

на правах рукопису



Лівінська Ольга Іванівна

УДК 519.21

**АНАЛІТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ДЕЯКИХ КЛАСІВ
ПЕРЕДГАУССОВИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ**

01.01.05 - теорія ймовірностей та математична статистика

**Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук**

AB 39.216

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі теорії ймовірностей та математичної статистики механіко-математичного факультету Київського університету ім. Тараса Шевченка.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор
КОЗАЧЕНКО ЮРІЙ ВАСИЛЬОВИЧ

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
факультету менеджменту та маркетингу
Національного університету України
"Київський політехнічний інститут"
СОЛНЦЕВ СЕРГІЙ ОЛЕКСІЙОВИЧ

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри
військової кібернетики Київського інституту
Сухопутних військ
ОЛЕШКО ТЕТЯНА АНАТОЛІВНА

Провідна організація:

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України

Захист відбудеться "26" січня 1998 р. о 14-00 годині в ауд. № 42 на засіданні Спеціалізованої вченої ради К 01.01.21 при Київському університеті ім. Тараса Шевченка за адресою: 252127, м. Київ, проспект академіка Глушкова, 6, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитися в науковій бібліотеці Київського університету ім. Тараса Шевченка (м. Київ, вул. Володимирська, 58, к.10).

Автореферат розісланий "24" грудня 1997р.

Вчений секретар

Спеціалізованої ради



О.О. Курченко

ЛННБ України ім.В.Стефаника



00737674 (У)

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Вивчення аналітичних властивостей випадкових процесів є однією з провідних тем теорії ймовірностей. Тому інтерес до цієї тематики привертає увагу багатьох відомих вчених.

Дослідження в цьому напрямі були започатковані Колмогоровим А.М. У 1937 році він вперше знайшов загальні умови вибіркової неперервності з ймовірністю одиниця випадкових процесів. Вінер Н. ще в 1932 році досліджував аналітичні властивості процесів, що можуть бути зображені у вигляді випадкових тригонометричних рядів з незалежними членами. В 60 - 70 роки з'явилося багато досліджень з цієї тематики. Це пов'язано з тим, що результати в цьому напрямку знаходять широке застосування. Вони використовуються в різних розділах теорії випадкових процесів, наприклад, при дослідженні розподілів числа виходів випадкових процесів та полів за фіксований рівень, в статистиці випадкових процесів, в теорії статистичних випробувань, в теорії стохастичних диференціальних рівнянь, в сучасній квантовій теорії поля, статистичній радіофізиці, метеорології тощо.

Слід відмітити роботи Ядренка М.Й. та Скорохода А.В., в яких вивчаються аналітичні властивості випадкових полів в евклідовому просторі та на компактах у гільбертовому просторі, та роботи Беляєва Ю.К., в яких вивчаються аналітичні властивості гауссових випадкових процесів.

Вивченню розподілу супремумів гауссових процесів присвячені роботи Беляєва Ю.К., Пітербарга В.І., Бермана С.

В 1967 році Дадлі Р.М. використав поняття метричної ентропії і отримав свою відому ентропійну умову неперервності гауссових випадкових процесів.

До кінця 60-х років в основному вивчались аналітичні властивості гауссових процесів. В кінці 60-х років з'явився ряд робіт, в яких вивчались аналітичні властивості більш широких класів випадкових процесів, ніж гауссові. На основі поняття субгауссової випадкової величини, яку ввів Кахан Ж., Козаченко Ю.В. ввів поняття субгауссових випадкових процесів та вивчив умови неперервності траєкторій та деякі інші властивості цих процесів.

Передгауссові випадкові процеси вперше були введені в 1974 р. в роботі Буддигіна В.В. та Козаченка Ю.В. Загальні умови обмеженості та неперервності передгауссових випадкових процесів були знайдені в роботах Дмитровського В.А. В 1980 році в роботі Буддигіна В.В. та Козаченка Ю.В. було показано, що простір

субгауссових величин є банаховим. В роботах Козаченка Ю.В. були досліджені аналітичні властивості та розподіли супремумів випадкових процесів з просторів Орлича. Аналітичним властивостям випадкових процесів в деяких просторах Орлича присвячені також роботи Коно Н. В цих роботах були вперше знайдені умови неперервності траєкторій цих процесів.

Булдигін В.В. та його учні досліджували передгауссові процеси дробового ефекту. Виявилось, що умови неперервності, обмеженості з ймовірністю одиниця супремумів цих процесів істотно кращі ніж в загальному випадку. Результати цих робіт були узагальнені на більш широкі класи передгауссових процесів. Булдигін В.В. та Козаченко Ю.В. запропонували поняття переднорми $\Phi(\xi)$, означення якої наведемо нижче, а також ввели клас Φ -передгауссових випадкових процесів.

Означення. Якщо $\xi = \{\xi(t), t \in T\}$ - передгауссовий випадковий процес, для якого виконуються умови:

$$\begin{aligned} \{\xi(t), t \in T\} \cup \{\xi(t) - \xi(s), t, s \in T\} &\subset \Xi; \\ \sup_{t \in T} \Phi(\xi(t)) < \infty, \quad \sup_{t, s \in T} \Phi(\xi(t) - \xi(s)) < \infty, \end{aligned}$$

про цей процес говорилося, що характеристики передгауссового процесу ξ підпорядковані переднормі Φ , якщо знайдуться такі константи $\gamma > 0$, $\beta \geq 1$, такі,

$$\text{що при } |\lambda| < \gamma \Phi^{-\beta}(t) \quad E \exp\{\lambda \xi(t)\} \leq \exp\left\{\frac{\lambda^2 \Phi^2(t)}{2}\right\},$$

$$\text{і при } |\lambda| < \gamma \Phi^{-\beta}(t, s) \quad E \exp\{\lambda(\xi(t) - \xi(s))\} \leq \exp\left\{\frac{\lambda^2 \Phi^2(t, s)}{2}\right\};$$

де $\Phi(t, s) = \Phi(\xi(t) - \xi(s))$.

Клас таких називається Φ -передгауссовим. В термінах метричної ентропії були знайдені умови обмеженості та отримані оцінки розподілу супремума Φ -передгауссових процесів.

Після цієї та інших зазначених робіт виникла задача дослідження більш широких класів передгауссових процесів, а саме передгауссових процесів $\xi(t)$ з класу (L). Зокрема, до такого класу входять випадкові процеси з класу $\text{Sub}_\Phi(\Omega)$. Постає, зокрема, питання: як впливає співвідношення між функціями Φ та f на властивості цих процесів.

Мета роботи: Вивчення передгауссових випадкових процесів з класу (L), знаходження умов обмеженості з ймовірністю одиниця, вибіркової

неперервності з ймовірністю одиниця, та оцінок розподілу супремумів цих процесів. Дослідження умов, за яких процеси дробового ефекту є передгауссовими та належать класу (L).

Наукова новизна: в роботі введено передгауссові випадкові процеси з класу (L) та отримано такі результати:

- знайдено умови обмеженості з ймовірністю одиниця випадкових процесів класу (L) та оцінки розподілу супремуму випадкових процесів з класу (L);
- знайдено умови вибіркової неперервності з ймовірністю одиниця передгауссових процесів з класу (L);
- знайдено умови, за яких процеси дробового ефекту є передгауссовими процесами з класу (L);
- досліджено аналітичні та інші властивості передгауссових процесів дробового ефекту класу (L).

Одержані результати мають теоретичне значення та можуть застосовуватися у галузях, які базуються на дослідженні випадкових процесів, наприклад, в статистиці, радіотехніці, теорії автоматичного управління.

Апробація роботи: матеріали дисертації доповідались на конференціях молодих вчених механіко-математичного факультету Київського університету, на наукових семінарах кафедри теорії ймовірностей та математичної статистики Київського університету, на IV міжнародній науковій конференції пам'яті академіка М. Кравчука (Київ, 1995).

ЗМІСТ РОБОТИ

Дисертація складається із вступу та чотирьох розділів. Загальний обсяг роботи - 108 сторінок друкованого тексту. Бібліографія містить 53 найменування. У вступі наводиться історичний огляд і формулюються основні результати дисертації.

В першому підрозділі першого розділу даються основні необхідні відомості з теорії просторів Орліча та теорії передгауссових випадкових величин, означення переднорми $\Phi(t)$ та класу (L) передгауссових випадкових процесів, а також приклади передгауссових процесів з класу (L).

Означення 1. Випадкова величина ξ називається передгауссовою, якщо

існують такі константи $\lambda_0 > 0$, $C > 0$, що $\forall |\lambda| < \lambda_0$

$$E \exp\{\lambda \xi\} \leq \exp\left\{\frac{\lambda^2 C^2}{2}\right\}, \quad (1.1)$$

Множину всіх передгауссових випадкових величин, заданих на ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$, позначимо через $\text{Prg}(\Omega)$.

Визначення 2. Випадковий процес $\xi \approx \{\xi(t), t \in T\}$ називається передгауссовим ($\xi \in \{\xi(t), t \in T\} \in \text{Prg}(\Omega)$), якщо $\forall t \in T$ випадкова величина $\xi(t) \in \text{Prg}(\Omega)$.

Оскільки простір $\text{Prg}(\Omega)$ є лінійним, то прирости $\xi(t) - \xi(s) \in \text{Prg}(\Omega)$, $t, s \in T$.

Визначення 3. Нехай функціонал $\Phi(\xi)$, заданий на просторі передгауссових випадкових величин $\text{Prg}(\Omega)$, задовольняє таким умовам:

1) $\Phi(\xi) \geq 0$, $\xi \in \text{Prg}(\Omega)$, 2) $\Phi(0) = 0$; 3) $\Phi(-\xi) = \Phi(\xi)$, $\xi \in \text{Prg}(\Omega)$, 4) існують такі константа $c > 0$, норма $\rho(\xi)$, $\xi \in \text{Prg}(\Omega)$, і множина $\Xi \subseteq \text{Prg}(\Omega)$, що $\rho(\xi) \leq c\Phi(\xi)$, $\xi \in \Xi$, при цьому норма ρ така, що як тільки $\rho\left(\xi_{\frac{1}{n}}\right) \rightarrow 0$, то $\xi_n \rightarrow 0$ за ймовірністю. Такий функціонал називається переднормою.

Розглядаємо передгауссовий випадковий процес $\xi = \{\xi(t), t \in T\}$, узгоджений з переднормою таким чином:

$$\begin{aligned} & \{\xi(t), t \in T\} \cup \{\xi(t) - \xi(s), t, s \in T\} \subset \Xi; \\ & \sup_{t \in T} \Phi(\xi(t)) < \infty, \quad \sup_{t, s \in T} \Phi(\xi(t) - \xi(s)) < \infty. \end{aligned}$$

Тоді функція $\Phi(t, s) = \Phi(\xi(t) - \xi(s))$ наслідуює властивості функціоналу Φ , тому $\Phi(t, s)$ можна розглядати як деякий аналог структурного відхилення на T , що мажорує напівметрику $\rho(t, s)$. Позначимо ентропію через $H_\Phi(\varepsilon) = \ln N_\Phi(T, \varepsilon)$, де $N_\Phi(T, \varepsilon)$ - найменша кількість куль $Q_\Phi(t, \varepsilon) = \{s \in T: \Phi(t, s) < \varepsilon\}$ радіусу $\varepsilon > 0$, що покривають T .

Визначення 4. Передгауссовий процес $\xi = \{\xi(t), t \in T\}$ належить до класу (L) , якщо існує переднорма Φ , для якої виконуються умови:

$$\begin{cases} E \exp\{\lambda \xi(t)\} \leq \exp\{\varphi(\lambda \Phi(t))\}, & 0 \leq \lambda < \frac{1}{f(\Phi(t))}; \\ E \exp\{\lambda \xi(t) - \xi(s)\} \leq \exp\{\varphi(\lambda \Phi(t, s))\}, & 0 \leq \lambda < \frac{1}{f(\Phi(t, s))}. \end{cases}$$

де φ, f - певні функції Орліча, а саме монотонно неспадні опуклі монотонні функції, такі, що $f(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$.

Вводиться функція $\tilde{f}(u)$ на півосі $[0, \infty)$, яка визначається таким чином:

$\tilde{f}(u) = f(u)$, якщо $f(u) \geq \frac{1}{g^{(-1)}(u)}$ для достатньо малих u , і $\tilde{f}(u) = \frac{Q}{g^{(-1)}(u)}$, $Q > 0$,

якщо $f(u) \leq \frac{1}{g^{(-1)}(u)}$ для достатньо малих u , де $g(u) = \frac{\varphi^{(-1)}(u)}{u}$, $\varphi^{(-1)}$ - функція,

обернена до функції φ на півосі $[0, \infty)$.

Теорема 1.7. Нехай $\xi = \{\xi(t), t \in T\} \in \text{Prg}(\Omega)$ - сепарабельний на метричному просторі (T, ρ) процес (де ρ - напівметрика, задана у властивості 4 функціоналу $\Phi(\xi)$), належить класу (L) з функціями Орлича f та φ - такими, що при $|x| < x_0$,

$x_0 > 0$, $\varphi(x) = x^2/2$, і пов'язаними таким чином: $f(u) \geq \frac{1}{g^{(-1)}(u)}$, або $f(u) \leq \frac{1}{g^{(-1)}(u)}$

при достатньо малих u ; нехай $0 < p < 1$ та $0 < A_0 < 1$ - деякі константи. Покладемо

$$\varepsilon_0 = \sup_{t \in T} \Phi(t).$$

Вимагаємо виконання умов:

$$\int_0^z \frac{du}{\tilde{f}^{(-1)}(1/H_\Phi(\varepsilon_0 u))} < \infty, \quad (1)$$

$$\text{і для довільного } z > 0 \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}(u)}{\tilde{f}(u/z)} < \infty. \quad (2)$$

Тоді $\forall x > 0$ виконуються нерівності:

$$\begin{aligned} P\left\{\inf_{t \in T} \xi(t) < -x\right\} &\leq U(x), \\ P\left\{\sup_{t \in T} \xi(t) > x\right\} &\leq U(x), \end{aligned} \quad (3)$$

$$P\left\{\sup_{t \in T} |\xi(t)| > x\right\} \leq 2U(x),$$

$$U(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \gamma_1(p), \\ \exp\left\{-\varphi^s\left(\frac{x(1-p)}{\varepsilon_0} - \frac{\Psi(p)}{p}\right)\right\}, & \gamma_1(p) \leq x < \gamma_1(p) + \gamma_2(p), \\ \exp\{-xR_1 + R_2\}, & x > \gamma_1(p) + \gamma_2(p), \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{де } \Psi(p) = \max\left(\frac{\Delta_\gamma(C\varepsilon_0)}{A_0}, 1\right) \int_0^{\gamma_1(p)} \frac{du}{\tilde{f}^{(-1)}(1/H_\Phi(\varepsilon_0 u))} + \int_0^{\varphi^{(-1)}(\tilde{f}^{(-1)}(H_\Phi(\varepsilon_0 u))/H_\Phi(\varepsilon_0 u))} \frac{du}{\tilde{f}^{(-1)}(H_\Phi(\varepsilon_0 u))/H_\Phi(\varepsilon_0 u)},$$

$$C = \sup_{0 < u \leq 1} \frac{u}{\tilde{f}^{(-1)}(1/H_\Phi(\varepsilon_0 u))}, \Delta_f(C\varepsilon_0) = \frac{1}{C\varepsilon_0} \sup_{0 < u < C\varepsilon_0} \tilde{f}(u/C\varepsilon_0),$$

$$\gamma_1(p) = \frac{\varepsilon_0 \Psi(p)}{p(1-p)}, \gamma_2(p) = \frac{\varepsilon_0}{(1-p)} q \left(\frac{(1-A_0)\varepsilon_0}{\tilde{f}(\varepsilon_0)} \right),$$

$$R_1 = \frac{(1-p)(1-A_0)}{\tilde{f}(\varepsilon_0)}, R_2 = \frac{(1-A_0)\varepsilon_0}{\tilde{f}(\varepsilon_0)} \left(\frac{\Psi(p)}{p} - \Phi \left(\frac{(1-A_0)\varepsilon_0}{\tilde{f}(\varepsilon_0)} \right) \right),$$

$\varphi^s(x) = \sup_{y>0} (xy - \varphi(y))$ - перетворення Юнга-Фенхеля функції $\varphi(y)$, $q(x)$ - це така

функція, що $\varphi(x) = \int_0^x q(u) du$.

Якщо функції φ та f пов'язані таким чином, що $f(u) = \frac{1}{g^{(-1)}(u)}$, де

$g(u) = \frac{\varphi^{(-1)}(u)}{u}$, замість умови (1) вимагаємо збіжність інтегралу

$$\int_0^{\frac{1}{\varepsilon_0}} \frac{H_\Phi(\varepsilon_0 u)}{\varphi^{(-1)}(H_\Phi(\varepsilon_0 u))} du < \infty.$$

Тоді має місце твердження теореми 1.7, де $\Psi(p)$ має такий вигляд:

$$\Psi(p) = \left(1 + \max \left[\frac{\Delta_f(C\varepsilon_0)}{A_0}, 1 \right] \right) \int_0^{\frac{1}{\varepsilon_0}} \frac{H_\Phi(\varepsilon_0 u)}{\varphi^{(-1)}(H_\Phi(\varepsilon_0 u))} du$$

В другому розділі отримані оцінки розподілу супремуму приростів передгауссового процесу з класу (L) та умови його вибіркової неперервності з ймовірністю одиниця.

Теорема 2.3. Нехай $\xi = \{\xi(t), t \in T\} \in \text{Prg}(\Omega)$ - сепарабельний на метричному просторі (T, ρ) процес (де ρ - напівметрика, задана у властивості 4 функціоналу $\Phi(\xi)$), належить класу (L) з функціями Орліча f та φ - такими, що при $|x| < x_0$,

$x_0 > 0$, $\varphi(x) = x^2/2$, і пов'язаними таким чином: $f(u) \geq \frac{1}{g^{(-1)}(u)}$, або $f(u) \leq \frac{1}{g^{(-1)}(u)}$

при достатньо малих u , $0 < p < 1$ та $0 < A_0 < 1$ - деякі константи. Покладемо

$\varepsilon_0 = \sup_{t \in T} \Phi(t)$.

Вимагаємо виконання умов (1) та (2).

Тоді процес $\xi = \{\xi(t), t \in T\}$ є вибірково неперервним з ймовірністю одиниця, і $\forall x > 0$ та для довільного $\varepsilon > 0$, такого, що $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, виконуються нерівності:

$$P \left\{ \sup_{\substack{t, s \in T \\ \phi(t, s) < \varepsilon}} (\xi(t) - \xi(s)) > x \right\} \leq W(x, \varepsilon),$$

$$P \left\{ \inf_{\substack{t, s \in T \\ \phi(t, s) < \varepsilon}} (\xi(t) - \xi(s)) < -x \right\} \leq W(x, \varepsilon), \quad (6)$$

$$P \left\{ \sup_{\substack{t, s \in T \\ \phi(t, s) < \varepsilon}} |\xi(t) - \xi(s)| > x \right\} \leq 2W(x, \varepsilon),$$

$$W(x, \varepsilon) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \gamma_3(p, \varepsilon), \\ \exp \left[-\varphi^* \left(\frac{x(1-p)^2 p}{2(3-p)\varepsilon} \right) - \Psi_1(p, \varepsilon) \right], & \gamma_3(p, \varepsilon) \leq x < \gamma_3(p, \varepsilon) + \gamma_4(p, \varepsilon), \\ \exp \{-xR_3 + R_4\}, & x > \gamma_3(p, \varepsilon) + \gamma_4(p, \varepsilon), \end{cases} \quad (7)$$

$$\Psi_1(p, \varepsilon) = \max \left(\frac{\Delta_{\tilde{f}}(C\varepsilon)}{A_0}, 1 \right) \int_0^{\frac{C\varepsilon}{p}} \frac{du}{\tilde{f}^{(-1)}(1/H_\phi(\varepsilon u))} + \int_0^{\frac{C\varepsilon}{p}} \frac{\phi(H_\phi(\varepsilon u) \tilde{f}^{(-1)}(1/H_\phi(\varepsilon u)))}{H_\phi(\varepsilon u) \tilde{f}^{(-1)}(1/H_\phi(\varepsilon u))} du, \quad (8)$$

де
$$C = \sup_{0 < u \leq 1} \frac{u}{\tilde{f}^{(-1)}(1/H_\phi(\varepsilon u))}, \quad \Delta_{\tilde{f}}(C\varepsilon) = \frac{1}{C\varepsilon} \sup_{0 < u < C\varepsilon} \frac{\tilde{f}(u)}{\tilde{f}(u/C\varepsilon)},$$

$$\gamma_3(p, \varepsilon) = \frac{2(3-p)\varepsilon}{p(1-p)^2} \Psi_1(p, \varepsilon),$$

$$\gamma_4(p, \varepsilon) = \frac{2(3-p)\varepsilon}{(1-p)^2 p} \left[q \left(\frac{2\varepsilon}{p} \cdot \frac{(1-A_0)}{\tilde{f}(\varepsilon_0)} \right) + \Psi_1(p, \varepsilon) \right],$$

$$R_3 = \frac{p(1-p)^2(1-A_0)}{(3-p)\tilde{f}(\varepsilon)}, \quad R_4 = \varphi^* \left(\frac{2\varepsilon(1-A_0)}{p\tilde{f}(\varepsilon)} \right) - \Psi_1(p, \varepsilon) \frac{2\varepsilon(1-A_0)}{p\tilde{f}(\varepsilon)},$$

$\varphi^*(x) = \sup_{y>0} (xy - \phi(y))$ - перетворення Юнга-Фенхеля функції $\phi(y)$, $q(x)$ - це така

функція, що $\phi(x) = \int_0^x q(u) du$.

В першому та другому розділах кращі умови в термінах метричної ентропії та найкращі оцінки розподілу супремуму приростів отримуються тоді, коли

функції φ та f пов'язані таким чином, що $f(u) \leq \frac{1}{g^{(-1)}(u)}$, де $g(u) = \frac{\varphi^{(-1)}(u)}{u}$.

В першому та другому підрозділах третього розділу, застосовуючи твердження першого та другого розділів, отримані оцінки розподілу супремумів для передгауссових процесів з класу (L) у випадку, коли функції φ та f мають вигляд:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leq 1 \\ x^q, & |x| > 1, \quad q \geq 2 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{x^\beta}{\gamma}, \text{ де } \beta \geq 1, \gamma > 0. \quad (10)$$

Теорема 3.3. Нехай процес $\xi(t)$, $t \in T$ - передгауссовий ρ -сепарабельний випадковий процес, який належить класу (L) , де функція φ має вигляд (9), функція f має вигляд (10), переднорма

$$\Phi(t, s) = \|\xi(t) - \xi(s)\|^\beta / \gamma \quad (11)$$

де $\|\cdot\|$ - деяка переднорма в просторі $\text{Pr}g(\Omega)$, $\beta \geq 1$, та $\gamma > 0$ - деякі константи.

Нехай $\varepsilon_0 = \sup_{t \in T} \Phi(t)$, та $0 < A_0 < 1$, $0 < p < 1$ - деякі константи.

Нехай для $\kappa = \min\left(\beta, \frac{q}{q-1}\right)$

$$\int_0^1 (H(\varepsilon_0 u))^\kappa < \infty. \quad (12)$$

Тоді для довільного $x > 0$ виконуються нерівності:

$$\begin{aligned} P\left\{\sup_{t \in T} \xi(t) > x\right\} &\leq U_1(x), \quad i = 1, 2, \\ P\left\{\inf_{t \in T} \xi(t) < -x\right\} &\leq U_1(x), \quad i = 1, 2, \\ P\left\{\sup_{t \in T} |\xi(t)| > x\right\} &\leq 2U_1(x), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (13)$$

де за умови $\frac{(1-p)}{\varepsilon_0} < B$ в правій частині (13) стоїть $U_1(x) = \min(W_1(x), W_2(x))$,

за умови $\frac{(1-p)}{\varepsilon_0} \geq B$ в правій частині (13) стоїть $U_2(x)$.

$$W_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, x_1), \\ \exp\left\{-\frac{1(1-p)^2}{2\varepsilon_0^2}\left(x - \frac{\varepsilon_0}{(1-p)}\Psi(p)\right)^2\right\}, & x \in [x_1, x_2), \\ \exp\left\{-\frac{(1-p)}{\varepsilon_0}\left(x - \frac{\varepsilon_0}{(1-p)}\Psi(p)\right) + \frac{1}{2}\right\}, & x \in [x_2, \infty), \end{cases} \quad (14)$$

$$W_2(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, x_1), \\ \exp\left\{-\frac{(1-p)}{\varepsilon_0}\left(x - \frac{\varepsilon_0}{(1-p)}\Psi(p)\right)\right\}, & x \in [x_1, \tilde{x}_1), \\ \exp\left\{-S\left(x - \frac{\varepsilon_0}{(1-p)}\Psi(p)\right)^{\frac{q}{q-1}}\right\}, & x \in [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \\ \exp\left\{-B\left(x - \frac{\varepsilon_0}{(1-p)}\Psi(p)\right) + \frac{B^q \varepsilon_0^q}{2(1-p)^q}\right\}, & x \in [\tilde{x}_2, \infty), \end{cases} \quad (15)$$

$$U_2(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, x_1), \\ \exp\left\{-\frac{1(1-p)^2}{2\varepsilon_0^2}\left(x - \frac{\varepsilon_0}{(1-p)}\Psi(p)\right)^2\right\}, & x \in [x_1, x_3), \\ \exp\left\{-B\left(x - \frac{\varepsilon_0}{(1-p)}\Psi(p)\right) + \frac{B^2 \varepsilon_0^2}{2(1-p)^2}\right\}, & x \in [x_3, \infty), \end{cases} \quad (16)$$

$$\Psi(p) = \gamma^{-\frac{1}{\kappa}} \max\left(\frac{\Delta_f(C\varepsilon_0)}{A_0}, 1\right) \int_0^{\frac{1}{\kappa}} (H(\varepsilon_0 u))^{\frac{1}{\kappa}} du + \frac{\gamma^{-\frac{1}{\kappa}}}{2} \int_0^{\frac{1}{\kappa}} (H(\varepsilon_0 u))^{\frac{(\kappa-1)(q-1)}{\kappa}} du, \quad (17)$$

$$B = \frac{(1-p)(1-A_0)\gamma}{\varepsilon_0^{\kappa}}, \quad S = \frac{(q-1)2^{\frac{1}{q-1}}(1-p)^{\frac{q}{q-1}}}{q^{\frac{q}{q-1}}\varepsilon_0^{\frac{q}{q-1}}},$$

$$\Delta_f(C\varepsilon_0) = (C\varepsilon_0)^{\kappa-1}, \quad C = \sup_{0 \leq u \leq 1} u (H_{\varphi}(\varepsilon_0 u))^{\frac{1}{\kappa}}.$$

Теорема 3.6. Нехай виконуються умови теореми 3.3.

Тоді процес $\xi(t)$, $t \in T$ є вибірково неперервним з ймовірністю одиниця, і для довільного $x > 0$ та для довільного $\varepsilon > 0$, такого, що $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, виконуються нерівності:

$$\begin{aligned}
 P \left\{ \sup_{\substack{t,s \in T \\ \Phi(t,s) < \varepsilon}} \xi(t) - \xi(s) > x \right\} &\leq W_i(x, \varepsilon), \quad i=1,2, \\
 P \left\{ \sup_{\substack{t,s \in T \\ \Phi(t,s) < \varepsilon}} \xi(t) - \xi(s) < -x \right\} &\leq W_i(x, \varepsilon), \quad i=1,2, \\
 P \left\{ \sup_{\substack{t,s \in T \\ \Phi(t,s) < \varepsilon}} |\xi(t) - \xi(s)| > x \right\} &\leq 2W_i(x, \varepsilon), \quad i=1,2,
 \end{aligned} \tag{18}$$

де за умови $\frac{(1-p)}{\varepsilon} < B_1$ в правих частинах (18) стоїть $W_i(x, \varepsilon) = \min(U_1(x, \varepsilon), U_2(x, \varepsilon))$;

за умови $\frac{(1-p)}{\varepsilon} \geq B_1$ в правих частинах (18) стоїть $W_i(x, \varepsilon)$.

$$U_1(x, \varepsilon) = \begin{cases} 1, & x \in (0, x_1), \\ \exp \left\{ -\frac{p(1-p)^4}{4(3-p)^2 \varepsilon^2} \left(x - \frac{2(3-p)\varepsilon}{p(1-p)^2} \Psi_1(p, \varepsilon) \right)^2 \right\}, & x \in [x_1, x_2), \\ \exp \left\{ -\frac{(1-p)}{\varepsilon} \left(x - \frac{2(3-p)\varepsilon}{p(1-p)^2} \Psi_1(p, \varepsilon) \right) + \frac{(3-p)^2}{p(1-p)^2} \right\}, & x \in [x_2, \infty), \end{cases} \tag{19}$$

$$U_2(x, \varepsilon) = \begin{cases} 1, & x \in (0, x_1), \\ \exp \left\{ -\frac{(1-p)}{\varepsilon} \left(x - \frac{2(3-p)}{p(1-p)^2} \Psi_1(p, \varepsilon) \right) + \frac{(3-p)^2}{p(1-p)^2} \right\}, & x \in [x_1, \tilde{x}_1), \\ \exp \left\{ -R \left(x - \frac{2(3-p)}{p(1-p)^2} \Psi_1(p, \varepsilon) \right)^{\frac{q}{q-1}} \right\}, & x \in [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \\ \exp \left\{ -B_1 \left(x - \frac{2(3-p)}{p(1-p)^2} \Psi_1(p, \varepsilon) \right) + \frac{B_1^2(3-p)^2 \varepsilon^2}{p(1-p)^4} \right\}, & x \in [\tilde{x}_2, \infty), \end{cases} \tag{20}$$

$$W_2(x, \varepsilon) = \begin{cases} 1, & x \in (0, x_1), \\ \exp \left\{ -\frac{p(1-p)^4}{4(3-p)^2 \varepsilon^2} \left(x - \frac{2(3-p)\varepsilon}{p(1-p)^2} \Psi_1(p, \varepsilon) \right)^2 \right\}, & x \in [x_1, x_3], \\ \exp \left\{ -B_1 \left(x - \frac{2(3-p)\varepsilon}{p(1-p)^2} \Psi_1(p, \varepsilon) \right) + \frac{B_1^2 (3-p)^2 \varepsilon^2}{p(1-p)^4} \right\}, & x \in [x_3, \infty), \end{cases} \quad (21)$$

$$B_1 = \frac{(3-p)(1-A_0)\gamma}{(1-p)\varepsilon^\kappa}, \quad (22)$$

де $\Psi_1(p, \varepsilon) = \gamma^{-\frac{1}{\kappa}} \max \left(\frac{\Delta_{\gamma}(C\varepsilon)}{A_0}, 1 \right) \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} (H(\varepsilon u))^{\frac{1}{\kappa}} du + \frac{\gamma^{-\frac{1}{\kappa}}}{2} \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} (H(\varepsilon u))^{\frac{(\kappa-1)(q-1)}{\kappa}} du, \quad (23)$

$$C = \sup_{0 \leq u \leq 1} u (H(\varepsilon u))^{\frac{1}{\kappa}}, \quad \Delta_{\gamma}(C\varepsilon) = (C\varepsilon)^{\kappa-1}, \quad \kappa = \min \left(\beta, \frac{q}{q-1} \right),$$

$$x_1 = \frac{2(3-p)\varepsilon}{p(1-p)^2} \Psi_1(p, \varepsilon), \quad x_2 = \frac{2(3-p)^2 \varepsilon}{p(1-p)^3} + \frac{2(3-p)\varepsilon}{p(1-p)^2} \Psi_1(p, \varepsilon),$$

$$x_3 = B_1 \frac{2(3-p)^2 \varepsilon^2}{p(1-p)^4} + \frac{2(3-p)\varepsilon}{p(1-p)^2} \Psi_1(p, \varepsilon),$$

$$\tilde{x}_1 = -\frac{(1-p)^{q-1}}{\varepsilon^{q-1}} + \frac{(3-p)\varepsilon}{(1-p)^2} \Psi_1(p, \varepsilon), \quad \tilde{x}_2 = \left(\frac{(3-p)(1-A_0)\gamma}{(1-p)\varepsilon^\kappa} \right)^{q-1} + \frac{(3-p)\varepsilon}{(1-p)^2} \Psi_1(p, \varepsilon),$$

$$R = \left(\frac{q-1}{q} \left(\frac{p(1-p)^{2q}}{2q(3-p)^q \varepsilon^q} \right) \right)^{\frac{1}{q-1}}.$$

В першому та другому підрозділах третього розділу також отримані оцінки

супремумів, коли $f(u) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{1-q}} x^{\frac{q}{q-1}}, & 0 \leq x \leq 2, \\ \frac{x^2}{2}, & x > 2, \end{cases}$

тобто коли $f(u) = \frac{1}{g^{(-1)}(u)}$, де $g(u) = \frac{\varphi^{(-1)}(u)}{u}$.

В третьому підрозділі третього розділу отримані оцінки розподілу супремумів предгауссового процесу з класу (L), коли $\varphi(u) = \frac{u^q}{2}$, $1 < q \leq 2$, а функція

f має вигляд (20).

В четвертому розділі дисертації отримані умови, які накладаються на кумулянти випадкової величини ξ , при яких вона є передгауссовою і належить до класу (L).

Означення 5. Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$, який має вигляд стохастичного інтегралу

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, s) d\tau(s), \quad (24)$$

де $\eta(s), s \in (-\infty, \infty)$ - центрований стохастично неперервний сепарабельний процес з незалежними приростами без гауссової компоненти, а $g(t, s), t \in T, t \in (-\infty, \infty)$ - невідповідна функція, така, що для довільного $t \in \mathbf{R}$ $g_t = (g(t, s), s \in \mathbf{R}) \subset L_2(\mathbf{R})$, називається узагальненим процесом дробового ефекту, породженим процесом $\eta(s)$ та функцією відгуку $g(t, s)$. Кумулянти узагальненого процесу дробового ефекту визначаються так:

$$\begin{aligned} \kappa_k(X(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^k \Pi(dx) \int_{-\infty}^{\infty} g^k(t, \tau) d\tau, \\ \kappa_k(X(t) - X(s)) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^k \Pi(dx) \int_{-\infty}^{\infty} (g(t, \tau) - g(s, \tau))^k d\tau, \end{aligned}$$

де $\Pi(d\tau, dx) = d\tau \Pi(dx)$ - міра Леві процесу $\eta(s)$.

Далі вводяться такі функціонали:

$$\begin{aligned} B_1(\xi) &= \max_{2 \leq k \leq m-1} k \sqrt{|\kappa_k(\xi)| / \Delta_k}, \quad B_2(\xi) = \sup_{k \geq m} \frac{k^{j+\alpha(k-j)} \sqrt{|\kappa_k(\xi)|}}{(k-m)!}, \\ B(\xi) &= \max(B_1(\xi), B_2(\xi)), \end{aligned}$$

де $\Delta_k > 0$, $k = \overline{2, m-1}$, $\alpha > 1$ - деякі константи.

Тоді буде справедлива така нерівність: $\sqrt{E\xi^2} \leq \Delta_2 B(\xi)$. Отже функціонал $B(\xi)$ є переднормою.

Наступна теорема четвертого розділу дає умови, яким повинен задовольняти наведений вище процес дробового ефекту, щоб він був передгауссовим, і належав класу (L).

Теорема 4.4. Нехай $X(t), t \in T = [0, 1]^d$ - наведений вище процес дробового ефекту (24), сепарабельний на (T, ρ) , і задовольняє таким умовам:

$$1) \quad \forall t \in T, \forall k \geq 2 \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(t, s)|^k ds < \infty,$$

$$2) \quad \sup_{k \geq 2} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k \Pi(dx) = Q < \infty,$$

3) існують такі константи K, h і така функція $\sigma(h), \sigma(h) \downarrow 0, h \rightarrow 0$, що

$$\sup_{t \in R} \sup_{\substack{p(t, s) < h \\ t, s \in T}} |g(t, \tau) - g(s, \tau)| < \tilde{\sigma}(h),$$

де
$$\tilde{\sigma}(h) = \frac{1}{|\ln h|^\gamma}, \quad \gamma > \max \left[1, \frac{(m-2)\alpha}{m-1} \right], \quad m \in N, m \geq 2, \alpha \geq 1.$$

Тоді процес $X(t)$ є передгауссовим, і виконуються умови:

$$1) \quad \sup_{t \in T} B(t) < \infty, \quad \sup_{t, s \in T} B(t, s) < \infty,$$

2) процес $\xi(t) = X(t) / 2\bar{C}$, де константа $\bar{C} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\Delta^k}{k!} + \frac{c^{m-j}}{m!(1-c)}$, належить до

класу (L) з функціями ϕ та f , де функція ϕ має вигляд

$$\phi(u) = \begin{cases} \frac{u^2}{2}, & |u| \leq 1 \\ \frac{u^{m-1}}{2}, & |u| > 1, \quad m \in N, m \geq 2 \end{cases} \quad (25),$$

а функція

$$f(u) = \begin{cases} \frac{u^\alpha}{2c\bar{C}}, & \bar{C} \geq \frac{1}{2}, \\ \frac{u^\alpha}{c}, & \bar{C} < \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (26)$$

3) має місце збіжність інтегралу

$$\int_0^1 (H_B(\varepsilon_0 u))^\kappa du < \infty, \quad \kappa = \min \left(\alpha, \frac{m-1}{m-2} \right).$$

Наслідок 4.5. Якщо процес дробового ефекту (25) задовольняє умовам теореми 4.4, то процес $\xi(t) = X(t) / 2\bar{C}$ задовольняє умовам теорем 3.3 та 3.6 з переднормою B , отже для нього можна побудувати оцінки розподілу супремуму та супремуму приростів, і процес є вибірково неперервним з ймовірністю одиниця.

Авторка висловлює щирю подяку своєму науковому керівникові доктору фізико-математичних наук, професору Юрію Васильовичу Козаченку за постановку задачі, постійну увагу, цінні поради та зауваження при виконанні даної роботи.

ВИСНОВКИ

- в термінах метричної ентропії в роботі знайдено умови обмеженості з ймовірністю одиниця випадкових процесів класу (L) та оцінки розподілу супремуму випадкових процесів з класу (L);
- в термінах метричної ентропії знайдено умови вибіркової неперервності з ймовірністю одиниця передгауссових процесів з класу (L);
- отримано оцінки розподілу супремуму та супремуму приростів передгауссових процесів з класу (L), коли функції φ та f мають степеневий вигляд;
- знайдено умови, за яких процеси дробового ефекту є передгауссовими процесами з класу (L);
- досліджено аналітичні та інші властивості передгауссових процесів дробового ефекту класу (L).

Одержані результати мають теоретичне значення та можуть застосовуватися у галузях, які базуються на дослідженні випадкових процесів, наприклад, в статистиці, радіотехніці, електроніці, теорії зв'язку.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ

1. Лівінська О.І. Про розподіл супремуму деяких класів передгауссівських випадкових процесів // Теорія ймовірностей та мат. статистика. 1993. - Вип. 49. стор. 145-154.
2. Козаченко Ю.В. та Лівінська О.І. Аналітичні властивості деяких класів випадкових процесів з простору $\text{Pred}_q(\Omega)$ // Теорія ймовірностей та мат. статистика. 1994. - Вип. 51. стор. 90-97.
3. Лівінська О.І. Аналітичні властивості одного класу узагальнених процесів дробового ефекту // Вісник Київського Університету, 1997, №3. С. 45-53.
4. Лівінська О.І. Про вибіркoву неперервність деякого класу передгауссових випадкових процесів // Тези доповідей четвертої Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука. Київ, 1995. С. 152

Лівінська О.І. Аналітичні властивості деяких класів передгауссових випадкових процесів. Рукопис. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 - теорія

ймовірностей та математична статистика. Університет імені Тараса Шевченка, Київ, 1997.

В дисертації отримані оцінки розподілів супремуму та супремуму приростів передгауссових випадкових процесів з класу (L), умови обмеженості процесів з ймовірністю одиниця, умови вибіркової неперервності цих процесів с ймовірністю одиниця; знайдені умови, за яких узагальнені процеси дробового ефекту с передгауссовими, належать до класу (L), вибірково непервні з ймовірністю 1, і до них можна застосувати оцінки для розподілу супремуму та супремуму приростів.

Ключові слова: передгауссовий процес, сеперабельний процес, переднорма, узагальнений процес дробового ефекту, оцінка, супремум процесу, супремум приростів процесу, кумулянта.

Ливинская О.И. Аналитические свойства некоторых классов предгауссовских случайных процессов. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 - теория вероятностей и математическая статистика. Университет имени Тараса Шевченко, Киев, 1997.

В диссертации получены оценки распределений супремума и супремума приращений предгауссовских случайных процессов из класса (L), условия ограниченности процессов с вероятностью единица, условия выборочной неперерывности этих процессов с вероятностью единица; найдены условия, при которых обобщенные процессы дробового эффекта являются предгауссовскими, принадлежат классу (L), выборочно непрерывны с вероятностью единица, и к ним можно применить оценки для распределения супремума и супремума приращений.

Ключевые слова: предгауссовский процесс, сеперабельный процесс, преднорма, обобщенный процесс дробового эффекта, оценка, супремум процесса, супремум приращений процесса, кумулянта.

Livinska O.I. Analytical properties of some classes of pre-Gaussian random processes/ Manuscript. Thesis of dissertation for obtaining of the degree of candidate of sciences in physics and mathematics, speciality 01.01.05 - theory of probability and mathematical statistics. Taras Shevchenko Kiev University, 1997.

Conditions for boundedness with probability 1, estimates for the distributions of supremum and supremum of increments of pre-Gaussian random processes from (L)

class, and conditions of sample-continuity with probability 1 are established. Also conditions for generalized schottky effect processes are founded, when these processes are pre-Gaussian, belong to (L) class, are sample-continuous with probability 1, and estimates of distributions of supremum and supremum of increments could be implemented to these processes.

Key words: pre-Gaussian process, separable process, prenorm, generalized schottky effect process, estimate, supremum of process, supremum of increments of the process, semi-invariant.

Віддруковано ПП "КОЗАКИ". Тир. 100
ISBN - 966-514-023-X

121410

AB 39.216

AB 39.216