НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ЄВТУХОВ Вячеслав Михайлович

УДК 517. 928

АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕАВТОНОМНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

01.01.02 — диференціальні рівняння

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико - математичних наук

Київ — 1997

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі диференціальних рівнянь Одеського державного університету ім. І.І. Мечникова

Офіційні опоненти:
академік НАН Грузії, доктор фізико-математичних наук, професор
КІГУРАДЗЕ Іван Таріелович,
Інститут математики ім. А. Размадзе НАН Грузії, директор;

член -кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор
ПЕРЕСТЮК Микола Олексійович,
Київський університет ім. Тараса Шевченка, завідуючий кафедрою, декан факультету;

доктор фізико-математичних наук, професор
ТЕПЛІНСЬКИЙ Юрій Володимирович,
Кам'янець - Подільський педагогічний університет, завідуючий кафедрою.

Провідна установа:
Чернівецький державний університет ім. Ю. Федьковича, кафедра прикладної математики і механіки.

Захист відбудеться "27" січня 1998 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради Д.01.66.02 при Інституті математики НАН України за адресою: 252601, Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту.

Автореферат розісланий "26" грудня 1997 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради А.Ю. ЛУЧКА

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Незважаючи на більш ніж вікову історію, питання про асимптотичне поводження розв'язків диференціальних рівнянь продовжує і в теперешній час служити предметом численних досліджень.

Роботи А. Пуанкаре, Л. Шлезінгера, А. Кнезера, Ж. Хорна і О. Перрона, опубліковані наприкінці XIX – початку XX століття, створили передумови для розвитку асимптотичної теорії лінійних неавтономних звичайних диференціальних рівнянь.

Значний вклад у становлення цієї теорії внесли Е. Коттон, Г. Шпет, М. Матель, О. Хаупт, М. Хукухара, Н. Левінсон, А. Уінтнер, Г.Л. Туррітін, В.С. Пугачов, І.М. Рапопорт, А. Девінатц, С.Ф. Фещенко, М. І. Шкіль, М.В. Федорюк та багато інших.

І.Т. Кігурадзе на основі досліджень М. Мателля розробив теорію асимптотичного інтегрування лінійних диференціальних рівнянь

$$u^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} p_k(t)\, u^{(k)}, \tag{1}$$

де

$$p_k(t) = p_{0k}(t) + p_{1k}(t), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{2}$$

$p_{0k} : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ – локально абсолютно неперервні, а $p_{1k} : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$– локально сумовні функції. При цьому розглядався випадок, коли існують двічі неперервно диференційовні функції $\varphi, \psi : [a, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$ такі, що:

1) функції

$$a_k(t) = \frac{(\varphi(t)\,\psi^k(t))'}{\varphi(t)\,\psi^{k+1}(t)}, \quad b_k(t) = \psi^{k-n}(t)\, p_{0k}(t),$$
$$c_k(t) = \psi^{k-n+1}(t)\, p_{1k}(t), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{3}$$

задовольняють умови

$$\int_a^{+\infty} |a_k'(t)|\, dt < +\infty, \quad \int_a^{+\infty} |b_k'(t)|\, dt < +\infty, \quad \int_a^{+\infty} |c_k(t)|\, dt < +\infty;$$

2) алгебраїчне рівняння

$$\prod_{j=0}^{n-1}(\lambda + a_{0j}) = \sum_{k=1}^{n-1} b_{0k} \prod_{j=0}^{k-1}(\lambda + a_{0j}) + b_{00}, \tag{4}$$

де $a_{0j} = \lim\limits_{t\to+\infty} a_j(t)$, $b_{0j} = \lim\limits_{t\to+\infty} b_j(t)$, має прості корені.

Одержані І.Т. Кігурадзе теореми охоплюють багато відомих результатів і дозволяють за рахунок вибору функцій φ і ψ встановити асимптотику фундаментальної сім'ї розв'язків для ряду важливих класів лінійних диференціальних рівнянь вигляду (1).

Але ці теореми вимагали уточнення, так як в окремих випадках не охоплювали більш загальних результатів, наприклад, результатів А. Уінтнера при $\varphi(t) = \psi(t) \equiv 1$. Крім того, залишалось відкритим питання про поширення цієї теорії на випадки наявності у рівняння (4) кратних коренів.

Особливо інтенсивна робота в останні десятиріччя проведена у теорії істотно нелінійних неавтономних звичайних диференціальних рівнянь. Значна кількість з одержаних у ці роки результатів підсумована у монографії І. Т. Кігурадзе і Т. А. Чантурія ("Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений". – М.: Наука, 1990).

Один із напрямків в теорії істотно нелінійних диференціальних рівнянь пов'язаний з класичним рівнянням Емдена–Фаулера

$$y'' = \pm t^n y^\sigma.$$

Це рівняння вперше з'явилось в астрофізичних дослідженнях Р. Емдена, які проводились у другій половині XIX століття. Потім воно виникає в ядерній фізиці у вигляді рівняння Томаса–Фермі $y'' = t^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}}$, в газовій динаміці, механіці рідини та в інших галузях природознавства. Асимптотичне поводження його правильних розв'язків при $\sigma > 1$ досліджено в роботах Р. Фаулера, Е. Хспфа, Дж. Сансоне та ін. Одержані при цьому результати підсумовані у відомих монографіях Р. Беллмана і Дж. Сансоне (1954 р.).

Вивчення рівняння Емдена–Фаулера було важливою передумовою для дослідження істотно нелінійних рівнянь другого порядку більш загального вигляду

$$y'' = \alpha_0\, p(t) |y|^\sigma \operatorname{sign} y, \tag{5}$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $0 < \sigma \neq 1$ і $p : [a, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$ – неперервна функція.

Рівняння (5) розглядалось у роботах Ф.В. Аткінсона, І.Т. Кігурадзе, Ш. Білогорця, Т.А. Чантурія, О.В. Костіна, М.М. Аріпова, З. Нехарі, Дж. Уонга, В.О. Кондратьєва і В.С. Самовола, В.О. Кондратьєва і В.О. Нікішина та багатьох інших авторів. Основні результати про існування у рівняння (5) правильних та сингулярних розв'язків першого і другого роду, коливних та неколивних розв'язків, а також про асимптотику цих розв'язків, що одержані протягом 1955-1990 років, викладені у вищеназваній монографії І.Т. Кігурадзе і Т.А. Чантурія.

І.Т. Кігурадзе належить важлива ідея використання перетворень змінних загального вигляду

$$\tau = \tau(t), \qquad y(t) = v(t)\,\eta(\tau)$$

для вивчення асимптотичного поводження правильних неколивних розв'язків рівняння (5) у випадку, коли $\sigma > 1$ і функція p допускає зображення

$$p(t) = p_0(t)[\,1 + r_0(t)\,],$$

де $p_0 : [a, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$ – двічі неперервно диференційовна функція, а $r_0 : [a, +\infty[\longrightarrow] - 1, +\infty[$– неперервна функція така, що

$$\lim_{t \to +\infty} r_0(t) = 0.$$

Вибір функцій τ і v здійснювався по різному в залежності від виконання тих чи інших умов.

Ця ідея в роботах Т.А. Чантурія була поширена на випадок $0 < \sigma < 1$ і набула подальшого розвитку в дослідженнях О.В. Костіна. О.В. Костін запропонував вибір функцій τ і v здійснювати з використанням наближення Г. Харді $\frac{v''}{v} \approx \left(\frac{v'}{v}\right)^2$, що дозволило побудувати метод, який надалі в роботах О.В. Костіна і автора був поширений на рівняння

$$y'' = \alpha_0\, p(t)\,|\,y\,|^{\sigma}\,|\,y'\,|^{\lambda}\,\mathrm{sign}\, y, \tag{6}$$

до того ж для довільних σ і λ таких, що $\sigma + \lambda \neq 1$. Недослідженим залишався випадок $\sigma + \lambda = 1$. Крім того, залишалися відкритими: а) питання про асимптотичне поводження правильних неколивних розв'язків рівнянь (5) і (6) у деяких особливих випадках:

б) питання про можливість зняття умов на гладкість коефіцієнта p при вивченні асимптотичних властивостей неколивних розв'язків рівнянь (5) і (6); в) питання про можливість поширення розробленої для рівняння (6) методики дослідження на інші класи істотно нелінійних рівнянь другого порядку.

Важливою особливістю вищеназваних робіт, присвячених рівнянням (5) і (6), є те, що при цілком природних умовах була встановлена асимптотика у с і х їх неколивних розв'язків. Спроби встановлення аналогічних результатів для рівнянь типу Емдена–Фаулера третього та більш високих порядків не були такими ж ефективними. Більш перспективним для цих рівнянь виявився підхід, який намітився в роботі І.Т. Кігурадзе (Мат. сб. – 1964. – Т. 65, N. 2.– С. 172–187). Надалі він був поширений на достатньо широкі класи рівнянь $n-$ го порядку, що охоплювали рівняння

$$y^{(n)} = \alpha_0 \, p(t) |\, y\,|^{\sigma} \operatorname{sign} y, \qquad (7)$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $\sigma > 0$, і $p : [a, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$ – неперервна функція. Для таких рівнянь спочатку були виділені усі типи їх правильних та сингулярних розв'язків. Далі розв'язки кожного із можливих типів досліджувались окремо. Для деяких з них (швидкозростаючих, кнезеровських і сингулярних неколивних розв'язків) в роботах І.Т. Кігурадзе і Г.Г. Квінікадзе були одержані двосторонні асимптотичні оцінки. Питання про точні асимптотичні формули для усіх типів правильних та сингулярних неколивних розв'язків залишалось відкритим навіть для рівняння (7). Відомими були лише результати І.Т. Кігурадзе про умови існування розв'язків із степеневою асимптотикою

$$y(t) \sim c_i \, t^{i-1} \quad (i = 1, \ldots, n) \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

а також результати О.В. Костіна про асимптотику розв'язків широкого класу істотно нелінійних диференціальних рівнянь, яка визначається формальним застосуванням формул Г. Харді

$$\frac{y^{(i)}(t)}{y(t)} \sim \left(\frac{y'(t)}{y(t)} \right)^{i} \quad (i = 2, \ldots, n) \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \qquad (8)$$

В дисертаційній роботі здійснена спроба заповнити вищеназвані прогалини.

Мета роботи полягає в тому, щоб: а) доповнити і поширити на випадок наявності кратних коренів у алгебраїчного рівняння (4) теорію І.Т. Кігурадзе асимптотичного інтегрування лінійних рівнянь (1); б) розробити методику встановлення точних асимптотичних формул для широкого класу неколивних розв'язків нелінійних рівнянь n– го порядку, зокрема рівнянь типу Емдена–Фаулера, яка охоплює метод О.В. Костіна використання формул Г. Харді (8); в) розробити підхід для дослідження асимптотичного ководження усіх неколивних розв'язків рівняння (6), який дозволяє не тільки зняти умови на гладкість коефіцієнта p, а й охопити не досліджені особливі випадки; г) поширити методику дослідження узагальнених рівнянь типу Емдена–Фаулера (6) на деякі інші типи істотно нелінійних рівнянь другого порядку.

Методи дослідження. В роботі застосовуються методи математичного аналізу, теорії функцій, функціонального аналізу, методи якісної теорії диференціальних рівнянь і асимптотичні методи. Набуває подальшого розвитку метод перетворень змінних, який систематично використовується при дослідженні асимптотичних властивостей розв'язків неавтономних звичайних диференціальних рівнянь і систем таких рівнянь.

Наукова новизна. Для систем лінійних диференціальних рівнянь, головна матриця коефіцієнтів яких має структуру квазіжорданової нормальної форми, впроваджено новий тип умов Меткляя–Левінсона з вагою і доведено теореми про асимптотику лінійно незалежних розв'язків, відповідних квазіжордановим клітинам, та фундаментальної сім'ї розв'язків. На основі цих теорем одержані нові результати про асимптотичні зображення розв'язків лінійних неавтономних диференціальних рівнянь n - го порядку (1).

Для істотно нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь n - го порядку визначено новий клас, так званих, P_ω-розв'язків, які при деяких умовах охоплюють усі типи правильних та сингулярних монотонних розв'язків, відмінних від степеневих. Одержані точні асимптотичні формули для усіх P_ω - розв'язків і їх похідних до $n-1$ - го порядку включно узагальненого істотно нелінійного рівняння типу Емдена-Фаулера n - го порядку. Встановлені необхідні і достатні умови їх існування, а також умови асимптотичної еквівалентності двох рівнянь типу Емдена-Фаулера.

Удосконалюючи методику, розроблену для рівнянь n-го порядку, отримані нові результати про асимптотичне поводження усіх (а не тільки P_ω) правильних та сингулярних монотонних розв'язків узагальнених диференціальних рівнянь типу Емдена-Фаулера другого порядку (6), а також деяких класів диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями іншого типу. Зокрема, досконало досліджені рівняння, які виникають в теорії ізотермічної плазми при вивченні розподілу електростатичного потенціалу навколо тіл із сферичною та циліндричною симетрією.

Теоретична та практична цінність. Отримані в роботі результати і розроблені в ній методики можуть бути використані для дослідження асимптотичного поводження розв'язків неавтономних диференціальних рівнянь більш загального вигляду, ніж ті, що розглядались у дисертації, а також конкретних лінійних та нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь вищих порядків, які виникають в теоретичній фізиці, механіці, астрономії та інших галузях природознавства. Деякі з них були застосовані в дослідженнях кафедри теплофізики Одеського державного університету ім. І.І. Мечникова.

Апробація роботи. Основні результати дисертаційної роботи доповідались на наукових семінарах з якісної теорії диференціальних рівнянь в Інститутах математики АН України (1992, 1993, 1997 рр.), АН Грузії (1989 р.), АН НДР (1982 р.), в Московському університеті ім. М.В. Ломоносова (1991, 1995 рр.), в Берлінському (1982 р.) і Ростокському (1982 р.) університетах, на Розширених засіданнях семінару Інституту прикладної математики ім. І.Н. Векуа Тбіліського університету (1988, 1990, 1992 рр.), на міжнародних конференціях "Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики - вторые Боголюбовские чтения" (Київ, 1992 р.), "Асимптотичні та якісні методи в теорії нелінійних коливань" - треті Боголюбовські читання (Київ, 1997 р.), "Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения" (Київ, 1994 р., Кам'янець-Подільський, 1996 р.), "П'ята Міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука" (Київ, 1996 р.), "Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики и их приложения" (Феодосія, 1997 р.), на Всесоюзних конференціях з якісної теорії диференціальних рівнянь (Рига, 1989 р.) і нелінійних проблем диференціальних рівнянь і математичної фізики (Тернопіль, 1989 р.), на Республіканських конференціях (Київ, 1992 р.; Одеса, 1982, 1987, 1992 рр.; Севастополь, 1990 р.), на школі по теорії функцій (Воронеж, 1993 р.), неодноразово на наукових семінарах в Одеському державному університеті ім. І.І. Мечникова.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані у роботах [1–28].

Структура і обсяг роботи. Дисертаційна робота складається із вступу, п'яти розділів і списку літератури, який містить 232 назви. Обсяг роботи – 295 сторінок машинописного тексту.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовується актуальність теми, подаються стислий огляд робіт за даною тематикою, зміст дисертації та основні результати.

Перший розділ (§§ 1–2) носить, в цілому, допоміжний характер. Однак, одержані в ньому результати мають і самостійний інтерес.

У § 1 (пп. 1.1–1.5) досліджується система лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dx} = [W(x) + R(x)]\, y, \tag{9}$$

де

$$W(x) = \operatorname{diag}[W_1(x), \ldots, W_s(x)],$$

$$W_i(x) = \begin{pmatrix} \omega_{i1}(x) & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{i2}(x) & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \omega_{in_i-1}(x) & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \omega_{in_i}(x) \end{pmatrix},$$

$i = 1, \ldots, s$, $n_i \geq 1$,[1] $\sum\limits_{i=1}^{s} n_i = n$, функції ω_{ik} ($k = 1, \ldots, n_i$; $i = 1, \ldots, s$) і матриця $R = (r_{ij})$ комплекснозначні і локально сумовні на проміжку $[x_0, +\infty[$.

Для цієї системи рівнянь розглядається випадок, коли функції B^i_{jk} ($1 \leq j \leq k \leq n_i$, $1 \leq i \leq s$), які визначені рекурентними співвідношеннями:

[1] При $n_i = 1$ припускаємо, що $W_i(x) = \omega_{i1}(x)$.

$$B^i_{kk}(x) \equiv 1 \quad \text{при} \quad k = 1, \ldots, n_i,$$

$$B^i_{jk}(x) = \int\limits_{\beta^i_{jk}}^{x} B^i_{j+1k}(t) d_{ij+1}(t)\, dt \quad \text{при} \quad 1 \le j < k \le n_i,$$

де

$$d_{im}(x) = \exp \int\limits_{x_0}^{x} [\omega_{im}(\tau) - \omega_{im-1}(\tau)]\, d\tau, \quad m = 2, \ldots, n_i,$$

$$\beta^i_{jk} = \begin{cases} x_0, \text{ якщо } B^i_{jk0} = +\infty \\ +\infty, \text{ якщо } B^i_{jk0} < +\infty \end{cases}, \ B^i_{jk0} = \int\limits_{x_0}^{+\infty} \left| B^i_{j+1k}(x) d_{ij+1}(x) \right| dx,$$

задовольняють наступну умову:

(S_B). Існують $c_1 > 0$ і $x_1 \ge x_0$ такі, що для будь яких $i \in \{1, \ldots, s\}$ та $1 \le j \le m \le n_i$

$$B^i_{1m}(x) \ne 0, \qquad \left| \frac{B^i_{1j}(x)\, B^i_{jm}(x)}{B^i_{1m}(x)} \right| \le c_1 \quad \text{при} \quad x \ge x_1 .$$

Умова (S_B) виконана, наприклад, у випадках, коли для кожного $i \in \{1, \ldots, s\}$ або $n_i = 1$, або $n_i > 1$ і $\omega_{i1}(x) = \cdots = \omega_{in_i}(x)$.

Основні результати (треми 1.1 – 1.3) про асимптотичне інтегрування системи (8), головна матриця коефіцієнтів W якої задовольняє умову (S_B), а R – мала у деякому розумінні, одержані у пп. 1.1 – 1.3. Щоб сформулювати одну з доведених тут теорем, визначимо для кожного $i \in \{1, \ldots, s\}$ функції

$$H_{ik}(x) = B^i_{1k}(x) \exp \int\limits_{x_0}^{x} [\omega_{i1}(t) - \omega_{ik}(t)]\, dt, \quad k = 1, \ldots, n_i,$$

упровадимо позначення

$$J_0 = \{ (i, j) \ : \ 1 \le j \le n_i, \ 1 \le i \le s \},$$

$$N_1 = 0, \quad N_i = \sum_{\nu=1}^{i-1} n_\nu, \quad i = 2, \ldots, s,$$

і наступне

О з н а ч е н н я 1. Нехай $\gamma = (\gamma_i)_{i=1}^{s}$ – вектор-функція з неперервними компонентами $\gamma_i : [x_0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$ $(i = 1, \ldots, s)$. Будемо казати, що система n локально сумовних функцій $\mu_{im} :]x_0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ $(m = 1, \ldots, n_i;\ i = 1 \ldots, s)$ задовольняє на проміжку $[x_1, +\infty[\subset]x_0, +\infty[$ умову Мателля-Левінсона (коротко умову $(M - L)$) з вагою γ, якщо для будь-яких (i, m), $(p, q) \in J_0$ або

$$\sup \left\{ \int_{\tau}^{t} [\, \mu_{pq}(s) - \mu_{im}(s) \,] \, ds - \ln \frac{\gamma_i(t)}{\gamma_i(\tau)} \ : \ t \geq \tau \geq x_1 \right\} < +\infty,$$

або

$$\inf \left\{ \int_{\tau}^{t} [\, \mu_{pq}(s) - \mu_{im}(s) \,] \, ds - \ln \frac{\gamma_i(t)}{\gamma_i(\tau)} \ : \ t \geq \tau \geq x_1 \right\} > -\infty$$

і

$$\lim_{t \to +\infty} \left[\int_{x_1}^{t} [\, \mu_{pq}(s) - \mu_{im}(s) \,] \, ds - \ln \frac{\gamma_i(t)}{\gamma_i(x_1)} \right] = +\infty.$$

Т е о р е м а 1. 3. *Нехай для деякої вектор-функції $\gamma = (\gamma_i)_{i=1}^{s}$ з неперервними неспадними компонентами $\gamma_i : [x_0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$ $(i = 1, \ldots, s)$ виконуються поряд з (S_B) наступні дві умови:*

1) система n функцій

$$\mu_{im}(x) = Re \left[\omega_{i1}(x) + \frac{(B_{1m}^{i}(x))'}{B_{1m}^{i}(x)} \right] \quad (m = 1, \ldots, n_i;\ \ i = 1, \ldots, s)$$

задовольняє на проміжку $[x_1, +\infty[$ умову $(M - L)$ з вагою γ;

2) при будь яких (i, m), $(l, k) \in J_0$

$$\int_{x_1}^{+\infty} \gamma_i(x) \left| \frac{H_{im}(x)}{H_{lk}(x)} r_{N_i + mN_l + k}(x) \right| dx < +\infty.$$

Тоді система рівнянь (9) має фундаментальну сім'ю розв'язків $y_{pq} = (y_{pqj})_{j=1}^{n}$, $q = 1, \ldots, n_p$, $p = 1, \ldots, s$, компоненти кожного з яких допускають при $x \to +\infty$ асимптотичні зображення

$$y_{pqN_p+k}(x) = \exp\int\limits_{x_0}^{x} \omega_{pk}(t)\,dt \left[B^p_{kq}(x) + o\left(\frac{B^p_{1q}(x)}{\gamma_p(x)B^p_{1k}(x)}\right)\right]$$

при $k = 1, \ldots, q,$

$$y_{pqN_i+k}(x) = o\left(\frac{H_{pq}(x)}{\gamma_i(x)H_{ik}(x)} \exp\int\limits_{x_0}^{x} \omega_{pk}(t)\,dt\right)$$

при $i = p$, $k = q+1, \ldots, n_p$ *(якщо* $q < n_p$ *), а також при* $i \neq p$ $(i \in \{1, \ldots, s\})$ *і* $k = 1, \ldots, n_i$.

Якщо, крім наведених в теоремі умов, у деякому околі $+\infty$

$$\left|\frac{B^p_{1k}(x)\,B^p_{kq}(x)}{B^p_{1q}(x)}\right| \geq c_0 > 0 \quad (k = 1, \ldots, q),$$

то асимптотичні формули для компонент y_{pqN_p+k} $(k = 1, \ldots, q)$ розв'язку y_{pq} можуть бути записані у вигляді

$$y_{pqN_p+k}(x) = B^p_{kq}(x) \exp\int\limits_{x_0}^{x} \omega_{pk}(t)\,dt \left[1 + o\left(\frac{1}{\gamma_p(x)}\right)\right] \quad (k = 1, \ldots, q).$$

У теоремах 1.1 і 1.2 при більш слабких умовах одержано асимптотичні формули для окремих розв'язків, а також для n_p лінійно незалежних розв'язків, які відповідають окремому квазіжордановому блоку W_p.

В пп. 1.4 і 1.5 виділяються деякі класи систем вигляду (9), для яких умова (S_B) свідомо виконана, і для них конкретизуються результати попередніх пунктів.

В § 2 (пп. 2.1, 2.2) на основі відомих теорем О.В. Костіна встановлюються зручні для використання в подальшому достатні умови існування зникаючих в нескінченності дійсних розв'язків у системи квазілінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x) + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x)\,y_j + g_i(x)\,Y_i(x, y_1, \ldots, y_n),$$

$$i = 1, \ldots, n,$$

де $Y_i(x, 0, \ldots, 0) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$ при $x \geq a$, $Y_i : \Omega_{ab} \longrightarrow \mathbf{R}$

і $f_i, p_{ij}, g_i : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n)$ – неперервні функції, $|a| < +\infty$, $b > 0$, $\Omega_{ab} = [a, +\infty[\times \mathbf{R}^n_b$,

$$\mathbf{R}^n_b = \{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n, :\ |y_i| \le b,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Тут окремо розглядаються: а) випадок системи з майже трикутною лінійною частиною (п. 2.1); б) випадок системи з майже сталими коефіцієнтами (п. 2.2).

Другий розділ (§§ 3–8) присвячено лінійним диференціальним рівнянням (1). В ньому досліджується випадок, коли коефіцієнти p_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ рівняння (1) допускають зображення виду (2) й існують такі двічі неперервно диференційовні функції $\varphi, \psi : [a, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$, що:

а) існують скінченні границі

$$\lim_{t\to+\infty} a_k(t) = a_{0k}, \qquad \lim_{t\to+\infty} b_k(t) = b_{0k} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

де a_k, b_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ – функції з формул (3);

б) алгебраїчне рівняння

$$\prod_{j=0}^{n-1}(\lambda + a_j(t)) = \sum_{k=1}^{n-1} b_k(t) \prod_{j=0}^{k-1}(\lambda + a_j(t)) + b_0(t)$$

має корені $\lambda_{im}(t)$ $(m = 1, \ldots, n_i;\ i = 1, \ldots, s;\ \sum\limits_{i=1}^{s} n_i = n)$, які є локально абсолютно неперервними на деякому проміжку $[t_0, +\infty[$ комплекснозначними функціями і задовольняють умови

$$\lim_{t\to+\infty} \lambda_{im}(t) = \lambda_i \quad (m = 1, \ldots, n_i;\ i = 1, \ldots, s),$$

де $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ – корені кратності $n_1, \ldots, n_s$ (відповідно) граничного рівняння (4);

в) для кожного значення $i \in \{1, \ldots, s\}$ функції B^i_{jk} $(1 \le j \le k \le n_i)$, які визначаються рекурентними співвідношеннями

$$B^i_{kk}(t) \equiv 1, \qquad k = 1, \ldots, n_i,$$

$$B^i_{jk}(t) = \int\limits_{\beta^i_{jk}}^{t} \psi(\tau) B^i_{j+1k}(\tau) \exp \int\limits_{t_0}^{\tau} \psi(s)[\lambda_{ij+1}(s) - \lambda_{ij}(s)]\, ds\, d\tau,$$

$$1 \le j < k \le n_i,$$

де границя інтегрування β^i_{jk} дорівнює або t_0, або $+\infty$ і обрана таким же чином, як і раніше у функціях B^i_{jk}, задовольняють умови

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{B^i_{1m}(t)\,B^i_{mk}(t)}{B^i_{1k}(t)} = \mathrm{const} \neq 0, \qquad 1 \le m \le k \le n_i.$$

При цьому на додатки p_{1k} накладаються обмеження, які забезпечують асимптотичну еквівалентність розв'язків рівняння (1) і "скороченого" рівняння

$$u^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} p_{0k}(t)\,u^{(k)}.$$

Основні результати другого розділу (теореми 3.1–3.3) сформульовані у § 3 і доведені в § 5.

§ 4 носить допоміжний характер. Тут, у зв'язку з умовами а) і б), обговорюється (п. 4.1) питання про існування у алгебраїчного рівняння з майже сталими і локально абсолютно неперервними на проміжку $[t_0, +\infty[$ коефіцієнтами коренів з тими ж гладкісними властивостями, а також будується у явному вигляді (п. 4.2) невироджена і локально абсолютно неперервна у деякому околі $+\infty$ матриця $G(t)$, яка задовольняє співвідношення

$$G^{-1}(t)\,A_0(t)\,G(t) = \mathrm{diag}\,[\Lambda_1(t), \ldots, \Lambda_s(t)],$$

де

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} -a_0(t) & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -a_1(t) & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -a_{n-2}(t) & 1 \\ b_0(t) & b_1(t) & \ldots & b_{n-2}(t) & b_{n-1}(t) - a_{n-1}(t) \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_i(t) = \begin{pmatrix} \lambda_{i1}(t) & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{i2}(t) & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_{in_i-1}(t) & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_{in_i}(t) \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, s.[1]$$

---

[1] При $n_i = 1$ припускаємо, що $\Lambda_i(t) = \lambda_{i1}(t)$.

У § 5 рівняння (1) за допомогою перетворення

$$x = \int\limits_a^t \psi(\tau)\,d\tau, \qquad \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = F(t)\,G(t) \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix},$$

де

$$F(t) = \operatorname{diag}\left[\,\varphi(t),\ \varphi(t)\,\psi(t),\ \ldots,\ \varphi(t)\,\psi^{n-1}(t)\,\right],$$

зводиться до системи диференціальних рівнянь виду (9), яка допускає застосування теорем з § 1. На основі цих теорем і встановлюються теореми 3.1 – 3.3.

У §§ 6–8 з використанням теорем 3.1–3.3 досліджується асимптотичне поводження розв'язків лінійних диференціальних рівнянь з майже сталими коефіцієнтами (§ 6), лінійних рівнянь, асимптотично еквівалентних рівнянням Ейлера (§ 7) і асимптотично еквівалентних рівнянням $u^{(n)} = p(t)\,u^{(l)}$, де $0 \le l \le n-1$ (§ 8).

Наведемо одну з двох теорем § 8.

Т е о р е м а 8. 2. ***Нехай для деякого $l \in \{0, \ldots, n-1\}$ існують двічі неперервно диференційовна функція $p : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\}$ і стала $\alpha \ge 0$ такі, що функція $\frac{t\,p'(t)}{p(t)}$ є монотонною в околі $+\infty$ і виконуються умови:***

$$\lim_{t\to+\infty} p'(t)\,|p(t)|^{-\frac{n-l+1}{n-l}} = 0,$$

$$\int\limits_a^{+\infty} \left(t\,|p(t)|^{\frac{1}{n-l}}\right)^{\alpha} \left| \left(p'(t)\,|p(t)|^{-\frac{n-l+1}{n-l}}\right)' \right| dt < +\infty,$$

$$\int\limits_a^{+\infty} t^{\alpha}\,|p(t)|^{\frac{\alpha-n+l+1}{n-l}}\ |\,p_l(t) - p(t)\,|\ dt < +\infty,$$

$$\int\limits_a^{+\infty} t^{l-k}\,|p(t)|^{-1}\,|\,p_{k-1}(t)\,|\ dt < +\infty, \quad k = 1, \ldots, l \quad (\text{якщо } l \ge 1),$$

$$\int\limits_a^{+\infty} t^{\alpha}\,|p(t)|^{\frac{\alpha-n+k}{n-l}}\ |\,p_{k-1}(t)\,|\ dt < +\infty, \quad k = 1, \ldots, l, l+2, \ldots, n.$$

Тоді рівняння (1) *має* $n-l$ *лінійно незалежних розв'язків* u_j $(j=l+1,\ldots,n)$, *які допускають при* $t\to+\infty$ *асимптотичні зображення*

$$u_j^{(k-1)}(t) = |p(t)|^{-\frac{n+l+1-2k}{2(n-l)}} \exp\int_a^t \lambda_j(\tau)\,|p(\tau)|^{\frac{1}{n-l}}\,d\tau \times$$

$$\times\left[\lambda_{0j}^{k-1} + o\left(\left(t\,|p(t)|^{\frac{1}{n-l}}\right)^{-\alpha}\right)\right], \quad k=l_*,\ldots,n,\ j=l+1,\ldots,n,$$

де $l_*=\max\{1,l\}$, λ_{0j} $(j=l+1,\ldots,n)$ – *корені рівняння*

$$\lambda^{n-l}=\sigma, \qquad \sigma=\operatorname{sign}p(t),$$

а кожна λ_j *є коренем рівняння*

$$\prod_{j=l}^{n-1}\left(\lambda+\frac{2j+1-n-l}{2(n-l)}\sigma p'(t)\,|p(t)|^{-\frac{n-l+1}{n-l}}\right)=\sigma,$$

який прямує до λ_{0j} *при* $t\to+\infty$.

При $l=\alpha=0$ ця теорема співпадає з теоремою, яка була раніше одержана І. Т. Кігурадзе.

Центральним розділом дисертації є розділ III (§§ 9-11). У ньому розглядається істотно нелінійне диференціальне рівняння типу Емдена-Фаулера

$$y^{(n)}=\alpha_0\,p(t)\,|y|^{\sigma_0}|y'|^{\sigma_1}\ldots|y^{(n-1)}|^{\sigma_{n-1}}\operatorname{sign}y, \tag{10}$$

де $n\geq 2$, $\alpha_0\in\{-1,1\}$, $\sigma_0,\ldots,\sigma_{n-1}$ – дійсні числа, які задовольняють нерівність $\sigma_0+\sigma_1\cdots+\sigma_{n-1}\neq 1$, і $p\ :\ [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ $(-\infty<a<\omega\leq+\infty)$ – неперервна функція.

О з н а ч е н н я 2. Розв'язок y рівняння (10), визначений на деякому проміжку $[t_0,\omega[\subset[a,\omega[$, називається P_ω- розв'язком, якщо він задовольняє наступні три умови:

1) $y^{(n-1)}(t)\neq 0$ при $t\in[t_0,\omega[$;

2) для кожного $k\in\{0,\ldots,n-1\}$ або $\lim\limits_{t\uparrow\omega}y^{(k)}(t)=0$, або $\lim\limits_{t\uparrow\omega}y^{(k)}(t)=\pm\infty$;

3) існує скінченна або нескінченна границя

$$\lambda_{n-1}^0 = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{[y^{(n-1)}(t)]^2}{y^{(n)}(t)\, y^{(n-2)}(t)}.$$

Метою розділу є встановлення точних асимптотичних формул для усіх можливих типів P_ω- розв'язків рівняння (10) та їх похідних до порядку $n-1$ включно, а також умов існування P_ω- розв'язків з знайденими асимптотичними зображеннями.

Викладемо коротко суть розробленого методу дослідження асимптотичного поводження P_ω- розв'язків рівняння (10). Спочатку у § 10 досліджуються класи $P_\omega^n(\lambda_{n-1}^0)$ n раз неперервно диференційовних на проміжку $[t_0, \omega[$ функцій, які задовольняють нерівність $y^{(n)}(t) \neq 0$ при $t \in [t_0, \omega[$ і умови 2), 3) означення 2. Доводиться (леми 10.1 і 10.2), що для будь-якої функції $y \in P_\omega^n(\lambda_{n-1}^0)$ мають місце при $k = 1, \ldots, n-1$ граничні співвідношення

$$\lim_{t\uparrow\omega} \lambda_k(y)(t) = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(n-k)\,\lambda_{n-1}(y)(t) - (n-k-1)}{(n-k-1)\,\lambda_{n-1}(y)(t) - (n-k-2)}$$

і

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)\, y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\lambda_k(y)(t)}{\lambda_k(y)(t) - 1},$$

де

$$\lambda_k(y)(t) = \frac{[y^{(k)}(t)]^2}{y^{(k+1)}(t)\, y^{(k-1)}(t)}, \quad \pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty \\ t - \omega, & \text{якщо } \omega < +\infty \end{cases}$$

Ці граничні співвідношення використовуються для встановлення асимптотичних властивостей функцій $y \in P_\omega^n(\lambda_{n-1}^0)$. При цьому з'ясовується, що множина усіх класів $P_\omega^n(\lambda_{n-1}^0)$ за своїми асимптотичними властивостями розпадається на $n+1$ неперетинних підмножин, відповідних наступним значенням λ_{n-1}^0:

$$\lambda_{n-1}^0 = \pm\infty; \quad \lambda_{n-1}^0 = \tfrac{n-i-1}{n-i}, \quad i = 1, \ldots, n-1;$$

$$\lambda_{n-1}^0 \notin \left\{0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \ldots, \tfrac{n-2}{n-1}, \pm\infty\right\}.$$

Подамо два з одержаних тут тверджень, які відносяться до випадків, коли $\lambda_{n-1}^0 \notin \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, \pm\infty\right\}$ и $\lambda_{n-1}^0 = \pm\infty$.

Л е м а 10.3. *Якщо* $y \in P^n_\omega(\lambda^0_{n-1})$ *і* $\lambda^0_{n-1} \notin \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, \pm\infty\right\}$, *то при* $t \uparrow \omega$ *мають місце асимптотичні зображення*

$$y^{(k-1)}(t) \sim \frac{y^{(n-1)}(t)}{\prod\limits_{i=k}^{n-1} a_{0i}} \left(\frac{y^{(n-1)}(t)}{y^{(n)}(t)} \right)^{n-k}, \qquad k = 1, \ldots, n-1,$$

де

$$a_{0i} = (n-i)\,\lambda^0_{n-1} - (n-i-1), \qquad i = 1, \ldots, n-1.$$

Л е м а 10.4. *Якщо* $y \in P^n_\omega(\pm\infty)$, *то при* $t \uparrow \omega$ *мають місце асимптотичні зображення*

$$y^{(k-1)}(t) \sim \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-k}}{(n-k)!}\, y^{(n-1)}(t), \quad y^{(n)}(t) = o\left(\frac{y^{(n-1)}(t)}{\pi_\omega(t)} \right).$$
$$k = 1, \ldots, n-1$$

Для функцій $y \in P^n_\omega(\frac{n-i-1}{n-i})$, де $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, одержані леми 10.5 і 10.6 аналогічного типу, але тут, на відміну від лем 10.3 і 10.4, кожна $y^{(k)}(t)$ при $k \in \{i+1, \ldots, n\}$ виражається асимптотично через i-у похідну функції y, а при $k \in \{0, \ldots, i-2\}$ (якщо $i > 1$)- через її $i-1$-у похідну.

Далі (§ 11), враховуючи, що кожний P_ω-розв'язок y рівняння (10) належить до одного з $n+1$ вищеназваних класів $P^n_\omega(\lambda^0_{n-1})$, і використовуючи відповідну лему з § 10, рівняння (10) зводиться до асимптотично еквівалентного на розв'язках даного класу рівняння першого порядку відносно однієї з похідних y. З цього рівняння, з урахуванням застосованої леми, знаходиться асимптотика виділеного класу P_ω-розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно. При цьому встановлюються також і необхідні умови існування таких розв'язків. Питання про їх фактичне існування вирішується шляхом зведення до питання про існування зникаючих в нескінченності розв'язків у деякій системі квазілінійних диференціальних рівнянь, одержаній з (10) в результаті перетворення, яке визначається отриманими асимптотичними зображеннями. А це питання вже вирішується на основі теорем з § 2. Слід зазначити, що у випадках, коли $\lambda^0_{n-1} \in \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, \pm\infty \right\}$, вони застосовуються *лише* після попереднього доведення одержаної системи квазілінійних диференціальних рівнянь за допомогою додаткових перетворень до системи з майже трикутною лінійною частиною.

Внаслідок проведеного у §§ 10 і 11 дослідження були встановлені теореми 9.1–9.7, які сформульовані в § 9. Щоб навести ці теореми, введемо додаткові позначення:

$$\gamma_i = 1 - \sum_{k=i}^{n-1} \sigma_k, \qquad 0 \le i \le n,^1$$

$$\mu_i = n - i + \sum_{k=0}^{i-2} \sigma_k (i - k - 1) - \sum_{k=i+1}^{n-1} \sigma_k (k - i), \qquad 1 \le i \le n,$$

$$\rho_i = \left[\frac{1}{(n-i)!} \prod_{k=2}^{n-i-1} (k!)^{\sigma_{i+k}} \prod_{k=2}^{i-1} (k!)^{-\sigma_{i-k-1}} \right]^{\frac{1}{\gamma_0}}, \qquad 1 \le i \le n;$$

$$J_0(t) = \int_{A_0}^{t} p^{\frac{1}{\mu_n+1}}(\tau)\, d\tau, \qquad G_0(t) = \int_{B_0}^{t} |\, J_0(\tau) \,|^{\frac{\mu_n+1}{\gamma_0}}\, d\tau,$$

$$J_{-1}(t) = \int_{A_{-1}}^{t} p^{\frac{1}{\gamma_0}}(\tau)\, d\tau, \qquad G_{-1}(t) = \int_{B_{-1}}^{t} p^{\frac{2}{\gamma_0}}(\tau)\, J_{-1}^{-1}(\tau)\, d\tau,$$

$$J_n(t) = \int_{A_n}^{t} |\, \pi_\omega(\tau) \,|^{\mu_n} p(\tau)\, d\tau, \qquad G_n(t) = \int_{B_n}^{t} |\, J_n(\tau) \,|^{\frac{1}{\gamma_0}}\, d\tau,$$

$$J_i(t) = \int_{A_i}^{t} |\, \pi_\omega(\tau) \,|^{\frac{\mu_i}{\gamma_i}} p^{\frac{1}{\gamma_i}}(\tau)\, d\tau, \qquad 1 \le i \le n-1,$$

$$G_i(t) = \int_{B_i}^{t} |\, \pi_\omega(\tau) \,|^{\frac{\mu_i - (n-i)\gamma_i}{\gamma_i}} p^{\frac{1}{\gamma_i}}(\tau)\, |\, J_i(\tau) \,|^{\frac{\gamma_i - \gamma_0}{\gamma_0}}\, d\tau, \; 1 \le i \le n-1,$$

де кожна границя інтегрування A_i, $B_i \in \{\, a, b, \omega \,\}$ (b – будь-яке число

[1] Тут і у подальшому припускаємо, що $\sum_{i=k}^{m} c_i = 0$ і $\prod_{i=k}^{m} c_i = 1$ при $m < k$.

з проміжку $]a,\omega[$[1]) і вибрана таким чином, щоб відповідний їй інтеграл прямував або до 0, або до $+\infty$ при $t\uparrow\omega$.

Теорема 9.1. *Для існування у рівняння* (10) P_ω*-розв'язків таких, що* $\lambda^0_{n-1}=\pm\infty$, *необхідно і достатньо, щоб виконувались дві умови:*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p(t)\,|\,\pi_\omega(t)\,|^{1+\mu_n}}{J_n(t)}=0,\quad \alpha_0\,\gamma_0\,J_n(t)\,[\,\pi_\omega(t)\,]^{n-1}>0 \quad \text{при} \quad t\in]a,\omega[.$$

Крім того, кожний такий додатний P_ω*- розв'язок допускає при* $t\uparrow\omega$ *асимптотичні зображення*

$$y^{(j)}(t)\sim\frac{\alpha_0\,\rho_n}{(n-j-1)!}\cdot|\gamma_0\,J_n(t)|^{\frac{1}{\gamma_0}}\,[\,\pi_\omega(t)\,]^{n-j-1}\,\mathrm{sign}[\,\gamma_0\,J_n(t)\,],$$

$$j=0,1,\ldots,n-1.$$

Теорема 9.2. *Нехай* $\mu_n\neq-1$. *Тоді для існування у рівняння* (10) P_ω*- розв'язків таких, що* $\lambda^0_{n-1}\notin\left\{0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\ldots,\frac{n-2}{n-1},\pm\infty\right\}$, *необхідно, щоб виконувались умови*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{[\,G_0'(t)\,]^2}{G_0''(t)\,G_0(t)}=\lambda^0_{n-1},$$

$$\alpha_0\left[\frac{\gamma_0}{1+\mu_n}J_0(t)\right]^n\prod_{i=1}^{n-1}a_{0\,i}>0 \quad \text{при} \quad t\in]a,\omega[, \tag{11}$$

де

$$a_{0\,i}=(n-i)\lambda^0_{n-1}-(n-i-1),\qquad i=1,\ldots,n-1.$$

Крім того, кожний такий додатний P_ω*- розв'язок допускає при* $t\uparrow\omega$ *асимптотичні зображення*

$$y^{(j)}(t)\sim\frac{\nu_0\rho_0}{\prod\limits_{i=j+1}^{n-1}a_{0\,i}}\left|\frac{\gamma_0}{1+\mu_n}J_0(t)\right|^{\frac{1+\mu_n}{\gamma_0}}\left[\frac{\gamma_0 J_0(t)}{(1+\mu_n)p^{\frac{1}{1+\mu_n}}(t)}\right]^{n-j-1}$$

$$j=0,\ldots,n-1,$$

---

[1]Припускаємо, що $a>0$ при $\omega=+\infty$

де

$$\nu_0 = \alpha_0 \operatorname{sign}\left[\frac{\gamma_0}{1+\mu_n} J_0(t)\right], \qquad \rho_0 = \prod_{i=1}^{n-1} |a_{0i}|^{\frac{\gamma_0-\gamma_i}{\gamma_0}}.$$

Якщо ж поряд з* (11), *де* $\lambda_{n-1}^0 \notin \left\{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, \pm\infty\right\}$, *виконується одна з наступних умов:

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}\left|\frac{\sigma_k}{1-\sigma_{n-1}}\right| < 1;$

2) ***алгебраїчне рівняння***

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sigma_k \prod_{i=k+1}^{n-1} a_{0i} \prod_{i=1}^{k}(a_{0i}+\lambda) = (1+\lambda)\prod_{i=1}^{n-1}(a_{0i}+\lambda) \tag{12}$$

не має коренів з нульовою дійсною частиною, то у диференціального рівняння* (10) *існують вказаного типу* P_ω*- розв'язки.

Т е о р е м а 9. 3. ***Нехай*** $\mu_n = -1$. ***Тоді для існування у рівняння* (10) P_ω*- розв'язків таких, що* $\lambda_{n-1}^0 \notin \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, \pm\infty\right\}$, *необхідно, а якщо виконується одна з умов* 1) *або* 2) *теореми* 9.2, *то і достатньо, щоб***

$$\lim_{t\uparrow\omega} p^{-\frac{1}{\gamma_0}}(t)\, G_{-1}(t) = \lambda_{n-1}^0,$$

$$\alpha_0\left[\lambda_{n-1}^0 J_{-1}(t)\right]^n \prod_{i=1}^{n-1} a_{0i} > 0 \quad \textit{при} \quad t\in]a,\omega[,$$

де a_{0i} $(i=1,\ldots,n-1)$ *– ті ж самі, що і в* (11). ***Крім того, кожний такий додатний* P_ω*- розв'язок допускає при* $t\uparrow\omega$ *асимптотичні зображення***

$$y^{(j)}(t) = \frac{\nu_{-1}\rho_0}{\prod_{i=j+1}^{n-1} a_{0i}}\cdot p^{\frac{1}{\gamma_0}}(t)\left[\frac{\lambda_{n-1}^0 J_{-1}(t)}{p^{\frac{1}{\gamma_0}}(t)}\right]^{n-j-1}[1+o(1)],$$

$$j = 0,\ldots,n-1,$$

де

$$\nu_{-1} = \alpha_0 \operatorname{sign}\left[\lambda_{n-1}^0 J_{-1}(t)\right], \qquad \rho_0 = \prod_{i=1}^{n-1}|a_{0i}|^{\frac{\gamma_0-\gamma_i}{\gamma_0}}.$$

Наступна теорема в деякій мірі доповнює дві попередні.

Т е о р е м а 9. 4. *Для існування у рівняння* (10) P_ω*- розв'язків таких, що* $\lambda_{n-1}^0 \notin \left\{ 0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1, \pm\infty \right\}$, *необхідно, а якщо виконується одна з умов* 1) *або* 2) *теореми* 9.2, *то і достатньо, щоб*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{[G_n'(t)]^2}{G_n''(t)\, G_n(t)} = \lambda_{n-1}^0,$$

$$\alpha_0 \gamma_0 \left[(\lambda_{n-1}^0 - 1)\, \pi_\omega(t) \right]^{n-1} J_n(t) \prod_{i=1}^{n-1} a_{0\,i} > 0 \quad \text{при} \quad t \in]a, \omega[.$$

Крім того, кожний такий додатний P_ω*- розв'язок допускає при* $t \uparrow \omega$ *асимптотичні зображення*

$$y^{(j)}(t) \sim \frac{\alpha_0 \rho_0 \operatorname{sign}[\gamma_0 J_n(t)]}{\prod\limits_{i=j+1}^{n-1} a_{0\,i}} \left| \gamma_0 \,|\, \lambda_{n-1}^0 - 1 \,|^{\mu_n} J_n(t) \right|^{\frac{1}{\gamma_0}} \times$$

$$\times \quad [(\lambda_{n-1}^0 - 1)\pi_\omega(t)]^{n-j-1}, \qquad j = 1, \ldots, n-1.$$

У випадках, коли алгебраїчне рівняння (12) має корені з нульовою дійсною частиною, питання про існування у диференціального рівняння (10) розв'язків із вказаними у теоремах 9.2–9.4 асимптотичними зображеннями досліджено при деяких додаткових умовах на коефіцієнт p.

Т е о р е м а 9. 5. *Нехай* $\gamma_i \neq 0$ *при деякому* $i \in \{1, \ldots, n-2\}$. *Тоді для існування у рівняння* (10) P_ω*- розв'язків таких, що* $\lambda_{n-1}^0 = \dfrac{n-i-1}{n-i}$, *необхідно, щоб виконувались умови*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)\, G_i'(t)}{G_i(t)} = i - n, \tag{13_i}$$

$$\alpha_0 \gamma_0 \gamma_i (-1)^{n-i} [\pi_\omega(t)]^{n-1} J_i(t) > 0 \qquad \text{при} \quad t \in]a, \omega[.$$

Крім того, кожний такий додатний P_ω*- розв'язок допускає при* $t \uparrow \omega$ *асимптотичні зображення*

$$y^{(j)}(t) = \frac{\rho_i \nu_i}{(i-j-1)!} \left| \frac{\gamma_0}{\gamma_i} J_i(t) \right|^{\frac{\gamma_i}{\gamma_0}} [\pi_\omega(t)]^{i-j-1}[1+o(1)],$$
$$j = 0, \ldots, i-1,$$

$$(14_i)$$

$$y^{(j)}(t) \sim (-1)^{j-i} \frac{\gamma_i \rho_i \nu_i (j-i)!}{\gamma_0} \cdot \frac{J_i'(t)}{J_i(t)} \left| \frac{\gamma_0}{\gamma_i} J_i(t) \right|^{\frac{\gamma_i}{\gamma_0}} [\pi_\omega(t)]^{i-j},$$
$$j = i, \ldots, n-1,$$

де

$$\nu_i = \operatorname{sign}[\pi_\omega(t)]^{i-1}.$$

Якщо ж поряд із** (13_i) **виконується одна з наступних двох умов:

1) $\displaystyle\sum_{k=i}^{n-2} \left| \frac{\sigma_k}{\sigma_{n-1} - 1} \right| < 1;$

2) ***алгебраїчне рівняння***

$$\sum_{k=i+1}^{n-1} \sigma_k \prod_{m=k+1}^{n} (m-i) \prod_{j=1}^{k} (j-i+\lambda) + \sigma_i (n-i)! = (n-i+\lambda) \prod_{j=i+1}^{n-1} (j-i+\lambda)$$

не має коренів з нульовою дійсною частиною, то у диференціального рівняння** (10) **існують вказаного типу** P_ω**- розв'язки.

Т е о р е м а 9. 6. ***Нехай** $\gamma_{n-1} \neq 0$. **Тоді для існування у рівняння** (10) P_ω**- розв'язків, для яких** $\lambda_{n-1}^0 = 0$ **і існує скінченна або нескінченна границя** $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$, **необхідно і достатньо, щоб виконувались умови** (13_{n-1}). **Більш того, для кожного такого додатного** P_ω**- розв'язку мають місце при** $t \uparrow \omega$ **асимптотичні зображення** (14_{n-1}).*

Іншого типу результат містить наступна теорема. В ній подані умови, які забезпечують асимптотичну еквівалентність між правильними неколивними розв'язками рівняння (10) і рівняння

$$z^{(n)} = \alpha_0 q(t) \, |z|^{\sigma_0} |z'|^{\sigma_1} \ldots |z^{(n-1)}|^{\sigma_{n-1}} \operatorname{sign} z, \tag{15}$$

де функція $q : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ неперервна і така, що

$$q(t) \sim p(t) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{16}$$

Т е о р е м а 9. 7. *Якщо поряд з* (16) *виконуються умови* $\sigma_{n-1} \neq 1$ *і* $\sum\limits_{k=0}^{n-2} \left| \frac{\sigma_k}{\sigma_{n-1}-1} \right| < 1$, *то для кожного розв'язку z рівняння* (15), $n-1$ *похідна якого відмінна від нуля у деякому лівому околі* ω, *існує такий розв'язок у рівняння* (10), *що при* $t \uparrow \omega$ *мають місце асимптотичні зображення*

$$y^{(k)}(t) = z^{(k)}(t)\,[1 + o(1)], \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$

Одержані у розділі III теореми дозволяють, у зв'язку з довільністю $\omega \leq +\infty$, описати асимптотику не тільки правильних, а й різних типів сингулярних неколивних розв'язків рівняння (10).

У четвертому розділі (§§ 12–17) більш детально досліджується диференціальне рівняння типу Емдена-Фаулера другого порядку

$$y'' = \alpha_0\, p(t)\, |\, y\,|^{\sigma}\, |\, y'\,|^{\lambda} \operatorname{sign} y, \tag{17}$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $\sigma, \lambda \in \mathbf{R}$ і $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \leq +\infty)$ – неперервна функція.

Для цього рівняння спочатку, в доповнення до теорем розділу III, встановлюються (§ 13) необхідні і достатні умови існування розв'язків із степеневою асимптотикою $y(t) \sim c_i\,[\,\pi_\omega(t)\,]^{i-1}$ $(\,i \in \{1, 2\}\,)$ при $t \uparrow \omega$, де c_i $(\,i = 1, 2\,)$ – відмінні від нуля сталі.

Далі, розглядаються окремо випадки, коли

$$(\sigma + \lambda - 1)(\lambda - 1) \neq 0 \quad \text{і} \quad \sigma + \lambda = 1.$$

У випадку $(\sigma + \lambda - 1)(\lambda - 1) \neq 0$, на основі результатів третього розділу, виділено (§ 12) наступні три умови:

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{G_0''(t)\, G_0(t)}{[G_0'(t)]^2} = L_0, \qquad \text{якщо} \qquad \sigma \neq -1,$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p^{\frac{1}{2-\lambda}}(t)}{G_{-1}(t)} = L_0, \qquad \text{якщо} \qquad \sigma = -1; \tag{18_1}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)\, G_1'(t)}{G_1(t)} = -1; \tag{18_2}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)\, J_2'(t)}{J_2(t)} = 1 - \sigma - \lambda, \tag{18_3}$$

де $0 < |L_0| < +\infty$,

$$G_0(t) = \int_{B_0}^{t} |J_0(\tau)|^{\frac{1+\sigma}{1-\sigma-\lambda}}\, d\tau, \qquad J_o(t) = \int_{A_0}^{t} p^{\frac{1}{1+\sigma}}(\tau)\, d\tau,$$

$$G_{-1}(t) = \int_{B_{-1}}^{t} \frac{p^{\frac{2}{2-\lambda}}(\tau)}{J_{-1}(\tau)}\, d\tau, \quad J_{-1}(t) = \int_{A_{-1}}^{t} p^{\frac{1}{2-\lambda}}(\tau)\, d\tau,$$

$$G_1(t) = \int_{B_1}^{t} |\pi_\omega(\tau)|^{\frac{\lambda}{1-\lambda}}\, p^{\frac{1}{1-\lambda}}(\tau)\, |J_1(\tau)|^{\frac{\sigma}{1-\sigma-\lambda}}\, d\tau,$$

$$J_1(t) = \int_{A_1}^{t} |\pi_\omega(\tau)|^{\frac{1}{1-\lambda}}\, p^{\frac{1}{1-\lambda}}(\tau)\, d\tau, \qquad J_2(t) = \int_{A_2}^{t} |\pi_\omega(\tau)|^{1-\lambda}\, p(\tau)\, d\tau,$$

$A_i \in \{a, \omega\}$, $i = -1, 0, 1, 2$, $B_i \in \{b, \omega\}$, $i = -1, 0, 1$ (b – будь-яке число з проміжку $]a, \omega[$[1]) і обрані подібно тому, як у допоміжних функціях з розділу III.

Ці три умови у деякому розумінні доповнюють одна одну. А саме, якщо $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ – неперервно диференційовна функція й існує скінченна або нескінченна границя $\lim\limits_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)\, p'(t)}{p(t)}$, то при $L_0 = \pm\infty$ умова (18_1) рівносильна умові (18_2) (тобто одна випливає з іншої і навпаки), а при $L_0 = 0$ – рівносильна умові (18_3).

У §§15 і 16 при виконанні кожної з умов (18_i), $i \in \{1, 2, 3\}$ досліджено асимптотичне поводження усіх (а не тільки P_ω) правильних неколивних розв'язків рівняння (17). Особливо важливим є те, що одержані результати дали змогу, на відміну від попередніх досліджень рівняння (17), не тільки зняти додаткові обмеження на гладкість коефіцієнта p, але і охопити не досліджені особливі випадки. Треба однак зазначити, що при цьому поряд з теоремами розділу III використовувалися методи, які розроблені були раніше для рівнянь типу Емдена–Фаулера у роботах І.Т. Кігурадзе, Т.А. Чантурія, О.В. Костіна й автора.

---

[1] Припускаємо, що $a > 0$ при $\omega = +\infty$.

Подамо три із одержаних тут теорем.

Т е о р е м а 16. 1 *Нехай виконується умова* (18_1), *де* $0 < |L_0| < +\infty$. *Тоді:*

1) *якщо* $\alpha_0 L_0 < 0$, *то кожний правильний неколивний розв'язок рівняння* (17) *задовольняє одне з двох асимптотичних співвідношень:*

$$y(t) = c_0 + o(1) \qquad при \qquad t \uparrow \omega; \tag{19}$$

$$y(t) = \pi_\omega(t)\,[c_1 + o(1)] \qquad при \qquad t \uparrow \omega; \tag{20}$$

де c_0, c_1 – *відмінні від нуля сталі;*

2) *якщо* $\alpha_0 L_0 > 0$ *і* $\alpha_0(\sigma + \lambda - 1) > 0$, *то кожний правильний неколивний розв'язок рівняння* (17) *або допускає одне з асимптотичних зображень* (19), (20), *або одне з зображень виду*

$$y(t) \sim \pm |L_0|^{\frac{1-\lambda}{1-\sigma-\lambda}} p^{-\frac{1}{\sigma+1}}(t) \left| \frac{1-\sigma-\lambda}{1+\sigma} J_0(t) \right|^{\frac{2-\lambda}{1-\sigma-\lambda}} \quad при \quad t \uparrow \omega \quad у \;\; випадку \quad \sigma \neq -1, \tag{21}$$

$$y(t) \sim \pm |L_0|^{\frac{1}{\lambda-2}} |J_{-1}(t)| \quad при \quad t \uparrow \omega \quad у \;\; випадку \quad \sigma = -1; \tag{22}$$

3) *якщо* $\alpha_0 L_0 > 0$ *і* $\alpha_0(\sigma + \lambda - 1) < 0$, *то для кожного правильного неколивного розв'язку у рівняння* (17) *або має місце одне із зображень* (19) – (22), *або існує послідовність* $\{t_k\}$ ($t_k \in]a, \omega[$, $k = 1, 2, \dots$), *яка збігається до* ω *і така, що при* $k \to +\infty$

$$y(t_k) \sim \pm |L_0|^{\frac{1-\lambda}{1-\sigma-\lambda}} p^{-\frac{1}{\sigma+1}}(t_k) \left| \frac{1-\sigma-\lambda}{1+\sigma} J_0(t_k) \right|^{\frac{2-\lambda}{1-\sigma-\lambda}} \quad у \;\; випадку \quad \sigma \neq -1,$$

$$y(t_k) \sim \pm |L_0|^{\frac{1}{\lambda-2}} |J_{-1}(t_k)| \quad у \;\; випадку \quad \sigma = -1.$$

Т е о р е м а 16. 2. *Нехай виконується умова* (18_2). *Тоді:*

1) *якщо* $\alpha_0(1-\lambda)(1-\sigma-\lambda)\,\pi_\omega(t)\,J_1(t) > 0$ *при* $t \in]a, \omega[$, *то кожний правильний неколивний розв'язок рівняння* (17) *задовольняє одне з асимптотичних співвідношень* (19), (20);

2) ***якщо*** $\alpha_0\,(1-\lambda)(1-\sigma-\lambda)\,\pi_\omega(t)\,J_1(t)\;<\;0$ ***при*** $t\in]a,\omega[$ ***і*** $\alpha_0\,(\sigma+\lambda-1)>0$, ***то кожний правильний неколивний розв'язок рівняння*** (17) ***або допускає одне з асимптотичних зображень*** (19), (20), ***або одне із зображень виду***

$$y(t)=\pm\left|\frac{1-\sigma-\lambda}{1-\lambda}\,J_1(t)\right|^{\frac{1-\lambda}{1-\sigma-\lambda}}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega; \tag{23}$$

3) ***якщо*** $\alpha_0\,(1-\lambda)(1-\sigma-\lambda)\,\pi_\omega(t)\,J_1(t)\;<\;0$ ***при*** $t\in]a,\omega[$ ***і*** $\alpha_0\,(\sigma+\lambda-1)<0$, ***то для кожного правильного неколивного розв'язку рівняння*** (17) ***або має місце одне із зображень виду*** (19), (20), (23), ***або існує послідовність*** $\{\,t_k\,\}$ $(t_k\in]a,\omega[, k=1,2,\ldots)$, ***яка збігається до*** ω, ***і така, що***

$$y(t_k)\sim\pm\left|\frac{1-\sigma-\lambda}{1-\lambda}\,J_1(t_k)\right|^{\frac{1-\lambda}{1-\sigma-\lambda}} \quad \text{при} \quad k\to+\infty.$$

Т е о р е м а 16. 3 ***Нехай виконується умова*** (18_3). ***Тоді:***

1) ***якщо*** $\alpha_0\,(\sigma+\lambda-1)>0$ ***або*** $\alpha_0\,(\sigma+\lambda-1)<0$ ***і у деякому лівому околі*** ω

$$\frac{\pi_\omega(t)\,J_2'(t)}{J_2(t)}\le 1-\sigma-\lambda,$$

то кожний правильний неколивний розв'язок рівняння (17) ***або допускає одне з асимптотичних зображень*** (19), (20), ***або одне із зображень виду***

$$y(t)\sim\pm\,\pi_\omega(t)\left|(1-\sigma-\lambda)\int\limits_{A_3}^{t}|\pi_\omega(\tau)|^{\sigma}p(\tau)\,d\tau\right|^{\frac{1}{1-\sigma-\lambda}} \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega, \tag{24}$$

де $A_3\in\{a;\omega\}$ ***і визначається так само, як*** A_1 ***і*** A_2;

2) ***якщо*** $\alpha_0\,(\sigma+\lambda-1)<0$ ***і для будь-якого*** $\tau\in[a,\omega[$

$$\sup\left\{\frac{\pi_\omega(t)\,J_2'(t)}{J_2(t)}\;:\;\tau\le t<\omega\right\}>1-\sigma-\lambda,$$

то для кожного правильного неколивного розв'язку рівняння (17) ***або має місце одне з асимптотичних зображень*** (19), (20), (24), ***або існує послідовність*** $\{\,t_k\,\}$ $(t_k\in]a,\omega[,\;k=1,2,\ldots)$, ***яка збігається-***

ся до ω, і така, що при $k \to +\infty$

$$y(t_k) \sim \pm \pi_\omega(t_k) \left| \pi_\omega(t_k) J_2'(t_k) - (1-\sigma-\lambda) J_2(t_k) \right|^{\frac{1}{1-\sigma-\lambda}}.$$

При $\sigma + \lambda = 1$ рівняння (16) набуває вигляду

$$y'' = \alpha_0 p(t) \, | y |^{1-\lambda} | y' |^{\lambda} \operatorname{sign} y \tag{25}$$

і носить назву напівлінійного диференціального рівняння другого порядку. Асимптотика усіх правильних неколивних розв'язків цього рівняння досліджена (§§14, 17) при $\lambda \neq 1, 2$[1] у припущенні, що коефіцієнт p допускає зображення виду

$$p(t) = q(t) \left[1 + r(t) \right],$$

де $q : [a, \omega[\to]0, +\infty[$– неперервно диференційовна і $r : [a, \omega[\to \mathbf{R}$– неперервна функції, такі що:

$$\lim_{t \uparrow \omega} q'(t) \, q^{\frac{\lambda-3}{2-\lambda}}(t) = l_0 \quad (-\infty \leq l_0 \leq +\infty), \qquad \lim_{t \uparrow \omega} r(t) = 0,$$

$$\int_a^\omega q^{\frac{1}{2-\lambda}}(t) \, dt = +\infty.$$

При виконанні цих умов має місце наступна

Т е о р е м а 17. 1. *Кожний неколивний розв'язок $y : [t_0, \omega[\longrightarrow \mathbf{R}$ рівняння* (25) *допускає одне з чотирьох асимптотичних зображень:*

$$y(t) = c \exp \int_{t_0}^{t} \left[c_0 + v_0(s) \right] ds, \quad y(t) = c \exp \int_{t_0}^{t} \frac{1 + v_1(s)}{\pi_\omega(s)} ds, \tag{26}$$

$$y(t) = c \exp \left[\nu_0 \int_{t_0}^{t} \left| (1-\lambda) \left[1 + v_2(s) \right]^{1-\lambda} Q(s) \right|^{\frac{1}{1-\lambda}} ds \right], \tag{27}$$

$$y(t) = c \exp \int_{t_0}^{t} q^{\frac{1}{2-\lambda}}(s) \left[\mu + v_3(s) \right] ds, \tag{28}$$

---

[1]При $\lambda = 1, 2$ рівняння (17) інтегрується у квадратурах.

де

$$Q(t) = \int_{\nu}^{t} q(s)\,ds, \quad \nu = \begin{cases} a, & \text{якщо} \quad \int\limits_a^{\omega} q(t)\,dt = +\infty \\ \omega, & \text{якщо} \quad \int\limits_a^{\omega} q(t)\,dt < +\infty \end{cases};$$

c, c_0, μ *– відмінні від нуля сталі;* $\nu_0 = \alpha_0 \operatorname{sign}[(1-\lambda)\,Q(t)]$, *а* $v_i : [t_0, \omega[\longrightarrow \mathbf{R}$ $(i = 0,1,2,3)$ *– неперервні функції, які прямують до нуля при* $t \uparrow \omega$.

Крім того, у §§14–17 одержані необхідні і достатні умови існування розв'зків кожного з поданих у теоремах 16.1–16.3, 17.1 типів, асимптотичні зображення для похідних цих розв'зків, а також уточнення асимптотичних формул для розв'зків виду (19), (20), (26)–(28) (теореми 16.4–16.9, 17.3–17.9).

Розділ V (§§ 18–20) містить результати, одержані автором разом з аспірантами і співробітниками кафедри теплофізики Одеського університету. Тут розглядаються:

1) система нелінійних диференціальних рівнянь типу Емдена-Фаулера

$$u_i' = \alpha_i\, p_i(t)\, |\, u_{3-i}\,|^{\lambda_i} \operatorname{sign} u_{3-i}, \quad i = 1, 2,$$

де $\alpha_i \in \{-1, 1\}$, $\lambda_i \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ і $p_i : [a, b[\longrightarrow]0, +\infty[$ $(i = 1, 2)$ – неперервні функції;

2) напівлінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, p_i(t)\, |\, y\,|^{1-\lambda_i} |\, y'\,|^{\lambda_i} \operatorname{sign} y,$$

де $\alpha_i \in \{-1, 1\}$ $\lambda_i \in \mathbf{R} \setminus \{1, 2\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, $p_i : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ $(i = 1, \ldots, n)$ – неперервні функції;

3) диференціальне рівняння другого порядку із степенево-експоненційною нелінійністю

$$y'' = \alpha_0\, p(t)\, e^{\sigma y} |\, y'\,|^{\lambda},$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $\sigma, \lambda \in \mathbf{R}$ і $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ – неперервна функція;

4) нелінійні диференціальні рівняння другого порядку

$$y'' = |\, t\,|^{\sigma} p(y) \qquad \text{і} \qquad y'' = e^{\sigma t} p(y),$$

де $\sigma \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ і $p :]a, b[\longrightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\}$ – неперервна функція, відмінна від степеневої;

5) нелінійні диференціальні рівняння типу Пуассона

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right)=A\,e^{\nu\varphi}+B\,e^{-\nu\varphi} \quad \text{і} \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{d\varphi}{dr}\right)=A\,e^{\nu\varphi}+B\,e^{-\nu\varphi},$$

де $A, B, \nu \in \mathbb{R}$, $\nu > 0$ і $A^2 + B^2 \neq 0$, які виникають при дослідженні розподілу електростатичного потенціалу в ізотермічній плазмі навколо тіл відповідно зі сферичною та циліндричною симетрією, дослідження яких створило передумови для поширення методики розділу III на істотно нелінійні рівняння $n-$ го порядку більш загального вигляду, ніж (10).

У спільних роботах з аспірантами [4, 14–17, 21, 24, 25, 27] автору дисертації належить постановка задач, розробка методів дослідження та обговорення теоретичних результатів, а співавторам – встановлення конкретних теорем з використанням цих методик. В [28] автором одержані усі результати про асимптотичне поводження розв'язків першого з рівнянь Пуассона, а співавторам належить постановка фізичної задачі і опис на основі цих результатів фізичних явищ у сферично – симетричній плазмі продуктів згорання.

ВИСНОВКИ

1. В роботі одержані нові результати про асимптотичне поводження розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь, головна матриця коефіцієнтів якої має структуру квазіжорданової нормальної форми, а також побудовані перетворення, які зводять до такого вигляду деякі класи систем з майже сталими коефіцієнтами. На основі цих результатів поширена на більш загальні випадки розроблена І.Т. Кігурадзе теорія асимптотичного інтегрування лінійних неавтономних диференціальних рівнянь $n-$ го порядку.

2. Розроблено та обґрунтовано методику встановлення точних асимптотичних формул для $P_\omega-$ розв'язків узагальнених рівнянь типу Емдена–Фаулера n-го порядку. Доведено, що по своїх асимптотичних властивостях множина усіх $P_\omega-$ розв'язків розпадається на $n+1$ неперетинних класів. Для $P_\omega-$ розв'язків кожного з цих класів одержані асимптотичні зображення, а також необхідні і достатні умови їх існування. Крім того, одержані умови асимптотичної еквівалентності двох рівнянь типу Емдена–Фаулера $n-$ го порядку.

3. З використанням вказаних вище результатів виділено три умови, що в деякому розумінні доповнюють одна одну, при виконанні кожної з яких досліджено асимптотичне поводження усіх (а не тільки P_ω) правильних та сингулярних неколивних розв'язків істотно нелінійного рівняння типу Емдена–Фаулера другого порядку. При цьому на відміну від попередніх досліджень знято додаткові умови на гладкість коефіцієнта рівняння і зменшено кількість особливих випадків.

4. Методики дослідження асимптотичного поводження розв'язків узагальнених рівнянь типу Емдена-Фаулера, які були розроблені І.Т. Кігурадзе, О.В. Костіним і автором роботи, поширено у дисертації на напівлінійні диференціальні рівняння, на рівняння з степенево–експоненційною нелінійністю та на деякі інші класи істотно нелінійних диференціальних рівнянь. Зокрема, досконало досліджені нелінійні диференціальні рівняння, які виникають при вивченні розподілу електростатичного потенціалу в сферично–симетричній і циліндрично–симетричній плазмі.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ АВТОРОМ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Е в т у х о в В. М. Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Сообщ. АН ГССР. – 1982. – 106, N 3. – С. 473–476.

2. Е в т у х о в В. М. Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений второго порядка // Math. Nachr. – 1984. – 115. – S. 215–236.

3. Е в т у х о в В. М. Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с почти постоянными коэффициентами // Сообщ. АН ГССР. – 1989. – 136, N 3. – С. 541–544.

4. Е в т у х о в В. М., Д р и к Н. Г. Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Сообщ. АН ГССР. – 1989. - 133, N 1. – С. 29–32.

5. Евтухов В. М. Асимптотика решений одного полулинейного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения.– 1990. – 26, N 5. – С. 776–787.

6. Евтухов В. М. Об асимптотическом представлении решений линейных дифференциальных уравнений n-го порядка // Сообщ. АН ГССР. – 1990. – 137, N 1. – С. 45–48.

7. Евтухов В. М. Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений в случае квазижордановой нормальной формы главной матрицы коэффициентов // Докл. АН СССР.– 1990. – 314, N 2. – С. 279–283.

8. Евтухов В. М. Об асимптотике правильных решений нелинейных дифференциальных уравнений типа Емдена-Фаулера // Дифференц. уравнения. – 1991. – 27, N 11. – С. 2007–2008.

9. Евтухов В. М. Об одном классе монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения n-го порядка типа Эмдена-Фаулера // Сообщ. АН Грузии. – 1992. – 145, N 2.– С. 269–273.

10. Евтухов В. М. Об асимптотике монотонных решений дифференциальных уравнений типа Эмдена-Фаулера // Дифференц. уравнения. – 1992. – 28, N 6. – С. 1076–1078.

11. Евтухов В. М. Асимптотические представления монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена- Фаулера n-го порядка // Докл. АН России. – 1992. – 324, N 2. – С. 258–260.

12. Евтухов В. М. Об условиях колеблемости и неколеблемости решений одного полулинейного дифференциального уравнения второго порядка // Укр. мат. журн. – 1994. – 46, N 7. – С. 833–841.

13. Евтухов В. М. К вопросу об асимптотике решений линейных дифференциальных уравнений n-го порядка // Дифференц. уравнения. – 1995. – 31, N 9. – С. 1595–1596.

14. Евтухов В. М., Васильева Н. С. Асимптотические представления правильных решений одного полулинейного дифференциального уравнения второго порядка // Сообщ. АН Грузии. – 1995. – 152, N 2. – С. 228–234.

15. Евтухов В. М., Васильева Н. С. Асимптотические представления правильных решений одного полулинейного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1995. – 31, N 9. – С. 1591–1592.

16. Evtukhov V. M., Drik N. G. Asymptotic behavior of solutions of a second order nonlinear differential equation// Georgian Math. J. – 1996. – 3, N 2. – P. 101 – 120.

17. Евтухов В. М., Шебанина Е. В. К вопросу об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений n- го порядка // Дифференц. уравнения. – 1997. – 33, N 6. – С. 858.

18. Евтухов В. М. Асимптотические свойства монотонных решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка // Докл. расшир. заседаний семинара Ин-та прикл. математики им. И.Н. Векуа ТГУ. – 1988. – 3, N 3. – С. 62–65.

19. Евтухов В. М. К вопросу об асимптотическом интегрировании линейных дифференциальных уравнений // Докл. расшир. заседаний семинара Ин-та прикл. математики им. И.Н. Векуа ТГУ. – 1990. – 5, N 3. – С. 72–74.

20. Евтухов В. М. К вопросу об асимптотике монотонных решений одного дифференциального уравнения типа Эмдена-Фаулера // Reports of enlarged session of the seminar of I.N. Vekua inst. of appl. math.– 1992. – 7, N 3. – P. 36–38.

21. Евтухов В. М., Дрик Н. Г. Асимптотические представления решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка // Reports of enlarged session of the seminar of I.N. Vekua inst. of appl. math. – 1992. – 7, N 3. – P. 39–42.

22. Евтухов В. М. Об асимптотике правильных неколеблющихся решений нелинейных дифференциальных уравнений n - го порядка // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения: Сб. науч. тр. – Киев, 1996.– С. 108 - 110.

23. Е в т у х о в В. М. Об одном классе решений нелинейных дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера высших порядков // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения: Сб. науч. тр. – Киев, 1994.– С. 74.

24. Е в т у х о в В. М., В а у л и н Е. В. Об асимптоттическом представлении решений линейных дифференциальных уравнений n- го порядка // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения: Сб. науч. тр. – Киев, 1996.– С. 110 – 112.

25. Е в т у х о в В. М., Е м е л ь я н о в а В. Е. Об одном полулинейном дифференциальном уравнении n- го порядка // Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики и их приложения: Сб. научн. тр. – Киев, 1997. – С. 85–87.

26. Е в т у х о в В. М. О линейных диффереципальных уравнениях, асимптотически эквивалентных двучленным // Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики: Сб. науч. тр. – Киев, 1997.– С. 109–111.

27. Е в т у х о в В. М., Ш и н к а р е н к о В. Н. К вопросу об асимптотике правильных решений одного нелинейного дифференциального уравнения n- го порядка // Математика и психология в педагогической системе " Технический университет": Сб. ст. 1-й междунар. науч. - практ. конф. – Одесса, 1996. – Ч. 1. – С. 37–39.

28. В и ш н я к о в В. И., Д р а г а н Г. С., Е в т у х о в В. М., М а р г а щ у к С. В. Распределение электростатического потенциала в сферически симметричной плазме. Москва, 1986.– 17 с.– Деп. в ВИНИТИ 13.12.86 г., N 8791-В86.– Напечатана в соответствии с решением редколлегии журнала "Теплофизика высоких температур" АН СССР от 13.11.86.

Анот. в ж. Теплофизика высоких температур. – 1987. – 25, N 3. – С. 620.

Євтухов В.М. Асимптотичні зображення розв'язків неавтономних звичайних диференціальних рівнянь. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння.– Інститут математики НАН України, Київ, 1998.

Дисертацію присвячено встановленню точних асимптотичних формул для розв'язків неавтономних звичайних диференціальних рівнянь. У роботі запропоновано конструктивний підхід, який дав змогу поширити на більш загальні випадки розроблену І.Т. Кігурадзе теорію асимптотичного інтегрування лінійних неавтономних диференціальних рівнянь n– го порядку. Розроблено метод встановлення точних асимптотичних формул для усіх, так званих P_ω– розв'язків узагальненого рівняння типу Емдена–Фаулера n– го порядку. Доведено, що множина усіх P_ω– розв'язків цього рівняння розпадається на $n+1$ неперетинних класів з різними асимптотичними зображеннями. З використанням здобутих теорем встановлені нові результати про асимптотичне поводження усіх (а не тільки P_ω) правильних і сингулярних неколивних розв'язків узагальненого рівняння типу Емдена–Фаулера другого порядку. Методики дослідження рівнянь типу Емдена–Фаулера поширено на рівняння з нелінійностями деяких інших типів, зокрема, на рівняння типу Пуассона із теорії ізотермічної плазми.

Ключові слова: лінійні диференціальні рівняння, рівняння типу Емдена–Фаулера, асимптотичні зображення розв'язків.

Евтухов В.М. Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений.– Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02– дифференциальные уравнения.– Институт математики НАН Украины, Киев, 1998.

Диссертация посвящена установлению точных асимптотических формул для решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе предложен конструктивный подход, позволяющий распространить на более общие случаи разработаную И.Т. Кигурадзе теорию асимптотического интегрирования линейных неавтономных дифференциальных уравнений n– го порядка. Разработан метод установления точных асимптотических формул для всех, так называемых, P_ω– решений обобщенного уравнения типа Эмдена–Фаулера n– го порядка. Доказано, что множество всех P_ω–

решений этого уравнения распадается на $n+1$ непересекающихся классов с разными асимптотическими представлениями. С использованием полученных теорем установлены новые результаты об асимптотике всех (а не только P_ω) правильных и сингулярных неколеблющихся решений обобщенного уравнения типа Эмдена – Фаулера второго порядка. Методики исследования уравнений типа Эмдена–Фаулера распространены также и на уравнения с нелинейностями некоторых других типов, в частности, на уравнения типа Пуассона из теории изотермической плазмы.

Ключевые слова: линейные дифференциальные уравнения, уравнения типа Эмдена–Фаулера, асимптотические представления решений.

Evtukhov V.M. Asymptotic representation of solutions of nonautonomous ordinary differential equations.– Manuscript.

Thesis for a degree of doctor of science in physics and mathematics, speciality 01.01.02 – defferential equations. Institute of Mathematics, NAS of Ukraine, Kiev, 1998.

The thesis is devoted to founding out of the exact asymptotic formulas for solutions of the nonautonomous ordinary differential equations. This paper offers the constructive approach, permitting to spread the theory of asymptotic integration of linear nonautonomous differential equations of the order n-th (worked out by I.T. Kiguradze) for more common cases. The method of the exact asymptotic formulas for all, so–called, P_ω– solutions of the generalized equation of a type Emden–Fowler n-th of the order is developed. It is proved, that the set of all P_ω– solutions of this equation breaks up into $n+1$ of not intersected classes with different asymptotic representations. With the use of the obtained theorems the new outcomes about the asymptotic of all (and not just P_ω) right and singular not varying solutions of the generalized equation of a type Emden–Fowler of the second order are established. The techniques of a research of the equations of a type Emden–Fowler are spread on the equations with nonlinearities of some other types, in particular, on the equations such as the Poisson one from the theory of isotermal plasma.

Key words: linear differential equations, equation of a type Emden–Fowler, asymptotic representations of solutions.

Підп. до друку 22.11.97 Формат 60 x 84/16. Папір офсетн.
Умовн. друк. арк. 2.09. Умовно вид. арк. 1.8
Тираж 100 прим. Зам. N 199. Безкоштовно

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3

решений этого уравнения распадается на $n+1$ непересекающихся классов с различным асимптотическим представлением. С использованием полученных теорем установлены новые результаты об асимптотике всех (а не только P_ω) правильных и сингулярных монотонных решений обобщенного уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка. Методики исследования уравнений типа Эмдена–Фаулера распространены также и на уравнения с нелинейностями некоторых других типов, в частности, на уравнения типа Пуассона из теории изотермической плазмы.

Ключевые слова: линейные дифференциальные уравнения, уравнения типа Эмдена–Фаулера, асимптотические представления решений.

Evtukhov V.M. Asymptotic representation of solutions of nonautonomous ordinary differential equations. – Manuscript.

Thesis for a degree of doctor of science in physics and mathematics, speciality 01.01.02 – differential equations. Institute of Mathematics, NAS of Ukraine, Kiev, 1998.

The thesis is devoted to founding out of the exact asymptotic formulas for solutions of the nonautonomous ordinary differential equations. This paper offers the constructive approach, permitting to spread the theory of asymptotic integration of linear nonautonomous differential equations of the order $n \geq 2$ (worked out by I.T. Kiguradze) to more common cases. The method of the exact asymptotic formulas for all so-called P_ω – solutions of the generalized equation of a type Emden–Fowler n-th of the order is developed. It is proved, that the set of all P_ω – solutions of this equation breaks up into $n+1$ of not intersected classes with different asymptotic representations. With the use of the obtained theorems the new outcomes about the asymptotic of all (and not just P_ω) right and singular not varying solutions of the generalized equation of a type Emden–Fowler of the second order are established. The techniques of a research of the equations of a type Emden–Fowler are spread on the equations with nonlinearities of some other types, in particular, on the equations such as the Poisson one from the theory of isothermal plasma.

Keywords: [illegible] Fowler, asymptotic representations of solutions.