

ЗАПОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

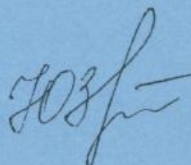
Зінковська Юлія Сергіївна

УДК 519.8

ДИСКРЕТНІ ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ  
В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ:  
ПИТАННЯ СТІЙКОСТІ

01.05.02 - Математичне моделювання та  
обчислювальні методи

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук



ЗАПОРІЖЖЯ - 1997



00737688 (\$).

AB 39.295

Робота виконана в Запорізькому державному університеті Міністерства освіти України.

Науковий керівник

доктор фізико-математичних наук, професор

**Перепелиця Віталій Опанасович**

Запорізький державний університет,

зав. кафедрою економічної кібернетики

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор Яковлев Сергій Всеволодович,

Університет внутрішніх справ, начальник факультету управління та інформатики

кандидат фізико-математичних наук, доцент Турчина Валентина Андріївна,

Дніпропетровський державний університет, доцент кафедри обчислювальної

математики та математичної кібернетики

Провідна установа

Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, м.Київ

Захист відбудеться "8" грудня 1997р. о 14.00 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 08.04.02 при Запорізькому державному університеті за адресою: 330600, м.Запоріжжя, МСП-41, вул. Жуковського, 66.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Запорізького державного університету за адресою: 330600, м.Запоріжжя, МСП-41, вул. Жуковського, 66.

Автореферат розісланий "7" листопада 1997р.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради

Сисоев Ю.О.

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Різноманітність та суперечність різних вимог до проектуємої системи або оптимізуємого об'єкту, неповнота інформації, неточність параметрів моделі, поведінка середовища, що впливає на процес прийняття рішень та інше неминуче приводять до того, що реальні задачі оптимізації доводиться розв'язувати в умовах невизначеності. При розв'язку будь-якої реальної задачі дослідник завжди має справу з деякою моделлю задачі, яка є наближеною до вхідної. Взаємозв'язок реальної проблеми та варіанта її абстрактного опису (математичної задачі) може урахуватись на різних рівнях: "ближче" до моделі або "ближче" до задачі. У другому випадку на базі задачі виникає деяка множина постановок для більш гнучкого відбиття особливостей моделі. Кожна з "проміжних" задач може бути достатньо строго сформульована і розв'язана, а розв'язок усіх задач у сукупності дозволяє одержати більш точний та адекватний опис моделі. Така сукупність будується шляхом варіації деяких числових параметрів задачі. Тут виникає наступна проблема. При переході від реальної ситуації до моделі найчастіше доводиться ігнорувати деякі суттєві деталі. Питається, чи можна їх урахувати хоча б частково, нехай навіть за рахунок деякого "ускладнення" задачі? Актуальність аналізу стійкості як раз полягає в тому, що він є одним з методів урахування того факту, що в дійсності завжди існує похибка у вимірі та заданні числових параметрів. У зв'язку з цим виникає необхідність проаналізувати, як неточність вхідних даних впливає на одержуваний розв'язок.

Проблема дослідження стійкості докладно розроблена для оптимізаційних задач з "неперервними" вхідними даними. Через складність дискретних моделей, які при незначних змінах у вхідних даних ведуть себе непередбачено, ця проблема спочатку не отримала достатнього розвитку в дискретній оптимізації і почала ґрунтовно досліджуватися у 70-ті роки.

ДНБ ім. В. Стефаніка  
АН України

Теоретичному дослідженню задач з повністю або частково цілочисельними змінними, що базується на використанні властивостей точково-множинних відображень, присвячені роботи Козерацької Л.М., Лебедєвої Т.Т., Сергієнко І.В. У роботах Ашманова С.А., Белоусова В.В., Банка Б., Федорова В.В., Шваргіна С.М. досліджується стійкість задач лінійного програмування.

Конструктивний підхід до проблеми дослідження стійкості траєкторних задач дискретної оптимізації, основою якого є поняття радіусу стійкості, укладено в роботах Леонт'єва В.К., Гордєєва Є.М., Сотскова Ю.Ю., Бакурової Г.В., Смілічева В.А., Кравцова М.К.

В останній час з'явився новий напрямок дослідження питань стійкості - ймовірнісний. Ряд досліджень у цьому напрямку наведено в роботах Бакурової Г.В., Перепелиці В.О.

Із зарубіжної літератури можна виділити роботи Blair C.E., Jeroslow R.G., де одержано кількісні оцінки стійкості розв'язку для задачі частково цілочисельної оптимізації; Wilson G.R., Jain H.K., де досліджено стійкість для задачі псевдобулевого програмування; Ruhe G., де проаналізовано складність дослідження стійкості в потокових задачах.

Вище вказане дозволяє зробити висновок про актуальність обраної теми.

**Зв'язок з науковими програмами, темами.** Наукові дослідження з теми дисертаційної роботи проводилися у зв'язку з:

- науково-дослідною роботою «Дослідження екстремальних задач в умовах невизначеності та розробка методів їх розв'язування», що включена до координаційного плану Міністерства освіти України;

- державною науково-технічною програмою «Нові технологічні засоби підтримки та прийняття рішень», що включена до плану Міністерства науки України.

**Мета і задачі дослідження.** Метою дисертаційної роботи є розробка методів дослідження стійкості та обчислення кількісної характеристики стійкості - радіусу стійкості для дискретних екстремальних задач.

Задачі, які необхідно вирішити для досягнення поставленої мети:

- отримання умов стійкості та кількісної характеристики дискретних багатокритеріальних задач на системах підмножин з векторною цільовою функцією;

- отримання умов стійкості та кількісної характеристики дискретних багатокритеріальних задач на системах підмножин з інтервальною ваговою функцією;

- вивчення впливу включення в векторну цільову функцію топологічних критеріїв на стійкість розв'язку векторних задач з адитивними критеріями;

- побудування обчислювальної схеми алгоритмів для задачі розбиття графу; аналіз стійкості задачі розбиття графу.

**Наукова новизна одержаних результатів** щодо подальшого розвитку напрямку дослідження стійкості багатокритеріальних задач полягає в наступному:

- досліджено вплив зміни кількості критеріїв у векторній цільовій функції, що складається з адитивних критеріїв, на стійкість розв'язку задач з топологічними критеріями;

- одержано критерій та формулу обчислення радіусу стійкості задач з векторною цільовою функцією, у складі якої є топологічні критерії ступеня та діаметру;

- одержано критерій та формули обчислення радіусу стійкості задач з інтервальною ваговою функцією для різних видів збурюючої множини;

- отримано кількісну характеристику стійкості задачі розбиття графу з подвійним зваженням вершин та ребер;

- обчислено оцінки складності наближених алгоритмів для допоміжних однокритеріальних задач розбиття графу.

**Практичне значення одержаних результатів.** Запропоновані в дисертаційній роботі методи дозволяють більш адекватно розробляти та аналізувати багатокритеріальні моделі в економіці та виробництві (наприклад,

задачі оптимізації інвестиційного портфеля; задачі, що виникають в галузі автоматизованого проектування електронної техніки на етапі компоновки). Реалізація цих методів дозволяє знайти похибку вимірів при зміні вхідних величин характеристик системи, а також дозволяє одержати розв'язок не однієї задачі, а континуальної множини задач, близьких до даної.

**Особистий внесок в розробку результатів у роботі, які написані в співавторстві:**

- доведення теорем про специфіку впливу топологічних критеріїв на стійкість задач з адитивними критеріями [1];
- доведення теореми про критерій стійкості для типу збурюючої множини в задачі з інтервальною ваговою функцією [2];
- одержання умов стійкості для векторної задачі з нелінійними критеріями [6].

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на Всеукраїнській науковій конференції "Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях" (Львів, 1995); на Українській конференції "Моделювання та дослідження стійкості систем" (Київ, 1996); на науковому семінарі "Методи вирішення та математичне забезпечення задач дискретної оптимізації" при Вченій Раді НАН України з проблеми "Кібернетика" (Київ, 1997), а також на наукових семінарах кафедри економічної кібернетики Запорізького державного університету.

**Публікації.** За результатами виконаних досліджень опубліковано 7 робіт, в яких відображено основний зміст дисертаційної роботи: статей - 5, депонованих статей - 2.

**Структура та обсяг роботи.** Дисертаційна робота викладена на 135 сторінках і складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, додатку та списку використаної літератури, в якому 118 найменувань.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовано мету і задачі дослідження, викладено зв'язок вибраного напрямку дослідження з державними планами та програмами, подано наукову новизну, практичне значення одержаних результатів, вказано апробацію та наведено кількість публікацій з теми дисертаційної роботи.

Перший розділ дисертації присвячений обзору літератури з теми, де висвітлено основні етапи у розвитку наукової думки з проблеми дисертаційної роботи, зроблено огляд публікацій, що характеризують ступінь її дослідженості та названо конкретні питання, що на цей час ще неосвічені.

У другому розділі сформульовано постановку траєкторних задач векторної оптимізації.

В першому підрозділі другого розділу наведено математичну постановку задач та визначення основних понять.

Системою підмножин (СП) називаємо пару  $(E, T)$ , де  $E$  - скінчена множина елементів, потужність  $|E| = q$ , а  $T$  - деяка сукупність непустих підмножин множини  $E$ , які називають траєкторіями і  $T = \{t\}$ .

В дисертаційній роботі розглянуто класи масових задач з двома типами зваження елементів  $e \in E$ : ваговим та інтервальним.

Для наведених нижче класів масових дискретних задач використано позначення  $Z_j$ , де  $j = \overline{0,4}$  - порядковий номер класу задач.

Для таких класів задач на множині  $E$  задано векторну вагову функцію (ВВФ)

$$w(e) = (w_1(e), \dots, w_v(e), \dots, w_n(e)), \quad (1)$$

де  $w_v(e) \in R \quad \forall v = \overline{1, n} \quad \forall e \in E$ .

На множині траєкторій  $T$  задано векторну цільову функцію (ВЦФ)

$$F(t) = (F_1(t), \dots, F_v(t), \dots, F_n(t)), \quad (2)$$

вигляд критеріїв якої залежить від класу задачі.

Розглянуто наступні класи масових задач  $Z_j, j = \overline{0,4}$  з відповідним набором критеріїв ВЦФ (2):

$$\text{- клас } Z_0: F_v(t) = \min_{e \in t} w_v(e) \rightarrow \min_T, \quad v = \overline{1, n}, \quad (3)$$

$$F_v(t) = \max_{e \in t} w_v(e) \rightarrow \min_T, \quad v = \overline{1, n}, \quad (4)$$

$$F_v(t) = \min_{e \in t} w_v(e) \rightarrow \max_T, \quad v = \overline{1, n}, \quad (5)$$

$$F_v(t) = \max_{e \in t} w_v(e) \rightarrow \max_T, \quad v = \overline{1, n}; \quad (6)$$

$$\text{- клас } Z_1: F_v(t) = \sum_{e \in t} w_v(e) \rightarrow \text{opt}_T, \quad v = \overline{1, n}; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{- клас } Z_2: F_v(t) &= \sum_{e \in t} w_v(e) \rightarrow \text{opt}_T, & v &= \overline{1, n-1}, \\ F_v(t) &= s(t) \rightarrow \text{opt}_T, & v &= n; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{- клас } Z_3: F_v(t) &= \sum_{e \in t} w_v(e) \rightarrow \text{opt}_T, & v &= \overline{1, n-1}, \\ F_v(t) &= d(t) \rightarrow \text{opt}_T, & v &= n; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{- клас } Z_4: F_v(t) &= \sum_{e \in t} w_v(e) \rightarrow \text{opt}_T, & v &= \overline{1, n-2}, \\ F_v(t) &= \hat{s}(t) \rightarrow \text{opt}_T, & v &= n-1, \\ F_v(t) &= d(t) \rightarrow \text{opt}_T, & v &= n. \end{aligned}$$

Під топологічними критеріями (8),(9) розуміємо критерії, що пов'язані з структурою графу. При їх визначенні завжди визнаємо, що  $E$  являє собою множину ребер даного графу  $G$ , при цьому підмножина  $t \subseteq E$  утворює зв'язний підграф  $t$  графу  $G$ :  $s(t) = \max_{v \in t} \deg v$  - ступінь  $t$ ,  $d(t)$  - діаметр  $t$ .

Задачі з інтервальними вхідними даними було розглянуто в роботах M.Libura, Роцін В.А., Семенової Н.В. та Левіна В.І. На відміну від результатів, що одержані для задач цілочисельного програмування, в даній дисертаційній

роботі розглянуто клас задач на СП  $(E, T)$ , де на множині  $E$  визначена інтервальна вагова функція (ІВФ)

$$w(e) = [w_1(e), w_2(e)], \quad (10)$$

де  $w_1(e)$  ( $w_2(e)$ ) - нижня (верхня) межі заданого інтервалу.

На множині траєкторій  $T$  визначена інтервальна цільова функція (ІЦФ), що містить наступні критерії:

$$F_1(t) = \sum_{e \in t} w_1(e) \rightarrow \max_T, \quad (11)$$

$$F_2(t) = \sum_{e \in t} w_2(e) \rightarrow \max_T, \quad (12)$$

$$F_3(t) = \max_{e \in t} (w_2(e) - w_1(e)) \rightarrow \min_T. \quad (13)$$

ІЦФ  $F(t)$  вигляду (3)-(9) та ІЦФ (11)-(13) визначають на множині допустимих розв'язків (МДР) паретовську множину (ПМ)  $\tilde{T}$ , що містить усі паретовські оптимуми (ПО):  $\tilde{t} \in \tilde{T}$ , якщо не існує такої траєкторії  $t^0 \in T$ , для якої виконуються нерівності:  $F(t^0) \leq F(\tilde{t})$ ,  $F(t^0) \neq F(\tilde{t})$  - для критеріїв, що мінімізуються та  $F(t^0) \geq F(\tilde{t})$ ,  $F(t^0) \neq F(\tilde{t})$  - для критеріїв, що максимізуються.

Багатокритеріальною задачею будемо називати задачу знаходження та зображення ПМ  $\tilde{T}$  в явному вигляді.

Якщо занумерувати усі елементи множини  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ , то індивідуальну ІВФ  $w(e)$  з класів  $Z_j$ ,  $j = \overline{0,4}$  зручно трактувати як матрицю  $W = \|w_{\nu k}\|_{\nu \times q}$  у просторі  $R^{nq}$ ,  $\nu = \overline{1, n}$ ,  $q = |E|$ . Змінюючи матрицю  $W$ , будемо одержувати різні індивідуальні задачі.

Для кожного класу масових задач  $Z_j$ ,  $j = \overline{0,4}$  введені позначення індивідуальної задачі, тобто:  $z^0(W)$  - індивідуальна задача з класу  $Z_0$ ;  $z^*(W)$  - з класу  $Z_1$ ;  $z^2(W)$  - з класу  $Z_j$ ,  $j = \overline{2,4}$ ; задачу з ІЦФ (11)-(13) позначаємо через

$z^i(W)$  і називасмо інтервальною. ПІМ таких задач позначасмо відповідно  $\tilde{T}^0(W)$ ,  $\tilde{T}^*(W)$ ,  $\tilde{T}^z(W)$ . Взагалі (без уточнення класу) символами  $T(W)$  та  $\tilde{T}(W)$  позначасмо МДР та ПІМ задачі. Значення  $\nu$ -го критерія  $F_\nu(t)$  вигляду (3)-(6) в задачі  $z^0(W)$  будемо позначати через  $M_\nu(t, W)$ .

В роботі Козіної Г.Л. та Перепелиці В.О. було зроблено обґрунтування того факту, що інтервальну задачу  $z^i(W)$  можна звести до задачі багатокритеріальної оптимізації з тим же МДР  $T(W)$  та ВЦФ  $F(t) = (F_1(t), F_2(t), F_3(t))$  вигляду (11)-(13). Таким чином, при дослідженні ПІМ інтервальної задачі  $z^i(W)$  можна використовувати твердження, що одержані відносно 3-критеріальної задачі з двома ваговими та одним мінімаксним критеріями.

В подальшому, для визначеності, при дослідженні  $\varepsilon$ -стійкості задач з ВЦФ (3)-(6) усі леми та теореми розглядаються для критерія (4), який називають критерієм вигляду MINMAX, а в критеріях (7)-(9) під символом opt розуміємо min.

В другому та третьому підрозділах другого розділу наведено постановку проблеми локальної стійкості та оберненої до неї задачі знаходження радіусу стійкості, що були сформульовані для однокритеріального випадку В.К.Леонг'свим.

Для задач з ВВФ (ІВФ) у просторі  $R^{nq}$  ( $R^{3q}$ ) задамо норму. Під нормою матриці  $B = \|b_{\nu k}\| \in R^{nq}$  будемо розуміти число  $\|B\| = \max\{|b_{\nu k}| : \nu = \overline{1, n}, k = \overline{1, q}\}$ . Через  $\mathcal{E}(\varepsilon)$  позначасмо множину всіх таких матриць  $B$  з  $R^{nq}$ , що норма  $\|B\| \leq \varepsilon$ ,  $\varepsilon \geq 0$ .

Задачу  $z(W + B)$ , що одержана з вхідної задачі  $z(W)$  при додаванні матриць  $W$  та  $B \in \mathcal{E}(\varepsilon)$ , будемо називати збуреною, а матрицю  $B$  - збурюючою. Величину  $\varepsilon$  назвемо порядком збурення.

Задача  $z(W)$  є  $\varepsilon$ -стійкою, якщо виконуються включення

$$\tilde{T}(W+B) \subseteq \tilde{T}(W) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon). \quad (14)$$

Якщо  $\tilde{T}(W) = T(W)$ , то задача  $z(W)$  є  $\varepsilon$ -стійкою при будь-якому  $\varepsilon > 0$ .

Тому цей випадок будемо виключати, а задачу  $z(W)$ , для якої різниця  $\overline{T(W)} = T(W) \setminus \tilde{T}(W) \neq \emptyset$ , будемо називати нетривіальною.

В індивідуальних задачах  $z^0(W)$ ,  $z^*(W)$ ,  $z^z(W)$ ,  $z^l(W)$  з відповідних класів масових задач  $Z_j$ ,  $j = \overline{0,4}$  для будь-якої траєкторії  $t^0 \in \overline{T(W)}$  визначена множина парето-оптимальних траєкторій, що домінують траєкторію  $t^0$ . Для цього введені позначення множин індексів  $\nu \in I_l$ ,  $l = \overline{1,7}$ , якими занумеровані критерії (3)-(9), що являють собою підмножини  $I_l \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ , які не перетинаються. Тоді ця множина визначається наступним чином:

- для класу  $Z_0$

$$\tilde{T}^0(W, t^0) = \{ \tilde{t} \in \tilde{T}^0(W) : \tau_\nu^w(t^0, \tilde{t}) \geq 0, \nu \in I_l, l = \overline{1,4} \}, \quad (15)$$

де  $\tau_\nu^w(t^0, \tilde{t}) = M_\nu(t^0, W) - M_\nu(\tilde{t}, W)$ ,  $\nu \in I_1, I_2$ ,

$$\tau_\nu^w(\tilde{t}, t^0) = M_\nu(\tilde{t}, W) - M_\nu(t^0, W), \quad \nu \in I_3, I_4;$$

- для класу  $Z_j$ ,  $j = \overline{1,4}$

$$\begin{aligned} \tilde{T}^z(W, t^0) &= \{ \tilde{t} \in \tilde{T}^z(W) : \tau_\nu^w(t^0, \tilde{t}) \geq 0, \nu \in I_6, I_7 \}, \\ \tilde{T}^*(W, t^0) &= \{ \tilde{t} \in \tilde{T}^*(W) : \tau_\nu^w(t^0, \tilde{t}) > 0, \nu \in I_5 \}, \end{aligned} \quad (16)$$

де  $\tau_\nu^w(t^0, \tilde{t}) = F_\nu(t^0, W) - F_\nu(\tilde{t}, W)$ ,  $\nu \in I_l$ ,  $l = \overline{5,7}$ ;

- для інтервальної задачі  $z^l(W)$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{1,2}(W, t^0) &= \{ \tilde{t} \in \tilde{T}_{1,2}(W) : \tau_\nu^w(\tilde{t}, t^0) > 0, \nu = 1, 2 \}, \\ \tilde{T}_3(W, t^0) &= \{ \tilde{t} \in \tilde{T}_3(W) : \tau_\nu^w(\tilde{t}, t^0) \geq 0, \nu = 3 \}, \end{aligned} \quad (17)$$

де  $\tau_\nu^w(\tilde{t}, t^0) = F_\nu(\tilde{t}, W) - F_\nu(t^0, W)$ ,  $\nu = \overline{1,3}$ .

Для інтервальної задачі  $z^i(W)$  введено два типи збурення вхідних даних, що не виводять вхідну задачу з класу інтервальних:

$$1) \mathfrak{E}_1(\varepsilon) = \left\{ B = \|b_{vk}\| : b_{vk} \leq \varepsilon, \varepsilon > 0, b_1 + w_1 < b_2 + w_2 \right\} \quad (18)$$

де  $w(e) = [w_1(e), w_2(e)]$  - вхідна вага,  $b(e) = [b_1(e), b_2(e)]$  - збурююча вага;

$$2) \mathfrak{E}_2(\varepsilon) = \left\{ B = \|b_{vk}\| : b_{vk} \leq \varepsilon, 0 < \varepsilon < \min_k \frac{d_k}{2} \right\}, \quad (19)$$

де  $d_k = w_{2k} - w_{1k}$  - ширина інтервалу,  $k = \overline{1, q}$ .

Як відомо, траєкторію  $t^* \in T$  задачі  $z(W)$  назвемо слабо ефективною (оптимальною за Слейтором), якщо  $\exists t^0 \in T : F_v(t^*) > F_v(t^0) \quad \forall v \in \overline{1, n}$ .

Множину усіх слабо ефективних траєкторій для задач  $z^0(W)$ ,  $z^*(W)$ ,  $z^2(W)$ ,  $z^i(W)$  позначаємо відповідно через  $P^0(W)$ ,  $P^*(W)$ ,  $P^2(W)$ ,  $P^i(W)$ , а для задачі з критеріями (11), (12) - через  $P_{1,2}(W)$ . Очевидно, що  $\tilde{T}(W) \subseteq P(W)$ .

Радіусом стійкості будь-якої індивідуальної задачі  $z(W)$  назвемо число  $\rho(W) = \sup \left\{ \varepsilon : \tilde{T}(W + B) \subseteq \tilde{T}(W) \quad \forall B \in \mathfrak{E}(\varepsilon) \right\}$ .

Третій розділ присвячено методам дослідження  $\varepsilon$ -стійкості задач, що поставлені у другому розділі.

У першому підрозділі третього розділу проведено дослідження  $\varepsilon$ -стійкості векторних задач на СП з векторною ваговою функцією. Розглянуто два випадки, що визначаються видом задач: частковий, що має аналог для однокритеріальних задач та загальний, що виникає в умовах багатокритеріальності. Відносно часткового випадку отримані результати, які аналогічні векторним траєкторним задачам з лінійними критеріями, що розглядалися раніше в роботах Бакурової Г.В. та Кравцова М.К.

У загальному випадку, коли можливо вплив перетину паретовської та непаретовської траєкторій, сформульовано критерій  $\varepsilon$ -стійкості задач класу  $Z_0$ .

У формулюванні використано визначення  $i$ -го квазіоптимуму, що вводиться

рекурентно:

$e_v(t^0 \cap \tilde{t})$  - ребро, на якому досягається рівність значень  $v$ -го критерія паретовської та непаретовської траєкторій, тобто  $M_v(t^0, W) = M_v(\tilde{t}, W)$ ; множину номерів критеріїв, для яких виконується ця рівність позначено через  $J(t^0, \tilde{t})$ ;

$M_v^1(\tilde{t}, W)$  - перший квазіоптимум траєкторії  $\tilde{t} \in \tilde{T}^0(W, t^0)$ ;

$e_v^i(t^0 \cap \tilde{t})$  - ребро, на якому однакові  $i$ -ті квазіоптимуми траєкторій  $t^0, \tilde{t}$  та виконується послідовність рівностей та нерівностей:

$[M_v(t^0, W) = M_v(\tilde{t}, W)] > [M_v^1(t^0, W) = M_v^1(\tilde{t}, W)] > \dots > [M_v^i(t^0, W) = M_v^i(\tilde{t}, W)]$  множину номерів критеріїв, для яких виконується ця рівність позначено через  $J^i(t^0, \tilde{t})$ , де  $v \in J^{i-1}(t^0, \tilde{t})$ .

На відміну від результату Бакурової Г.В. про окремо доведені необхідну та достатню умови стійкості для задач з критерієм вигляду MINMAX, доведена наступна теорема, що є критерієм стійкості у загальному випадку для задачі  $z^0(W)$  з класу  $Z_0$ .

Теорема 3.3. Для того, щоб нетривіальна задача  $z^0(W)$  була  $\varepsilon$ -стійкою, необхідно та достатньо, щоб для будь-якої траєкторії  $t^0 \in \overline{T(W)}$  існувала така траєкторія  $\tilde{t} \in \tilde{T}^0(W, t^0)$ , для якої б виконувалася система нерівностей:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_v(\tilde{t}, W) - M_v^i(\tilde{t}, W) \geq 2\varepsilon \\ M_v(\tilde{t}, W) - M_v^i(t^0, W) \geq 2\varepsilon \\ \tau_v^w(t^0, \tilde{t}) \geq 2\varepsilon \end{array} \quad \forall v \in J^i(t^0, \tilde{t}) \subseteq J(t^0, \tilde{t}), \right. \quad (20)$$

серед яких хоча б одна строга.

Критерій стійкості (20) значно спростив доведення формули для обчислення радіусу стійкості задач класу  $Z_0$ :

$$\rho(W) = \min_{t^0 \in \bar{T}(W)} \max_{\tilde{t} \in \bar{T}^z(W, t^0)} \min \frac{1}{2} \left\{ \min_{v \in J^i(t^0, \tilde{t})} [(M_v(\tilde{t}, W) - M_v^i(\tilde{t}, W)), (M_v(\tilde{t}, W) - M_v^i(t^0, W))] \right. \\ \left. \min_{v \in \{1, \dots, n\} \cup J(t^0, \tilde{t})} \tau_v^w(t^0, \tilde{t}) \right\}. \quad (21)$$

У другому підрозділі третього розділу розглянуто вплив включення до векторної цільової функції топологічних критеріїв ступеня та діаметру на стійкість векторних задач з адитивними критеріями.

Сформульовано критерій  $\varepsilon$ -стійкості задачі з топологічними критеріями.

Знайдено формулу обчислення радіуса стійкості задачі  $z^z(W)$  з класу  $Z_j, j = \overline{2, 4}$ :

$$\rho(W) = \min_{t^0 \in \bar{T}(W)} \max_{\tilde{t} \in \bar{T}^z(W, t^0)} \min \left\{ \min_{v \in I_5} \frac{\tau_v^w(t^0, \tilde{t})}{c(t^0, \tilde{t})}, \tau_{v \in I_{6, 17}}^w(t^0, \tilde{t}) \neq 0 \right\} \quad (22)$$

де  $c(t^0, \tilde{t}) = |t^0| + |\tilde{t}| - 2|t^0 \cap \tilde{t}|$  - кількість різних ребер у парі траєкторій  $t^0, \tilde{t} \in T(W)$ .

Внаслідок досліджень впливу топологічних критеріїв на стійкість розв'язку вхідної задачі доведені наступні теореми.

**Теорема 3.5.** Якщо при включенні до ВЦФ нестійкої задачі  $z^*(W) \in Z_1$  топологічних критеріїв (8) або (та) (9) усі елементи множини  $P_2(W) \setminus \tilde{T}^*(W)$  стають елементами множини  $\tilde{T}^z(W)$  та виконуються нерівності  $\tau_v^w(t^0, \tilde{t}) > \varepsilon c(t^0, \tilde{t})$ , то одержувана нетривіальна задача  $z^z(W) \in Z_j, j = \overline{2, 4}$   $\varepsilon$ -стійка. В протилежному випадку, задача  $z^z(W)$  - нестійка.

**Теорема 3.6.** Якщо при включенні до ВЦФ  $\varepsilon$ -стійкої задачі  $z^*(W) \in Z_1$  топологічних критеріїв (8) або (та) (9) відбувається звуження ПМ одержуваної задачі  $z^z(W)$  (тобто  $\tilde{T}^z(W) \subset \tilde{T}^*(W)$ ), то нетривіальна задача  $z^z(W)$  - нестійка.

У третьому підрозділі третього розділу проведено дослідження  $\varepsilon$ -стійкості векторних задач на СП з інтервальною ваговою функцією.

За допомогою лінійного перетворення, що залишає незмінними межі області значень інтервалу  $w(e) = [w_1(e), w_2(e)]$ ,  $e \in E$  критерій (13) перетворено до максимізуемого:

$$F_3(t) = \min_{e \in E} (D(W) - d_k) \rightarrow \max_T, \quad (23)$$

де  $d_k = w_{2k} - w_{1k}$ ,  $k = \overline{1, q}$  - ширина інтервалу,

$$D(W) = \min_{e \in E} d(e) + \max_{e \in E} d(e); d(e') = \min_{e \in E} d(e), d(e'') = \max_{e \in E} d(e).$$

З урахуванням критерію (23) введено ще дві збурюючі множини, що є підмножинами збурення  $\mathcal{E}_1(\varepsilon)$  вигляду (18):

1) збурення, що не впливають на величини  $D(W)$  та  $d_k$ :

$$\mathcal{E}_d(\varepsilon) = \{B = \|b_{vk}\|; b_{vk} \leq \varepsilon, \varepsilon \geq 0, (b_{2k} + w_{2k}) - (b_{1k} + w_{1k}) = d_k\}; \quad (24)$$

2) збурення, при яких  $D(W) = const$ , а  $d_k \neq const$ :

$$\mathcal{E}_D(\varepsilon) = \{B = \|b_{vk}\|; b_{vk} \leq \varepsilon, \varepsilon \geq 0, 0 \leq \Delta_k \leq d(e'') - d_k\}, \quad (25)$$

де  $\Delta_k = b_{2k} - b_{1k}$ , - ширина інтервалу збурення.

Для кожного із збурень  $\mathcal{E}_1(\varepsilon)$ ,  $\mathcal{E}_2(\varepsilon)$ ,  $\mathcal{E}_d(\varepsilon)$ ,  $\mathcal{E}_D(\varepsilon)$  досліджено умови  $\varepsilon$ -стійкості та визначено формули радіусу стійкості. Для виводу обґрунтування формул радіусу стійкості введені такі позначення:

$$\tilde{t}' \in \tilde{T}_{1,2}(W, t^0), \quad \tilde{t}'' \in \tilde{T}_3(W, t^0); \quad \tilde{T}_{1,2}(W, t^0) \cup \tilde{T}_3(W, t^0) = \tilde{T}^{\wedge}(W, t^0);$$

$$M_3^i(\tilde{t}'', W) \text{ або } M_3^i(t^0, W) - i\text{-ті квазіоптимуми у траєкторіях } \tilde{t}'', t^0;$$

$c'(t^0, \tilde{t}') = c(t^0, \tilde{t}') - \phi(t^0, \tilde{t}')$  - кількість різних ребер у парі траєкторій

$t^0, \tilde{t}' \in T(W)$ ;  $\phi(t^0, \tilde{t}')$  - число ребер  $e'$  та  $e''$  в траєкторіях  $\tilde{t}', t^0$ ;

$\tau_v^{*w}(\tilde{t}, t^0)$ ,  $v=1,2$ ;  $\tau_3^{*w}(\tilde{t}, t^0)$  - позначення величин відповідно  
 $\tau_v^w(\tilde{t}, t^0)$ ,  $v=1,2$ ;  $\tau_3^w(\tilde{t}, t^0)$ , що задовольняють нерівностям  
 $\tau_v^w(\tilde{t}, t^0) \geq \frac{\Delta^*}{2} c'(\tilde{t}, t^0)$ ,  $v=1,2$  і  $\tau_3^w(\tilde{t}, t^0) \geq \Delta^*$ ;  $\Delta^* = \min_k \Delta_k^*$ ,  $\Delta_k^* = d(e^n) - d_k$ .

Відповідно до збурень  $\mathcal{E}_1(\varepsilon)$ ,  $\mathcal{E}_2(\varepsilon)$ ,  $\mathcal{E}_d(\varepsilon)$ ,  $\mathcal{E}_D(\varepsilon)$  отримано наступні формули радіусу стійкості:

$$\rho_1(W) = \min_{t^0 \in \tilde{T}(W)} \max_{\tilde{t} \in \tilde{T}^{\wedge}(W, t^0)} \min \left\{ \frac{\tau_{1,2}^w(\tilde{t}', t^0)}{c'(t^0, \tilde{t}')}}, \frac{1}{2} [\min \{ (M_3^i(t^0, W) - M_3(\tilde{t}'', W)), (M_3^i(\tilde{t}'', W) - M_3(\tilde{t}'', W)) \}, \tau_3^w(\tilde{t}'', t^0)] \right\}, \quad (26)$$

$$\rho_2(W) = \min \left\{ \rho_1(W); \min_k \frac{d_k}{2} \right\}, \quad (27)$$

$$\rho_d(W) = \min_{t^0 \in \tilde{T}(W)} \max_{\tilde{t} \in \tilde{T}_{1,2}^{\wedge}(W, t^0)} \min_{v=1,2} \frac{\tau_v^w(\tilde{t}, t^0)}{c(t^0, \tilde{t})}, \quad (28)$$

$$\rho_D(W) = \min_{t^0 \in \tilde{T}(W)} \max_{\tilde{t} \in \tilde{T}^{\wedge}(W, t^0)} \min \left\{ \frac{\tau_{1,2}^{*w}(\tilde{t}', t^0)}{c'(t^0, \tilde{t}')}, \frac{1}{2} [\min \{ (M_3^i(t^0, W) - M_3(\tilde{t}'', W)), (M_3^i(\tilde{t}'', W) - M_3(\tilde{t}'', W)) \}, \tau_3^{*w}(\tilde{t}'', t^0)] \right\}. \quad (29)$$

**Четвертий розділ** присвячено розгляду та вивченню векторної задачі розбиття графу, яка виникає на одному з етапів проектування радіоелектронної апаратури - етапі компоновки.

У першому підрозділі четвертого розділу подано математичну постановку задачі розбиття в термінах теорії графів. Якість розв'язку оцінюється наступними критеріями:

$$F_1 = F_1(x) = \sum_{p=1}^y \min_{1 \leq i \leq n} h_i x_{ip} \rightarrow \min, \quad (30)$$

$$F_2 = F_2(x) = \max_p \left( \sum_{i=1}^n \mu_i x_{ip} \right) \rightarrow \min, \quad (31)$$

$$F_3 = F_3(x) = \sum_{p=1}^y \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_{ip} x_{jp} \rightarrow \max, \quad (32)$$

$$F_4 = F_4(x) = \sum_{p=1}^y \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_{ip} x_{jp} \rightarrow \max. \quad (33)$$

У другому підрозділі четвертого розділу запропоновано систему алгоритмів, що базується на процедурі декомпозиції задачі на окремі однокритеріальні підзадачі з метою одержання паретовських оптимумів за кожним критерієм.

У третьому підрозділі четвертого розділу досліджується стійкість задачі розбиття графу, як задачі з подвійним зваженням: вершин та ребер. Сформульовано ряд зауважень, відносно структури множини розв'язку. Кількісний метод визначення стійкості такої задачі добре погоджується з результатами, що одержані для розглянутих вище класів задач на системах підмножин.

В п'ятому розділі проведено практичне дослідження теоретичних результатів. Для кожного класу задач наведено розрахункові приклади. Числові результати є підтвердженням теоретичних досліджень.

## ВИСНОВКИ

Основні результати, які отримано в дисертаційній роботі:

1. Подальшого розвитку дістав напрямок дослідження стійкості багатокритеріальних задач при зміні кількості критеріїв у векторній цільовій функції.

2. Одержано критерій стійкості та формула обчислення радіусу стійкості задач з векторною цільовою функцією, у складі якої є топологічні критерії ступеня та діаметру.

3. Одержано критерії стійкості та формули обчислення радіусу стійкості задач з інтервальною ваговою функцією для різних видів збурюючої множини.

4. Розглянуто постановку стійкості задачі розбиття графу з подвійним зваженням: на множині вершин та множині ребер.

5. Одержано умови стійкості та формули обчислення радіусу стійкості задачі розбиття графу з подвійним зваженням.

6. Обчислено оцінки складності наближених алгоритмів для допоміжних однокритеріальних задач розбиття графу.

### СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ

1. Bakurova A.V., Perepelitsa V.A., Zin'kovskaya J.S. Research of Stability of Vector Problem on Spanning Tree with Topological Criteria. ICM'97 digital proceedings. Bauhaus-Universitat/Weimar/Germany, 1997. - P.159-165 (article).

2. Бакурова Г.В., Зиньковська Ю.С. Дослідження стійкості 3-критеріальної задачі формування інвестиційного портфелю // Міжвідомчий зб. наук. пр. Машинна обробка інформації. - Київ: КНЕУ, 1997. - 60. - С.183-188.

3. Зиньковская Ю.С. Вычисление радиуса устойчивости многокритериальных задач с нелинейными критериями // Зб. наук. пр. - Придніпровський науковий вісник. - 1997. - № 15(26). - С.43-48.

4. Зиньковская Ю.С. Исследование векторной задачи компоновки: некоторые вычислительные алгоритмы и их оценки // Зб. наук. пр. - Придніпровський науковий вісник. Машинобудування і технічні науки. - 1997. - №43(54). - С.28-34.

5. Зиньковская Ю.С. Об устойчивости одной векторной задачи на графах со взвешенными вершинами и ребрами // Сборник научных трудов, посвященный 10-летию университета. - Запорожье: ЗГУ, 1995.-5.-Ч.1.-С.31-32.

6. Бакурова А.В., Зиньковская Ю.С., Перепелица В.А. Исследование траекторных задач с нелинейными критериями в условиях неопределенности. - Киев, 1996. - 24с. - Рус. - Деп. в ГНТБ Украины 25.01.96, № 378-Ук96 // Анот. в РЖ "Математика", № 8, 1996, серия Г(88).

7. Зиньковская Ю.С. Вычислительная схема алгоритма для задачи компоновки на гиперграфе. Киев, 1996. - 20с. - Рус. - Деп. в ГНТБ Украины 12.08.96, № 1679-Ук96 // Анот. в РЖ "Математика", № 3, 1997, серия Г(20).

## АНОТАЦІЇ

Зиньковська Ю.С. Дискретні екстремальні задачі в умовах невизначеності: питання стійкості. - Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 - математичне моделювання та обчислювальні методи. - Запорізький державний університет, Запоріжжя, 1997.

Дисертацію присвячено питанням дослідження стійкості дискретних екстремальних задач. В дисертації розглянуто класи траєкторних задач на системах підмножин з векторною та інтервальною ваговими функціями. Для різних типів збурення вхідних даних доведено умови стійкості та одержано формули обчислення радіусу як кількісної характеристики стійкості. Досліджено на стійкість векторну задачу розбиття графу, у якого зважені вершини та ребра. Для такої нетраєкторної задачі запропоновано систему алгоритмів та знайдено їх оцінки обчислювальної складності.

Ключові слова: стійкість, радіус стійкості, збурення, збурююча множина, система підмножин, алгоритм, розбиття графу.

Зиньковская Ю.С. Дискретные экстремальные задачи в условиях неопределенности: вопросы устойчивости. - Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.02 - математическое моделирование и вычислительные методы. - Запорожский государственный университет, Запорожье, 1997.

Диссертация посвящена вопросам исследования устойчивости дискретных экстремальных задач. В диссертации рассмотрены классы траекторных задач на системах подмножеств с векторной и интервальной весовыми функциями. Для различных типов возмущения исходных данных доказаны условия устойчивости и получены формулы вычисления радиуса как количественной характеристики устойчивости. Исследована на устойчивость векторная задача разбиения графа, у которого взвешены вершины и ребра. Для такой нетраекторной задачи предложена система алгоритмов и найдены их оценки вычислительной сложности.

Ключевые слова: устойчивость, радиус устойчивости, возмущение, возмущающее множество, система подмножеств, алгоритм, разбиение графа.

Zin'kovskaya J.S. Discrete extreme problems in conditions of the indefiniteness: the stability questions. - Manuscript.

Thesis for a candidate of physical - mathematical sciences degree by speciality 01.05.02 - mathematical modeling and computational methods. - Zaporozhye state university, Zaporozhye, 1997.

Stability of the discrete extreme problems is under discussion. Dissertation covers classes of the trajectory problems on the systems of the subsets with vector and interval weighting functions. Stability conditions for different types of the given data perturbations have been proved. Formulae of calculation of the stability radius which are considered to be the quantitative characteristics of the stability have been obtained. Stability of the vector problem of the graph partition with weighted apices and edges has been investigated. The system of algorithms and the estimations of their computational complexity for the above mentioned nontrajectory problem have been proposed.

Key words: stability, stability radius, perturbation, perturbing set, system of subsets, algorithm, partition of graph.

431648

АВ 39.295

Підписано до друку 12.11.97 р.  
Заказ 2148 Тираж 100 прим.  
Підрозділ оперативної поліграфії ЗЦНТЕІ  
330002, м. Запоріжжя, пр. Леніна, 77