ задовольняє умовам (22).

Тоді нормована лічильна функція (23), відповідна цьому ансамблю, збігається по ймовірності до невідповідної абсолютно неперервної функції $N(\lambda)$, причому густина цієї функції $\rho(\lambda)$ однозначно визначена умовами:

$$\rho(\lambda) \geq 0, \quad (28)$$

$$\int \rho(\lambda) d\lambda = 1, \quad (29)$$

$$- \int \ln |\lambda_1 - \lambda_2| \rho(\lambda_1) \rho(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 < \infty, \quad (30)$$

функція

$$u(\lambda) = \int \ln |\lambda - \lambda'| \rho(\lambda') d\lambda' - V(\lambda) \quad (31)$$

обмежена зверху та

$$\text{supp} \rho(\lambda) \subset \{\lambda : u(\lambda) = \max_{\lambda'} u(\lambda')\}. \quad (32)$$

Крім цього, $\rho(\lambda)$ може бути знайденою як рішення певної варіаційної проблеми, аналогічної той, що виникає у теорії середнього поля.

Цей результат означає, що при $n = \infty$ перша маргінальна густина $\rho(\lambda)$ (перша кореляційна функція) ансамблю власних значень може бути знайденою з "молекулярного рівняння" (32), а друга та інші є добутками перших (наприклад, $p_2^{(n)}(\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow \rho(\lambda_1)\rho(\lambda_2)$, якщо $\lambda_1 \neq \lambda_2$ та $|\lambda_1 - \lambda_2|$ не залежить від n). Але одним з найважливіших питань у теорії випадкових матриць є питання про поведінку кореляційних функцій для відстаней між рівнями порядку n^{-1} ($|\lambda_1 - \lambda_2| = O(n^{-1})$, коли $n \rightarrow \infty$). Гіпотеза універсальності, сформульована багато років тому Дайсаном - Мехтой, стверджує, що при такому граничному процесі границя кореляційних функцій існує і є незалежною від конкретного вигляду ансамблю (тобто від функції $V(\lambda)$).

Гіпотеза універсальності. Для будь-яких n - незалежних l , λ_0 , таких що $\rho(\lambda_0) \neq 0$ та довільних фіксованих $(x_1, \dots, x_l) \in \mathbf{R}^l$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_l^{(n)}(\lambda_0 + \frac{x_1}{n\rho_n(\lambda_0)}, \dots, \lambda_0 + \frac{x_l}{n\rho_n(\lambda_0)})}{[n\rho_n(\lambda_0)]^l} = \det \|S(x_1 - x_k)\|_{j,k=1}^l, \quad (33)$$

де

$$S(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}. \quad (34)$$

Гіпотеза універсальності для ансамблів з функціями $V(\lambda)$, що задовольняють умовам (23) та мають обмежену третю похідну, доведена у параграфі 3.3.

Теорема 3.2

Нехай функція $V(\lambda)$ задовольняє умовам (23), її третя похідна обмежена на достатньо великому інтервалі

$$\sup |V'''(\lambda)| \leq C < \infty, \quad |\lambda| \leq L, \quad (35)$$

$V'(\lambda)$ існує для всіх λ та

$$\int (V'(\lambda))^2 e^{-kV(\lambda)} d\lambda < \infty \quad (36)$$

для деякого $k > 0$. Тоді гіпотеза універсальності (33) вірна рівномірно по (x_1, \dots, x_l) , що належать до будь-якого компакта в \mathbf{R}^l .

Важливою частиною доведення Теорема 3.2 є рівномірна збіжність $\rho_n(\lambda)$ до $\rho(\lambda)$ на будь-якому компактні вигляду $\{\lambda : \rho(\lambda) \geq \varepsilon\}$.

Пропозиція 3.1

Якщо виконано умови Теорема 3.2, то для всіх λ та n таких, що $\rho(\lambda) > n^{-1/9}$

$$|\rho_n(\lambda) - \rho(\lambda)| \leq C \left(1 + \frac{1}{\rho(\lambda)}\right) n^{-1/4}, \quad (37)$$

де C деяка n незалежна стала.

Результати глави 3 опубліковано у роботах [8] та [9], де основні результати доведено автором дисертації.

У **четвертій** главі розроблено загальний метод, що дозволяє одностайно розглядати граничні задачі статистичної фізики, які приводять до моделей типу середнього поля. В основу цього методу покладено ідею введення так званого апроксимуючого гамільтоніана, запропоновану в роботах Н.Н.Боголюбова (мол.).

У параграфі 4.1 дан стислий огляд літератури та сформульовано головні результати глави. Вони мають вигляд двох теорем загального вигляду, що дозволяють отримати як наслідки результати про вільну енергію та кореляційні функції моделі Гейзеберга у границі нульової температури, у границі нескінченного радіуса взаємодії, а також у кількох інших граничних задачах.

На відміну від методів, запропонованих раніш, у яких було використано логарифмічні по $|\Lambda|$ оцінки для вільної енергії, і які тому не можуть бути використаними для доведення збігання кореляційних функцій, метод дисертації дозволяє довести також збігання усіх кореляційних функцій моделі. Але, так як, на відміну від вільної енергії, кореляційні функції у точках фазового переходу визначено неоднозначно, ми вивчаємо так звані "квазісередні", які утворюються за допомогою додання у гамільтоніан деяких додаткових членів. Далі, після термодинамічної границі, ми посилаємо міцність цих членів до 0.

Метод глави 4 є основою для доведення Теорема 3.1 для унітарно-інваріантних ансамблів випадкових матриць.

Теорема 4.1.

Розглянемо n -мірну класичну модель Гейзеберга (n -векторну модель), що задається Гамільтоніаном

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{r,r' \in \Lambda} u_{r,r'}(\mathbf{S}_r, \mathbf{S}_{r'}) + \sum_{r \in \Lambda} \Phi_r(\mathbf{S}_r), \quad (38)$$

де $\mathbf{S}_r \in R^n$, $|\mathbf{S}_r| = n$. Хай взаємодія $u_{r,r'}$ задовольняє умовам:

$$\frac{1}{|\Lambda|} \sum_{r,r' \in \Lambda} |u_{r,r'}|^2 \leq K_\Lambda, \quad (39)$$

$$u_{r,r} \geq 0. \quad (40)$$

Розглянемо також апроксимацію середнього поля для нашої моделі

$$H_a(S, c) = \sum_{r,r' \in \Lambda} u_{r,r'}(\mathbf{S}_r, \mathbf{c}_{r'}) + \sum_{r \in \Lambda} \Phi_r(\mathbf{S}_r) - \frac{1}{2} \sum_{r,r' \in \Lambda} u_{r,r'}(\mathbf{c}_r, \mathbf{c}_{r'}). \quad (41)$$

Хай $C \in R^{n|\Lambda|}$ є множиною рішень системи рівнянь самоузгодження

$$\sum_{r' \in \Lambda} u_{r,r'} c_{r'}^i = \sum_{r' \in \Lambda} u_{r,r'} \langle S_{r'}^i \rangle_{H_a(c)} \quad (r \in \Lambda), \quad (42)$$

та $c^* \in C$ задовольняє умові

$$f_{\Lambda}(H_a(c^*), \beta) = \min_{c \in C} f_{\Lambda}(H_a(c), \beta). \quad (43)$$

Тоді

$$0 \leq f_{\Lambda}(H_a(c^*), \beta) - f_{\Lambda}(H, \beta) \leq \frac{K_{\Lambda}^{-1/4}}{\sqrt{2\beta}}.$$

Зауваження.

Навіть у випадку трансляційно-інваріантного $J_{r,r'} = J_{r-r'}$ та однорідного магнітного поля гамільтоніан $H_a(c^*)$ може бути не трансляційно-інваріантним (поле c_r може бути неоднорідним). Достатні умови для однорідності c_r мають вигляд:

- (а) $\sum_{r' \in \Lambda} J_{r,r'}$ не залежить від r ,
- (б) $J_{r,r'} \geq 0$,
- (в) Φ_r не залежить від r .

Як було зауважено раніш, для вивчення кореляційних функцій нам треба додати до гамільтоніану (38) деякі члени.

Для цього поділимо взаємодію $J_{r,r'}$ на дві частини позитивну $J_{r,r'}^{(1)}$ та негативну $J_{r,r'}^{(2)}$:

$$J_{r,r'} = J_{r,r'}^{(1)} + J_{r,r'}^{(2)}$$

та розглянемо для фіксованого β

$$\Gamma(\tau) = H + \frac{\tau}{2} \sum_{r,r' \in \Lambda} J_{r,r'}^{(1)} (S_r - c_r^*)(S_{r'} - c_{r'}^*), \quad \tau \in (0, 1], \quad (44)$$

або

$$\Gamma^{\beta}(\tau) = H + \frac{\tau}{2} \sum_{r \in \Lambda} (S_r - c_r^*)^2, \quad \tau \in (0, 1], \quad (45)$$

якщо $\beta \rightarrow \infty$.

Теорема 4.2

Розглянемо гамільтоніани H , $H_a(c^*)$, $\Gamma(\tau)$ та $\Gamma^{\beta}(\tau)$ вигляду (38), (41), (44) та (45) відповідно, задовольняючи вимогам (39), (40), (43) та

$$\sum_{r' \in \Lambda} |J_{r,r'}| \leq C \quad (46)$$

рівномірно по r та Λ . Тоді для фіксованого β

$$\left| \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{r \in \Lambda} \langle \prod_{k=1}^m S_{r_k+r}^{j_k} \rangle_{\Gamma} - \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{r \in \Lambda} \langle \prod_{k=1}^m S_{r_k+r}^{j_k} \rangle_{H_a} \right| \leq (C_1 + C_2 \tau^{-1}) K_{\Lambda}^{-1/4}, \quad (47)$$

де $K_{\Lambda} = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{r, r' \in \Lambda} (J_{r, r'})^2$, а сталі C_1 та C_2 не залежать від Λ та τ .
Для $\beta \rightarrow \infty$

$$\left| \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{r \in \Lambda} \langle \prod_{k=1}^m S_{r_k+r}^{j_k} \rangle_{\Gamma^{\beta}} - \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{r \in \Lambda} \langle \prod_{k=1}^m S_{r_k+r}^{j_k} \rangle_{H_a} \right| \leq \frac{\text{const}}{\sqrt{\beta}}. \quad (48)$$

Теорем 4.1 та 4.2 доведено у параграфі 4.2.

Наслідки цих теорем вивчено у параграфі 4.3 (Теорем 4.3-4.5).
Першим очевидним наслідком Теорем 4.1 та 4.2 є

Теорема 4.3

Розглянемо модель Гейзенбергу (38), задовольняючи умовам (39), (40). Розглянемо також апроксимуючий гамільтоніан (41) та оберем \mathbf{c}^* , задовольняюче умові (43). Тоді

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} f_{\Lambda}(H, \beta) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} f_{\Lambda}(H_a(\mathbf{c}^*), \beta).$$

Аналогічні граничні співвідношення вірні і для "квазісередніх" моделей (38) та моделі (41).

Іншим наслідком Теорем 4.1 та 4.2 є результат, отриманий вперше Лебовіцем та Пенроузом та розвинутий у [10]) для границі нескінченного радіуса взаємодії. У цьому випадку взаємодія має вигляд

$$u_{r, r'} = \gamma^d \phi(\gamma(r - r')), \quad \int_{R^d} |\phi(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leq C < \infty. \quad \gamma \rightarrow 0 \quad (49)$$

Так як у цьому випадку

$$K_1(\gamma) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{r, r' \in \Lambda} u_{r, r'}^2 = \gamma^d \int_{R^d} |\phi^2(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = O(\gamma^d),$$

Теорем 4.1 та 4.2 дають нам

Теорема 4.4

Розглянемо гамільтоніан вигляду (38) із взаємодією (49). Тоді вільна енергія та всі кореляційні функції (тобто відповідні "квазісередні") цього гамільтоніану збігаються, коли $\gamma \rightarrow 0$, до відповідних термодинамічних характеристик гамільтоніану $H_a(\mathbf{c}^*)$, в значеного співвідношеннями (41)-(43).

Більш того, якщо функція ϕ невід'ємна, та Φ_r не залежить від r , тоді c_r^* не залежить від r , і можна розглядати гамільтоніан $H_a(c)$ у вигляді

$$H_a(c) = \alpha \sum_{r \in \Lambda} (S_r, c) + \sum_{r \in \Lambda} \Phi_r(S_r) + \frac{\alpha |\Lambda|}{2} (c, c),$$

$$\text{де } \alpha = \int_{R^d} |\phi(\mathbf{x})| d\mathbf{x}.$$

Ми розглядаємо також анізотропну n -векторну модель у випадку, коли тільки k перших компонент спіну приймають участь у взаємодії:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{r, r' \in \Lambda} \sum_{j=1}^k u_{r, r'} S_r^{(j)} S_{r'}^{(j)} + \sum_{r \in \Lambda} \sum_{j=1}^k h_r^{(j)} S_r^{(j)}, \quad (50)$$

де $S_r \in R^n$, $|S_r| = n$. Ми вивчаємо границю $n \rightarrow \infty$, $k = \text{const}$ для вільної енергії

$$f_n(\beta) = -\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta \Lambda n} \log \int_{|S_r|=n} \prod dS_r \exp\{-\beta H(S)\}. \quad (51)$$

Інтегуючи по $S_r^{(k+1)}, \dots, S_r^{(n)}$, легко отримати, що

$$f_n(\beta) = -\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta \Lambda n} \log \int_{|\mathbf{x}_r| \leq 1} \prod d\mathbf{x}_r \exp\{-\beta n H^1(\mathbf{x})\},$$

де

$$H^1(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \sum_{r, r' \in \Lambda} u_{r, r'}(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{r'}) + \sum_{r \in \Lambda} (\mathbf{h}_r, \mathbf{x}_r) +$$

$$\frac{n-k-1}{2n} \sum_{r \in \Lambda} \log(1 - (\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_r)), \quad \mathbf{x}_r \in R^k, |\mathbf{x}_r| \leq 1.$$

Зараз Теорема 4.1 та 4.2 забезпечують такий результат:

Теорема 4.4

Розглянемо анізотропну модель Гейзенберга вигляду (50) з умовами (39) - (40). Якщо ми розглянемо також апроксимуючий гамільтоніан

$$H^a(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = -\sum_{r, r' \in \Lambda} u_{r, r'}(\mathbf{x}_r, \mathbf{c}_{r'}) + \sum_{r \in \Lambda} (\mathbf{h}_r, \mathbf{x}_r) +$$

$$\frac{n-k-1}{2n} \sum_{r \in \Lambda} \log(1 - (\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_r)) + \frac{1}{2} \sum_{r, r' \in \Lambda} u_{r, r'}(\mathbf{c}_r, \mathbf{c}_{r'}),$$

$$\mathbf{x}_r \in R^k, |\mathbf{x}_r| \leq 1,$$

та оберем \mathbf{c}^* із умов (42), (43), то вільна енергія гамільтоніанів (50) та $H^a(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ співпадають у границі $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} |f_{n,\Lambda}(H) - f_{n,\Lambda}(H^a(\mathbf{c}^*))| = 0.$$

де

$$f_{n,\Lambda}(H^a(\mathbf{c}^*)) \equiv -\frac{1}{\beta\Lambda n} \log \int_{|\mathbf{x}_r| \leq 1} \prod d\mathbf{x}_r \exp\{-\beta n H^a(\mathbf{x}, \mathbf{c}^*)\}.$$

Аналогічні результати вірні і для "квазісередніх".

Результати глави 4 опубліковано в роботах [10] та [11].

У **п'ятій** главі вивчено сферичну ($n \rightarrow \infty$) границю для вільної енергії та усіх кореляційних функцій n -векторної невпорядкованої моделі.

В параграфі 5.2 доведено 2 теореми загального вигляду для вільної енергії та кореляційних функцій n -векторної моделі у сферичній границі, сформульованих у параграфі 5.1, де можна знайти також стислий огляд літератури за темою.

Розглядається n -векторна модель

$$H^v = -\frac{1}{2} \sum_{x,y \in \Lambda} J(x,y) (\mathbf{S}(x), \mathbf{S}(y)) - \sum_{x \in \Lambda} \mathbf{h}(x), \mathbf{S}(x), \quad (52)$$

$$\mathbf{S} \in \mathbf{R}^n, |\mathbf{S}|^2 = n,$$

де зовнішнє поле $h(x)$ має вигляд

$$\mathbf{h}(x) = h(x)(1, 1, \dots, 1). \quad (53)$$

Визначимо

$$D = \{ \{z(x)\} \in \mathbf{R}^N : \mathcal{H} = z - \mathcal{J} > 0 \}. \quad (54)$$

Для будь-якого $z \in D$ розглянемо n -векторну сферичну модель

$$H^s = -\frac{1}{2} \sum_{x,y} J(x,y) (\mathbf{s}(x), \mathbf{s}(y)) - \sum_{x \in \Lambda} \mathbf{h}(x) \cdot \mathbf{s}(x) - \quad (55)$$

$$\sum_{x \in \Lambda} z(x) (\mathbf{s}(x) \cdot \mathbf{s}(x) - n), \mathbf{s}(x) \in \mathbf{R}^n,$$

та позначимо $f_{n\Lambda}^s$ її вільну енергію.

Теорема 5.1

Якщо взаємодія $J(x, y)$ та поле $h(x)$ задовольняють умовам:

$$\|J\|^2 < C < \infty, \quad E \left\{ \frac{|\mathbf{h}(x)|^2}{n} \right\} < C_0 < \infty, \quad (56)$$

то для всіх $z \in D$,

$$E \left\{ \sum_{x \in \Lambda} \frac{\ln n(z(x) + C + 1)}{2Vn} \right\} \leq E\{f_{n\Lambda}^v\} - E\{f_{n\Lambda}^s(z)\} \leq (57)$$

$$\leq K_1 E \left\{ \frac{1}{V} \sum_{x \in \Lambda} \left(\frac{|\mathbf{s}(x)|^2}{n} - 1 \right)_{H_n}^2 \right\} + \frac{K_2}{n},$$

де K_1 and K_2 не залежать від n , Λ , and $z(x)$.

Теорема 5.2

Розглянемо моделі (52) та (55) при умовах Теорему 5.1. Тоді кореляційні функції цих моделей задовольняють нерівності

$$E\{|\langle S_{i_1}(x_1) \dots S_{i_m}(x_m) \rangle_{H_n} - \langle s_{i_1}(x_1) \dots s_{i_m}(x_m) \rangle_{H_n}| \leq E^{1/2}\{ \|G\| + K_1 \} \cdot (58)$$

$$E^{1/2} \left\{ \sum_{x \in \Lambda} \frac{1}{V} \left[\left\langle \frac{(\mathbf{s}(x), \mathbf{s}(x))}{n} - 1 \right\rangle_{H_n}^2 + K_2 \frac{\ln n(z(x) + C + 1)}{2Nn} \right] \right\} + \frac{K^3}{n},$$

де $G(x, y) = -(\mathcal{H}^{-1})(x, y)$, та K_1, K_2, K_3 - сталі, що не залежать від $\Lambda, n, z(x)$.

Доведення Теорем 5.1 та 5.2, також як і Теорем 4.1 та 4.2, основано на ідеї використання деякого "апроксимуючого" гамільтоніана. Додаткові труднощі тут пов'язані з тим, що гамільтоніани H^v and H^s діють у різних просторах. Щоб подолати ці труднощі, ми вводимо проміжний гамільтоніан $\Gamma(\mathbf{s})$, який, з одного боку, діє у тому ж просторі, що і $H^s(\mathbf{s})$, а з іншого боку, має ту ж саму вільну енергію та кореляційні функції, що і $H^v(\mathbf{S})$.

У параграфі 5.3 Теорему 5.1 та 5.2 використано для вивчення сферичної границі n -векторної моделі з трансляційно-інваріантною взаємодією у випадковому полі або випадковою анізотропією а також n -векторної моделі Шерінгтона-Кіркпатріка.

Результати параграфів 5.1-5.3 опубліковано в роботах [1] та [12]-[14].

Параграф 5.4 присвячено аналізу поведінки норм ансамблів випадкових матриць Вігнера, деформованого Вігнера та Вегнера. Резуль-

татп. здобуті у цьому параграфі, було використано, зокрема, у параграфі 5.3 для вивчення границі нескінченного n у n -векторних моделях, а також у главі 1.

Розглядається ансамбль випадкових матриць вигляду

$$\mathcal{J}_n = \left\{ \frac{\mathcal{J}(i, j)}{\sqrt{n}} \right\}_{i, j=1}^n \quad (59)$$

де $\mathcal{J}(i, j) = \mathcal{J}(j, i)$ ($i, j = 1, 2, \dots$) є незалежними однаково симетрично розподіленими випадковими величинами, що задовольняють умовам

$$E\{\mathcal{J}^2(i, j)\} = \mathcal{J}^2, \quad E\{\mathcal{J}^{2k+2}(i, j)\} \leq C \mathcal{J}^{2k} E\{\mathcal{J}^{2k}(i, j)\} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (60)$$

Ми отримуємо оцінки типу великих відхилень для величини

$$\Pr\{\|\mathcal{J}_n\| > 2\mathcal{J} + \varepsilon\} \quad (61)$$

Зокрема, ці оцінки (див. Теорему 5.6) такі, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Pr\{\|\mathcal{J}_n\| > 2\mathcal{J} + \varepsilon\} < \infty. \quad (62)$$

Тому, згідно з лемою Бореля-Контелі, можливо зробити висновок, що коли n досить велике, із ймовірністю 1 усі власні значення матриці \mathcal{J}_n належать до інтервалу $[-2\mathcal{J} - \varepsilon, 2\mathcal{J} + \varepsilon]$.

Таке ж саме питання вивчено для деформованого ансамблю Вігнера

$$H_n(i, j) = (\mathcal{H}_n^{(0)} + \mathcal{J}_n)(i, j), \quad (i, j = 1, \dots, n), \quad (63)$$

де \mathcal{J}_n має вигляд (59), та $\mathcal{H}_n^{(0)}$ має граничну інтегровану густину власних значень $N^{(0)}(\lambda)$, коли $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b dN_n^{(0)}(\lambda) = \int_a^b dN^{(0)}(\lambda). \quad (64)$$

Останнім ансамблем, для якого вивчається таке ж саме питання, є ансамбль Вегнера

$$H_{n, \Lambda}(x, i; y, j) = (\mathcal{H}_{\Lambda}^{(0)} + \mathcal{J}_{n, \Lambda}), \quad (65)$$

$$(x, i; y, j) \quad (x, y \in \Lambda \subset \mathbf{Z}^d, \quad i, j = 1, \dots, n),$$

де Λ це куб з ребром L . На відміну від ансамблей (59) та (59) цей ансамбль складається з матриць, діючих у $\prod_{x \in \Lambda} \mathbf{R}^n$ тобто маючих блочну структуру.

Метод використання у цьому параграфі, схожий з методом піонерської роботи Вігнера. Цим методом доведена

Теорема 5.6

Розглянемо ансамбль випадкових матриць (59), задовольняючих вимоги (60). Тоді

$$\text{Pr} \{ \|\mathcal{J}_n\| > 2\mathcal{J}(1 + \varepsilon) \} \leq n \exp \left\{ -C\varepsilon^{\frac{3+n}{2+n}} n^{\frac{1}{2+n}} \right\} \quad (66)$$

де C не залежить від n та ε .

Такі ж результати здобуто для ансамблей (63) та (65). Ці результати опубліковано в роботі [15].

ВИСНОВКИ

Дисертацію присвячено дуже популярній галузі сучасної математичної фізики - теорії неупорядкованих систем. Моделі середнього поля - це один з найбільш розповсюджених методів теорії неупорядкованих систем. Але, на відміну від трансляційно-інваріантних систем, де моделі середнього поля легко проаналізувати аналітично, у неупорядкованому випадку такий аналіз часто є дуже складною проблемою, що не має строгого математичного обґрунтування протягом багатьох років.

Результати, подані у дисертації є одними з перших регулярних математичних результатів в теорії спінового скла. Вони були використані та розвинуті у багатьох дальших роботах інших авторів (див., наприклад, посилання [20]-[25], [38], [49] дисертації, а також книгу [12]). Головна перевага цих результатів у порівнянні з попередніми полягає в тому, що вони не використовують обернену температуру β як малий параметр, і тому можуть бути використані у низькотемпературній зоні. Крім того, на відміну від майже всіх попередніх результатів, вони стійкі відносно обурення магнітним полем, що дуже важливо при вивченні критичної поведінки моделей.

Для моделі Хопфілда при $\alpha \rightarrow 0$ результати дисертації, викладені у параграфі 2.2 також підштовхнули цілий ряд досліджень в цій галузі (див. [22], [34], [35] та книгу [12], а також посилання всередині). Результат про еквівалентність самоусереднення параметру порядку та вірність реплічно-симетричних рівнянь для моделі Хопфілда з $\alpha \neq 0$ і зараз є єдиним строгим результатом у цій галузі, що не використовує α як малий параметр, та є стійким відносно обурення магнітним полем.

Для унітарно-інваріантних ансамблів випадкових матриць вивчення інтегрованої густини власних значень стало одним з перших важливих кроків, та надало імпульс багатьом дальшим дослідженням у близьких напрямках (див. [74]-[76] а також посилання всередині). Крім того, цей результат надає можливості отримати ряд нових результатів у такій класичній галузі математичної фізики, як теорія ортогональних поліномів.

Доведення гіпотези універсальності локального розподілу власних значень Дайсона-Мехти, сформульованої багато років тому, є одним з найбільш важливих результатів у цій галузі, що має численні зв'язки з багатьма сучасними напрямками теоретичної фізики.

Розроблення загального методу вивчення моделей статистичної фізики, що після деякого граничного переходу збігаються до моделі середнього поля, важливо для статистичної фізики та дозволяє отримати ряд нових результатів, а крім того цей метод став базою для вивчення густини власних значень унітарно-інваріантних ансамблів випадкових матриць.

Цікавим є також метод вивчення неупорядкованих моделей у сферичній границі, що дозволяє отримати ряд нових результатів для моделей спінового скла у цій границі, та на відміну від методів запропонованих раніше, дозволяє вивчати не тільки вільну енергію, а також і всі кореляційні функції неупорядкованої моделі.

Отримання оцінок типу великих відхилень для ансамблів Вігнера-Вегнера випадкових матриць є важливим технічним кроком у теорії випадкових матриць, що має численні застосування у теорії неупорядкованих систем, зокрема, в теорії спінового скла.

Все це дозволяє зробити висновок, що дисертація є новим важливим кроком в галузі моделей середнього поля статистичної фізики та теорії випадкових матриць, а її результати мають численні зв'язки з багатьма іншими результатами у цій галузі і можуть бути використані у багатьох дослідженнях, що здійснюються в Україні та за її межами.

ПУБЛІКАЦІЇ

- [1] The Large- n Limit in Statistical Mechanics and in the Spectral Theory of Disordered Systems / Khorunzhy A., Khoruzhenko B., Pastur L., Shcherbina M. / Phase Transition and Critical Phenomena, ed. C.Domb and J.L.Lebowitz. vol.15.- New York: Academic Press, 1992.- p.108-137.
- [2] Pastur L., Shcherbina M. Absence of Self-Averaging of the Order Parameter in the Sherrington-Kirkpatrick Model // J. Stat. Phys.- 1991.- Vol. 62.- p. 1-19.
- [3] M. Shcherbina. 'On the Replica Symmetric Solution for the Sherrington-Kirkpatrick Model // Helvetica Physica Acta.- 1997.- Vol.70.- p.838-853.
- [4] Shcherbina M., Tirozzi B. The free energy of the class of Hopfield model // J. of Stat. Phys.- 1993.- Vol.72.- p. 113-125.
- [5] Shcherbina M., Tirozzi B. A Perturbative Expansion for the Hopfield Model // Helvetica Physica Acta.- 1995.- Vol. 69.- p.470-489.
- [6] Pastur L., Shcherbina M., Tirozzi B. The Replica Symmetric Solution of the Hopfield Model without Replica Trick // J. Stat. Phys.- 1994.- Vol. 74.- p. 1167-1183.
- [7] Shcherbina M., Tirozzi B. Saddle Point Equations of a Neural Network with Correlated Attractors // J. de Physique I.- 1994.- Vol. 4.- p. 629-633.
- [8] Boutet de Monvel A., Pastur L. and Shcherbina M. On the Statistical Mechanics Approach in the Random Matrix Theory. Integrated Density of States // J.Stat.Phys.- 1995.- Vol.79.- p.585-611.
- [9] Pastur L., Shcherbina M. Universality of the Local Eigenvalue Statistics for a Class of Unitary Invariant Matrix Ensembles // J.Stat.Phys.- 1997.- Vol.86.- p.109-147.
- [10] Пастур Л.А., Щербина М.В. О пределе бесконечного радиуса взаимодействия и числа компонент в статистической физике решетчатых систем // ТМФ.- 1984.- Т. 61.- с.3-16.

- [11] Щербина М.В. Классическая модель Гейзенберга при нулевой температуре // - ТМФ.- 1988.- Т. 77.- с.460-471.
- [12] Щербина М.В. Сферический предел n -векторных корреляций // ТМФ.- 1989.- Т. 81.- с.134-144.
- [13] Щербина М.В. Многокомпонентный предел для модели Хопфилда. Теор.опер.: Сб. науч. тр.- Киев: Наукова думка, 1991.- с.164-172.
- [14] Khoruzhenko B., Pastur L., Shcherbina M. The Infinite Component Limit of the random Anisotropy n -Vector Model // Adv. in Sov. Math.- 1992.- Vol. 64.- p.269-286.
- [15] Буте де Монвель А., Щербина М. О норме случайных матриц // Мат.Заметки.- 1995.- Т.57.- N5.- p.688-698.

АНОТАЦІЇ

Щербина М.В. Моделі середнього поля в статистичній фізиці та теорії випадкових матриць.- Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико - математичних наук за спеціальністю 01.01.03 - математична фізика.- Фізико - технічний інститут низьких температур ім. Б.І.Веркіна НАН України, Харків, 1997.

Дисертацію присвячено вивченню моделей типу середнього поля в теоріях спінового скла та унітарно-інваріантних ансамблів випадкових матриць. Здобуто математичне обґрунтування ряду гіпотез, запропонованих у фізичній літературі для цих систем. Серед них відсутність самоусреднення параметру Едвардса-Андерсона в низькотемпературній зоні для моделі Шерінгтона-Кіркпатріка, вірність реплічно-симетричного виразу для вільної енергії цієї моделі при будь-якій температурі, якщо поле достатньо велике а також східні результати для моделі Хопфілда. Для унітарно-інваріантних ансамблів випадкових матриць знайдено інтегровану густину власних значень а також доведено гіпотезу Дайсона- Мехти універсальності локального розподілу власних значень.

Ключові слова:

вільна енергія, кореляційні функції, спінове скло, термодинамічна границя, середнє поле, випадкові матриці, спектральні характеристики, унітарно-інваріантний ансамбль.

Щербина М.В. Модели среднего поля в статистической физике и теории случайных матриц.- Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико - математических наук по специальности 01.01.03 - математическая физика.- Физико-технический институт низких температур им. Б.И.Веркина НАН Украины, Харьков, 1997.

Диссертация посвящена исследованию моделей типа среднего поля в теории спиновых стекол и унитарно -инвариантных ансамблей случайных матриц. Получено математическое обоснование ряда гипотез, выдвинутых в физической литературе для этих систем. Среди них отсутствие самоусредняемости параметра Эдвардса-Андерсона в низкотемпературной зоне для модели Шеррингтона-Киркпатрика, справедливость реплично-симметричного выражения для свободной энергии этой модели при любой температуре, если поле достаточно велико, а

также аналогичные результаты для модели Хопфилда. Для унитарно-инвариантных ансамблей случайных матриц найдена интегрированная плотность собственных значений а также доказана гипотеза универсальности локального распределения собственных значений Дайсона - Мехты.

Ключевые слова:

свободная энергия, корреляционные функции, спиновое стекло, термодинамический предел, среднее поле, случайные матрицы, спектральные характеристики, унитарно-инвариантный ансамбль.

M.V.Shcherbina. Mean Field Type Models in Statistical Physics and Random Matrix Theory.- Manuskript.

Thesis for a doctor's degree by speciality 01.01.03- mathematical physics.- Low Temperature Physics Institute named after B.I.Verkin of Ukrainian Academy of Sci., Kharkov, 1997.

The dissertation is devoted to the mean-field type models in the theory of spin glasses and unitary invariant matrix ensembles. Rigorous mathematical justification of a number of conjectures proposed in the physical literature for these systems has been obtained. The absence of the selfaveraging of the Edwards-Anderson order parameter in the low temperature region, the validity of the replica symmetric expression for the free energy of the Sherrington-Kirkpatrick model for any temperature if the field is large enough are proved. Similar results are obtained for the Hopfield model. For the unitary invariant ensembles of random matrices the integrated density of states is found and the universality conjecture by Dyson-Mehta is proved.

Key words:

free energy, correlation functions, spin glass, thermodynamic limit, mean field, random matrices, spectral characteristics, unitary invariant ensemble.

570.88.11

Відповідальний за випуск - доктор фіз.-мат. наук В.П.Котлярів

Підписано до друку 3.11.1997. Умовн.-друк. арк.2. Зам. 34-97

Тираж 100 екз. Ротапрінт ФТІНТ НАНУ, м.Харків.

Безкоштовно.

430946

AB 39.070