НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР ім. Б.І. ВЄРКІНА

УДК 517.9+530.1

НОВИЦЬКИЙ Михайло Васильович

СПЕКТРАЛЬНІ ІНВАРІАНТИ СІМЕЙСТВ ОПЕРАТОРІВ ШРЕДІНГЕРА, ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ТА ФУНКЦІОНАЛИ, ПОВ'ЯЗАНІ З НИМИ

01.01.03—математична фізика

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

Харків—1997

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Фізико-технічному інституті низьких темпера
НАН України.

Офіційні опоненти:

1. доктор фіз.-мат. наук БІЛОКОЛОС Є.Д.,
   Інститут магнетизму НАН України, професор

2. доктор фіз.-мат. наук САХНОВИЧ Л.А.,
   Українська Державна Академія зв'язку ім. А.С.Попова,
   професор

3. доктор фіз.-мат. наук, чл.-кор. НАН України ХРУСЛОВ
   Фізико-технічний інститут низьких температур НАН Украї
   Б.І.Вєркіна, завідувач відділу

Провідна установа:

Інститут математики НАН України, м. Київ

Захист відбудеться 29 декабря 1997 р.
о 15⁰⁰ год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 02.35.01 при Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України за адресою: 310164, м. Харків, пр. Леніна 47.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Фізико-технічного інституту низьких температур, м.Харків, пр. Леніна 47.

Автореферат розісланий 25 ноября 1997 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
доктор фізико-математичних наук В.П. Котляров

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми.

Дослідження дисертації відноситься до разділу математичної фізики, який лежить на перехресті теорії нелінійных цілком інтегровних рівнянь, що розв'язуються методом оберненої задачі та спектральної теорії оператора Шредінгера. Основний об'єкт дослідження – сімейства операторів Шредінгера та поліноміальні спектральні інваріанти або поліноміальні динамичні інтеграли руху, визначені на цих сімействах.

Спектральна теорія оператора Шредінгера, головного оператора квантової механіки, грає надзвичайно важливу роль в сучасній фізиці. Пріоритетними напрямками в дослідженні таких операторів є вивчення спектру оператора Шредінгера при різноманітних обмеженнях на природу потенціалу, характеризація цього оператора в термінах спектральних даних та розв'язання відповідних обернених задач.

Сьогодні з вичерпною повнотою вивчено спектральні та обернені задачі для одновимірного оператора Шредінгера

$$Hy = -\frac{d^2y}{dx^2} + u(x)y$$

в класах періодичних, спадних та деяких класах майже періодичних функцій. Одновимірні задачі для ймовірносних потенціалів, майже періодичних потенціалів загального виду, а також багатовимірні задачі зараз активно досліджуються. Вивчення різноманітних множин функціоналів на сімействах операторів Шредінгера — необхідний елемент такого процесу.

Істотне місце серед них займають функціонали, що виражаються тільки через потенціал та скінченне число його похідних. Ми називаємо їх *локальними функціоналами.* Особливо цікаві та важливі ті з них, які виражаються через глобальні спектральні характеристики оператора Шредінгера. До таких відносяться, наприклад, локальні функціонали, які з'являються у формулах слідів теорії одновимірного оператора Шредінгера на скінченному та нескінченному інтервалах.

Новим поштовхом до дослідження сімейств локальних функціоналів стало відкриття Гарднером, Гріном, Крускалом та Міурою (1967) зв'язку спектральної теорії оператора Шредінгера з нелінійним рівнянням Кортевега де Фріза

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx}.$$

Вони знайшли нескінченну послідовність локальних функціоналів, кожний з яких є *інтегралом руху рівняння КдФ* і зображується у вигляді інтеграла від многочлена, що залежить від потенціала та його похідних. Це так звана поліноміальна серія законів збереження

$$I_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma_{2n+1}(u, u', \dots)\, dx,$$

де многочлени $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ визначаються рекурентною формулою

$$\sigma_{k+1}(x) = -\sigma_k'(x) - \sum_{j=1}^{k-1} \sigma_{k-j}\sigma_j \;, \quad k = 1, 2, \dots$$

і початковою умовою $\sigma_1(x) = u(x)$. Саме факт існування нескінченної послідовності інтегралів руху $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ навів Гарднера, Захарова та Фадєєва до думки, що рівняння КдФ є цілком інтегровним. Ці автори побудували гамільтонів формалізм та змінні типу дія -кут для знаходження розв'зків рівняння КдФ в класі спадних функцій.

Зараз відомий численний клас цілком інтегровних нелінійних еволюційних рівнянь, що містить, крім КдФ, рівняння Sin-Gordon та нелінійне рівняння Шредінгера. Кожне з цих рівнянь породжує цілком інтегровну гамільтонову систему, що має інтеграли руху, схожі на $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$. Це дозволяє виділити для відповідного нелінійного рівняння змінні типу дія гамільтонової системи як *повний набір интегралів руху.*

Природною є така проблема:

Чи можливо відновити змінні типу дія для гамільтонової системи, асоційованної з відповідним нелінійним еволюційним рівнянням, якщо відома поліноміальна серія законів збереження

$$\{I_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ?}$$

Ця проблема є цікавою як з математичної, так і з фізичної точок зору, і була сформульована В.О. Марченко (рівняння КдФ, періодичний випадок, 1976), Dж .Лемом (мол.) і Д .Маклафліном (рівняння Sin-Gordon, спадний випадок, 1980).

В дисертації вивчається випадок рівняння КдФ. В залежності від класу початкових даних вид змінних типу дія для рівняння КдФ суттєво різний: в класі періодичних функцій це спектр оператора H с періодичними крайовими умовами, в класі майже періодичних функцій - це відома функція числа обертань. В класі спадних функцій змінними типу дія є логарифм коефіцієнта проходження оператора H.

В розділах 2-4 проведено повне дослідження проблеми відновлення змінних типу дія по набору $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ і знайдено критерій, коли можливе таке відновлення. Виявляється, що природними термінами, в яких відповідь може бути отримана, є шкали просторів Карлемана $C(m_n)$. Доведено, що *однозначне відновлення має місце тільки в квазіаналітичних класах.*

Відмітимо, що незважаючи на те, що класи квазіаналітичних функцій було введено понад 70 років тому, вони застосовувались достатньо довго тільки в теорії функцій. В останній час сфера їх використання поширилась на теорію операторів та динамічні системи.

Природні узагальнення функціоналів $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ виникають при розгляді оператора Шредінгера на компактному многовиді. Вони з'являються як коефіцієнти повного асимптотичного развинення при малих значеннях змінної часу сліда фундаментального рішення параболічної задачі асоційованної з оператором Шредінгера. Ці коефіцієнти називаються *коефіцієнтами Минакшисундарама- Плейвля.* Вони містять інформацію про геометрію многовида і можуть бути з успіхом застосовані до аналізу різноманітних задач спектральної геометрії – області, що бурхливо развивається і була започаткована працею М. Каца "Чи можна почути форму барабана ?". Назва цієї праці в образній формі задає програму дослідження задачі відновлення геометрії многовида та потенціалу за спектром оператора Шредінгера. Незважаючи на те, що проблема тлумачення функціоналів $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ як динамічних інваріантів залишається в загальному випадку відкритою, ми розглядаємо таку задачу:

Яку інформацію про потенціал багатовимірного оператора Шредінгера можливо отримати, якщо відомо сімейство

$$\{I_n\}_{n=1}^{\infty} \ ?$$

Дослідженню на цю тему присвячено значну частину п'ятого розділу. Основна ідея, якою ми керуємся, полягає в вивченні функції, яка породжує набір $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$. Для оператора Шредінгера на торі -це так звана Θ- функція оператора Шредінгера. Тут виникають деякі нові ефекти (наприклад, ефект спектральної жорсткості). Але, на відміну від одновимірного випадку, загальна картина ще далека від своєї закінченості. В заключній частині останнього розділу розглянуто застосування техніки, розвинутої в попередніх розділах, до деяких задач про гамільтонові динамічні системи та про динамічний хаос.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота входить до планових наукових досліджень

з нелінійних рівнянь та спектральної теорії диференціальних операторів, що проводяться у Математичному відділенні Фізико-технічного інституту низьких температур НАН України ім. Б.І.Вєркіна. Дисертаційну тему було затверджено в 1986 році на засіданні Вченої ради відділення. Деякі результати надруковані в збірниках праць ФТІНТ НАН України ім. Б.І.Вєркіна.

Мета і задачі дослідження:

—вивчити сімейства операторів Шредінгера та поліноміальні спектральні інваріанти або поліноміальні динамічні інтеграли руху, що визначені на цих сімействах.

Загальна методика дослідження.

У дисертації використані методи спектральної теорії диференційних операторів, обернених задач, комплексного та дійсного аналізу.

Наукова новизна одержаних результатів

Всі результати дисертації є новими. На захист виносяться такі головні положення:

1. Повне дослідження проблеми однозначного відновлення змінних типу дія для рівняння КдФ по поліноміальній серії законів збереження в різних класах початкових даних: періодичних і майже періодичних функцій, в класі спадних функцій.

2. Застосування розвинутих методів до розв'язання ряду задач спектральної теорії оператора Шредінгера.

3. Дослідження поліноміальної серії узагальнених коефіцієнтів Мінакшісундарама-Плейєля для оператора Шредінгера на торі.

4. Дослідження проблеми оцінки товщини стохастичного шару для відображення Тейлора-Чірікова-Гріна для неаналітичних збурень.

Практичне значення одержаних результатів

Работа носить теоретичний характер. В дисертації знайдено розв'язок ряду актуальних задач теорії нелінійних рівнянь та спектральної теорії оператора Шредінгера. Вона може бути корисною для спеціалістів, що працюють в області математичних і фізичних досліджень з нелінійних рівнянь та динамічних систем в Інституті Математики НАН України, Інституті Математики и Механіки НАН України, Харківському, Київському, Львівському та інших університетах України, в дослідженнях математиків Петербургського відділення МІ ім. Стеклова, Московського університету та деяких університетів дальнього зарубіжжя.

Особистий внесок здобувача.

На захист виносяться 18 наукових праць [1-18]. З них 15 виконано без співавторів. В трьох працях [1,4,6] співавтором дисертанта є С.А. Молчанов, якому належить ідея розгляду поліноміальної серії узагальнених коефіцієнтів Минакшісундарама-Плейєля для оператора Шредінгера на торі, як окремого об'єкта досліджень, явні формули для цих коефіцієнтів та доведення твердження про структуру фундаментального рішення відповідної гіперболічної задачі (леми 5.2.1 та 5.2.3 дисертації).

Апробація результатів дисертації.

Результати дисертації доповідались у Воронежській зимовій математичній школі (1985-1994), на конференціях з комплексного аналізу в м. Черноголовка Московської області (1983, 1985), на семінарах: Петербургського відділення МІ ім.Стеклова (1992), Московського університету (1990), Харківського університету (1983–1995), на конференції "Математична квантова теорія" (Ванкувер, 1993), у Курантовському інституті (Нью-Йорк, 1994), на 11 Конгресі з Математичної фізики (Париж,1994), на серії конференцій "Математичні результати з квантової механіки" (Дубна,Росія, 1989-1991, Аскона, Швейцарія, 1996), різних університетах США, Франції та Великобританії, на семінарах у Фізико-технічному інституті низьких температур у м.Харкові.

Публікації

Основний зміст дисертації опубліковано в 18 роботах[1-18], з них 15 робіт виконано без співавторів.

Об'єм і структура роботи.

Дисертацію викладено російською мовою на 256 сторінках тексту, зверстаного на AMSTeX (amsppt, article). Вона містить: зміст, перелік умовних скорочень, вступ (розділ 1), основна частина (розділи 2-5), висновки, список використанних джерел (81 найменування). Кожний розділ має невеликий вступ, який містить основні означення, конкретне описання проблеми, що розв'язується у розділі. Нумерація формул та теорем, що використовується у дисертації - наскрізна. В авторефераті ми цитуємо теореми та положення, використовуючи нумерацію тексту дисертації.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ

У вступі (розділ 1) викладається мотивація, короткий огляд робіт з означенної теми, дається коротке викладення основних результатів дисертації. При формулюванні результатів в авторефераті з методичної точки зору викладення розпочато з одновимірного *періодичного* випадку (розділ 3, основні результати цього розділу опубліковано в [5, 10 - 11, 13 - 15]).

Нехай H - оператор Хілла, тобто одновимірний оператор Шредінгера з періодичним та нескінченно диференційовним потенціалом $u(x)$ періоду 1, тобто $u(x+1) = u(x)$. Оператор Хілла є найпростішим прикладом оператора Шредінгера на компактному многовиді (в данному випадку компактним многовидом є коло) та ідеальною моделлю для вивчення локальних функціоналів типу $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Нехай $\{\lambda_k(H)\}_{k=0}^{\infty}$ — спектр оператора H у просторі $L^2[0,2]$ з періодичними крайовими умовами. Оператори Хілла H_1 і H_2 називаються *ізоспектральними* , якщо $\lambda_i(H_1) = \lambda_i(H_2)$, $\quad i = 0,1,2,\ldots$. Функціонал $F(u)$ є *спектральним інваріантом оператора Хілла* H, якщо він має таку властивість: із співпадання спектрів операторів $H_i = -\frac{d^2}{dx^2} + u_i(x)$, $\quad i = 1,2$, випливає рівність $F(u_1) = F(u_2)$. Ми називаємо систему спектральних інваріантів $\{F_\alpha\}, \alpha \in \Omega$, *повною* , якщо із рівностей $F_\alpha(u_1) = F_\alpha(u_2)$, $\alpha \in \Omega$, випливає, що спектри операторів $H_i = -\frac{d^2}{dx^2} + u_i(x), i = 1,2$, співпадають.

В підрозділі 3.2 ми даємо класифікацію всіх природно виникаючих дискретних серій локальних спектральних інваріантів оператора Хілла і показуємо, що кожна з цих серій еквівалентна серії спектральних інваріантів $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$. В дисертації ми виділяємо набір $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ як основний об'єкт дослідження серед локальних функціоналів оператора Шредінгера.

Оскільки спектр сімейства операторів Хілла $H(t) = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x,t)$, породжений розв'язками рівняння КдФ, не залежить від t (Лакс, 1968), то рівняння КдФ дає приклад неперервного сімейства нетривіальних ізоспектральних деформацій. Множина потенціалів M_u, що мають один і той же самий спектр періодичної задачі, що і потенціал u, в загальному випадку топологічно ізоморфна нескінченновимірному тору. На цьому торі рівняння КдФ діє як гамільтонова система із змінними типу дія $\{\lambda_k(H)\}_{k=0}^{\infty}$. Скінченновимірним торам відповідають скінченнозонні потенціали, які виділяються умовою скінченності числа лакун у спектрі оператора Хілла у просторі $L^2(-\infty,\infty)$. Відомо (С.П. Новиков ,1974), що для таких потенціалів ізоспектральний тор визначається деякою скінченною множиною функціоналів з набору $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тому для скінченнозонних потенціалів множина змінних типу дія $\{\lambda_k(H)\}_{k=0}^{\infty}$ та поліноміальна серія законів збереження $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ еквівалентні. Для аналізу загальної ситуації вводиться функція $\Theta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t}$, яка при $t \to +0$ має асимптотичне розвинення

$$\Theta(t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k I_k t^k), \qquad t \to +0,$$

де $c_k = (-1)^{k+1} 2^k/(2k-1)!!$, $k = 1, 2, \ldots$.

Нехай $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$— фіксована послідовність додатних чисел, яка є логарифмічно опуклою і зростає швидше довільного степеня змінної n.

Визначення. *Класом Карлемана $C(m_n)$ періодичних функцій періоду 1 будемо називати простір нескінченно диференційовних періодичних функцій $u(x)$ періоду 1, що задовольняють системі оцінок*

$$||u^{(n)}||_{L^2_{[0,1]}} \leq C^n(u) m_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

де стала C залежить від u.

Якщо у класі $C(m_n)$ з умови $u^{(k)}(x_0) = 0, k = 1, 2, \ldots$ (x_0 - фіксована точка) випливає, що $u(x) \equiv 0$, то клас $C(m_n)$ называється *квазіаналітичним класом Карлемана* .

Теорема 3.3.1.

1. Нехай $C(m_n)$ - квазіаналітичний клас. Тоді для будь-яких двох потенціалів u_1 та u_2, що належать класу $C(m_n)$, із співвідношення $I_k(u_1) = I_k(u_2)$, $k = 1, 2, \ldots$ виходить, що спектри операторів Хілла $H_i = -\frac{d^2}{dx^2} + u_i(x), i = 1, 2$ в просторі $L^2[0, 2]$ з періодичними крайовими умовами співпадають.

2. Нехай $C(m_n)$ не є квазіаналітичним класом. Тоді існують два потенціали u_1 та u_2, що належать класу $C(m_n)$ і такі, що $I_k(u_1) = I_k(u_2)$, $k = 1, 2, \ldots$ але спектри операторів Хілла $H_i, i = 1, 2$ відрізняються.

Отже, *в загальному випадку поліноміальні інтеграли руху не* *утворюють повного набору інтегралів руху для рівняння КдФ.* Доведення цього результату потребує істотної попередньої підготовки і може бути розподілено на два етапи. На першому етапі ми отримали критерій відновлення спектра періодичної задачі по набору $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ в термінах зростання цієї послідовності.

Такого сорту результат може бути отриманий для істотно більш загальної ситуації, а саме, для майже періодичних за Бором потенціалів. Це дозволяє виділити на початковому етапі особливості задачі відновлення змінних типу дія за набором $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ і проінтерпретувати цей набір $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ як розв'язок деякої проблеми моментів. Другий етап: отримування оцінок на рівномірні норми похідних потенціала через оцінки зростання послідовності $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$. На цьому етапі важливу роль відіграють різні формули слідів та критерій належності потенціалу класу $C(m_n)$ в термінах швидкості спадання довжин лакун у спектрі оператора Хілла у просторі $L^2(-\infty,+\infty)$. Щоб сформулювати цей критерій, введемо стандартний об'єкт теорії класів Карлемана – функцію

$$T(r,\{m_n\}) = \sup_{n\geq 1} \frac{r^n}{m_n}.$$

Нехай $\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}$– довжина лакуни з номером n у спектрі оператора Хілла.

Теорема 3.4.1 *Потенціал u належить класу $C(m_n)$ тоді і тільки тоді, коли довжини лакун у спектрі оператора Хілла задовольняють оцінці*

$$\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1} \leq \frac{C}{nT(\frac{n}{\gamma},\{m_n\})},$$

де сталі $C(u)$ і γ не залежать від n.

Відзначимо, що в цьому твердженні зовсім не суттєво чи є клас $C(m_n)$ квазіаналітичним або ні. У випадках, коли функція $T(r,\{m_n\})$ явно обчислюється (класи Жевре, Данжуа), критерій має зовсім простий вигляд. Наприклад, потенціал $u(x)$ належить класу Жевре $C(n!^\alpha)$, $\alpha \geq 1$ тоді і тільки тоді, коли довжини лакун у спектрі оператора Хілла задовольняють оцінці

$$\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1} \leq C(u) \exp(-\gamma n^{\frac{1}{\alpha}}).$$

При $\alpha = 1$ це збігається з результатом Е. Трубовіца: періодичний потенціал є дійсною аналітичною функцією тоді і тільки тоді, коли довжини лакун у спектрі оператора Хілла експоненційно спадають.

Ці результати знаходять своє застосування при вивченні глобальних геометричних властивостей ізоспектральних торів, які можуть бути проінтерпретовані як нескінченновимірні поверхні у просторі $L^2[0,2]$. В кожній точці такої поверхні можуть бути визначені стандартні геометричні об'єкти: дотичний та нормальний простори та таке інше. Геометрія ізоспектральних торів вивчалась Г.Маккіном і Е.Трубовіцем. Вони, як гіпотезу, висловили припущення, що дотичний простір до ізоспектрального тору в "точці" u є замиканням у просторі $L^2[0,2]$ лінійної оболонки "природного" базису векторів

$$V_n(q) = \frac{d}{dx}\frac{\delta I_n}{\delta q}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

тоді і тільки тоді, коли цей тор може бути відновлено за набором $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$. В підрозділі 3.5 доводиться, що для квазіаналітичних класів гіпотеза Маккіна – Трубовіца справджується.

В розділі 2 розглянуто *майже періодичний* випадок. Головні результати цього розділу опубліковано в [2, 3, 8, 9] . Нехай $u(x)$ є дійсна нескінченно диференційовна функція, така, що $u(x)$ та всі її похідні майже періодичні (м.п.) за Бором.

Розглянемо оператор Шредінгера H в просторі $L^2(-\infty, +\infty)$ з потенціалом $u(x)$, Відомо, що спектр оператора Шредінгера з майже періодичним потенціалом може мати практично всі спектральні типи. Тому замість періодичного спектру в цьому випадку розглядається нова величина– інтегровна щільність станів $N(\lambda) = \lim_{b\to\infty} N_b(\lambda)$. При цьому функція $N_b(\lambda)$ визначається як відношення кількості власних значень оператора H в $L^2(-b,b)$ з фіксованними (наприклад, періодичними) крайовими умовами, що не перевищують λ, до довжини інтервала $(-b,b)$. Множина точок зростання неспадної функції $N(\lambda)$ співпадає з спектром оператора H. Функція $N(\lambda)$ є граничними значеннями на дійсній вісі уявної частини одної спеціальної функції, аналітичної у верхній напівплощині. Це — *функція числа обертань* $w(\lambda,u)$, яка була впроваджена Джонсоном та Мозером (1982). Функція числа обертань $w(\lambda,u)$ грає важливу роль у спектральній теорії майже періодичного оператора Шредінгера. Вона задає набір функціоналів $\{F_\lambda(u) = w(\lambda,u), Im\lambda > 0\}$, що знаходяться в інволюції відносно скобки Пуассона, і визначає змінні типу дія для рівняння КдФ в класі м.п.функцій. Для періодичного потенціалу u функція $-iw(\lambda^2,u)$ співпадає з відображенням типу "гребінка", впровадженного В.О. Марченко і Й.В. Островським (1967) для повного опису та характеризації спектру оператора Хілла.

Для м.п. потенціалів визначення функціоналів $I_n(u)$ залишається тим самим, але з заміною інтегралу по періоду на середнє $I_n(u) = (-1)^n/2^{2n+1}\ \mathrm{M}_x\sigma_{2n+1}(u,u',\ldots)$. Вони можуть бути знайдені з асимптотичної формули

$$w(\lambda,u) \sim \sqrt{-\lambda}\ \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n(u)}{\lambda^{n+1}}\right), \qquad \lambda \to -\infty.$$

В тих випадках, коли доведено, що задача Коші для рівняння КдФ має розв'язок, функціонали $I_n(u)$ є інтегралами руху. Як і в періодичному випадку, функція $-iw(\lambda^2,u)$ відображує верхню напівплощину в себе і за теоремою Гамбургера– Неванлінни коефіцієнти асимптотичного розвинення $I_n(u)$ є моментами деякої міри на всій вісі

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^{2n}\, d\sigma(t).$$

Міра $d\sigma(t)$ абсолютно неперервна відносно міри Лебега і її щільність співпадає з показником Ляпунова оператора Шредінгера з м.п. потенціалом. Отже, *задача про однозначне відновлення функції числа обертань за набором $\{I_n(u)\}_{n=0}^{\infty}$ еквівалентна задачі про визначеність проблеми моментів у класі абсолютно неперервних мір, щільності яких є показниками Ляпунова.*

Нехай $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$— фіксована послідовність додатних чисел.

На множині м.п.ф. вилучимо сімейство функцій

$$\Omega(m_n) = \{u \in C^{\infty}(R), u - \text{ м.п.ф.}, |I_n| \leq C(u)m_n\}$$

і його підмножини $\Omega(m_n, M)$, що складаються з тих м.п.функцій, показники Фур'є яких містяться у модулі M показників Фур'є деякої фіксованної м.п.функції. Наступна теорема дає критерій відновлення змінних типу дія (функції числа обертань) для рівняння КдФ у класі майже періодичних функцій по поліноміальній серії законів збереження $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Теорема 2.1.1 *Для того, щоб в класі $\Omega(m_n)$ справджувалася імплікація*

$$\forall u_1, u_2 \in \Omega(m_n), I_n(u_1) = I_2(u_2), n = 0, 1, 2, ... \Rightarrow w(\lambda, u_1) = w(\lambda, u_2)$$

необхідно та достатньо, щоб

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln T(r, m_n)}{1 + r^{\frac{3}{2}}}\, dr = +\infty.$$

Аналогічне твердження має місце і для підмножин $\Omega(m_n, M)$.

З результатів С.Котані (1982) і цієї теореми випливає

Наслідок 2.1.1 *За набором $I_n(u)$ в класах $\Omega(m_n)$ і $\Omega(m_n, M)$ спектр оператора H як замкнута множина на дійсній вісі і його абсолютно неперервна компонента однозначно відновлюються тоді і тільки тоді, коли виконується умова розбіжності інтеграла з теореми 2.1.1.*

В підрозділі 2.2 ми вилучаємо деякий клас ймовірносних метрично транзитивних потенціалів, для яких доведено узагальнення теореми 2.1.1.

У розділі 4 розглядається спадний випадок (основні результати цього розділу опубліковано в [12, 16-18]). Методи, що застосовуються в спектральній теорії одновимірного оператора Шредінгера з періодичним потенціалом і теорії разсіювання одновимірного оператора Шредінгера з спадним потенціалом, достатньо різні. У періодичному випадку використовується теорія конформних відображень спеціального виду і формули слідів. Для спадного випадку характерним є використання техніки операторів перетворення і рівняння Марченко як основного методу розв'язання оберненої задачі.

Розглядаючи задачу про відновлення змінних типу дія за набором $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ в класі спадних функцій і порівнюючи з періодичним випадком, ми вилучаємо схему (пункти 1-4), яка може бути застосована для аналізу інших цілком інтегровних рівнянь та інших крайових умов.

1.*Твірна функція і проблема моментів.* Разглянемо оператор Шредінгера H в просторі $L^2(-\infty,+\infty)$ з дійсним нескіченно диференційовним потенціалом $u(x)$, швидко спадаючим на нескінченності. Позначимо при дійсних λ через $f(x,\lambda)$ і $g(x,\lambda)$ розв'язок рівняння $Hy=\lambda^2 y$ з асимптотиками

$$f(x,\lambda)=\exp i\lambda x+o(1), x\to+\infty, \quad g(x,\lambda)=\exp(-i\lambda x)+o(1), x\to-\infty.$$

Функція

$$a(\lambda,u)=\frac{1}{2i\lambda}W\{f(x,\lambda),g(x,\lambda)\}, \quad \lambda\neq 0$$

аналітична у верхній напівплощині $Im\lambda>0$, має скінченне число нулів, що лежать на уявній вісі і їх квадрати співпадають з власними значеннями оператора H . Функція $t(\lambda,u)=1/a(\lambda,u)$ називається ***коефіцієнтом проходження*** оператора H. Вона задає сімейство нелінійних функціоналів $\{F_\lambda(u) = -i \ln t(\lambda, u), Im\lambda > 0\}$, що є динамічними інваріантами рівняння КдФ (інтегралами руху), які знаходяться в інволюції відносно стандартної скобки Пуассона і задають повний набір змінних типу дія для рівняння КдФ у класі спадних функцій. Функція $-i \ln t(\lambda, u)$ є твірною для $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$-i \ln t(\lambda, u) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n(u)}{\lambda^{2n+1}}, \quad |\lambda| \to \infty,$$

де $I_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^{2n}\, d\sigma(t)$. Якщо точечний спектр оператора H пустий, то зображуюча міра $d\sigma(t)$ має вигляд $d\sigma(t) = \ln |a(t, u)| dt$. У загальній ситуації набір $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ є "слабким " збуренням моментної послідовності.

2.*Шкала просторів.* Для формулювання критерія про однозначне відновлення коефіцієнта проходження $t(\lambda, u)$ за зчисленним набором $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ в термінах властивостей гладкості та спадання потенціалу $u(x)$ впроваджується шкала просторів $C_R(m_n)$. Нехай $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$— фіксована послідовність додатних чисел, що задовольняють стандартним обмеженням. Клас $C_R(m_n)$ визначається як множина нескінченно диференційовних функцій $u(x)$, що швидко спадають на нескінченності і задовольняють системі оцінок

$$||(|x|^l + 1)u^{(n)}||_\infty \le C_1 C_2^{l+n} m_{l+n}, \qquad l, n = 0, 1, 2, \ldots,$$

де сталі C_1 і C_2 залежать від u.

Клас $C_R(m_n)$ є інваріантним відносно перетворення Фур'є.

3.*Характеризація* даних розсіювання оператора Шредінгера для потенціалів класу $C_R(m_n)$. *Дані розсіювання* (більш точно, ліві дані розсіювання) для оператора Шредінгера з достатньо швидко спадаючим потенціалом задаються набором

$$S = \{r(\lambda), -\infty < \lambda < +\infty, i\kappa_k, c_k, k = 1, 2, \ldots, p\}.$$

Числа $-\kappa_k{}^2, k = 1, 2, \ldots, p$ є простими власними значеннями оператора H, $\{c_k, k = 1, 2, \ldots, p\}$- нормувальні коефіцієнти, $r(\lambda), -\infty < \lambda < +\infty$

- коефіцієнт відбиття. Для потенціалів з скінченним першим моментом теорема про характеризацію даних розсіювання S добре відома (Л.Д. Фадєєв, В.О. Марченко). Ми показуємо, що особливість потенціалів з класу $C_R(m_n)$ полягає в тому, що коефіцієнт відбиття $r(\lambda)$ належить тому ж класу $C_R(m_n)$, що і потенціал $u(x)$.

Теорема 4.3.1 *Нехай S є довільний набір, компоненти якого задовольняють наступним умовам:*

i) числа $\{\kappa_k\}_{k=1}^p$ и $\{c_k\}_{k=1}^p$ задовольняють нерівностям

$$0 < \kappa_1 < \kappa_2 < .... < \kappa_p, c_k > 0, k = 1, ..., p;$$

ii) $r(\lambda) \in C_R(m_n)$ і

$$r(-\lambda) = \overline{r(\lambda)}, -\infty < \lambda < +\infty, -1 \le r(0) < 1.$$

Тоді набір S є набором даних розсіювання оператора Шредінгера для потенціалу класу $C_R(m_n)$.

Має місце також зворотне твердження: якщо $u \in C_R(m_n)$, то компоненти набора даних розсіювання задовольняють умовам i)—ii).

Доведення теореми 4.3.1 використовує *метод псевдоаналітичного продовження*, основні ідеї якого належать В.І.Мацаєву (1964), Л. Хермандеру (1970), Е.М. Динькіну (1972).

Природним узагальненням класу $C_R(m_n)$ є клас $C_R(m_n^1, m_k^2)$, що визначається двома фіксованними послідовностями $m_n^1, m_k^2, n, k = 0, 1, 2...$ і складається з нескінченно диференційовних функцій $u(x)$, швидко спадаючих на нескінченності і таких, що

$$||(|x|^k + 1)u^{(n)}||_\infty \le C_1 C_2^{k+n} m_n^1 m_k^2 \qquad k, n = 0, 1, 2, \dots$$

Сталі C_1 і C_2 залежать від u. При відповідних обмеженнях на послідовності $m_n^1, m_k^2, n, k = 0, 1, 2...$ мають місце аналоги теорем 4.3.1

і 4.4.1. Зокрема, потенціалам з класу $C_R(m_n^1, m_k^2)$ відповідають коефіцієнти відбиття з "двоїстого "класу $C_R(m_n^2, m_k^1)$. Як наслідок відзначимо твердження, яке у спадному випадку є аналогом критерія належності періодичної функції класу Карлемана $C(m_n)$ в термінах спадання довжин лакун у спектрі оператора Хілла.

НАСЛІДОК 4.3.1'. *Для того, щоб потенціал u належав класу $C_R(m_n^1, m_k^2)$ необхідно і достатньо, щоб справджувалися нерівності*

$$|r^{(n)}(\lambda)| \leq \frac{\gamma_1^n \, m_n^2}{T(\frac{\lambda}{\gamma_2}, m_k^1)}, n = 0, 1, 2, ...$$

де сталі γ_1 і γ_2 залежать тільки від сталих C_1 і C_2 в оцінках для похідних функції $u(x)$.

Звідси випливає, що задача Коші для рівняння КдФ з начальною функцією, що належить класу $C_R(m_n^1, m_k^2)$, має розв'язок $u(x,t)$, який при кожному $-\infty < t < +\infty$ належить $C_R(m_n^1, m_k^2)$.

4. *Критерій* . Основним результатом розділу 4 є :

Теорема 4.4.1

1. Нехай клас $C_R(m_n)$ є квазіаналітичним. Тоді для довільних двох потенціалів u_1 і u_2, що належать класу $C_R(m_n)$, з співвідношень $I_k(u_1) = I_k(u_2)$, $k = 1, 2, \ldots$ випливає рівність $t(\lambda, u_1) = t(\lambda, u_2)$.

2. Нехай клас $C_R(m_n)$ не є квазіаналітичним. Тоді існують потенціали u_1 і u_2, що належать класу $C_R(m_n)$, для яких мають місце співвідношення $I_k(u_1) = I_k(u_2)$, $k = 1, 2, \ldots$, але $t(\lambda, u_1) \neq t(\lambda, u_2)$.

Перевірка квазіаналітичності класу $C_R(m_n)$ може бути здійснена за допомогою функції Карлемана-Островського $T(r, m_n) = \sup_{n \geq 1} \frac{r^n}{m_n}$. Клас $C_R(m_n)$ квазіаналітичний тоді і тільки тоді, коли

$$\int_0^\infty \frac{\ln T(r, m_n)}{1 + r^2} \, dr = +\infty.$$

В розділі 5 розглядаються спектральні інваріанти оператора Шредінгера в багатовимірних задачах (основні результати цього розділу опубліковано в [1, 4, 6, 7]).

Одним з найбільш цікавих і змістовних прикладів в спектральній теорії є оператор Шредінгера $H = -\Delta + V$ з періодичним відносно фіксованної решітки $L \sim Z^n$ потенціалом $V(x), x \in R^n, n \geq 2$. Його спектральна теорія складає математичну основу квантової теорії твердого тіла і дає змогу з'ясувати природу багатьох фізичних властивостей реальних кристалів. Вивчення властивостей множини поліноміальних спектральних інваріантів оператора Шредінгера H на евклідовому торі $T^2 = R^2/L$ є важливим етапом у вирішенні оберненої задачі відновлення, хоча б часткового, потенціалу $V(x)$ за спектром $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора H. Специфіка періодичного випадку дозволяє розглядати поряд з "стандартним" набором $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ нові серії поліноміальних спектральних інваріантів $\{I_k^g\}_{k=1}^{\infty}$, які визначаються з асимптотичного розвинення

$$\int_{T^2} e(t, x+g, x)dx \sim \frac{1}{2\pi t}(1 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^g t^k), \qquad t \to +0.$$

Тут g є элементом решітки $L \sim Z^2$, а $e(t, y, x)$ - фундаментальний розв'язок рівняння $\partial e/\partial t = He$ в R^2. Ці функціонали називаються *узагальненими коефіцієнтами Мінакшісундарама-Плейєля.*

Теорема 5.1.1 *Узагальнені коефіцієнти Мінакшісундарама-Плейєля $\{I_k^g\}, k = 1, 2, ..., g \in L$ складають повну систему спектральних інваріантів оператора Шредінгера у класі дійсно - аналітичних потенціалів на T^2.*

Для вивчення оператора Шредінгера H на торі T^2 ми розглядаємо нескінченне сімейство допоміжних "елементарних" операторів Шредінгера $H_g = -\Delta + V_g, g \in L$. Потенціал V_g може бути отриманий осередненням $V(x)$ по сімейству замкнених геодезичних тора:

$$V_g(x) = \int_0^1 V(x+ug)\, du.$$

і якщо $V(x)$ має нульове середнє,то $V(x) = \sum_{g\in\Phi} V_g(x)$. Тут g пробігає множину Φ элементів решітки , що параметризують прямі в L, які проходять через точку 0.

Оператору H_g однозначно зіставляється оператор Хілла $h_g = -\frac{d^2}{dt^2} + v_g, g \in L$, де потенціал v_g має ті самі коефіцієнти Фур'є , що і потенціал V_g. Спектр оператора H_g повністю описується спектром оператора h_g,і навпаки.

Теорема 5.1.2 (про квазіредукцію) *В класі дійсно - аналітичних потенціалів за спектром оператора $H = -\Delta + V(x)$ можна відновити спектри всіх періодичних операторів $H_g = -\Delta + V_g(x), g \in \Phi$ і спектри всіх операторів Хілла $h_g = -\frac{d^2}{dt^2} + v_g, g \in \Phi$*

В тому випадку, коли змінні поділяються, зрозуміло, має місце обернення твердження. Наслідком цієї теореми є твердження про те, що якщо аналітичний потенціал має нульові коефіцієнти Фур'є з номерами на деяких прямих, що проходять через нуль решітки L , то і довільний аналітичний потенціал, ізоспектральний йому, буде мати нульові коефіцієнти Фур'є на тих самих прямих. Зокрема, властивість аналітичного потенціалу допускати разподіл змінних є "спектрально розрізнюванною".

Обернена задача відновлення потенціалу $V(x)$ по спектру $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора H суттєво спрощується при вивченні спектральних інваріантів оператора Шредінгера $H(\beta) = -\Delta + \beta V(x)$ з константою зв'язку $\beta, \beta \geq 0$ в просторі $L^2([-a_1, a_1] \times [-a_2, a_2])$ і періодичними крайовими умовами. Наскільки однозначно можна відновити функцію $V(x)$ за набором $\{\lambda_k(\beta)\}_{k=1}^{\infty}$? Ми даємо розв'язок цієї задачі в припущенні, що нескінченно диференційовні потенціали шукаються в класі функцій, парних за обома змінними і при цьому відомі лише перші три коефіцієнта в развиненні

$$sp[R_\lambda(\beta) - R_\lambda(0)] = \beta I_1(\lambda) + \beta^2 I_2(\lambda) + \beta^3 I_3(\lambda) + ..., \beta \downarrow 0.$$

Коефіцієнти $\{I_k(\beta)\}, k = 1, 2, 3, ...$ є спектральними інваріантами оператора $H(\beta) = -\Delta + \beta V(x), \beta \geq 0$.

Теорема 5.2.1 (про спектральну жорсткість) . *По трьом коефіцієнтам $I_1(\lambda), I_2(\lambda), I_3(\lambda)$ потенціал $V(x)$ відновлюється з точністю до відбиттів* :

$$1)\, U_1 : x \to x, y \to y; \qquad 2)\, U_2 : x \to x, y \to a_2 - y;$$

$$3)\, U_3 : x \to a_1 - x, y \to y; \qquad 4)\, U_4 : x \to a_1 - x, y \to a_2 - y.$$

Оскільки за набором $\{\lambda_k(\beta)\}_{k=1}^{\infty}$ можна відновити $sp[R_\lambda(\beta) - R_\lambda(0)]$, і навпаки, то як прямий наслідок цієї теореми маємо твердження: якщо $V(x_1, x_2)$ -парний за обома змінними x_1 і x_2 на $[0, a_1] \times [0, a_2]$, то потенціал $V(x_1, x_2)$ відновлюється за набором $\{\lambda_k(\beta), \beta \geq\}_{k=1}^{\infty} 0$ однозначно.

В підрозділах 5.4–5.5 ми застосовуємо поняття і методи попередніх розділів до деяких задач про гамільтонові системи та їх малі збурення. В першому випадку іде мова про періодичні та абсолютно періодичні точки гамільтонових систем на компактних многовидах. У другому випадку вивчаються системи, що пов'язані з динамічним хаосом. Ми розглядаємо динамічні системи, які породжуються дискретними узагальненими ланцюгами Тоди. Такі ланцюги є цілком інтегровними системами тільки у виняткових випадках і, як правило, не мають перших інтегралів, а їх поведінка має багато стохастичних властивостей. При деяких обмеженнях дискретні узагальнені ланцюги Тоди можуть бути зведені до такої динамічної системи. Розглянемо циліндр C з координатами $(z, \varphi), -\infty < z < \infty, \varphi \in [0, 1)$ та відображення $T : C \to C$:

$$z' = z + \lambda \frac{dV}{d\varphi}(\varphi), \quad \varphi' = \varphi + z'(\mathrm{mod}1).$$

Воно є однією з найбільш популярних математичних моделей, що описують ефекти динамічного хаосу і відоме як відображення *Тейлора-Чірікова-Гріна* . Відображення T є λ - збуренням цілком інтегровної системи

$$z' = z, \quad \varphi' = \varphi + z'(\mathrm{mod}1),$$

($\lambda = 0.$) Для малих додатних λ точка $(0,0)$ є гіперболічною фіксованою точкою відображення T і їй відповідають дві сепаратриси (або стійкий та нестійкий многовиди), що перетинаються у деякій точці $B \neq (0,0)$. Такі точки називаються гомоклінічними. Вони відіграють важливу роль у виникненні стохастичних властивостей відображення T. Нехай α є кутом між цими кривими у точці B. Для деякого сімейства аналітичних та парних функцій А.І.Нейштадт, Я. Сінай та І.П.Корнфельд отримали експоненційну оцінку зверху для α

$$|\alpha| \leq \exp\left(-\mathrm{const}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), \qquad \lambda \to +0.$$

Основним результатом підрозділу 5.5 є оцінка зверху величини кута α для *неаналітичних збурень* $V(x)$. Цю оцінку отримано в шкалі просторів $C(m_n)$. *Асоційованою вагою* для послідовності $\{m_n^2\}$ називається функція $h(r, m_n^2)$, яка визначається як

$$h(r, m_n^2) = \inf_{n \geq 1} \frac{m_n^2}{n!} r^{n-1}, \quad r > 0$$

і прагне до нуля швидче любого степеня змінної r, коли $r \to 0$. При деяких обмеженнях на функцію V отримано наступний результат.

Теорема 5.5.1 *Нехай $V(x)$ належить простору $C(m_n)$. Нехай $\Gamma^{(s)}$ та $\Gamma^{(u)}$ є стійкий та нестійкий многовиди, що відповідають гіперболічній точці $(0,0)$ і перетинаються в гомоклінічній точці B. Тоді кут α між $\Gamma^{(s)}$ та $\Gamma^{(u)}$ в точці B може бути оцінено як*

$$|\alpha| \leq c_1 h(c_2\sqrt{\lambda}, m_n^2).$$

Наслідок. *Для простору Жевре* $C(n!^{\alpha}), \alpha \geq 1$,

$$|\alpha| \leq c_1 \exp(-\sqrt{\lambda}^{(-\frac{1}{2\alpha-1})}).$$

Випадок $\alpha = 1$ відповідає простору аналітичних функцій $C(n!)$ та експоненційній оцінці, яку було приведено вище.

Висновки.

В дисертації вирішено ряд важливих наукових проблем, що відносяться до теорії нелінійних цілком інтегровних рівнянь і спектральної теорії диференціальних операторів. Основний об'єкт дослідження – сімейства операторів Шредінгера і поліноміальні спектральні інваріанти або поліноміальні динамичні інтеграли руху, визначені на цих сімействах. Основними результатами дисертації є :

Критерій однозначного відновлення змінних типу дія для рівняння КдФ по поліноміальній серії законів збереження у різних класах початкових даних: періодичних і майже періодичних функцій, в класі спадних функцій.

Доведення гіпотези Маккіна-Трубовіца. Критерий належності дійсного періодичного потенціалу класу Карлемана в термінах спадання довжин лакун відповідного оператора Хілла (узагальнення теореми Трубовіца).

Теорема про повноту поліноміальної серії узагальнених коефіцієнтів Мінакшісундарама-Плейєля. Теореми про квазіредукцію та спектральну жорсткість для багатовимірного періодичного оператора Шредінгера.

Неекспоненційна оцінка товщини стохастичного шару для неаналітичних збурень відображення Тейлора-Чірікова-Гріна.

Публікації

1. Молчанов С.А., Новицкий М.В. *Спектральные инварианты оператора Шредингера на торе*// Успехи математических наук.– 1983.–**38**(233). –N5.–С.135-136.

2. Новицкий М.В. *О восстановлении функции числа вращений для оператора Шредингера с почти периодическим потенциалом по счетному набору полиномиальных законов сохранения* // Функциональний анализ и его приложения.–1985.–**19**.– N3. –С.90-91.

3. Новицкий М.В.*О восстановлении переменных действия для уравнения КдФ в классе п.п.ф. по счетному набору полиномиальных законов сохранения*// Математический сборник.– 1985.–**128** .– N3.–С.416-428.

4. Молчанов С.А., Новицкий М.В.*Спектральные инварианты оператора Шредингера на эвклидовом торе*// Доклады АН СССР.– 1986.–**286**.–N2.– С.287-291.

5. Новицкий М.В.*Об эквивалентных системах спектральных инвариантов оператора Хилла.* Математическая физика, функциональный анализ: Сб.научн.трудов ФТИНТ НАН Украины.– К.: Наукова Думка, 1986.–С.40-47.

6. Молчанов С.А., М.В.Новицкий М.В.*Спектральные инварианты оператора Шредингера на торе.* Математическая физика, функциональный анализ: Сб.научн.-трудов ФТИНТ НАН Украины.– К.. Наукова Думка, 1986.–С.34-39.

7. Новицкий М.В.*Спектральные инварианты оператора Шредингера на торе с константой связи при потенциале.* Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций: Сб.научн.трудов ФТИНТ НАН Украины. К.: Наукова Думка, 1987.–С.27-32.

8. Новицкий М.В.*Двусторонние оценки полиномиальных законов сохранения для уравнения КдФ и их приложения*// Функциональний анализ и его приложения.– 1989.–**23**.–N3. –С.78-79.

9. Novitskii M.V. *On an inverse problem for smooth random Schrodinger operators*// Standard and Nonstandard Schrodinger operator.– World Scientific.–1989–C.397-399.

10. Novitskii M.V. *On a complete description of the principal discrete serie of spectral invariants of the Hills operator*// Operator Theory: Advances and Applications.–1990.– **46**.– Basel, Birkhauser Verlag.–P.115-117.

11. Новицкий М.В.*О полном описании основных дискретных серий спектральных инвариантов оператора Хилла*// Теория функций, функциональний анализ и их приложения.–1991.– **56**.–С.30-35.

12. Новицкий М.В.*Об условиях восстановления переменных действия для нелинейных уравнений*, Спектральные и эволюционные задачи: Сб.трудов Крымской осенней математической школы, Киев, 1991, 67-68.

13. Новицкий М.В.*Об оценках наилучших констант в неравенствах типа Колмогорова-Маркова.* Динамические системы и комплексный анализ : Сб.научн.-трудов ФТИНТ НАН Украины.– К.: Наукова Думка, 1992.–С.24-32.

14. Новицкий М.В.*Об аналоге неравенства типа Колмогорова-Маркова для обыкновенных дифференциальных уравнений*// Математические заметки.–1993.–**53**.–N3–P.79-90.

15. Novitskii M.V.*Quasianalytic classes and isospectral Hill's operators*// Spectral operator theory and related topics.– Advances in Soviet Mathematics.–1994.–**19**.–P.27-39.

16. Novitskii M.V.*The motion integral of the KdV equation and related inverse problems*// " 11 International Congress of Mathematical Physics ", D.Iagolnitzer(ed.).–International Press.– 1994.–57-58.

17. Новицкий М.В.*Квазианалитические классы убывающих функций и интегралы движения уравнения КдФ*// Доклады РАН.–1996.–**286**.–N2.–С.287-291.

18. Novitskii M.V.*Quasianalytic classes and the KdV equation*// Inverse problems.–1996.–**12**.–P.55-75.

Анотації

Новицький М.В. *Спектральні інваріанти сімейств операторів Шредінгера, обернені задачі та функціонали, пов'язані з ними.*–Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 — математична фізика.– *Фізико-технічний інститут низьких температур ім.Б.І.Вєркіна НАН України*, Харків,1997.

Дисертацію присвячено дослідженню сімейств операторів Шредінгера і поліноміальних спектральних інваріантів або поліноміальних інтегралів руху, визначених на цих сімействах. В дисертації здобуто повний розв'язок проблеми однозначного відновлення змінних типу дія для рівняння КдФ по поліноміальній серії законів збереження в різних класах початкових даних: періодичних і майже періодичних функцій, в класі спадних функцій. Розвинуті методи застосовано для розв'язання ряду задач спектральної теорії оператора Шредінгера, рівняння КдФ, гамільтонових систем та динамічного хаосу: доведено гіпотезу Маккіна-Трубовіца, знайдено критерій належності до класу Карлемана дійсного періодичного потенціалу в термінах спадання довжин лакун відповідного оператора Хілла (узагальнення теореми Трубовіца). Для оператора Шредінгера на торі доведено повноту поліноміальної серії узагальнених коефіцієнтів Минакшисундарама-Плейєля та теореми про квазіредукцію і спектральну

жорсткість. Отримано неекспоненційну оцінку товщини стохастичного шару для відображення Тейлора-Чірікова-Гріна для неаналітичних збурень. Приведено розв'язок деяких споріднених задач.

Ключові слова: оператор Шредінгера, спектральні інваріанти, рівняння КдФ, клас Карлемана , квазіаналітична функція.

Новицкий М.В. *Спектральные инварианты семейств операторов Шредингера, обратные задачи и функционалы, связанные с ними.* –Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 — математическая физика.– *Физико-технический институт низких температур им.Б.И.Веркина НАН Украины*, Харьков,1997.

Диссертация посвящена исследованию семейств операторов Шредингера и полиномиальных спектральных инвариантов или полиномиальных интегралов движения, определенных на этих семействах. В диссертации получено полное решение задачи однозначного восстановления переменных действия для уравнения КдФ по счетной серии полиномиальных законов сохранения в различных классах начальных данных: периодических и почти периодических функций, в классе убывающих функций. Развитые методы использованы для решения ряда задач спектральной теории оператора Шредингера, уравнения КдФ, гамильтоновых систем и динамического хаоса: доказана гипотеза Маккина-Трубовица, найден критерий принадлежности классу Карлемана действительного периодического потенциала в терминах убывания длин лакун соответствующего оператора Хилла (обобщение теоремы Трубовица). Для оператора Шредингера на торе доказаны полнота полиномиальной серии обобщенных коэффициентов Минакшисундарама-Плейеля и теоремы о квазиредукции и о спектральной жесткости. Получено неэкспоненциальную оценку толщины стохастического слоя для отображения Тейлора-Чирикова-Грина для неаналитических возмущений. Приведены решения некоторых родственных задач.

Ключевые слова: оператор Шредингера, спектральные инварианты, уравнение КдФ, класс Карлемана , квазианалитическая функция.

Novitskii M.V. *Spectral invariants of the Schrodinger operator families, inverse problems and related functionals.*–Manuscript.

Thesis for a doctor's degree by speciality 01.01.03 — mathematical physics.– *B.I.Verkin Institute for Low Temperature & Engineering of National Academy of Sciences of Uknaine*, **Kharkov,1997.**

The dissertation is devoted to investigation of the Schrodinger operator families and the polynomial spectral invariants or the polynomial motion integrals defined on these families . A complete solution of the problem of unique recovery of the action variables from the set of the polynomial motion integrals of the KdV equation is obtained for different classes of the initial data: the periodic and almost periodic functions, the decreasing functions. The developed methods are used to solve series of problems of the spectral theory of the Schrodinger operator, the KdV equation, the Hamiltonian systems and dynamical chaos: the proof of the McKean-Trubowitz conjecture, the description of periodic potentials of the Carleman class in terms of decay of the gap lengths (an extension of the Trubowitz theorem), the completeness of the generalized Minakshisundaram-Pleijel coefficients, the theorem on the quasireduction and the spectral rigidity theorem for the Schrodinger operator on torus, a non-exponential estimate of the stochastic layer weight for the Taylor-Chirikov- Green mapping for the non-analytic perturbations. Some other relative problems are solved as well.

Key words: the Schrodinger operator, spectral invariants, the KdV equation, the Carleman class, quasianalytic function.

Відповідальний за випуск- доктор фіз.-мат. наук В.П. Котляров

Підписано до друку 28.10.1997р. Умовн.-друк.арк.1,8.Зам.33-97
Тираж 100 екз. Ротапрінт ФТІНТ НАНУ, м.Харків
Безкоштовно.