Оссолінсъкі колекції.

CD – диск виконано в рамах угоди укладеної з квітня 2004 р. між Львівською науковою бібліотекою НАН України у Львові і Національним Закладом ім. Оссолінських у Вроцлаві.

Lwowska Naukowa Biblioteka im. W. Stefanyka NAN Ukrainy. Oddział Rękopisów.
Zespół (fond) 4.
Zbiór rękopisów Biblioteki Baworowskich

Dział (opys) 1

532. Teorya linii krzywych i powierzchni drugiego rzędu przez J. L. Boucharlat, przekł. 1823.

STRONY NIEZAPISANE NIE ZOSTAŁY ZDIGITALIZOWANE

Львівська бібліотека
АН УРСР
ВІДДІЛ РУКОПИСІВ
Фонд 532

Z 1

Nr. 532.

II. G. 20

Teorya.

Linii Krzywych i Powierzchni drugiego Rzędu.

Przez J. L. Bouchartat.

na Polski Język przełożona

przez

Maryana Dyonizego Brzozowskiego

Podoffiera z Kompanii 1ey Lekkiej Artylleryi pieszej.

Roku 1823.

Teorya.

Linii Krzywych i Powierzchni drugiego Rzędu.

Wiadomości Poprzednicze.

Rozwiązanie różnych zagadnień.

Łatwo jest pojąć, że Algebra jako wyobrażająca związki zachodzące między ilościami, musi bydź wielce pomocną w rozwiązywaniu zagadnień Geometrycznych, mających zawsze na celu odkrycie pewnych stosunków między liniami i powierzchniami i bryłami. Lecz trudniej przychodzi dokładnie wystawić sobie okoliczności, jakie z tego nowego użycia Algebry wypływać muszą.

Jedno zadanie dostatecznem jest do objaśnienia tego.

2. Szukajmy podstawy. Trójkąta danej wysokości którego powierzchnia równa jest powierzchni danego kwadratu. Nazwijmy podstawę żądaną x, wysokość h, zaś bok danego kwadratu c. Powierzchnia Trójkąta będzie $= \frac{1}{2} hx$. Że zaś jest równa kwadratowi z c, więc $\frac{1}{2} hx = c^2$. To równanie daje wypadek $x = \frac{c^2}{\frac{1}{2}h}$, który pokazuje że x powinno bydź trzecią proporcyonalną do $\frac{1}{2}h$ i c. Jakoż czwarty wyraz proporcyi $\frac{1}{2}h : c = c : x$ równy jest $\frac{c^2}{\frac{1}{2}h}$.

Jeżeli zatem weźmiemy ~~dwie linie (Fig 1.) $AD = \frac{1}{2}h$, $CD = c$~~, i postawimy je do (Fig. siebie pod kątem prostym; jeżeli potem połączemy punkta A i C linią AC, i spuścimy z punktu C prostopadłę CB na AC, część BD będzie ważnością niewiadomej x: bo linia CD jest średnią proporcyonalną między AD i BD, zkąd $AD : CD = CD : BD$

czyli $\frac{1}{2}h : c = c : x$; przeto $x = \frac{c^2}{\frac{1}{2}h}$.

3. Rozbierając ciąg cały naszego postępowania, dostrzeżemy iż rozwiązanie powyższego zagadnienia składa się z trzech części: pierwsza zależy na ułożeniu równania zagadnienia, druga na rozwiązaniu jego, trzecia na wyprowadzeniu z ważności niewiadomej x działań geometrycznych mających wyznaczyć tę niewiadomę: i to jest co wykreśleniem formuły nazywamy.

4. Różne własności Geometryi mogą służyć podług przypadku do ułożenia

w równanie zagadnienia. Z pomiędzy nich własność linii proporcyonalnych i kwadratu z przeciwprostokątnej jest najważniejszą. Co do oddzielenia niewiadomej to innych nie stawia trudności nad te, jakie do Algebry są przywiązane: ale się przeciwnie rzecz ma z wykreśleniem, jak się zaraz o tém przekonamy za pomocą następujących zagadnień.

Zagadnienie 1.

W dany Trójkąt wpisać kwadrat.

5. Rozwiązanie tego zadania sprowadza się do znalezienia na wysokości SJ (Fig 2) Trójkąta SOR takiego punktu I, przez który poprowadzona (Fig 2) równoodległa MN od podstawy, równą była linii GJ.

Naznaczmy podstawę OR przez a, wysokość SJ przez b, a nieznane linie JJ i MN przez x i z. Dla równoodległości boków OR i MN mamy proporcyę

$$a : z = b : b - x, \text{ zkąd } ab - ax = bz.$$

Gdybyśmy na tém równaniu przestali, ważność niewiadomej x pozostałaby niewyznaczoną. Jw istocie to równanie tylko warunek równoodległości boków OR i MN wyraża: służy więc każdemu prostokątowi wpisanemu w trójkąt: trzeba zatém drugiego równania dla odznaczenia między temi prostokątami takiego, którego by boki równe były: tém nowém równaniem jest $x = x$; ustawiwszy tę ważność w równanie poprzedzające otrzymamy $x = \frac{ab}{a+b}$.

6. Aby wykreślić tę ważność, nanosimy dowolny kąt BAC (Fig 3). (Fig 3

Wziąwszy $AB = a+b$, $AC = a$, $AD = b$, i poprowadziwszy równoległą ED od linii BC łączącej punkta B i C, odetniemy część AE która tą szukaną ważnością będzie; bo własności linii proporcyonalnych daje $AB : AC = AD : AE$,

$$\text{czyli } a+b : a = b : AE$$

$$\text{zkąd } AE = \frac{ab}{a+b} = x.$$

7. Piękniejszym jeszcze sposobem tę ważność wykreślić można. Wystawiwszy na podstawie danego trójkąta kwadrat LR (Fig 4): z kąta L tego kwadratu (Fig 4) prowadź do wierzchołka S linię LS: Prostopadła PM wyprowadzona z punktu spotkania się podstawy z tą linią SL, będzie bokiem kwadratu żądanego. Bo w trójkątach podobnych LLU, SPJ, $LU : SJ = SL : SP$

a w trójkątach podobnych SLC, SPM, $LO : PM = SL : SP$;

dla spólnego stosunku SL do SP, z tych dwóch proporcyi powstanie nowa

$$SU : SJ = LO : PM; \text{ więc } PM = \frac{LO \cdot SJ}{SU} = \frac{ab}{a+b}.$$

Zagadnienie 2.

Linię AB (Fig 5) na dwie części podzielić, takie, ażeby wystawiony z nich (Fig 5) prostokąt, równy był danemu kwadratowi.

8. Bok danego kwadratu nazwijmy c, linię daną a, zaś jedną z jej części x; druga będzie $a-x$: przeto $(a-x)x = c^2$.

Rozwiązawszy, to równanie

$$x = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - c^2} \quad i \quad x = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - c^2}$$

Obydwie te ważności są dodatnie, bo $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - c^2}$ jest koniecznie mniejszy od $\sqrt{\frac{1}{4}a^2}$ czyli od $\frac{1}{2}a$.

9. Jeżeli dodamy do siebie te dwie ważności niewiadomej, wypadnie a; co nas uczy, iż każda z nich wyraża jeden z boków prostokąta szukanego; jakoż ponieważ nie odznaczyliśmy jednego z tych boków żadnym szczególnym warunkiem, a przeto musi zarówno jednemu jak drugiemu służyć.

10. Część pod pierwiastkiem wrzyjona się staje, gdy c przewyższa $\frac{1}{2}a$: więc bok kwadratu nie powinien przewyższać połowy danej linii, aby zagadnienie prawdziwém być mogło.

11. Ważności niewiadomej x następującym sposobem dadzą się wykreślić. Na linii $EB = \frac{1}{2}a$ (Fig 5) załocz półkole BME, i poprowadź cięciwę $MB = c$. Linia ME będzie ważnością pierwiastku. Bo kąt BME jest prosty, i własność kwadratu z przeciwprostokątnej daje

$$EB^2 = MB^2 + ME^2$$

albo $\frac{1}{4}a^2 = c^2 + ME^2$

zkąd $ME = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - c^2}$.

Wziąwszy potém $NE = ME$, i położywszy NE na miejsce wyrazu pod pierwiastkiem znajdującego się w ważności niewiadomej x, pierwszą z nich zamienicmy na

$$x = \tfrac{1}{2}a + NE = AE + NE = AN.$$

druga na $x = \frac{1}{2}a - NE = EB - NE = NB$.

Zagadnienie 3.

Podzielić Trójkąt równoodległą od podstawy na dwie części, które: by do siebie były w stosunku $m : n$.

12. Nazwijmy a podstawę AB (fig 6.) tego Trójkąta ABC, h wysokość CH; naznaczmy zaś przez y punkt szukany, przez który ma przechodzić równoodległa FE dzieląca Trójkąt w stosunku żądanym. Niewiadome są $GI = x$, $FE = z$.

Równoodległość linii AB i FE daje proporcyę

$$AB : FE = CH : CG$$

albo $a : z = h : x$

zkąd $ax = zh$.

Idzie teraz tylko o znalezienie drugiego równania wyrażającego warunek, aby powierzchnia $ABFE$ była do powierzchni CFE w stosunku $m : n$.

$$\text{Trapez } ABFE = \frac{(a+z)}{2}(h-x)$$

$$\text{Trójkąt } CFE = \frac{zx}{2}$$

A zatém $\frac{a+z}{2}(h-x) : \frac{zx}{2} = m : n$

Zrównawszy iloczyn ze środnich, iloczynowi ze skrajnych, i zniósłszy spólny dzielnik 2. będzie

$$(a+z)(h-x) = mzx$$

Wstawiwszy za z ważność jego wyprowadzoną z równania

$$ax = hz$$

otrzymamy $n\left(a + \frac{ax}{h}\right)(h-x) = \frac{max^2}{h}$

Rozmnożywszy przez h, podzieliwszy zaś przez a

$$n(h+x)(h-x) = mx^2$$

albo $n(h^2 - x^2) = mx^2$

zkąd $x = \pm\sqrt{\frac{nh^2}{m+n}}$

13. Dla wykreślenia tej ważności wynieś na $AD = m+n$ (Fig 7) prosto: Fig. padłę $DC = h$, i przy l w końcu linii Al naryśuj kąt prosty AlB, linia CB w spotkaniu się z przedłużeniem AD, wyznaczy część DB mającą za wyrażenie $\frac{h^2}{m+n}$: bo DB jest trzecią proporcyonalną do linii $m+n$ i h.

Wziąwszy potém $DE = n$, i załoczywszy na EB półkole BME, linia MD będzie ważnością szukanej x.

Gdyż w proporcyi $DB : DM = DM : ED$

albo $\frac{h^2}{m+n} : DM = DM : n$

$$DM^2 = \frac{nh^2}{m+n}.$$

a wyciągnąwszy pierwiastek $DM = \pm\sqrt{\frac{nh^2}{m+n}} = x$

Widocznie dodajna część MD od l do J powinna bydź prowadzona. Ale co ważność ujemna znaczy?

14. Aby to poznać, uważmy iż z natury swojej ujemne ilości, zupełnie przeciwne są dodajnym; tak że ilość dodajna zawsze zostaje zniszczoną inną ujemną jéj równą, i że bytność ilości dodajnej końcowną jest, aby ujemna własności swoje okazała.

Znalazłszy więc podobny wypadek jak $-a$, dla jego wytłomaczenia porównajmy go z $+a$, i dodajmy do obudwuch tych wypadków ilość dodajną $+c$, większą od a: otrzymamy z tego dwie dodajne ilości $c+a$ i $c-a$.

Jeżeli dodajna c+a wyraża odległość punktu D od X (Fig 8) złożo ną z DA = c i AX = a, linia dodajna c-a wyrażać będzie odległość mniejszą którą zatém należy ponieść w tymże kierunku od D do X; odległość xx' równa będzie różnicy za ilości c+a i c-a; jeżeli zaś od XX' = za odejmiemy AX = a, przekonamy się że linią ujemna -a, wyznacza punkt x położony w odległości a od punktu A, lecz w kierunku przeciwnym temu, w jakim należało prowadzić dodajną linię +a; wyobrażenie zatém linii odjemnej, wzbrania w nas zawsze wyobrażenie dodajnej równej tamtej, lecz odjemna w przeciwnym kierunku powinna być prowadzona.

15. Wypada więc z tego że gdy ważność pierwiastku wziętego ze znakiem dodajnym wyrażona jest linią CG, a odetniemy w przeciwnym kierunku CG' = CG, wyznaczymy przez to drugi punkt G', również zagadnieniu odpowiadający: i w istocie poniewaz nie wyraziliśmy analitycznie, w którą stronę trójkąt ABC ma być obrócony, położenie jego zostało nieokreśleniem: poprowadziwszy zatém równoodległą E'F', trójkąt E'F'C rozwiąże zagadnienie drugim sposobem.

Zagadnienie 4.

16. Mając daną linię BA (Fig 9) znaleść na jej kierunku taki punkt C, którego by odległość od A była trzecią proporcyonalną do odległości jego od B i linią całą.

Nazwaczmy przez x a linię daną BA, przez x odległość od A punktu szukanego; odległość od B tegoż punktu będzie a-x. Podług

zadania $a - x : x = x : a$

ztąd $a(a-x) = x^2$

rozwiązawszy to równanie wypada

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + a^2}$$

Ta ważność jest zawsze dodatnią, jeżeli sam tylko znak wyższy pierwiastku zobaczemy zatrzymamy,

gdyż $\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + a^2} > \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2} = \tfrac{1}{2}a$.

17. Dla wykreślenia tej pierwszej ważności przy końcu linii BA, (Fig 10) wyprowadzam prostopadłą Al równą połowie tej linii. Własność figury kwadratu z przeciwprostokątnej daje

$$CB^2 = AB^2 + Al^2$$

przeto $CB = \sqrt{AB^2 + Al^2}$ (*)

albo $CB = \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + a^2}$

jeżeli zatém odejmę $Cl = \tfrac{1}{2}a$, pozostanie

$$EB = \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + a^2} - \tfrac{1}{2}a$$

18. Druga ważność niewiadomej x która powstaje z zatrzymania znaku różnego przy pierwiastku, wyznacza na przedłużenie linii Al drugi punkt C, także zadosyć czyniący zagadnieniu: co nie powinno zastanawiać, bo nic nam w zadaniu nie pokazuje, czy punkt szukany ma się na AB znajdować, czy na jego przedłużeniu.

19. Można uważać z drugiej strony, że ponieważ w pierwszem

(*) Opuszczam tu znak $\pm$ bo gdy wiemy z której strony CB należy powadzić, znak pokazujący to, zupełnie się staje niepotrzebnym.

rozwiązaniu x prowadzi się od A do C, gdy przeto x uważać zechcemy za należące do drugiego, w którem jak wiemy niewiadoma ujemną ilość wyraża, należy odmienić znaki przy niej położony, albo jeżeli tego nie wykonamy, należy przyjąć, że to co my za +x w równaniu a(a-x) = x, uważali, teraz za -x ma bydź brane: i tak a-x które było różnicą w pierwszym razie, w drugim Summę wyobrażać będzie. A że w wyrażeniu a-x, ważność ilości x powinna bydź odjęta od AB, wziąwszy zatém x w przeciwnem znaczeniu własności jego będzie powiększać AB: ta więc druga ważność ilości x od A do C powinna bydź prowadzona: a-x będzie oznaczało AB+AC, nasza zaś proporcya zamieni się

$$CB : AC = AC : AB.$$

i zadosyć uczyni zadaniu, jak łatwo przekonać się można.

Zagadnienie 5.

Wykreślić Trójkąt równy co do powierzchni Trójkątowi ABC (Fig 1) a podobny do Trójkąta SOR (Fig 2).

Fig 1

Fig 2

2o Niechaj będzie AB=c, DC=d, OR=g, SG=k, x podstawa szukanego Trójkąta, y wysokość jego. Dla równości z jednym z Trójkątów

$$\tfrac{1}{2}xy = \tfrac{1}{2}cd$$

albo $xy = cd$

Dla podobieństwa z drugiem

$$x : y = g : k$$

zkąd $y = \frac{xk}{g}$

Wstawiwszy tę ważność ilości y w równanie poprzedzające, otrzymamy

$$\frac{hx^2}{g} = cd$$

albo $x^2 = \frac{cdg}{h}$

wyciągnąwszy pierwiastek $x = \sqrt{\frac{cdg}{h}}$

21. Dla wykreślenia téj ważności (Fig 11) wyniś na RO prostopadłę $LO = d$, Fig 11
i przez punkt L poprowadź równoodległę LM od RO. Przeciąwszy dowolnie tę równoodległę linią MO i na jéj przedłużeniu wziąwszy OM i ON w stosunku h do g, przez punkt N drugą równoodległę poprowadź.

Linia $OE = \frac{dg}{h}$

bo Trójkąty podobne LOM, NOE dają proporcyę

$$OM : ON = OL : OE$$

lub $h : g = d : OE$

więc $OE = \frac{gd}{h}$

Przedłużywszy potém OE o część $EO = c$, i na JE zatoczywszy półkole, część OJ wyznaczona spotkaniem się półkola z podstawą RO, będzie dodatnią wartością pierwiastku: bo JO będąc średnią proporcyonalną między EO i OF daje Fig

$$OE : OJ = OJ : OF$$

albo $\frac{dg}{h} : OJ = OJ : c$

zkąd $OJ^2 = \frac{cdg}{h}$

a wyciągnąwszy pierwiastek $OJ = \sqrt{\frac{cdg}{h}}$

22. Mówiliśmy tylko o dodatniej ważności linii OJ: widoczną jest rzeczą iż ujemna po drugiéj stronie punktu O na przedłużenie linii OJ powinna bydź prowadzoną, i służy za podstawę drugiemu Trójkątowi podobnie rozwiązującemu zagadnienie. (*)

(*) Dla wykreślenia Trójkątów na tych dwóch podstawach, położmy ważności

Zadanie 6.

Przez punkt O dany za kołem ABD (Fig 13) poprowadzić taką sieczną, aby jej część CD objęła kołem danej linii równą była.

23. Niechaj będzie $OB=a$, $OA=p$, $CD=c$, $OC=x$; własność sicznych daje

$$OB:OD=OC:OA$$

lub $$a:c+x=x:b$$

zkąd $$(c+x)x=ab$$

czyli $$cx+x^2=ab.$$

---

niewiadomej $x=\pm OJ$ w równanie $y=\frac{hx}{g}$, a znajdziemy $y=\pm\frac{OJ.h}{g}$, więc y ma dwie ważności równe znaków przeciwnych. Odległość punktu O od spodka tej prostopadłej ma także dwie ważności: gdyż podobieństwo Trójkąta szukanego do Trójkąta SOR daje

$SG:OG=HK:$ odległości punktu O od spodka prostopadłej

więc ta odległość $=\frac{OG.HK}{SG}=\frac{OG.y}{h}=\pm\frac{OG}{h}.OJ.\frac{h}{g}=\pm\frac{OG.OJ}{g}$

ponieważ te dwie ważności są równe i znaków przeciwnych, otrzymamy zatém drugą, przenosząc długość OK pierwszej od O do K'. Przeto w punktach K i K' należy poprowadzić prostopadłe $=y$; że zaś y ma dwie ważności, poprowadzi się cztery takich prostopadłych, KH, KH', K'H, K'H': będziemy więc mieli na dwóch podstawach cztery Trójkąty rozwiązujące zagadnienie.

Można uważać iż te rozwiązania dane rozmaitością znaków, różnym położeniom linii odpowiadają: a że nic nie oznaczało w zagadnieniu z której strony linię prowadzić należało, Algebra nieoznaczeniem

rozwiązawszy to równanie otrzymamy

$$x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}c^2 + ab} - \tfrac{1}{2}c$$

24. Dla wykreślenia pierwszej ważności przez punkt O prowadź styczną OE do koła AED. Własność stycznej daje

$$OB : OE = OE : OA$$

czyli $a : OE = OE : b$

zkąd $OE^2 = ab$

Spuściwszy potém na końcu linii OE prostopadłą $FE = \frac{1}{2}c$, za pomocą własności kwadratu z przeciwprostokątnej otrzymamy

$$OF^2 = OE^2 + FE^2$$

albo $OF^2 = \frac{1}{4}c^2 + ab$

więc $OF = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}$

Wziąwszy potém $FK = EF = \frac{1}{2}c$ będę miał

$$OF - FK$$

albo $OK = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab} - \frac{1}{2}c$

dla pierwszej ważności niewiadomej x.

Gdy tą ważnością jako promieniem z punktu O wziętego za środek zatoczony łuk lk, łuk ten wyznaczy punkt l przez który będzie

---

to położenie zostawić musiała; lecz jeżli dodajnemi tylko ważnościami zechcesz się ograniczyć, zawsze przypuszczając że ważności dodajne prowadzą się od lewej do prawej strony, poznasz że trójkąt OKL sam tylko odpowie zadaniu.

Pokazuje się w tym przykładzie, jak wanemek Algebry nie wyrażony, że x i y powinny bydź dodajnemi, zostawia wolność wybrania tego pomiędzy rozwiązaniami które samo dopełnia żądanego wanemku.

przechodzila sieczna OC, której część objęta kołem = c.

25. Łatwo przewidzieć że druga ważność w przeciwnym kierunku na: leży prowadzić; ale może kto żądać wytłozenia w jaki sposób ta ważność ujemna rozwiązuje zagadnienie. Aby to zrozumieć uważać trzeba, iż równa: nie $(x+c)x = ab$ zawierająca warunki zadania, najprzód wytłomaczone mówi nam tylko, że się szuka na kierunku linii OD takiego punktu, któregoby odległość od punktu O naznaczona przez x wyniła z tej: odległością x powiększoną o c, prostokąt równy prostokątowi ab wysła: wionemu przez iloczyn OB × OA. Zaś rozwiązanie zagadnienia pokaza: to nam że dodatnią ważność od O do C poprowadziwszy, ujemną zaś od O do C', wyznaczonym tym sposobem punktom C i C' żądana własność zarówno służyć będzie.

Wyobrażenie okręgu ACDB nie jest przeto objęte równaniem $(x+c)x = ab$: lecz punkta A, B, C, D, przez które ten okrąg przepro: wadziliśmy, pokazują przez własność sięczności w jakich stosun: kach mają być linie OB, OA, OC, OD, i niejako malują za pomo: cą Geometryi istotę zadania. Drugie rozwiązanie nauczа nas, że uczyniwszy OB' = a; OA' = b, powinniśmy otrzymać

$$OC' : OB' = OA' : OD'$$

żeby zaś ta proporcya także w Figurze Geometrycznej wystawiła się oczom naszym, drugie koło A'D'C' należy zatoczyć, które ją utwo: rzy za pomocą sięczności.

Zadanie 7.

W kącie prostym LAD (Fig 44.) zataczywszy dwa łuki z jednego środka A, Fig 44. podzielić obręb DLEB na dwie równe części bliższym spółśrodkowym łukiem.

27. Niechaj będzie AL = a, AB = b, AT = x.

Z założenia Powierzchnia DAL : Powierzchni ZAT = Powierz: ZAT : Powierz EAB

Że zaś gdy razmaczemy przez 1 : π stosunek średnicy do okręgu, powierzchnia koła zataczonego promieniem r zawsze jest wyrażona przez πr^2, powierzchnie zatem DAL, ZAT, EAB, równe czwartym częściom kół zataczonych promieniami a, x, i b, będą $\frac{1}{4}\pi a^2$, $\frac{1}{4}\pi x^2$, $\frac{1}{4}\pi b^2$.

Wstawiwszy te ważności w równanie poprzedzające

$$\frac{1}{4}\pi a^2 - \frac{1}{4}\pi x^2 = \frac{1}{4}\pi x^2 - \frac{1}{4}\pi b^2$$

zniosłszy spólny czynnik $\frac{1}{4}\pi$, sprowadzimy to równanie do

$$a^2 - x^2 = x^2 - b^2$$

zkąd $x^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$

wyciągnąwszy pierwiastek $x = \pm\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

28. Dla wykreślenia tej ważności punktu B i D prostą BD połączyć należy (*), i na tej prostej półkole DJB zataczyć; to półkole w punkcie J na dwie równe części podzielone da cięciwę $DJ = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

(*) Sądzę że za przykładem Francuzów pozostawszy, lepiej zamiast linią prostą, rzeczownika prostą używać, tem bardziej że już nie mówiemy linią prostopadłą, ale krótko prostopadłą, nie mówiemy linią równoodległą, lecz tylko równoodległą.

Gdyż $DB^2 = DA^2 + AB^2 = a^2 + b^2$

z drugiej strony $DB^2 = DG^2 + BG^2 = 2DG^2$

więc $DG^2 = \frac{DB^2}{2} = \frac{a^2+b^2}{2}$

a $DG = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

29. Odetniemy więc tę ważność od A do F i od A do F', i otrzymamy dwa rozwiązania, z których ostatnie jest ujemne, i wyznacza łuk F'Z, również zadaniu odpowiadający, bo nic w równaniu nie pokazywało, w którą stronę kąt DAB ma być otwarty.

Zagadnienie 8.

Podzielić łuk na trzy równe części.

30. Niechaj będzie ADB tym łukiem (Fig 16) zagadnienie sprowadza się do znalezienia cięciwy AD łuku będącego trzecią częścią AZB.

Wystawmy sobie łuk AZB na trzy równe części podzielony AD, ED, i BE: poprowadźmy promienie CA, CD, CE, CB: niechaj będzie r jednym z tych promieni, a cięciwą AB, zaś x cięciwą szukaną AD. Dla równości łuków EB i AD, prosta AB równoodległą jest od ED, więc

kąt $AFD = FDE$

jako na przemian legły; przeto i kątowi ADF; promień bowiem CE dzieli kąt ADE na dwie równe części. Trójkąt ADF mając kąty przy F i D, równe kątowi CDE jest równoramienny, i podobny do trójkąta CDE; więc $AF = AD = x$,

Podobnie dowiedlibyśmy że

$$GB = EB = x$$

przeto $a = 2x + Jg$ (A)

Dla wyznaczenia Jg poprzednio szukajmy JD: Podobieństwo trójkątów CDE, DJJ, daje $CD : DE = AD : DJ$

czyli $r : x = x : DJ$

zkąd $\frac{x^2}{r} = DJ$

a $CJ = r - \frac{x^2}{r} = \frac{r^2 - x^2}{r}$

Trójkąty podobne CDE, CJg tę drugą proporcyę dają

$$CD : ED = CJ : Jg$$

czyli $r : x = \frac{r^2 - x^2}{r} : Jg = \left(\frac{r^2 - x^2}{r^2}\right) x$

Położywszy tę ważność w równanie (A) będzie

$$a = 2x + \frac{r^2 - x^2}{r^2} \cdot x$$

albo $a = \frac{3r^2 x - x^3}{r^2}$

Ponieważ niewiadoma dana jest równaniem stopnia trzeciego, nie wykonamy zatém jej wykreślenia, zależącego od działań, których nie jesteśmy zdolni dać poznać przed traktowaniem o wyznaczaniu pierwiastków równań stopnia trzeciego, za pomocą przecięć linii krzywych.

Zadanie 9.

Okazać przez samą własność kwadratu z przekątnej prostokątnej, że trójkąt zawsze proporcyonalnie przecięty bywa równoodległą od podstawy.

31. Przypuśćmy naprzód iż ten trójkąt jest prostokątny, i że nim jest BDE (Fig 17); przez punkt A gdzie przechodzi równoodległa od podstawy

FA, poprowadźmy AL równoodległę od boku DE, i niechaj będzie BL = a, AL = b, BA = c, AF = a', DF = b', AD = c'.

Warunek aby kąty L i E były prostemi daje

$$a^2 + b^2 = c^2 \ldots (B)$$

Warunek zaś aby kąt F był prostym daje

$$a'^2 + b'^2 = c'^2 \ldots (C)$$

Ale nie dosyć wyrazić temi równaniami że kąty F i E są proste: wiemy albowiem że dla okazania podobieństwa trójkątów ABL, EDA, trzeba jeszcze dwa kąty mieć równe. Jakoż widać na Fig 18, do której możemy odnieść Fig 17 te same dane, których związek algebraicznie wyraziliśmy, że kąty FAD, i LAB są nierówne; coby nie nastąpiło, gdyby linia BAD prostą była: trzeba zatém trzecim równaniem wyrazić że ta linia BAD, powinna bydź prostą.

W tym razie BAD (Fig 17) stając się przeciwprostoką trzeciego trójkąta prostokątnego daje

$$BE^2 + DE^2 = DB^2$$

albo $(a + a')^2 + (b + b')^2 = (c + c')^2 \ldots (D)$

Idzie więc tylko o wyrugowanie a i a' z trzech równań (B), (C), (D) dla otrzymania ~~ważnej~~ zależności między pozostałemi ilościami b', b, c, c'.

Rozwiązawszy równanie (D) będzie

$$a^2 + 2aa' + a'^2 + b^2 + 2bb' + b'^2 = c^2 + 2cc' + c'^2$$

Odjąwszy równania (B) i (C) pozostanie

$$2aa' + 2bb' = 2cc'$$

czyli $aa' + bb' = cc'$.

czyli $aa' = cc' - bb' \ldots (\mathcal{E})$

Równania $(\mathcal{B})$ i $(\mathcal{C})$ dają

$$a^2 = c^2 - b^2$$
$$a'^2 = c'^2 - b'^2$$

Rozmnożywszy te równania przez siebie otrzymamy

$$a^2 a'^2 = (c^2 - b^2)(c'^2 - b'^2)$$

Równanie $\mathcal{E}$ do kwadratu podniesione daje także

$$a^2 a'^2 = (cc' - bb')^2$$

Zrównawszy z sobą te wypadłe wartości iloczynu $a^2 a'^2$, rozwinąwszy, i sprowadziwszy $b^2 c'^2 - 2cc'bb' + c^2 b'^2 = 0$

Ponieważ pierwsza strona tego równania doskonałym jest kwadratem

przeto $bc' - cb' = 0$
albo $bc' = cb'$
zkąd $c : c' = b : b'$

32. Poprzedzające dowodzenie tylko do prostokątnego Trójkąta zastosowaliśmy być może. W innym przypadku poprowadziemy linię DG, i przedłużemy FA do H: uczyniwszy potém $GH = d$, $DH = d'$, okażemy jak w poprzedzającym razie że $d : d' = b : b'$

Porównawszy to równanie z poprzedniém otrzymanem znajdziemy,

$$d : d' = c : c'.$$

O wykreślaniu ilości spółmiernych.

33. Te rozwiązane zagadnienia wskazują nam potrzebę sposobów ogólnych do wykreślenia ilości które powstają z rozwiązania zagadnień: zajmiemy się naprzód spółmiernemi: te są jednego, dwóch, lub trzech wymiarów, podług tego jak wystawiają linię, powierzchnię, lub bryłę.

34. Wszelkie wyrażenie spółmierne, niezłożone, i jednego wymiaru, wyjątkiem z następujących zamykać się musi

$$a,\ \frac{ab}{c},\ \frac{abc}{de},\ \frac{abcd}{efg},\ \text{itd:}$$

Takoż dosyć jest zgodzić się przez litery wyrażać linie, aby litera a sprawiała w nas wyobrażenie linii

35. Podobnie się rzecz ma i z $\frac{ab}{c}$: gdyż proporcya

$$c : a = b : \frac{ab}{c}$$

pokazuje że $\frac{ab}{c}$ jest czwartą proporcyonalną do linii c, a, i b.

36. Trzecie wyrażenie $\frac{abc}{de}$ tym sposobem napisać można,

$$\frac{ab}{d} \times \frac{c}{e}$$

a jeżeli $\frac{ab}{d}$ naznaczemy przez k, $\frac{ab}{d} \times \frac{c}{e}$ zamieni się na $\frac{kc}{e}$; to zaś wyrażenie zdołamy wykreślić za pomocą czwartej proporcyonalnej. Liczba 35.

37. Wyrażenie $\frac{abcd}{efg}$, także sprowadzi się do czwartej proporcyonalnej: bo napisawszy je tym sposobem

$$\frac{ab}{e} \times \frac{cd}{fg}$$

i uczyniwszy $\frac{ab}{e} = P$, zamieńiemy je na $\frac{Pcd}{fg}$; to zaś wyrażenie jak pod Licz: 36 wykreśli się.

38. Wszystkie ułomki postaci

$$\frac{abc}{d},\ \frac{abcd}{ef},\ \frac{abcde}{fgk}\ \text{itd:}$$

w których ilość liter w liczniku przewyższa dwoma ilość liter w mianowniku, dadzą się wykreślić, po sprowadzeniu ich do kształtu ab, za pomocą czwartej proporcyonalnej; pierwszy albowiem ułomek,

$$\frac{abc}{d} = \frac{ab}{d} \times c = Pc,\ \text{uczyniwszy } \frac{ab}{d} = P.$$

Drugi $\frac{abcd}{ef} = \frac{ab}{e} \times \frac{cd}{f} = Pq$; uczyniwszy $\frac{ab}{e} = P$, $\frac{cd}{f} = Q$

Trzeci $\frac{abcdef}{fgh} = \frac{ab}{f} \times \frac{cdef}{gh} = \frac{Pcdef}{gh}$ uczyniwszy $\frac{ab}{f} = P$. i t d:

39). Równie najprostszém wyrażeniem trzech wymiarów jest abc: mo: żemy nim wystawiać bryłowatość równoległościanu, którego zbiegającemi się krawędziami są a, b, c.

Do tego to kształtu abc, można sprowadzić za pomocą czwartych pro: porcyonalnych wszystkie ułomki postaci

$$\frac{abcd}{e}, \frac{abcde}{fg}, \text{ i t d:}$$

w których ilość liter w liczniku, ilość liter w mianowniku trzema przenosi.

40). Gdy ilość liter w liczniku ta sama jest co w mianowniku, jak w u: łomkach $\frac{a}{b}$, $\frac{ab}{cd}$, ułomki te są żadnych wymiarów, i tylko liczby wyra: żają: bo $\frac{a}{b}$ wyraża ile razy linia b zawartą jest w a; podobnie $\frac{ab}{cd}$ wyra: za ile razy powierzchnia cd zamyka się w powierzchni ab.

41). Czyniemy o ilościach spółmiernych, niezłożonych i powiększeli; to wszy: stko i do wielowyrazowych da się zastosować; niechaj będzie ułomek

$$\frac{abc + def + ghl}{pq + pr + ps} \text{ albo } \frac{abc + def + ghl}{p(q + r + s)}$$

czyniąc $q + r + s = k$, i sprowadzam dany ułomek do

$$\frac{abc + def + ghl}{pk} = \frac{abc}{pk} + \frac{def}{pk} + \frac{ghl}{pk}.$$

zkąd widać, że wykreśliwszy ułomki podług liczby 36, otrzymamy zbiór linii, których Summa będzie wartością tego ułomku wielowyrazowego.

42). Jeżeli mianownik na czynniki nie może być rozłożony, i mamy

$$\frac{abc + def + ghl}{pm + qn + rs}$$

przypuśćmy $qr = px$, $rs = py$; x i y będą nowemi liniami, które jak wykreślić wkrótce poznamy; zaś ułomek zamieni się na

$$\frac{abc + def + ghl}{pm + px + py}$$

czyli $$\frac{abc + def + ghl}{p(m + x + y)} = \frac{abc + def + ghl}{pk + pl + pk}$$

uczyniwszy jak w przeszłym razie $m + x + y = k$. To wyrażenie podług Licz 36 można wykreślić skoro poznamy ważności niewiadomych x i y.

43. Równanie $qr = px$ daje $x = \frac{qr}{p}$; przeto x jest czwartą proporcyonalną do p, q, i r: tym samym sposobem i y się znajdzie za pomocą równania

$$rs = py.$$

44. Weźmy jeszcze ułomek

$$\frac{abcd + efgh}{mnp + qrs}$$

Dla sprowadzenia mianownika do jednego iloczynu przypuśćmy $qr = mx$; Wtym razie x wyznaczy się sposobem wyżej użytym, a mianownik zamieni się na $mnp + mxs$. Uczyniwszy jeszcze $xs = ny$,

będzie $mnp + mny = mn(p + y) = mnq$

(nazwawszy q, czynnik $p + y$), nasz zaś ułomek sprowadzi się do

$$\frac{abcd + efgk}{mnq} = \frac{abcd}{mnq} + \frac{efgh}{mnq}$$

i wykreśli się podług Liczby 37.

45. W ogólności każdy ułomek wielowyrazowy, jeżeli w nim licznik dwoma literami przewyższa mianownik, sprowadzi się do postaci $\frac{ab}{\ }$, jeżeli trzema do $\frac{abc}{\ }$.

46. Zawsze jednak przypuszczamy że tak licznika wyrazy jak mianownika składają się z równej liczby liter; bo żadne zadanie nie może dać

dać wypadku z różnorodnych części złożonego; jakoto; linię; powierzchni; i brył: gdyby np: było

$$\frac{abcd + dbe}{fg}$$

albo raczej $\frac{abcd}{fg} + \frac{dbe}{fg}$

ponieważ $\frac{abcd}{fg}$ wyraża powierzchnię, zaś $\frac{dbe}{fg}$, linię, widzimy przeto iż nie można mieć ilości złożonej z powierzchni i linii.

47. Jednakowoż jest przypadek w którym podobny ułomek może istnieć; wtenczas się to zdarza, gdy która z linii wchodzących w jego wyrażenie, jest równa jedności. Wystawmy przez n tę linię; za pomocą potęg linii n wprowadzonych w wyrazy licznika i mianownika nie zawierających żadnych wyższych wymiarów, zdołamy widocznemi zrobić czynniki zdające się zbywać tym wyrazom.

Naprzykład ułomek $\frac{abcd + dbe + hl}{fg}$

zamieni się na $\frac{abcd + dben^2 + hln^2}{fg}$.

O wykreślaniu ilości niespółmiernych drugiego stopnia.

48. Własności koła podają nam różne sposoby do znajdowania w liniach ilości pierwiastkowych drugiego stopnia. I pomiędzy tych weźmy własność prostopadłej DC do średnicy BA (Fig 19) Wiemy że ta prosto- Fig 19
padła jest średnią proporcyonalną między częściami średnicy na które ją dzieli: to jest że uczyniwszy AD = a, DB = b, CD = x.

$$a : x = x : b$$

zkąd $x^2 = ab$

i $x = \sqrt{ab}$

Mając proste wyrażenie pierwiastkowe, i chcąc je wykreślić, należy tak działać, aby ilość znajdującą się pod pierwiastkiem, sprowadzić do postaci ab: dla uskutecznienia tego, potrzeba użyć sposobu Lic. 38, lub jednego z tych, którezmy podali mając rzecz o wielomiankach wielowyrazowych. Zastosujemy to wykreślenie do kilku przykładów

1ŋ. Założywszy sobie wykreślić $\sqrt{abcd - ghef}$, uczyńmy

$$bc = ax, \quad gh = ay, \quad ef = az;$$

x, y, z będą nam wystawiały nowe linie, które zdołamy wykreślić za pomocą ostatnich równań, dany zaś pierwiastek zamieni się na

$$\sqrt{a^2xd - a^2yz} = \sqrt{(xd - yz)a^2} = a\sqrt{xd - yz}$$

Uczyniwszy potém $yz = xu$, otrzymamy

$$a\sqrt{xd - xu} = a\sqrt{x(d-u)}$$

rozwiązuj nakoniec średnią proporcyonalną między x i d-u, ta średnia proporcyonalna będzie ważnością pierwiastku, a iloczyn sprowadzi się do kształtu ab.

2ŋ. Gdybyśmy jeszcze wykreślić chcieli $\sqrt{\frac{ab^2}{c} - gd}$, uczyniwszy

$$\frac{b^2}{c} = p, \quad gd = ax$$

odmienimy wyrażenie pierwiastkowe na

$$\sqrt{ap - ax} = \sqrt{a(p-x)}$$

będące także postaci ab.

51. Załóżmy sobie nakoniec wykreślić $\frac{a\sqrt{b+c}}{\sqrt{d+e}}$. To wyrażenie po wprowadzeniu ilości przedpierwiastkowej pod pierwiastek stanie się

$$\frac{\sqrt{a^2b+a^2c}}{\sqrt{d+e}} = \sqrt{\frac{a^2b+a^2c}{d+e}} = \sqrt{a^2\frac{ab}{d+e} + a^2\frac{ac}{d+e}}$$

uczyniwszy $\frac{ab}{d+e} = A$, $\frac{ac}{d+e} = B$

będziemy mieli $\sqrt{a^2A+a^2B} = \sqrt{a^2(A+B)}$

ważność którą wykreślemy wziąwszy średnią proporcyonalną między A i B.

52. Własność kwadratu z przeciwprostokątnej także nam daje formuły do których odnosić możemy ilości pierwiastkowe drugiego stopnia: bo w Trójkącie prostokątnym BDE (Fig 17) Fig 17.

$$BD^2 = DE^2 + BE^2$$

albo uczyniwszy $BE = a$, $DE = b$

$$DB^2 = a^2 + b^2, \quad BD = \sqrt{a^2+b^2}$$

Gdy zatém ilość pod pierwiastkiem sprowadzimy do Sumy dwóch kwadratów a^2+b^2, jej ważnością będzie przeciwprostokątna w trójkącie w którym a i b są bokami.

53. To samo rozumienie $BD^2 = BE^2 + DE^2$ daje

$$BE^2 = BD^2 - DE^2$$

uczyniwszy $BD = c$, $DE = b$

$$BE^2 = c^2 - b^2$$

a wyciągnąwszy pierwiastek $BE = \sqrt{c^2-b^2}$

To wyrażenie pokazuje, że jeżli ilość pod pierwiastkiem sprowadzimy do różnicy dwóch kwadratów, jej ważnością będzie bok trójkąta prostokątnego, którego drugim bokiem jest b, przeciwprostokątną zaś c.

54. Damy na to przykład wykreślając $\sqrt{p^2-rr}$.

Uczyniemy do tego $zv = x^2$

x wyznaczy się wzięciem średniej proporcyonalnej między z i v: bo mianuie poprzedzające daje

$$z : x = x : v.$$

skąd $x^2 = zv$

Wstawiwszy tę ważność pod pierwiastek zamieńiemy go na

$$\sqrt{p^2 - x^2}$$

Założywszy zatém półkole na średnicy $AB = p$, i wziąwszy $Al = x$, kąt BCA prosty będzie, a lB ważnością pierwiastku.

55. Wiemy że jest więcej nieznanie sposobów brania średniej proporcyonalnej, i tych podług przypadku do wykreślenia użyć można. Gdybym np: miał wykreślić $\sqrt{a^2 + ab}$

wziąwszy $AD = a$, $DB = b$

założyłbym półkole na $AB = a + b$, a w punkcie połączenia D wyniosłszy prostopadłą Dl, otrzymałbym cięciwę Al na ważność pierwiastku.

Bo ta cięciwa będąc średnią proporcyonalną między AD i AB daje

$$AD : Al = Al : AB.$$

albo $a : Al = Al : a + b$

więc $Al^2 = a^2 + ab.$

a wyciągnąwszy pierwiastek $Al = \sqrt{a^2 + ab}$.

56. To znane prawo Geometryi że styczna jest średnią proporcyonalną między sieczną i jej zewnętrzną częścią, podaje nam łatwy sposób wykreślenia powyższej ilości pierwiastkowej: bo założywszy koło AED promieniem $\frac{1}{2}b$, przedłużywszy średnicę ED częścią $BE = a$, i od

punktu B poprowadziwszy styczną BA, będzie,

$$DB : AB = AB : EB$$

albo $a+b : AB = AB : a$

więc $AB^2 = a^2 + ab$

zaś $AB = \sqrt{a^2+ab}$

więc AB jest ważnością pierwiastku.

57. W ogólności wykreślenie tem jest piękniejsze, im mniej wymaga przygotowań, i gdy się w całości na jednej tylko figurze wykonywa. Tak np: pod liczbą 7. pięknym sposobem w trójkąt wpisaliśmy kwadrat.

O wykreślaniu równań zupełnych drugiego stopnia o jednej niewiadomej.

58. W tém co poprzedziło, wykreślaliśmy wyrażenia wprzód rozwiązawszy równania z których pochodziły.

Załóżmy sobie teraz wykreślać dwie ważności niewiadomej wyznaczonej równaniem drugiego stopnia, nie potrzebując równania tego rozwiązywać.

59. W tym zamiarze wyraz w x^2 dodającym uczyńmy, i całe równanie tak ułóżmy, aby równém było zero: jakiekolwiek będą znaki przy jego wyrazach, tylko te cztery kombinacie otrzymać zdołamy.

$x^2 = px - q$, albo $x^2 - px + q = 0$ . . . . (F)

$x^2 = -px - q$, albo $x^2 + px + q = 0$ . . . . (G)

$x^2 = -px + q$, albo $x^2 + px - q = 0$ . . . (H)

$x^2 = px + q$ albo $x^2 - px - q = 0$ . . . (J)

60. Dla wykreślenia pierwiastków równania (F) na siedzicy (fig 20) $AB = p$ fig 20

zaloz półkole: przy końcu tej średnicy wyprześ prostopadłą $AL = \sqrt{q}$, i poprowadź LC równoodległą od średnicy AB. Widocznie prostopadłe MP, MP', spuszczone z punktów przecięcia M, M', równe są $AL = \sqrt{q}$. Że zaś wszelkie prostopadłe do średnicy są średniemi proporcyonalnemi pomiędzy częściami na które ją dzielą; nazwawszy zatem

$$AP = x, \text{ będzie } PB = p - x$$

$$\text{i } AP : PM = PM : PB$$

$$\text{czyli } x : \sqrt{q} = \sqrt{q} : p - x$$

$$\text{zkąd } px - x^2 = q$$

$$\text{albo } x^2 - px + q = 0$$

Więc jednym z pierwiastków tego równania AP, a że do tego samego wypadku dosziłbyśmy biorąc za x, AP' zamiast AP, drugim przeto pierwiastkiem będzie AP'.

61. Rozwiązawszy równanie (I) znajdziemy

$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}$$

gdy $\frac{1}{4}p^2 \geq q$ czyli $\frac{1}{2}p < \sqrt{q}$, pierwiastek ważności x urojonym się staje: niepodobna zatém, ażeby w tym razie x jakąkolwiek miało ważność: co jest widocznem zkądinąd, prostopadła bowiem $\sqrt{q}$ czyli MP musiałaby przewyższać $\frac{1}{2}p$.

62. Rozwiązawszy równanie (J) przekonamy się, że pierwiastki nie wiadomej są ujemne, i te same co równania (I) tylko z przeciwnemi znakami (*)

(*) Bez rozwiązania tych równań o rzeczony prawdzie przekonać się można

przeto po zmianie znaków, pierwiastki równania (I) dadzą $-AP - AP$, dla pierwiastków równania (q).

63. Jeden z pierwiastków równania (A) następującym sposobem da się wykreślić. Promieniem $\frac{1}{2}p$ zakreśl półkole AMB (Fig 21); i poprowadź do tego półkola styczną $MT = \sqrt{q}$; nazwawszy x część AT średnicy przedłużonej do T punktu T spotkania się jej styczną, dla własności tej stycznej będziesz miał, $TA : TM = TM : TB$.

czyli $x : \sqrt{q} = \sqrt{q} : x + p$

zkąd $x^2 + px = q$

albo $x^2 + px - q = 0$

64. Ten jeden pierwiastek mając, znajdziemy drugi; bo rozwiązawszy równanie (A), i dwie ważności niewiadomej x nazwawszy x' i x'', gdy je dodamy do siebie otrzymamy

$$x' + x'' = -p \ldots\ldots (*)$$

Po przeniesieniu jednego z wyrazów pierwszej strony na drugą, przekonamy się że każdy z pierwiastków równy jest drugiemu wziętemu

---

te bowiem równania tylko się niepozytemi potęgami niewiadomej różnią; a Teorya równań uczy nas, że w tym przypadku pierwiastki jednego równania są pierwiastkami drugiego wziętemi ujemnie

---

(*) Wiemy także z Teoryi równań, że spółczynnik powzięty ujemnie, równy jest Sumie pierwiastków równania $x^2 + px - q = 0$.

z przeciwnym znakiem, i zmniejszonemu ilością p: a że TA jest jednym z pierwiastków równania (H), drugi przeto będzie $-TA-p=-(TA+p)$

$$-(TA+p)=-(TA+AB)=-TB.$$

65. Nakoniec rozwiązawszy równania (H) i (I) poznamy jak pod Liczbą 61, że pierwiastki równania (I) te same są co równania (H), lecz wzięte z przeciwnemi znakami, i mogą być wystawione przez

$$-TA \text{ i } +TB.$$

Główne Zasady

Geometryi Analitycznej o dwóch wymiarach.

W jaki sposób równanie z dwoma niewyznaczonemi daje linię nazywaną miejscem równania.

66 Gdy między dwoma niewyznaczonemi x i y, tylko jedno równanie mamy, ważność każdej z niewiadomych, nie wprzód się otrzyma, aż drugiej pewną jakąkolwiek nadamy.

Tak mając równanie

$$\frac{(x-1)^2}{x-\sqrt{y-2}} - x = \sqrt{y-2}.$$

Gdy dla x nadamy z kolei ważności następujące

x=0 znajdziemy y = 1
x=1 . . . . . y = 3
x=2 . . . . . y = 5
x=3 . . . . . y = 7 i td:

tak że na każde rozwiązanie otrzymamy ważność ilości x, i ważność ilości y pierwszej odpowiadającą.

67. Zastanówmy się nad tém jak ten zbiór wypadków przez figurę wystawić można.

Zgodzono się powierzchnię na dwie nieograniczone linie AX; AY; przez: Figi mające się pod kątem ~~xxxxbyxx~~ jakimkolwiek, który dla większej dogodności za prosty uważać będziemy. AX nazwano osią odciętych, AY osią rzędnych.

68. Chcąc wykreślić jakie rozwiązanie, to naprzykład gdy x=2, y=5, weźmiesz

na osi odciętych linię AR=2, i przy jej końcu poprowadziwszy linię PM=5 równo-
odległę od osi rzędnych: układ linii AP i PM da rozwiązanie.

Niechaj będzie jeszcze x=Aq=1, podług Licz: 66, y=3; Poprowadziwszy zatém x=1:
przez punkt q równoodległę qn od osi rzędnych, a qn i Aq będą rozwiązaniem
przypadku w którym x=1, y=3.

Każde rozwiązanie wyznacza położenie punktu na figurze; tak naprzykład
w naszych przykładach wyznaczyliśmy punkta M i n, pierwszy za pomocą li-
nii AP i PM, drugi za pomocą linii Aq i qn.

69. W ogólności układowi tych dwóch linii wyznaczających położenie punk-
tu, spółrzędnych imię nadano; i tak AP i PM są spółrzędnemi punktu M;
Aq zaś i qn są spółrzędnemi punktu n.

70. Lecz gdy spółrzędne nie są wymierzone razem, ta co idzie w kierunku
Osi Odciętych przybiera imię Odciętej, prowadzona zaś równoodległe od Osi
Rzędnych, przybiera imię Rzędnej: tak w naszych przykładach AP i Aq są
dwie odcięte, PM i qn są dwie rzędne.

71. Ponieważ każda Odcięta zawarta jest między spodkiem swojej rzędnej
i punktem A, dla tej przyczyny ten punkt A nazwano Początkiem.

72. Wykreśliwszy zatém (Fig 23) ważności dane równaniem Licz: 66, i biorąc Fig
odcięte =0, a rzędne AR=1
AP=1 ..... PM=3
AP'=2 ..... P'M'=5
AP''=3 ..... P''M''=7 i td:

wyznaczemy szereg punktów R, M, M', M'', poddanych jednemu prawu, bo

nie były dowolnie wzięte, i coraz bardziej oddalających się od osi AX.

73. Ta mała liczba rozwiązań, jest niczém w porównaniu z nieskończoną ilością rozwiązań, które daje nasze równanie, gdy nawet ograniczemy się odcięte mi mniejszemi od AP". Gdybyśmy naprzykład wstawiali następnie w nasze równanie ważności utomkowe $x = \frac{1}{2}$ znajdziemy $y = 2$

$x = 1\frac{1}{2}$ . . . . . $y = 4$

$x = 2\frac{1}{2}$ . . . . . $y = 6$

Wziąwszy zatém (Fig 23) Figa

odcięte $Aq = \frac{1}{2}$ zrobiemy rzędną $qn = 2$.

$Aq' = 1\frac{1}{2}$ . . . . . $q'n' = 4$

$Aq'' = 2\frac{1}{2}$ . . . . . $q''n'' = 6$.

i punkta R, n, M, n', M', n", M", jeszcze więcej do siebie się zbliżą.

74. Dotychczas mówiliśmy tylko o dodajnych rozwiązaniach; lecz to czośmy we wstępie powiedzieli, dostatecznem jest do dania wyobrażenia jak się ujemne wykreślają.

Różne przemiany znaków przy niewiadomych, gdy obydwie razem nie są dodajne, tylko te trzy wypadki dać mogą

Pierwszy x ujemne, y dodajne

Drugi x ujemne, y ujemne

Trzeci x dodajne, y ujemne.

W pierwszym (Fig 22) rozwiązanie wyznacza punkt L w kącie XAY. Używszy Fig
niwszy naprzykład $x = -\frac{1}{4}$, znajdziemy $y = \frac{1}{2}$: wziąwszy zatém odciętę $AJ = \frac{1}{4}$,
i rzędną $JL = \frac{1}{2}$ wyznaczemy punkt L.

W drugiem przypadku rozwiązanie daje punkt w kącie X'AY'. Naprzykład jeżeli $x = -1$; $y = -1$, weźmiemy zatem odciętę $AJ' = -1$, rzędną $J'L' = -1$ i wyznaczemy

punkt L.

Nakoniec w trzecim w którym x dodajne, y zaś ujemne, rozwiązanie wyznacza punkt w kącie XAY; nasze równanie $y=2x+1$ nie dostarcza przykładu na ten przypadek.

P.S. Widzieliśmy, Liczba 73, że punkta za pomocą spółrzędnych otrzymane, tem więcej się przybliżały, im odcięte mniej się różniły od siebie: lecz jaką nazwać czyć granicę przybliżaniu się tych punktów? Dla zniesienia tej trudności, obacz iż ogólny układ wszystkich punktów wyznaczonych równaniem $y=2x+1$, nadając następnie dla x wszystkie ważności, jakie tylko pomyśleć zdołamy, jest linią ciągłą.

Gdyby układ tych wszystkich punktów nie tworzył linii ciągłej, to by tylko w dwóch przypadkach nastąpić mogło: albo istniałyby odcięte bez odpowiadających im rzędnych, takie jak AP (Fig 24), co bydź nie może, bo Fig 24
wszelka ważność nadana dla x, wydaje zaraz y: lub też zdarzyłoby się (Fig 25) Fig 25
iż dwie następujące po sobie rzędne, różniąc się pewną ilością MM', sprawiłyby w krzywej przerwę między punktami M i M': co także bydź nie może: z natury bowiem równania, ponieważ y wszelką może mieć ważność, przeto ważność większa od PM, a mniejsza od PM', nie mogłaby gdzieindziej bydź prowadzoną, jak przy końcu P odciętej AP, wszystkie bowiem rzędne idą w stosunku rosnącym, i w jednym kierunku zawsze. Wynaczylibyśmy zatém punkt w przerwie MM', co jest przeciw drugiemu założeniu. A zatém z układu punktów wyznaczonych spółrzędnemi równania $y=2x+1$, powstaje linia ciągła, która jak zaraz poznamy,

jest linią prostą.

76. Poprzedzające dowodzenie do wszystkich równań da się zastosować: a gdy linia w pewnych tylko granicach jest ciągłą, dosyć tę ciągłość dowieść w częściach obiętych temi granicami.

77. Linia którąśmy spółrzędnemi liczby 75 wyznaczyli, tém jest właśnie co miejscem równania nazywamy: jest zaś prostą lub krzywą podług stopnia jej równania.

78. Linia będąca miejscem równania, używa zatém tej własności, że każdy punkt na niej wzięty, wystawia nam w spółrzędnych swoich wartości niewiadomych x i y, które zadosyć uczynią równaniu.

O miejscu równania pierwszego stopnia z dwoma niewyznaczonemi.

79. Równanie pierwszego stopnia z dwoma niewyznaczonemi, w całej ogólności jest $My = Nx + P$

Podzielone przez M zamieni się na

$$y = \frac{N}{M}x + \frac{P}{M}$$

uczyniwszy $\frac{N}{M} = a$, $\frac{P}{M} = b$, sprowadzimy je do

$$y = ax + b.$$

w którém a i b, ilości dodajne, ujemne, lub żadne wyrażać mogą.

Rozbierzmy następnie te wszystkie przypadki. Przypuśćmy naprzód $b = 0$, a zas dodajném, powstanie zkąd równanie

$$y = ax$$

dające proporcyą $x : y = 1 : a$

Linia prosta będąca miejscem tego równania, powinna mieć tę własność, aby jej odcięta była zawsze do rzędnej w stosunku 1:a. Dla poznania co znaczy ta stała a, czynię $x=1$, zkąd równanie $y=ax$, daje

$$y=a;$$

zatém stała a jest rzędną odpowiadającą odciętej $x=1$

80. Przyjąwszy punkt A za początek (Fig 26) i AX za oś odciętych, jeżeli Fig. wezmę odciętą AJ równą jedności linijnej, i z jej końca J wyprowadzę prostopadłą JG, prosta AG przez początek i punkt G przechodząca będzie miejscem równania $y=ax$: bo z któregokolwiek punktu AX naprzykład M tej prostej spuściwszy prostopadłą MP, i nazwawszy $AP=x$; $PM=y$; Trójkąty prostokątne podobne dadzą proporcyą

$$AJ:JG=AP:PM.$$

albo $1:a=x:y$

zkąd $y=ax$

równanie prostej przechodzącej przez początek.

81. Geometrzy mówią że a jest styczną trygonometryczną kąta MAP, który dana prosta z osią odciętych czyni. Iw istocie, promień tablic wziąwszy za jedność, Trójkąt AGJ, da

$AJ:AG=$ promień : stycznej tablic

albo $1:a=1:$ stycznej GAJ.

więc Styczna $GAJ=a$.

82. Gdy prosta nie przechodzi przez początek, musi spotkać albo oś AY, (Fig 27), albo jej przedłużenie AY', i w tym ostatnim przypadku przecina oś odciętych. Rozpatrzmy naprzód pierwszy.

Niechaj będą AP i PM współrzędne x i y punktu M wziętego dowolnie

na prostej BC przecinającej oś rzędnych w punkcie B: poprowadźmy przez początek A prostą AD równoodległą od BC: widocznie

$$PM \text{ czyli } y = PD + DM \quad (I)$$

część PD równania tego może być uważana za rzędną, która w równaniu linii AD, odpowiada odciętej $AP = x$

Do wyznaczenia tego równania ponieważ AD przez początek przechodzi, dosyć mieć styczną trygonometryczną kąta XAD; że zaś AD równoodległa jest od BC, kąt przeto XAD który czyni z osią odciętych, równy jest kątowi COX, który dana prosta CB z tąż osią czyni. Nazwijmy a styczną trygonometryczną tego ostatniego kąta, a będzie więc także styczną trygonometryczną kąta XAD; ztąd linia AD ma równanie

$$y = ax$$

Że zaś y tego równania staje się PD, gdy bierzemy $x = AP$,

$$\text{więc } PD = ax$$

Równoodległość prostych BC i AD pokazuje że $DM = AB$; Nazwijmy b część AB osi rzędnych zawartą pomiędzy początkiem i daną prostą, i wstawmy w równanie (I) ważności otrzymane dla PD i DM, będziemy ztąd mieli $y = ax + b$

równanie prostej przecinającej oś rzędnych.

83. Jeżeli prosta B'C' przecina oś odciętych, a zatem spotyka przedłużenie osi rzędnych, poprowadziwszy od B'C' równoodległą AD

$$\text{rzędna } PM', \text{ albo } y = PD - DM' \ldots (K)$$

Niechaj będzie a styczna trygonometryczna kąta C'O'X, który nasza pro-

czyni z osią odciętych. Kąt DAX będzie miał tę samą styczną i dowiedziemy jak powyżej, iż gdy w równaniu prostej AD przechodzącej przez początek, odcięta x wystawiona jest przez AP

$$PD = ax$$

część AB' nazwawszy b, DM' = AB' = b; i wstawiwszy otrzymane ważności dla PD i DM' w równanie (K) znajdziemy

$$y = ax - b$$

równanie prostej przecinającej oś odciętych.

84. Dotąd ciągle przypuszczaliśmy, że styczna trygonometryczna kąta który dana prosta czyni z osią odciętych, należała do kąta ostrego DAP (*): lecz gdy kąt zamienia się na rozwarty, uczy nas Trygonometrija, że styczna jego jest ujemna, i równa stycznej spełnienia danego kąta; wtym przypadku równania $y = ax$, zamieniają się na $y = -ax$

$y = ax + b$ ..... $y = -ax + b$

$y = ax - b$ ..... $y = -ax - b$

85. Do tych ostatnich wypadków właściwszym sposobem dojść można.

Niechaj będą współrzędne punktu wziętego na prostej BC, AP = x, PM = y; stała AB = b, zaś a styczna trygonometryczna kąta ostrego spełniającego kąt BCX, który nasza prosta BC czyni z osią odciętych. Z tego kąt BQM daje

$$1 : a = QM : BQ$$

czyli $1 : a = x : BQ$

więc $BQ = ax$.

To mając ponieważ PM = AB - BQ, czyli położywszy ich ważności

$$y = b - ax$$

równanie prostej BC przecinającej oś odciętych pod kątem rozwartym.

Ten wypadek zgadza się z poprzedzającym; pokazuję bowiem że w równaniu $y=ax+b$ należy brać ujemnie styczną kąta ostrego spełniającego rozwarty, powstającym z przecięcia się danej prostéj z osią odciętych

86 Niech zawsze a wypławia styczną trygonometryczną kąta ostrego spełniającego kąt rozwarty prostej BE z osią odciętych, (Fig 29), zaś b linię AB; nazwijmy do tego AP, x; i PM, y; ponieważ y pod osią odciętych pada, ważność jego musi bydź ujemną, więc

$$y = -PM = -(PD+DM) = -(PB+AB) = -(PD+b)$$

Dla wyznaczenia PD uważam Trójkąt PDA, ten daje,

$$1 : a = x : PD$$
$$\text{zkąd } PD = ax$$

wstawiwszy tę ważność otrzymamy

$$y = -(ax+b)$$
$$\text{czyli } y = -ax - b.$$

równanie prostéj czyniącej kąt rozwarty z kierunkiem osi odciętych, i przecinającej jéj przedłużenie.

87. Gdy w równaniu $y=ax+b$, uczyniemy $x=0$, równanie $y=b$, jeden tylko punkt B wyznaczyć zdoła (Fig 27). Ponieważ położenie punktu jest już wyznaczoném, skoro znamy ważności α i β spółrzędnych x i y tego punktu, to jest gdy mamy równania $x=\alpha$, $y=\beta$, tym przeto równaniom nadano imie równań punktu. Widocznie w niniejszym przypadku $\alpha=0$, $\beta=b$.

Natomiast a może bydź równe zeru, chociaż x nie jest: natenczas $y=b$: te dwie ważności stałej a i stałej b czynią $x=\frac{y-b}{a}=\frac{0}{0}$, a zatém x niewyznaczoném zostaje, y zaś ma tylko jedną ważność: widać przeto iż jakąkolwiek odciętą weźmiemy, rzędna będzie b: co pokazuje że prosta równoodległą

jest od osi odciętych, i przecina oś rzędnych w odległości b od początku. Ta równoodległość zkądinąd jest widoczną, kąt bowiem jest żaden.

Jeżeli nakoniec w równaniu $y=ax+b$, a staje się nieskończonem, kąt COX (Fig 15) zamienia się na prosty, i natenczas punkt P wychodzi w punkt O, odcięta na tylko jedną ważność AO, prosta zaś CD przybiera kierunek równoodległy od osi AY. Fig 15

88. Wypada przeto z tego wszystkiego co poprzedza, że byle stałe a i b, należące do równania $y=ax+b$, zgodzono się uważać za zdolne do wystawiania ważności dodatnych, ujemnych, lub żadnych, równania wszelkich linii prostych (podług przypadku) w tém jedném zamykać się mogą, jakiekolwiek położenie te linie przybiorą: dla tego się mówi że

$$y=ax+b$$

jest równaniem linii prostej.

O równaniu linii prostej mającej przechodzić przez dane punkta.

89 Dotychczas położenie naszej prostej przez stałe a i b wyznaczaliśmy było. Pierwsza z nich wskazywała nam kąt, który prosta z osią odciętych czyniła, druga punkt przecięcia się tej prostej z osią rzędnych, albo co na toż wychodzi, punkt mający za współrzędne o i b. Widoczną jest rzeczą, iż położenie tej prostej musiało bydź znaném, skoro mieliśmy kąt, i punkt jeden wiadomy przez współrzędne. Ogulniając to wyobrażenie, zamiast punktu na osi rzędnych, możemy wziąć

punkt kłóry kolwiek, i znaleść równanie prostej która przez ten punkt przechodząc, czyni kąt a z osią odciętych.

Niechaj będą x i β spółrzędne tego punktu: chociaż nie znamy jeszcze równania prostej, bo jéj położenie dopiero po dopełnieniu dwóch warunków może być wyznaczonem, nie przypuszczając do tego że iloczyn kąta który ta prosta z osią odciętych czyni jest nieskończona, przypadku w którym ten kąt byłby prostym, a zatém linia równoodległą od osi rzędnych, możemy jednak przeświadczać, że kierunek téj linii ośrzędnych koniecznie napotkać musi. Nazwijmy b nieznaną odległość początku od punktu w którym dana prosta przecina oś rzędnych: ta prosta będzie więc miała za równanie

$$y = ax + b \ldots\ldots (L)$$

A że punkt α, β, znajduje się na niéj, skoro przeto nadamy dla x wartość szczególną α, y będzie β, i nasze równanie zamieni się na

$$\beta = a\alpha + b$$

zkąd $b = \beta - a\alpha$

Wstawiwszy wartość téj stałej w równanie (L)

$$y = ax - a\alpha + \beta$$

$$y - \beta = ax - a\alpha$$

$$y - \beta = a(x - \alpha) \ldots (M)$$

równanie prostej mającej przechodzić przez punkt α, β.

90. Łatwo widzimy to że gdy prosta przez dwa punkta ma przechodzić, natenczas jéj położenie jest już znaczone. Wystawiajmy zawsze jéj równanie przez $y = ax + b$, i starajmy się wyznaczyć wartości stałych a i b za pomocą

spółrzędnych tych punktów.

Niechaj będą α i β spółrzędne jednego z tych punktów, α', β' drugiego. Że punkta z założenia znajdując się na prostej której równanie $y = ax + b$, dadzą równania

$$\beta = a\alpha + b \ldots\ldots (N)$$
$$\beta' = a\alpha' + b \ldots\ldots (O)$$

Odjąwszy równanie (N) od równania (O), i ważność stałej a z tego równania wyciągnąwszy, znajdziemy

$$a = \frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha}$$

Rozmnożywszy równanie (N) przez α', równanie (O) przez α, i odciągnąwszy jedno od drugiego

$$\alpha'\beta - \alpha\beta' = b\alpha' - b\alpha$$

zkąd

$$b = \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha}$$

Gdy nakoniec ważności stałych a i b wstawimy w równanie $y = ax + b$, otrzymamy

$$y = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} x + \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha}$$

równanie żądane.

91. Aby dojść do równania więcej prostego, uważmy iż w równaniu

$$y - \beta = a(x - \alpha)$$

prostej mającej przez dany punkt przechodzić, stała a dowolna jest. Lecz gdy zniewalamy prostę do przechodzenia przez dwa punkta, ktż wyznaczony tą stałą, przestaje bydź dowolnym. I w istocie ważność stałej tej stawiła się w funkcyi spółrzędnych dwóch naszych punktów, gdy znaleźliśmy $a = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}$. Wstawiwszy tę ważność w równanie $y - \beta = a(x - \alpha)$ zniewolemy linią do czynienia takiego kąta, aby przez punkt α', β' przechodzić mogła, i będziemy mieli

$$y-\beta=\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}(x-\alpha)\ldots\ldots(P)$$

równanie prostej mającej przechodzić przez dwa punkta.

Równanie to wchodzi w równanie Lic. 90, po przeniesieniu 3 na drugą stronę, po sprowadzeniu do jednego mianownika, i zniesieniu ilości które się niszczą.

92. Równanie (P) symetryczném jest ze względu na obadwa punkta: to jest że spółrzędne α,β', nie wchodzą w nie różnym sposobem od spółrzędnych α,β. Jakoż $\beta'-\beta$ odjąwszy od każdej strony, zamienięmy nasze równanie na

$$y-\beta'=\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}(x-\alpha)-(\beta'-\beta)$$

Rozwiązawszy drugą stronę, sprowadziwszy do jednego mianownika, i zniósłszy wyrazy które się niszczą

$$y-\beta'=\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}x-\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}\alpha'=\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}(x-\alpha')$$

Rozmnożywszy przez -1 tak licznik jak mianownik ułamku $\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}$, otrzymamy

$$y-\beta'=\frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'}(x-\alpha')$$

równanie to samo co równanie (P), w którem tylko α na α', α' na α, β na β', β' na β, zmienione. Przeto jakiekolwiek będzie położenie danych punktów, można wziąć podług woli jeden za α,β: natenczas drugi już koniecznie będzie α',β'.

93. Do tego samego wypadku dojdziemy, nie wykonywając tych przekształceń: bo gdy, Lic. 90, dla wyznaczenia stałych a i b znajdujących się w równaniu $y=ax+b$, używaliśmy równań $\beta=a\alpha+b$, $\beta'=a\alpha'+b$, jednej postaci będących, mogliśmy dla każdego z punktów wziąć spółrzędne α,β, lub

spółrzędne α', β'.

94. Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkta, można także bezpośrednio z uwiązań Geometrycznych wyprowadzić, a to następującym sposobem.

Niechaj będzie prosta CD (Fig 30) z kierunkiem osi odciętych czyniąca kąt ECD, którego styczna jest a.

Nazwijmy α, β spółrzędne AB, BC punktu C tej prostej, x, y spółrzędne AP, PM którегokolwiek punktu M leżącego tej prostej. Z trójkąta CQM daje

$$1 : a = CQ : QM$$
$$\text{czyli } 1 : a = x - \alpha : y - \beta$$
$$\text{więc } y - \beta = a(x - \alpha).$$

równanie prostej mającej przez dany punkt przechodzić.

95. Nazwawszy α' i β' spółrzędne AE, ED punktu D, możemy ułożyć proporcyę

$$1 : a = CE : ED$$
$$\text{czyli } 1 : a = \alpha' - \alpha : \beta' - \beta$$
$$\text{z kąd } a = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}$$

Wstawiwszy tę ważność w równanie poprzedzające, otrzymamy,

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha) \ldots (P)$$

równanie prostej mającej przechodzić przez dwa punkta.

96. Gdyby kąt prostej CD (Fig 31) z kierunkiem osi odciętych był rozwarty, ECD byłby spełnieniem jego, i miałby tę samą styczną trygonometryczną, którą przez a naznaczemy: zatrzymawszy te same dane będzie

$$1 : a = CQ : QM$$
$$\text{czyli } 1 : a = \alpha - x : y - \beta$$
$$\text{z kąd } y - \beta = a(\alpha - x)$$
$$\text{albo } y - \beta = -a(x - \alpha)$$

97. Nakoniec gdyby drugi punkt D przez swoje spotrzędne α', β' był dany, trójkąt EDL dałby $1 : a = lE : ED$

czyli $1 : a = \alpha - \alpha' : \beta' - \beta$

albo jeszcze: $a = -(\alpha' - \alpha) : \beta' - \beta$

zkąd $a = -\frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}$

Wstawiwszy tę ważność w równanie Liczb 76, otrzymamy

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha)$$

98. Ponieważ to równanie już znaleźliśmy, Liczb 91 i 95 dla linii czyniącej kąt ostry z osią odciętych, możemy zatém wnieść iż zarówno ostremu jak rozwartemu kątowi służy.

99. Podobnie uogulniemy i równanie $y - \beta = a(x - \alpha)$, przyjąwszy iż a dodającą ilość w pierwszym razie, w drugim ujemną wyrażać może.

100. Jeżli w tém ostatniém równaniu $\alpha = 0$, $\beta = b$, otrzymamy $y - b = ax$ albo raczej $y = ax + b$, równanie już znalezione pod Liczb 88 dla linii prostej.

O Równaniu prostopadłej i równoodległej od prostej której równanie mamy danem.

101. Widzieliśmy że prosta mająca przechodzić przez punkt α, β, może przechodzić i przez drugi punkt α', β', gdy stosowną dla a ważność nadamy: a można wszelkim innym warunkiem naznaczyć.

102. Załóżmy sobie znaleść równanie prostej Bl (Fig 32) mającej przechodzić przez dany punkt T, i prostopadłej do prostej Ol, której równanie jest $y = ax + b$. Fig 32.

Niechaj będą α i β spółrzędne AA i AT punktu T, a ważność stycznej trygonometrycznej kąta CBX, który ta prostopadła z osią odciętych czyni: kąt ten w przypadku a dodatniego rozwartym jest zawsze, bo równy jest sumie kątów CAB i ACB, z których ACB jest kątem prostym. Równanie linii BC przechodzącej przez punkt α, β będzie zatem ogólnie

$$y - \beta = -a'(x - \alpha)$$

Dotychczas nic nie rozróżnia tego równania, od równań wszelkich linii przechodzących przez punkt α, β, i czyniących kąt rozwarty z osią odciętych. Ale ponieważ a' jest także styczną kąta CBO spełniającego CBX, a CBO jest dopełnieniem kąta CAB, przeto

$$\text{Styczna CBO} = \text{Dostycznej CAB}.$$

Że zaś między Dostyczną i styczną istnieje proporcya

$$\text{Styczna} : 1 = 1 : \text{Dostycznej}$$
$$\text{czyli } a : 1 = 1 : a'$$
$$\text{więc } a' = \frac{1}{a}$$

Wstawiwszy tę ważność w nasze równanie otrzymamy

$$y - \beta = -\frac{1}{a}(x - \alpha) \ldots (a)$$

równanie linii prostopadłej do linii mającej za równanie $y = ax + b$, i przechodzącej przez dany punkt α, β.

103. Znaleźliśmy to równanie prostopadłej CB opierając się na zasadach poprzednio wyłożonych. Teraz je właściwszym sposobem otrzymamy.

Niechaj będą x, y spółrzędne AP i PM (Fig 32) którego kolwiek punktu M linii BC prostopadłej do CO, α, β spółrzędne AA i AT punktu T.

Trójkąty podobne AJB, PMB dają

$$PB : PM = AB : AJ$$

czyli $\alpha + AB - x : y = AB : \beta$ ... ... (R)

W tej proporcyi tylko BH mamy niewiadomem. Ponieważ a jest styczną trygonometryczną kąta BOC, jeżeli zatem od linii CO poprowadzimy równoodległą IK, kąt IKB tę samą styczną mieć będzie, z czego następująca wynikanie proporcya $\quad 1 : a = KH : \beta$

$$\text{więc } KH = \frac{\beta}{a}$$

Linia AJ będąc prostopadłą spuszczoną z wierzchołka kąta prostego BJK na przeciwprostokątną, jest średnią proporcyonalną między KB i AK, więc $\quad AK : JH = JH : HB$

$$\text{czyli } \frac{\beta}{a} : \beta = \beta : HB$$

$$\text{więc } HB = a\beta$$

Wstawiwszy tę ważność w proporcyę (R) zamienimy ją na

$$\alpha + a\beta - x : y = a\beta : \beta$$

drugą stronę przez β podzieliwszy

$$\alpha + a\beta - x : y = a : 1$$

$$\text{więc } ay = \alpha + a\beta - x$$

przeniósłszy $\alpha\beta$ na drugą stronę, i zważywszy iż a jest spólnym czynnikiem dwóch wyrazów $\quad a(y - \beta) = \alpha - x$

przez a podzieliwszy $\quad y - \beta = \frac{1}{a}(\alpha - x)$

że zaś $\alpha - x = -(x - \alpha)$

więc otrzymamy $\quad y - \beta = -\frac{1}{a}(x - \alpha)$

równanie liczby poprzedzającej.

104. W równanie $y - \beta = -\frac{1}{a}(x - \alpha)$ uczyniwszy $\beta = b$, $\alpha = 0$ znajdziemy $y - b = -\frac{x}{a}$

albo $y = -\frac{x}{a} + 6$

na równanie prostopadłej $\mathfrak{E}X$ (Fig 33) do prostej $O\mathfrak{E}$ w punkcie $\mathfrak{E}$ w którym Fig 33
ta prosta $O\mathfrak{E}$ przecina oś rzędnych.

105. Gdy poprowadzimy równoodległą od prostej której równanie $y = ax + b$, ta równoodległa czyniąc koniecznie ten sam kąt z osią odciętych, musi mieć w swoim równaniu za współczynnik współrzędnej x, tę samą styczną trygonometryczną: to jest wyraziwszy równanie równoodległej przez $y = a'x + b'$, będzie $a = a'$. Inaczej się nie ma ze stałem b i b', gdyby te bowiem równemi były, dwie te proste w jednym punkcie przecinałyby oś odciętych; a że $a = a'$, wzięłyby ten sam kierunek, i uczyniłyby jedną linię: czego nie przypuszczamy, wyróżniając równoodległą od linii danej.

O wyrażeniu odległości dwóch punktów.

106. Gdy znamy współrzędne dwóch punktów, nie tylko że te nam dają równanie prostej przechodzącej przez nie, lecz nadto do wyznaczenia odległości tych dwóch punktów służyć mogą.

Jakoż niechaj będzie $AX = \alpha$, $A\mathfrak{E} = \beta$; nazwawszy x i y współrzędne Fig 34
punktu D... $\mathfrak{E}D$... czyli $z = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$
punktu D'... $\mathfrak{E}D'$... czyli $z = \sqrt{(\alpha-x)^2 + (y-\beta)^2}$
punktu D''... $\mathfrak{E}D''$... czyli $z = \sqrt{(\alpha-x)^2 + (\beta-y)^2}$
punktu D'''... $\mathfrak{E}D'''$... czyli $z = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (\beta-y)^2}$

Te cztery ważności z są równe, gdyż $(x-\alpha)^2 = (\alpha-x)^2$ i $(y-\beta)^2 = (\beta-y)^2$ jak się łatwo przekonać można rozwinąwszy te iloczyny:

$$z = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} \quad (*)$$

jest ogólném wyrażeniem odległości punktu α, β, od punktu x, y.

O Równaniu koła.

107. Niechaj będą α i β spółrzędne AH i HC (Fig 35) środka koła, x i y spół- Fig 35.
rzędne punktu jakiegokolwiek na okręgu: ponieważ kto tę szczególną koła
znać posiada, że odległość tych dwóch punktów stale jest równa promie-
niowi a, znajdziemy zatém $a = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} \ldots (I)$
najogólniejsze równanie koła.

108. To równanie prostszém się staje, gdy początek przy końcu średnicy
jest wzięty. (Fig 36). Należeć bowiem odcięta środka $\alpha = a$, rzędna $\beta = 0$; Fig 36.
wiwszy te ważności w równanie (I) podniesione do kwadratu, sprowadzimy
i wyciągnąwszy ważność zmiennej, otrzymamy

$$y^2 = 2ax - x^2$$

równanie koła, gdy się początek bierze przy końcu średnicy.

109. Jeszcze do prostszego równania przyjdziemy, uczyniwszy $\alpha = 0$, i $\beta = 0$;
należeć początek jest w środku, a równanie ogólne podniesione do kwa-
dratu zamienia się na $a^2 = x^2 + y^2$

czyli $y^2 = a^2 - x^2$.

(*) Nie kładziemy podwójnego znaku $\pm$ przed pierwiastkiem, bo mając danem położenie tych dwóch punktów, tylko bezwzględną ważność ich odległo-
ści wyznaczamy.

równanie koła gdy początek w środku jego położony.

110. Aby do równania $y^2 = 2ax - x^2$ można przystosować sposób, używany pod Liczbą 72. do wykreślenia przez punkta miejsca równania, należy a na równe części podzielić. Gdy naprzykład weźmiemy a o pięciu częściach, uczyniemy $a = 5$; w równaniu $y^2 = 2xa - x^2$; wyciągnąwszy pierwiastek znajdziemy

$$y = \pm\sqrt{10x - x^2}$$

co pokazuje że każdej ważności odciętej x będą odpowiadały dwie ważności odciętej rzędnej y, mające się prowadzić w kierunkach przeciwnych sobie i tak, (Fig 36) Uczyniwszy następnie, Znajdziemy ważności y. Ważności dodatnie, ujemne Fig 36

$x = 0$	$y = 0$		
$x = 1$	$y = \pm 3$	$y = pn$	$y = pn'$
$x = 2$	$y = \pm 4$	$y = qn$	$y = qn'$
$x = 3$	$y = \pm\sqrt{21}$	$y = rn$	$y = rn'$
$x = 4$	$y = \pm\sqrt{24}$	$y = sn$	$y = sn'$
$x = 5$	$y = \pm 5$	$y = tn$	$y = tn'$
$x = 6$	$y = \pm\sqrt{24}$	$y = un$	$y = un'$
$x = 7$	$y = \pm\sqrt{21}$	$y = wn$	$y = wn'$
$x = 8$	$y = \pm 4$	$y = zn$	$y = zn'$
$x = 9$	$y = \pm 3$	$y = kn$	$y = kn'$
$x = 10$	$y = \pm 0$		

Wyznaczywszy punkta n i n' możemy znaleść inne punkta więcej do siebie zbliżone, nadając dla x ważności pośrednie jak pod Licz: 73. Nakoniec dowiedlibyśmy jak pod Licz: 75, że wszystkie punkta odpowiadające ważnościom obiętym od $x = 0$, do $x = 5$, i od $x = 5$, do $x = 10$ tworzą linię ciągłą.

O spółrzędnych punktów w których się przecinają linie.

111. Większa część zagadnień Geometrycznych, tyczy się własności wypływających z przecięcia się linii prostych z innemi prostemi, albo linią kołową. Jest

zatém często bardzo wielce użyteczną rzeczą, poznać spółrzędne punktu spotkania się dwóch linii dla wyznaczenia przy pomocy innego punktu, albo drugiego warunku wielkości i położenia tych linii.

Gdy równania dwóch prostych są dane, i gdy uważamy x i y za wyrażające tę samą odciętą, i tęż samą rzędne w obudwóch równaniach, przypuszczamy natenczas że x i y są spółrzędnemi punktu przecięcia. Zrównawszy zatém ważności rzędnych, otrzymamy ważność odciętej punktu w którym te proste spotkać się mogą; ważność nie dającą się ocenić, gdy proste nie mogą się przeciąć, jak się niżej o tém przekonamy.

112. Niechaj będzie $y = ax + b$, równanie prostej (Fig. 37) BC; $y = a'x + b'$, równanie Fig. 3. prostej DE. Czynię y należącém do obudwu równań, przeto

$$ax + b = a'x + b'$$

zkąd $$x = \frac{b - b'}{a' - a}$$

Wstawiwszy tę ważność w którekolwiek z danych równań otrzymamy

$$y = \frac{a'b - ab'}{a' - a}$$

Zatém ważności $\frac{b - b'}{a' - a}$, $\frac{a'b - ab'}{a' - a}$ są spółrzędnemi punktu F przecięcia.

113. Linie proste nie mogą się spotkać, gdy są równoodległe od siebie; lecz w tym przypadku te linie równe kąty z osią odciętych czynią; więc $a = a'$; przeto x i y zamienią się na $$x = \frac{b - b'}{0} = \infty, \quad y = a\frac{(b - b)}{0} = \infty$$

co nam pokazuje że spółrzędne punktu przecięcia się prostych są nieskończone. To jest że jakkolwiek proste przedłużemy, te się nigdy z sobą nie spotkają.

Przystósowanie głównych zasad Geometryi Analitycznej do rozwiązywania zagadnień Geometrycznych.

Zagadnienie 1.

114. Okazać że prechątne równoległoboku przecinają się na dwie równe części.

Weźmy punkt A za początek (Fig 38), z punktu zaś C i D spuśćmy prosto: Fig padłe CE, DF: Trójkąty ACE, BDF są równe

zkąd AE = BF, CE = DF.

Nazwijmy AE, x'; EC, y'; AB, x'';

Ponieważ linia AD przechodzi przez punkta A i D, wyznaczemy zatem jej równanie za pomocą spółrzędnych tych punktów, sposobem następującym

Punktu A jest odcięta = 0, rzędna = 0

Punktu D — odcięta = x'' + x', rzędna = y'

Wstawiwszy te ważnaści w równanie $y-\beta=\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}(x-\alpha)$ ... (P) Lic 91, prostej zniewolonej do przechodzenia przez dwa punkta, i uważywszy iż spółrzędne α, β, zarówno spółrzędne punktu A, jak punktu D wyrażać mogą, Lic 92, 93

czynię albo $\alpha = 0, \beta = 0$; $\alpha' = x'' + x'$, $\beta' = y'$

albo $\alpha = x'' + x'$, $\beta = y'$, $\alpha' = 0$, $\beta' = 0$

Przyjąwszy pierwsze założenie i wykonawszy wstawienia, równanie (P) sprowadzimy do

$$y-o=\frac{y'-o}{x''+x'-o}(x-o)$$

$$\text{czyli } y=\frac{y'}{x''+x'}\cdot x$$

równania prostej AD.

Podobnie znajdziemy i równanie linii BC

Punktu C odcięta $=x'$; rzędna $=y'$

Punktu B odcięta $=x''$; rzędna $=0$

Gdy α, β będziemy uważali za spółrzędne x'' i 0 punktu B, α', β', koniecznie spółrzędne punktu C wyrażać muszą: wstawiwszy zatem tę ważność w równanie (P) otrzymamy $y-o=\frac{y'-o}{x'-x''}(x-x'')$

albo $y=\frac{y'}{x'-x''}(x-x'')$

równanie prostej BC.

Dla znalezienia spółrzędnych AH i HJ punktu spotkania się prostych AD i CB, uważam x i y, liczba III, za te same w obudwu równaniach; zrównawszy zatem ważności rzędnych y, mam

$$\frac{y'}{x''+x'}\cdot x=\frac{y'}{x'-x''}(x-x'')$$

Znioslszy spółny czynnik y'

$$\frac{x}{x''+x'}=\frac{x-x''}{x'-x''}$$

sprowadziwszy do jednego mianownika

$$x(x'-x'')=(x-x'')(x''+x')$$

rozwinąwszy, sprowadziwszy, i przez x'' podzieliwszy, otrzymamy

$$x=\frac{x'+x''}{2} \text{ zatem } AH=\tfrac{1}{2}AJ$$

Trójkąty podobne AJH i ADJ dają

$$AH : AI = AG : AD$$

czyli $\frac{1}{2} : 1 = AG : AD$

więc $AG = \frac{1}{2} AD$

Podobnie dowiedlibyśmy że $GB = \frac{1}{2} CB$. Ponieważ H jest w środku linii AI

$IH = \frac{1}{2}(x'' + x')$, zaś $AB = IH - BI = \frac{1}{2}(x'' + x') - x' = \frac{1}{2}(x'' - x')$: z drugiej strony $EB = x'' - x'$ więc

$$AB : EB = \frac{1}{2}(x'' + x') : x'' - x' = \frac{1}{2} : 1.$$

więc $AB = \frac{1}{2} EB$

a że Trójkąty podobne BCE, BGH pokazują że BG i CB są w tym samym stosunku co AB i EB, więc BG jest połową prostej CB.

Zagadnienie 2.

115. Trójkąt ABC podzielić na dwie równe części prostą AD prowadzoną z wierzchołka jednego z kątów na bok przeciwny

Fig. 2

Weźmy punkt A za początek, i nazwijmy φ stycznę trygonometryczną kąta nieznanego DAB. Równanie prostej AD przechodzącej przez początek będzie

$$y = \varphi x \ldots (*)$$

Nazwijmy x' i y' współrzędne AE, CE, punktu C, a x'' podstawę AB; zawsze zdołamy wyznaczyć równanie prostej CB, za pomocą jej współrzędnych

Punktu C, odcięta $= x'$, rzędna $= y'$

Punktu B, odcięta $= x''$, rzędna $= 0$

(*) To równanie i z formuły (P) wyprowadzić można; bo uczyniwszy $x = 1$, będziemy mieli, $\text{Liz } \gamma$, φ za rzędną; pozostaje więc tylko poszukać równania prostej przechodzącej przez punkt A, którego współrzędne $0, 0$, i przez drugi punkt którego współrzędne 1 i φ.

Wstawmy tę ważność w formułę (P), przyjąwszy α, β za spółrzędne punktu B; znajdziemy ztąd $y = \frac{y'}{x'-x''}(x-x'')$ równanie prostej CB.

Zrównawszy ważności rzędnych w równaniach linii AD i CB, otrzymamy ważność odciętej punktu przecięcia się tych linii; a rzędna DF odpowiadająca tej odciętej będzie wysokością trójkąta ADB, którego podstawa x''.

Zrównane ważności rzędnych y dają

$$\varphi x = \frac{y'}{x'-x''}(x-x'')$$

a zatém $\varphi x x' - \varphi x'' x = y'x - y'x''$

ztąd $x = \frac{y'x''}{y' - \varphi x' + \varphi x''}$ . . . (U)

Wstawiwszy tę ważność odciętej x w równanie prostej AD znajdziemy

$$y = \frac{\varphi y' x''}{y' - \varphi x' + \varphi x''} \quad . \quad . \quad . \quad (V)$$

Aby otrzymać powierzchnię Trójkąta ADB, należy tę ważność y rozmnożyć przez połowę podstawy x''

i $\frac{\frac{1}{2}\varphi y' x''^2}{y' - \varphi x' + \varphi x''}$ = powierzchni Trójkąta ADB.

Ta powierzchnia ADB z założenia równa jest połowie Trójkąta ABC, który wystawiony jest przez iloczyn $\frac{1}{2}AB \times CE$, czyli $\frac{1}{2}x''y'$

więc $\frac{\frac{1}{2}\varphi y' x''}{y' - \varphi x' + \varphi x''} = \frac{1}{4}x''y'$

Znioszszy spólny czynnik $\frac{1}{2}x''y'$, równanie to zamienimy na

$$\frac{\varphi x''}{y' - \varphi x' + \varphi x''} = \frac{1}{2}$$

Pozbywszy się mianowników

$$\varphi x'' = y' - \varphi x'$$

a zatém $\varphi = \frac{y'}{x' + x''}$

Wstawiwszy tę ważność w równanie (U) znajdziemy.

$$x = \frac{y'x''}{y'+y\frac{(x''-x')}{x'+x''}} = \frac{x''}{1+\frac{x''-x'}{x'+x''}} = \frac{x''}{2x''}(x'+x'') = \frac{x'+x''}{2}$$

Za pomocą tej ważności równanie prostej CB dla

$$y = \frac{y'}{2}$$

Te znalezione spółrzędne x i y punktu D wyznaczą położenie prostej AD

Zadanie 3.

116. Okazać iż trzy prostopadłe spuszczone na środki boków AB, AC, BC, trójkąta CAB (Fig 40) spotykają się w jednym punkcie. Fig 40

Nazwijmy AL, x'; DC, y'; AB, x'';

Rzecz cała sprowadza się do dowiedzenia, że punkt w którym się przecinają dwie prostopadłe, jest punktem spotkania się trzeciej z jedną z tych dwóch prostopadłych: trzeba więc szukać równań tych prostopadłych, i uważać czy spółrzędne punktu przecięcia się dwóch z pomiędzy nich, mają te same ważności, co spółrzędne co spółrzędne punktu spotkania się trzeciej z jedną z dwóch poprzedzających.

Ponieważ prostopadła PM, przechodzi przez punkt (P), którego spółrzędne są $\frac{1}{2}x''$ i 0, i z osią odciętych czyni kąt prosty, którego styczna nieskończona, to jest $\frac{1}{0}$, jej zatem równanie będzie Licz 89

$$y = \frac{1}{0}\left(x - \frac{1}{2}x''\right)$$

Znajdziemy potem równania prostopadłych EJ i FH szukając równań boków AC i CB; z nich bowiem łatwo będzie wyprowadzić Licz 102, ważność spółczynnika przy x w równaniach linii prostopadłych, przechodzących przez punkta E i F, skoro poznamy spółrzędne tych punktów.

Ponieważ punkta E i F są w środku prostych AC i CB, trójkąty podobne AEK, i ACD pokazują, że gdy AE jest połową boku AC.

$$AK = \tfrac{1}{2}AD = \tfrac{1}{2}x', \quad EK = \tfrac{1}{2}CD = \tfrac{1}{2}y'$$

również trójkąty podobne BFL, BCD pokazują, że gdy BF jest połową boku CB,

$$LB = \tfrac{1}{2}BD = \tfrac{1}{2}(AB - AD) = \tfrac{1}{2}(x'' - x');$$

$$AL = AB - LB = x'' - \tfrac{1}{2}(x'' - x') = \frac{x'' + x'}{2}$$

$$FL = \tfrac{1}{2}CD = \tfrac{1}{2}y'$$

Do wyznaczenia równań boków AC i CB za pomocą spółrzędnych AK, EK, LA, FL, mamy

Punktu A odcięta = 0, rzędna = 0

Punktu E, odcięta = $\tfrac{1}{2}x'$, rzędna = $\tfrac{1}{2}y'$

przeto $y = \frac{y'}{x'}x$

jest równaniem prostej BC.

Podobnie Punktu B odcięta = x'', rzędna = 0

Punktu F odcięta $AL = \frac{x'' + x'}{2}$, rzędna $FL = \frac{y'}{2}$

więc $y = \frac{y'}{x' - x''}(x - x'')$

jest równaniem prostej BC.

A że w ogólności, gdy równanie prostej wyrażone jest przez $y = ax + b$, równanie prostopadłej do tej prostej i przechodzącej przez punkt α, β

jest $y - \beta = -\frac{1}{a}(x - \alpha)$;

dla otrzymania więc równań linii prostopadłych do AC i BC, należy wstawić w tę formułę za a, spółczynniki $\frac{y'}{x'}$ i $\frac{y'}{x' - x''}$ odcięte x, dane przez rozwiązanie równania boków AC i BC; a za α i β położyć spółrzędne punktów E i F;

znajdziemy zatem $y - \frac{1}{2}y' = -\frac{x'}{y'}(x - \frac{1}{2}x')$

równanie prostopadłej GE

$$y - \tfrac{1}{2}y' = -\frac{(x' - x'')}{y'}\left(x - \frac{(x'' + x')}{2}\right)$$

równanie prostopadłej FH.

Nakoniec do tych dwóch równań dołączyć jeszcze potrzeba równanie prostopadłej PM, będące $y = \frac{1}{o}(x - \frac{1}{2}x'')$

Położywszy w równanie prostopadłej EJ ważność odciętej $x = \frac{1}{2}x''$, wyciągnięta z równania linii PM, wyznaczemy rzędną punktu, w którym się prostopadłe EJ i PM spotykają. Podobnie wstawiwszy ważność odciętej $x = \frac{1}{2}x''$ w równanie linii FH, otrzymamy rzędną punktu przecięcia się prostopadłej PM i FH. Te dwa punkta przecięcia mając tę samą odciętę $\frac{1}{2}x''$, muszą się na tymże prostopadłej PM znajdować; a zatém te dwa punkta przecięcia się, jednym tylko punktem będą, jeżeli rzędne odpowiadające odciętej $\frac{1}{2}x''$, będą równe sobie: a że wstawienia ważności $\frac{1}{2}x''$ za x, w równania prostopadłych EJ i FH do jednego wypadku doprowadzają to jest

$$y = \frac{1}{2}y' + \frac{x'}{y'}\left(\frac{x' - x''}{2}\right)$$

więc te trzy linie w jednym się punkcie przecinają.

Zagadnienie 4.

117. Znając równanie prostej CO, i spółrzędne α i β punktu M (Fig 32) wziętego za tą prostą, znaleść wyrażenie długości, jaką ma prostopadła spuszczona z punktu α, β na daną prostą.

Gdybyśmy znali spółrzędne x i y punktu przecięcia, ważność linii CM, liczoną, daną równaniem

$$CM = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$$

byłaby zupełnie wyznaczoną: spółrzędne zaś punktu C przecięcia się prostych

otrzymają się, Licz III, uczyniwszy równemi sobie ważności której ze współrzędnych danego równania $y = ax + b$, i równania prostopadłej CM którego szukać będziemy.

Ponieważ a jest styczną trygonometryczną kąta który OO z osią odciętych czyni, wypada zatem, Licz 102, że $\frac{1}{a}$ jest styczną trygonometryczną kąta, który prostopadła CM z tąż osią czyni: a że ta prostopadła przez punkt M przechodzi, którego współrzędne α i β są dane, równanie prostej CM będzie

$$y - \beta = -\frac{1}{a}(x - \alpha)$$

Otrzymamy zatém odciętę AD punktu C przecięcia się prostych OO i CM, zrównawszy ważności rzędnych y; i będziemy mieli.

$$ax + b = \beta - \frac{1}{a}(x - \alpha)$$

Rozmnożywszy przez a, i przeniosłszy x na jedną stronę

$$(a^2 + 1)x = \alpha - ab + a\beta$$
$$\text{przeto } x = \frac{\alpha - ab + a\beta}{a^2 + 1}$$

Od obudwu stron α odjąwszy, sprowadziwszy potém drugą do jednego mianownika, i zniosłszy wyrazy niszczące się nawzajem, znajdziemy

$$x - \alpha = \frac{a\beta - a^2\alpha - ab}{a^2 + 1} = \frac{a(\beta - a\alpha - b)}{a^2 + 1}$$

wyrażenie które wstawione w równanie prostopadłej da

$$y - \beta = -\frac{(\beta - a\alpha - b)}{a^2 + 1}$$

Wstawiwszy tę ważność różnic $x - \alpha$ i $y - \beta$ w wyrażenie CM, i uważając co do $y - \beta$, że jego ważności znak ujemny, zamieni się na dodatni w wyniesieniu do kwadratu, otrzymamy nakoniec

$$CM = \frac{\sqrt{a^2(\beta - a\alpha - b)^2 + (\beta - a\alpha - b)^2}}{a^2+1} = \sqrt{\frac{(a^2+1)(\beta - a\alpha - b)^2}{a^2+1}} = \frac{\beta - a\alpha - b}{\sqrt{a^2+1}}$$

wyrażenie prostopadłej spuszczonej z punktu α, β na prostą której równanie $y = ax + b$.

Zagadnienie 5.

118. Wyznaczyć powierzchnię Trójkąta CAB (Fig 41) za pomocą spółrzędnych Fig należących do wierzchołków każdego z kątów tego trójkąta.

Umieśćmy wierzchołek A w początku którego spółrzędne, $0, 0$, i nazwijmy x', y', spółrzędne punktu B, x'', y'' spółrzędne punktu C.

Równanie boku BC, jest Licz 95

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x')$$

przeniosłszy y' na drugą stronę

$$y = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x') + y'$$

sprowadziwszy drugą stronę do jednego mianownika, i zniosłszy wyrazy niszczące się wzajemnie, otrzymamy (*)

$$y = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}x + \frac{y'x'' - y''x'}{x'' - x'}$$

Dlatego równanie boku BC pod tą postacią wystawiamy, abyśmy je mogli porównać z równaniem ogólnem $y = ax + b$, wyznaczającem stałe a i b, wyrażeniu prostopadłej, które się sprowadza do

$$\frac{-6}{\sqrt{1+a^2}}$$

(*) Nierównie prędzej do tego wypadku dozlibyśmy, przypomniawszy sobie że formuła (P) wychodzi na $y = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}x + \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha}$ w której α, β i α', β' przez spółrzędne x'', y''; i x', y'; punktów C i B zastąpić można.

gdyż punkt α, β z którego prostopadła AD jest spuszczona, w początku jest wzięty.

Uczyniwszy zatem $a = \frac{y''-y'}{x''-x'}$, i $b = \frac{y'x''-y''x'}{x''-x'}$ wyrażenie $\frac{-b}{\sqrt{1+a^2}}$ zamienimy na $\dfrac{\frac{y''x'-y'x''}{x''-x'}}{\sqrt{1+\frac{(y''-y')^2}{(x''-x')^2}}}$

Pierwiastek dzielący można pod następującym kształtem wystawić

$$\frac{\sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2}}{(x''-x')^2} = \frac{\sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2}}{x''-x'}$$

Wstawiwszy tę ważność w wyrażenie prostopadłej, i zniósłszy spólny dzielnik $x''-x'$ w obudwu wyrazach ułomku, otrzymamy natenczas

$$AD = \frac{y''x'-y'x''}{\sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2}}$$

Uważając że odległość punktów B i C których spółrzędne są x'', y'' i x', y' wyraża się, Licz: 106, przez

$$\sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2}.$$

możemy zamiast ilości pierwiastkowej położyć CB w wyrażenie prostopadłej które przez to zamienia się na

$$AD = \frac{y''x'-y'x''}{BC}$$

To wyrażenie rozmnożone przez $\frac{BC}{2}$ daje na koniec

$$\frac{y''x'-y'x''}{2} = \text{powierzchni Trójkąta } ABC.$$

Zagadnienie 6.

119. Mając danem równanie prostej przechodzącej przez punkt α, β, znaleść spółrzędne punktu x, y, wziętego na tej prostej w funkcyi odległości

punktu α, β od punktu x, y

Połączywszy te dwa punkta linią, naznaczmy przez A styczną trygonometryczną kąta, który ta linia z osią odciętych czyni. Ta linia przechodząc przez punkt α, β, będzie miała za równanie, Licz 89.

$$y - \beta = A(x - \alpha) \ldots (X)$$

Nazwijmy z odległość punktu α, β od punktu x, y; ta odległość będzie daną Licz 106, przez równanie

$$z^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 \ldots (Y)$$

Za pomocą tych równań (X) i (Y) obejmujących te same spółrzędne, można wyrugować następnie x i y.

Dla uskutecznienia tego podniósłszy do kwadratu równanie (X) otrzymamy

$$(y-\beta)^2 = A^2(x-\alpha)^2$$

Wstawiwszy tę ważność w równanie (Y) zamienimy je na

$$z^2 = (x-\alpha)^2 + A^2(x-\alpha)^2$$

że zaś $(x-\alpha)^2$ jest spólnym czynnikiem drugiej strony

$$z^2 = (x-\alpha)^2(1+A^2)$$

$$\text{zkąd } (x-\alpha)^2 = \frac{z^2}{1+A^2}$$

wyciągnąwszy pierwiastek $x - \alpha = \pm \frac{z}{\sqrt{1+A^2}}$

wstawiwszy tę ważność w równanie (X) otrzymamy

$$y - \beta = \pm \frac{Az}{\sqrt{1+A^2}}$$

te znalezione wyrażenia różnic $x-\alpha$, i $y-\beta$ widocznie dają

$$x = \pm \frac{z}{\sqrt{1+A^2}} + \alpha; \quad y = \pm \frac{Az}{\sqrt{1+A^2}} + \beta$$

wyrażenia spółrzędnych punktu jakiegokolwiek x, y, w funkcji odległości jego

z od innego punktu α, β którego spółrzędne są znane.

Zagadnienie 7.

120. Okazać własności sieczych zewnętrznych i cięciw przecinających się w kole

Równanie koła którego środek znajduje się w początku jest $y^2+x^2=r^2$, Liczby

Jeżeli to koło przecina prosta przechodząca przez punkt α, β, spółrzędne x i y punktu przecięcia powinny bydź te same w obudwóch równaniach. Licz: III. Spółrzędne zaś tej prostej wyrażone wodległości z jednego z punktów x, y, od stałego punktu α, β są Licz 119.

$$x = \pm\frac{z}{\sqrt{1+A^2}} + \alpha; \quad y = \pm\frac{Az}{\sqrt{1+A^2}} + \beta$$

Jeżeli pnęto wstawiemy te wartości w równanie koła, x i y stracą naturę zmiennych, jedynie już należąc do punktu przecięcia się prostej z kołem: z tąd wypada że z tylko odległość punktu stałego α, β od punktu przecięcia się prostej z kołem wyrażać będzie.

Wykonajmy te wstawienia, a otrzymamy

$$\frac{z^2}{1+A^2} + \frac{2az}{\sqrt{1+A^2}} + \alpha^2 + \frac{A^2z^2}{1+A^2} + \frac{2A\beta z}{\sqrt{1+A^2}} + \beta^2 = r^2 \ldots (W)$$

Ułożywszy podług z, i zwróciwszy na to uwagę iż wyrazy w z jednakowe mają mianowniki, i że dodawszy ich liczniki, i to wszystko co mnoży z^2 w nawias wziąwszy, wyrazy $2az^2$ sprowadzą się

$$\frac{1+A^2}{1+A^2}z^2$$

to jest do z^2: uczyniwszy potém jeden wyraz ze wszystkich wyrazów posiadających z w pierwszej potędze, gdyż te wyrazy jednakowe mianowniki mają, i przeniosłszy r^2 na drugą stronę, równanie poprzedzające tym samym sposobem

wyrazić możemy

$$z^2 + 2\frac{(\alpha + A\beta)}{\sqrt{1+A^2}}z + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

To równanie będąc drugiego stopnia, dwie ważności dla z daje; co nam pokazuje, że prosta czyniąca z osią odciętych kąt, którego styczną trygonometryczną jest A, i przechodząca przez punkt α, β, w dwóch tylko punktach koło przecinać może, bo z wyrazu odległość punktu przecięcia, od punktu α, β.

121. Uczy nas Algebra(*) że w równaniu stopnia parzystego, w którém najwyższa potęga niewiadomej tylko jedność ma za współczynnik, część nie zawierająca tej niewiadomej równa jest iloczynowi z pierwiastków tego równania; gdy przeto nazwiemy z' i z'' odległości punktu α, β od dwóch punktów przecięcia, będziemy mieli

$$z'z'' = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$$

122. Jeżeli z punktu α, β drugą prostę wyprowadzimy czyniącą kąt A' z osią odciętych, będzie nam trzeba zamienić A na A' w równaniu (W) aby to równanie

---

(*) Można bezpośrednio poznać tę własność równań w równaniu drugiego stopnia wyrażonem przez $x^2 + px + q = 0$.

Co rozwiązawszy je, i nazwawszy x' i x'' dwa jego pierwiastki, znajdziemy

$$x' = \tfrac{1}{2}p + \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q} \quad \text{i} \quad x'' = \tfrac{1}{2}p - \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}.$$

Pomnożywszy jeden przez drugi, otrzymamy $x'x'' = q$.

przez dwie ważności niewiadomej z wyznaczyło części tej nowej prostej zawarte między punktem α, β i punktami w których okrąg koła ta prosta spotyka. Niechaj będą t i t' te części; ponieważ A w te jedynie wyrazy wchodzi, w których się z znajduje, będzie jeszcze

$$tt'' = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$$

Porównawszy z sobą ważności iloczynów tt'' i zz'', znajdziemy je równe, zatém

$$tt'' = zz''$$

zkąd następująca wypadnie proporcya

$$z : t' = t'' : z''$$

123. Aby okazać własności Geometryczne ukryte w tém równaniu, potrzeba mieć danem położenie punktu α, β. Przypuśćmy go naprzód za okręgiem koła, i poprowadźmy przez niego prostą $MO = r$. (Fig 42). Ponieważ ta prosta przewyższa r, będzie $r^2 < r'^2$. Jeżeli zamiast r' położymy ważność jego, wyciągniętą z równania

Fig 42

$$MO^2 = OP^2 + PM^2$$

albo $r^2 = \alpha^2 + \beta^2$

i konieczny warunek, aby punkt α, β za okręgiem koła był położony, wyrażony będzie przez $r^2 < \alpha^2 + \beta^2$.

Podobnieby śmy okazali, że aby się punkt znajdował w kole, należy mieć

$$\alpha^2 + \beta^2 < r^2$$

124. Przypuśćmy zatém że dany punkt jest za okręgiem w M (Fig 42); Fig 42 natenczas z' i z'' są dwie odległości ME i MG od okręgu punktu M prostej MF, która z punktu α, β czyli M prowadzona, czyni z osią odciętych

kąt mający A za styczną trygonometryczną: podobnie t' i t'' są części MG, MH, danej siecznej wychodzącej z punktu M, i czyniącej z osią odciętych kąt którego styczną trygonometryczną jest A'. Położywszy te ważności w proporcyę (I) otrzymamy

$$ME : MG = MH : MI.$$

wyrażenie okazujące własność siecznych.

125. Nakoniec jeżeli punkt α, β, znajduje się w kole, z' i z'' wystawiają części prostej zawarte między danym punktem i punktem spotkania się danej prostej z okręgiem koła: ponieważ z' i z'' zamieniają się w tym razie na części cięciwy przeciętej w punkcie α, β, inną prostą, na której odległości danego punktu od okręgu są t' i t'', która zatém jest również cięciwą, przeto proporcya (I). pokazuje, że dwie cięciwy przecinają się w kole wistocie punkcie odwrotnym.

Teoriya

Linii krzywych drugiego rzędu

O Ramiònach linii krzywych.

126. Gdy równanie pierwszego stopnia, jest koniecznie równaniem tylko linii prostej, inne zatém linie którym krzywych imie nadano, muszą się równaniami wyższego stopnia wykreślać.(*)

Ten wyraz linia krzywa jeszcze w obszerniejszém znaczeniu przez Geometrów jest używanym: nazywają oni linią krzywą ogólny układ wszystkich punktów wyznaczonych za pomocą jakiego równania, Liczb 72, nadając odciętej wszelkie ważności dodajne od zera do nieskończonej, i wszelkie ważności ujemne od zera do nieskończonej ujemności.

(*) Ponieważ linia krzywa da się wykreślić, skoro mamy równanie wyrażające związek zachodzący pomiędzy jej spółrzędnemi, prawo punkta które wyznacza położenie punktów tej krzywej, koniecznie zawartém jest w jej równaniu. Ale mylilibyśmy się rozumiejąc, że każda krzywa której punkta poddane są pewnemu prawu, zależy od równania stopnia ograniczonego: bo w rachunku różniczkowym jest rodzaj krzywych nazwanych krzywemi transcedentalnemi, nie należący do żadnego z równań Algebraicznych.

127. Może się wydawać z razu, iż krzywa nie kończąca w obudwu kierunkach rozciągać się powinna; lecz łatwo się przekonać iż bieg jej przeciwny będzie, gdy która ze spółrzędnych urojoną się stanie.

Weźmy za przykład koło, którego początek znajduje się na obwodzie przy końcu średnicy, i mające równanie Liczb 108

$$y^2 = 2ax - x^2, \text{ albo } y = \pm\sqrt{2ax - x^2} = \pm\sqrt{x(2a-x)}$$

Jeżeli dla x nadamy ważności większe od $2a$, czynnik $2a-x$ ujemnym się stanie, i taki uczyni cały iloczyn $x(2a-x)$; więc obydwie ważności rzędnej y będą urojonemi; co pokazuje że krzywa nie rozciąga się za $x = 2a$ w kierunku x dodatnych. Jeżeli potém uczyniemy x ujemnym, wstawiwszy za x ważność $-x'$, iloczyn $x(2a-x')$ zamienimy na

$$-x'(2a+x')$$

ten iloczyn zawsze zostanie ujemnym: więc y będzie miało obydwie ważności urojonemi w kierunku x ujemnych: krzywa zatém w kierunku odciętych zawartą jest między 0 i $2a$ to jest między A i B.

128. Zdarza się także, iż krzywa przerwawszy bieg swój, rozpoczyna go na nowo, a to wtenczas gdy jedna ze spółrzędnych, która w tej przerwie urojoną była, staje się napowrót rzeczywistą. Mamy tego przykład na krzywej (Fig 43.) równania

$$y^2 = x^2 - a^2; \text{ czyli } y = \pm\sqrt{x^2 - a^2}$$

bo gdy nadamy dla x ważności dodatnie większe od a, równanie dla zawsze dla każdej odciętej, dwie ważności rzędnej y, tym większe, im bardziej

oddalać się będziemy od początku C. Tak że powstaną dwa ramiona krzywej BM, BM', rozciągające się nieskończenie w kierunku x dodatnych. Lecz jeżeli nadamy dla x ważności zawarte między x=a i x=-a, ponieważ pierwiastek urojonym się stanie, krzywa przerwie bieg swój; lecz go rozpocznie na nowo od x=-a, i prowadzić go będzie aż w nieskończoność ujemną: otrzymamy więc drugą część krzywej AA' zupełnie podobną pierwszej.

129. Gdy zatem jak w tym przykładzie, pewna przerwa znajduje się w biegu krzywej, można dowieść Liczmy, ciągłość tych punktów krzywej, których odcięte nie odpowiadają urojonym rzędnym. I tak łatwo pokazalibyśmy że ramiona BM, BM' tworzą linię ciągłą: to samo i ramiona AN i AN'.

130. Równanie $xy=k$ daje nam także podobną krzywą; gdy bowiem

$$y=\frac{k}{x}$$

jeżeli wstawimy za x ważności następujące

$x=0$	otrzymamy	$y=\frac{k}{0}=\infty$
$x=n$		$y=\frac{k}{n}$
$x=2n$		$y=\frac{k}{2n}$
$x=3n$		$y=\frac{k}{3n}$
$x=\infty$		$y=\frac{k}{\infty}=0.$

Widzimy że w początku w którym $x=0$ (Fig 44) osi rzędnych w nieskończonej Fig
odległości krzywą spotyka, i że w miarę jak się x powiększa, odpowiadająca rzędna zmniejsza się coraz, i nikknie zarazem nareszcie w nieskończenie oddalonym punkcie na osi odciętych, w którym krzywa oś tę spotyka.

To nam pokazuje że krzywa w kierunku x dodatnych rozdziela się na dwa ramiona DM, DN', i rozciąga się w nieskończoność, gdzie spotyka obydwie

osie, ku którym ciągle się zbliżała.

Gdy weźmiemy x ujemnym, ważnością między y zarówno się także na ujemne, i w kącie 'AX' powstaną dwa ramiona D'M', D'N rozciągające się nieskończenie. Zkąd widać iż krzywa rozdziela się na cztery ramiona odcięte po dwa osią odciętych.

131. Istnieją nawet linie krzywe z różnorodnych części złożone, pomimo tego składających jedną tylko krzywę, bo wszystkie z jednego równania wypływają. Naprzykład jeżeli mamy równanie

$$a^2y^2 - x^3 + (b-c)x^2 + bcx = 0$$

otrzymamy $a^2y^2 = x^3 - (b-c)x^2 - bcx = x(x^2 + cx - bx - bc)$

$$a^2y^2 = x\left[x(x+c) - (x+c)b\right] = x(x+c)(x-b)$$

wyciągnąwszy pierwiastek i podzieliwszy przez a^2

$$y = \pm\frac{\sqrt{x(x+c)(x-b)}}{a^2}$$

Nadając dla x ważności dodatnie zawarte między 0 i b, czynnik x-b ujemnym zrobiemy, a zatem iloczyn złożony z x-b i innych czynników dodatnych będzie ujemnym; więc dopóki się x między b i 0 bierze, y zostaje urojonym; lecz za x=b ponieważ czynnik x-b dodatnym się staje, ważność y rzeczywistą będzie, i tym większą, im bardziej x się powiększy; a że y ma dwie ważności równe i znaków przeciwnych, krzywa zacznie się ~~xxxxxx~~ w punkcie B (Fig 45) odległym od początku A, ilością AB=b, i w kierunku x dodatnych nieskończenie rozciągnie dwa swoje ramiona BM, BM'. Uczyniwszy potém x=-x' nadamy dla x ważności ujemne, i otrzymamy

$$y = \pm\frac{\sqrt{x'(x'+b)(c-x')}}{a^2}$$

Ponieważ czynnik x'(x'+b) jest dodatnym, znak więc iloczynu

$$\frac{x'(x'+b)(c-x')}{a}$$

od $c-x'$ zależeć będzie. Że zaś $c-x'$ jest dodatnym gdy c przewyższa x', ujemnym zaś gdy x' przewyższa c, w pierwszym więc przypadku ważność rzędnej y rzeczywistą będzie, w drugim urojoną: krzywa zatém nie rozciąga się dalej w kierunku x ujemnych, jak od $x=0$ do $x=-c$: a wystawiwszy przez AD odciętą $-c$, krzywa nie będzie się rozciągała za AD w kierunku x ujemnych. Podobnie i w kierunku rzędnych jest ograniczona: bo gdy funkcja odciętej x, z której się y składa, nie dozwala dla x ważności większych od c, la więc funkcja y na granicę swoich rozmaitych wielkościach: a zatém część krzywej odpowiadająca x ujemnym nie mogąc się rozciągać nieograniczenie w kierunku y, musi bydź zamkniętą w pewnym obrębie, jak widzimy na Figurze 45.

132. Nie rozszerzemy się tu nad własnościami krzywych, które jedynie w rachunku różniczkowym dokładnie poznać się dają: wiadomości których udzielemy, dostatecznemi będą w poszukiwaniach mających nas zajmować teraz.

O Rozdzieleniu krzywych drugiego rzędu na rodzaje.

133. Nazywamy krzywemi drugiego rzędu, wszelkie krzywe objęte równaniem drugiego stopnia o dwóch zmiennych. Równanie to może bydź wystawionem w najogólniejszej swojej ogólności przez

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0 \ldots\ldots (A')$$

rozwiązawszy je ze względu na y, znajdziemy

$$y = -\frac{1}{2a}(bx+d) \pm \frac{1}{2a}\sqrt{(b^2-4ac)x^2 + 2(bd-2ae)x + d^2 - 4af} \ldots\ldots (B')$$

rozwiązawszy je ze względu na x otrzymamy (*)

$$x = -\frac{1}{2c}(by+e) \pm \frac{1}{2c}\sqrt{(b^2-4ac)y^2+2(be-2cd)y+e^2-4cf} \quad \ldots\ldots (C')$$

Aby sobie uczynić wyobrażenie krzywej mogącej do tego ogólnego równania należeć, rozbaczmy w jakich przypadkach jej bieg się wstrzymuje, albo rzeczywiste skończenie. Szukajmy zatem w jakich przypadkach ważności zmiennej y mogą się dać urojonemi; pierwiastek to ważności tej zmiennej prowadzić nas powinien w tych poszukiwaniach, bo gdy pierwiastek ujemnym będzie, cała ważność urojoną się stanie.

Naznaczmy Polynom

$$(b^2-4ac)x^2+2(bd-2ae)x+d^2-4af$$

przez Px^2+Qx+R.

Zważywszy na to uwagę że kwadrat x^2 tym bardziej przewyższa swój pierwiastek, im wyższe liczby dla x bierzemy, łatwo dostrzedz że może istnieć taka ważność liczebna zmiennej x, że pierwszy wyraz Px^2 sumę dwóch innych $Qx+R$ przewyższy. Wtym razie znak całego pierwiastku, od znaku pierwszego wyrazu Px^2 zależyć będzie.

Znaleziono że największy z ilorazów $\frac{R}{P}$ i $\frac{Q}{P}$, który przez I wystawimy

---

(*) To drugie równanie z poprzedzającego da się wyprowadzić, uważając że ponieważ x i y symetrycznym sposobem w równanie (A') wchodzą, dosyć zamienić y na x, a na c, d na e, i wzajemnie, aby równanie (B') zamieniło się na (C').

dodanym będąc do jedności, daje liczbę która za x położona, czyni Px^2 większym od $Qx + R$, i że wszelka liczba większa od $S+1$ tej samej własności używa. (*)

(*). Następującym sposobem dowodzę tego: polynom $Px^2 + Qx + R$, wyrażam pod kształtem $P\left(x^2 + \frac{Q}{P}x + \frac{R}{P}\right)$,

i widzę że aby otrzymać taką ważność dla x któraby czyniła Px^2 większym od $Qx + R$, dosyć jest znaleść czyniącą

$$x^2 > \frac{Q}{P}x + \frac{R}{P};$$

gdy bowiem x^2 przewyższa $\frac{Q}{P}x + \frac{R}{P}$, rozmnożywszy przez P, otrzymamy

$$Px^2 > Qx + R$$

To założywszy widoczną jest rzeczą, iż jeżli wyrazy $\frac{Q}{P}x$, $\frac{R}{P}$ są tych samych znaków, a x^2 przewyższa ich Sumę, tym bardziej różnicę ich przewyższy; tylko więc ten przypadek uważać będziemy, gdy $\frac{Q}{P}x$ i $\frac{R}{P}$ są jednakowych znaków. Niechaj będzie S największym ze współczynników $\frac{Q}{P}$ i $\frac{R}{P}$; ponieważ $Sx + S$ większym jest od $\frac{Q}{P}x + \frac{R}{P}$, jeżli więc x^2 przewyższa $Sx + S$, przewyższy także i drugą; cała rzecz sprowadza się zatém do znalezienia dla x ważności czyniącej x^2 większém od $Sx + S$. Przypuśćmy że $S+n$ jest tą ważnością; wstawiwszy ją w wyrażenia x^2 i $Sx + S$, otrzymamy $(S+n)^2 > S^2 + Sn + S$

albo sprowadziwszy $2Sn + n^2 > Sn + S$

$$+Sn + n^2 > S, \text{ albo } (S+n)n > S$$

Widocznie wszelką ważnością całą ilości n, poczynając od jedności aż do nieskończonej, nierówności tej zadosyć uczynić zdołamy: położywszy zatém za N jedno z wyrażeń $V = S+1$, $V = S+2$, $V = S+3$ etc. x^2 będzie większém od $Sx + S$, więc i od

Naznaczmy przez V tę ilość $S+1$, która za x położona czyni pierwszy wyraz $(b^2-ac)x^2$ większym od summy dwóch innych: ponieważ spółczynnik b^2-ac który nie uważamy za żadny, musi bydź albo dodajny, albo ujemny, naprzód załóm te dwa założenia rozbrązńiemy.

134. Przypuśćmy że b^2-ac jest ujemnym: gdy będzie $x=V$, pierwszy wyraz $(b^2-ac)V^2$ przewyższy summę wszystkich innych; a że go założenie nasze ujemnym czyni, cały pierwiastek równania (B') unjonym będzie. To samo wypadnie jeżeli $-V$ za x wstawimy, kwadrat bowiem $x-V$ do pierwszego wyrazu wchodzący, także jest dodajnym. Można więc bydź pewnym że odcięte zawarte między V i nieskończonością, i między $-V$ i ujemną nieskończonością zawsze unjonym rzędnym odpowiadać będą, i że poprowadziwszy z każdej strony początku dwie linie AL i AL' (Fig 46) równe V, krzywa w kierunku odciętych uważana, nigdy obrębu LL' Fig 46 nie przestąpi.

135. Zrobmy tu dostrzeżenie które się nam z czasem potrzebnem stanie, to jest że x za rzędną, y zaś za odciętą uważać można, byle odcięta na osi Y prowadzoną była. Jakoż w istocie (Fig 46) każdy punkt M krzywej równie dobrze wyznaczony jest spółrzędnemi $AP=x$, i $PM=y$, jak spółrzędnemi $AP'=y$ i $P'M=x$. Fig 46

136. Dość drugi sposób wykreślania tej samej krzywej za pomocą równania (C') wyznaczającego ważność odciętej x, odpowiadającą danej ważności rzędnej y. Rozebrawszy to równanie, przekonamy się iż pierwszy wyraz funkcyi zmiennej y

---

$$\frac{G}{P}x + \frac{R}{P}$$

To samo wypadnie jeżeli są równe spółczynnikbi.

znajdujący się pod pierwiastkiem ma za spółczynnik takie b^2-nac.

Ponieważ przypuściliśmy, Liczba 134, b^2-nac ujemnem, dowieść przeto można jak pod Liczbą 134, że na kierunku osi AY są dwie granice D i D', za któremi y zawsze rzeczywistym rzędnym odpowiadają: więc krzywa nie może się rozciągać w kierunku y za DD', i całkowicie w powłoce EE'FF' zawartą zostanie. Takie są krzywe drugiego rzędu pierwszego rodzaju.

137. Uważajmy teraz b^2-nac dodajnem, ciągle nazwaczając przez V ilość która za x położona, czyni pierwszy wyraz b^2-nac pierwiastku równania (B') większym od Summy wszystkich innych. Wstawiwszy za x ilość V lub -V, otrzymamy za x^2 zawsze dodajną ilość V^2. Więc iloczyn V^2 przez b^2-nac jednakowego znaku będzie z ilością b^2-nac podług naszego założenia dodajną: a że pierwszy wyraz $(b^2\text{-nac})V^2$ ma przewyższać Summę innych wyrazów będących pod pierwiastkiem, otrzymamy więc wypadek dodajny, a zatem ważność rzędnej y rzeczywistą będzie, i wszelka liczba większa od V czy to ujemnie czy dodajnie wzięta będzie miała własność czyniącą rzeczywistem wyrażenie pierwiastkowe: wziąwszy przeto (Fig 47) odcięte Fig 47.
AC = V możemy bydź pewni, że wszelka odcięta większa od V, rzeczywistej rzędnej odpowiadać będzie, i że wziąwszy odciętą AC' = -V, wszelka odcięta większa od -V również rzeczywistej rzędnej odpowiadać będzie: tak, że przez punkta C i C' przeprowadziwszy nieograniczone równoległe EE', FF' przecinające oś odciętych pod kątem prostym, można twierdzić że wszelki punkt na osi odciętych, nie znajdujący się w obrębie CC', może bydź zawsze podstawą rzędnej należącej do tej krzywej, że zatem krzywa rozciąga się nieskończenie za temi równoległemi (*)

(*) Ponieważ w przypadku Liczba 133, nie potrzeba nam było szukać czy która z ilości

A że dla każdej ważności odciętej x, równanie krzywej dwie ważności rzędnej wyznacza, wypada z tego, że z dodajnych ważności odciętych x, powstają dwa ramiona IM, IM', rozciągające się nieskończenie, oddalając się ciągle od początku; i że z ważności ujemnych odciętej x, powstają także dwa ramiona LN, LN' rozciągające się nieskończenie, i ciągle oddalające się od początku.

Nakoniec rzędne nie mogą bydź wcale, tylko w obrębie zawartym między nieograniczonemi równoodległemi EE', FF' w którym odpowiadają odciętym dodajnym albo ujemnym mniejszym od V.

Ta własność krzywej rozciągania się nieskończenie w dwóch kierunkach przeciwnych, rozdzielając się w każdym kierunku na dwa ramiona, wystarcza do nadania cechy temu długiemu rodzajowi krzywych który obejmiemy pod imieniem Hyperbolów.

Gdybyśmy odcięte na osi AY chciał uważać, podobnie jak uczyniłem pod Liczbą 136, poznalibyśmy za pomocą równania (C'), że z każdej strony osi AY; rozciągają się nieskończenie dwa z czterech ramion IM, IM', LN, i LN'

138. Gdy współczynnik $b^2 - 4ac$ jest żadnym, równanie B sprowadza się do

$$y = -\frac{bx+d}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{2(bd-2ae)x + d^2 - 4af}$$

Niechaj V będzie liczba mająca własność czynienia współczynnika

---

mniejszych od V nie czyni wyrazu Px^2 większym od Summy innych wyrazów, mogą bydź zatém w obrębie CC' takie odcięte jak Ar, którym odpowiadające rzędne takie będą rzeczywistemi: lecz nie potrzeba ich uważać, dosyć albowiem nam twierdzić, że za granicami AI i AI' odcięte zawsze prawdziwym rzędnym odpowiadają.

$2(bd-2ae) > d^2-4af$;

jeżeli $2(bd-2ae)$ jest dodajnem, V i wszelka większa liczba dodajnem czyni wyrażenie pod podpierwiastkiem: wziąwszy zatém odcinek $Al = V$ (Fig 48) pokażemy iż od l aż w nieskończoność wszelki punkt na osi odciętych wzięty, odpowiada dwom rzędnym rzeczywistym wyznaczonym podwójną ważnością zmiennej y. Krzywa zatém rozdziela się na dwa ramiona IM, IM rozciągające się nieskończenie w kierunku odciętych dodajnych. Fig 48

Jeżeli weźmiemy potém na przedłużeniu osi odciętych część $Al' = -V$, wszelkie odcięte od Al' aż w nieskończoność ujemną, czyniąc ujemnym wyrażenie pierwiastkowe, wojorym rzędnym odpowiadać będą: poprowadziwszy zatém przez punkt l' nieograniczoną prostą EE' przecinającą pod kątem prostym przedłużenie osi odciętych, krzywa całkowicie z jednej strony tej prostej znajdować się powinna.

Jeżeli $2(bd-2ae)$ jest ujemnem, a nadawać będziemy dla x ważności od $Al' = -V$ (Fig 49) do ujemnej nieskończoności, ważności rzędnej y rzeczywiste będą, bo w tym razie pierwszy wyraz $2(bd-2ae)x$ z dwóch ujemnych czynników złożony, dodajnym się stanie, i takim uczyni całe niepierwiastkowe wyrażenie; lecz nadając dla x ważności dodajne od Al aż w nieskończoność, pierwiastek na urojony zamienimy: pokazuje się więc że krzywa nie może mieć odciętych dodajnych większych od Al: jeżeli zatém w punkcie E, prostopadle do osi odciętych spuścimy nieograniczoną prostą FF', krzywa całkowicie z jednej strony tej prostej położoną będzie.

Cała różnica między założeniem $2(bd-2ae)$ dodajnego, i $2(bd-2ae)$ ujemnego

la jest tylko, że krzywa znajduje się położoną po prawej lub lewej stronie początku, na osi odciętych, albo na jej przedłużeniu.

Gdy zaśm współczynnik $b^2-4ac=0$, krzywa rozciągająca nieskończenie dwa swoje ramiona, po jednej tylko stronie nieograniczonej prostej znajdować się może. Nadano imię Paraboły krzywym drugiego rzędu, należącym do tego rodzaju.

139. Nakoniec gdy współczynnik odciętej x także jest zadnym, równanie (B') sprowadzając się do

$$y=-\frac{1}{2a}(bx+d)\pm\frac{1}{2a}(d^2-4af)$$

w pierwszym tylko stopniu ma zmienne x i y, staje się przez to równaniem linii prostej.

140. Wypada z tego że krzywe drugiego rzędu na trzy rodzaje podzielić można, po następujących cechach dających się poznać

Pierwszy.... Elipsy..... b^2-4ac ..... ujemne

Drugi..... Hyperbole..... b^2-4ac... dodatnie

Trzeci..... Parabole.... b^2-4ac.. zadne

141. Gdyby a lub c było zadnem, jedno z równań (B') albo (C') nie mogłoby służyć; ale drugie wystarczałoby do wyznaczenia krzywej. Gdyby np: było $a=0$, druga strona równania (B') stając się nieskończoną przymusiłaby nas uciec się do równania (C'), dla poznania podług liczby 137, że krzywa rozdziela się na cztery ramiona, rozciągające się nieskończenie.

Gdy a i c razem są zadne, równania (B') i (C') stają się zupełnie bezużyteczne: w tym razie ogólne równanie (A') sprowadza się do

$bxy + dy + ex + f = 0.$

ci dopełnić warunku jakiego trzeba aby krzywa do rodzaju Hyperboloid należała; bo iloczyn $4ac$ stając się równym zeru przez zadrość składających go czynników, wyrażenie $b^2 - 4ac$ konieczenie dodajnem czyni. Przekonamy się pod Liczbą 191, iż ta krzywa jest w istocie hyperbolą, i że ją wykreślić można za pomocą równania drugiego stopnia nie pozbawionego wyrazu w x^2 i y^2. Co pokaże doskonałą bliskość tej krzywej, z temi którémi pod Licz 137 miała.

Rozłożenie ogólnego równania krzywych drugiego rzędu.

142. Ogólne cechy służące do rozdzielenia krzywych drugiego rzędu na rodzaje, stałe nam wyobrażenie ich natury czynią. Starajmy się zatém odkryć nowe własności lepiej budowę ich dające poznać.

W tym zamiarze potrzeba się udać do równania (B'). Naprzód jednej: rzeczy przykładem uczyńmy, naznaczając część pod pierwiastkiem

$$\sqrt{(b^2-4ac)x^2 + 2(bd-2ae)x + d^2 - 4af}$$ przez $\sqrt{X}$

w tym razie równanie (B') zamieni się na

$$y = -\frac{b}{2a}x + \frac{d}{2a}\sqrt{X} \quad \ldots\ldots (D')$$

Pomińmy na chwilę pierwiastek; będziemy (wyłącznie) mieli

$$y = -\frac{b}{2a}x - \frac{d}{2a} \quad \ldots (E')$$

Łatwo poznać w tem równaniu, Licz 86, równanie prostej BC (Fig 50 i 51) przecinającej obydwie osie na przedłużeniach; więc gdy weźmiemy odcinek $x = AP$, y lub raczej $-\frac{b}{2a}x - \frac{d}{2a}$ stanie się PC: lecz jeśli na pierwiastek względ mieć będziemy, jak wymaga równanie (D'), to równanie pokazuje że y ma dwie

różne ważności jednej odciętej odpowiadające

Dla wyznaczenia pierwszej należy dodać do rzędnej P' spółmierną część wyrażającej długość $C'M' = \sqrt{X}$: naówczas PM'

$$PM' = -\frac{bx}{2a} - \frac{d}{2a} - \sqrt{X}$$

Dla wyznaczenia drugiej ważności rzędnej y nie różniącej się od pierwszej tylko przeciwnym znakiem, należy $C'M'$ w przeciwnym kierunku ponieść, to jest od C' ku M.

143. Uważając tę drugą ważność rzędnej y, widzimy, że punkt M niżej osi odciętych padnie (Fig 50) jeżeli mamy Fig.

$$\frac{bx}{2a} + \frac{d}{2a} > \sqrt{X}$$

to jest jeżeli $PC' > CM$; bo $-\frac{bx}{2a} - \frac{d}{2a} + \sqrt{X}$ da wypadek ujemny dla ważności rzędnej y którą od P ku M poprowadziemy. W tym razie punkta M i M' innej po jednej stronie osi odciętych położone będą

144. Lecz punkt M nad osią odciętych padnie jeżeli (Fig 51) Fig.

$$\sqrt{X} > \frac{bx}{2a} + \frac{d}{2a}$$

to jest $CM > PC'$; bo $-\frac{bx}{2a} - \frac{d}{2a} + \sqrt{X}$ da wypadek dodatni dla ważności rzędnej y, którą od P ku M poprowadziemy; i naówczas punkta M i M' nie będą się po jednej stronie osi odciętych znajdowały.

145. Ponieważ podług Licz 142, wyznaczyliśmy dwa punkta innej M i M', prowadząc po każdej stronie punkta C' części $C'M$ i $C'M'$ równe $\sqrt{X}$, linia więc MM' łącząca te dwa punkta M i M', ma własność być dzielona na dwie równe części przez prostą BC'; więc punkta M i M' symetrycznym

sposobem są położone jeden wyżej drugi niżej prostej B'C'. To się mówi o punktach M i M' danych jednem równaniem, które ma się stosować do wszystkich prostych wyznaczonych dwa po dwa każdą ważnością odciętej x; zkąd widzimy że nieograniczona prosta B'C', dzieli wszystkie cięciwy prostobieżne do niej równoodległe na dwie równe zupełnie części, i dla tej przyczyny tej prostej B'C' nadano imię średnicy.

146. Można uważać iż osi rzędnych AY pochyłą jest do średnicy, iżeby aby ją pod kątem prostym przecinała, trzebaby, ażeby B'C' równoodległą była od AX: co wymaga aby równanie linii B'C' sprowadziło się do

$$y = -\frac{d}{2a}$$

stanie się to gdy $\frac{b}{2a} = 0$, a więc gdy spółczynnik b wyrazu w xy jest żadnym. To założenie wymaga, aby równanie (A') pozbawionem było wyrazu w xy; czego nie przypuszczamy biorąc to równanie w całej jego ogólności. Natomiast jeżeli b i d zadnemi będą, równanie (E') średnicy B'C' sprowadzi się do y = 0: więc średnica połączy się z osią odciętych.

147. W naszych Figurach 50 i 51, (*) linia B'C' pod osią odciętych jest położona, bo dla ilości b, d i a, wchodzących w ogólne równanie przyjęliśmy znak dodajny: ale że zdarzyć się może iż jakie szczególne równanie porównane z ogólnem, odmieni te znaki, średnia prosta ze względu na oś odciętych wzięłaby położenie przyjąć może: naprzykład, jeżeli a tylko jest ujemnem

---

(*) Dla uniknięcia zawikłania w figurze, wykreśliliśmy tylko ellipsę, lecz nasza analyza równie stosuje się i do innych krzywych drugiego rzędu.

równanie (E') średnicy zamieni się na

$$y = \frac{b}{2a}x + \frac{d}{2a}$$

i ta średnica nad osią znajdować się będzie i przez BC wystawioną za: stanie

Chociaż kierunek średnicy skończenie przecina oś odciętych, bo nie uważamy tych linii za równoodległe, jednakowoż nie wypada z tego, aby krzywa zawsze oś odciętych spotykać miała: bo czujemy że się może zdarzyć taki przypadek iż wszystkie rzędne po jednej stronie osi odciętych położone będą. Zobacz Licz 143.

148. Stawa tu zadanie do rozwiązania, to jest znaleść, po jakim znaku poznać uczniemy, iż krzywa przecina w swoim kierunku oś odciętych.

Pewno jest że to spotkanie wtenczas tylko nastąpić może, gdy $y=0$. Uczyniwszy zatem $y=0$, równanie (A') sprowadzi się do

$$cx^2 + ex + f = 0$$

albo raczej $x^2 + \frac{e}{c}x + \frac{f}{c} = 0 \ldots\ldots (F')$

Rozwiązawszy otrzymamy $x = -\frac{e}{2c} \pm \sqrt{\frac{e^2}{4c^2} - \frac{f}{c}}$

wartość która będzie urojoną jeżeli $\frac{e^2}{4c} - \frac{f}{c}$ jest ujemnem: więc w każdym innym przypadku x będzie rzeczywistem, i krzywa przetnie w dwóch punktach oś odciętych.

149. Podobnym sposobem znajdziemy że aby krzywa kierunek osi rzędnych przecinać mogła, trzeba żeby $\frac{d^2}{4a^2} - \frac{f}{a}$ dodatnią ilością było.

150. Możemy teraz założyć sobie co następuje:

Gdy równanie ma potrzebne warunki aby krzywa nie przecinała osi

odcięłych, czy można taką odmianę w nich sprawić, ażeby krzywa nie doznając w niczém nawzajem przecinała polém osi odcięłych.

Zadanie to zależy od tego: czy można zmienić położenie jednej z osi ze względu na krzywą.

Wystawmy sobie że krzywa odniesiona jest do osi AX, AY (Fig 52). Gdy wodząc Fig 52.
tegłości $AA' = \beta$ od początku A poprowadzimy przez punkt A' osi nowych równo-odległą A'X' od drugiej osi, każdy punkt krzywej będzie miał na tej nowej osi rzędną mniejszą od danej o β; wyznaczywszy bowiem punkt krzywej za pomocą rzędnej y, odpowiadającej odcięłej x, ten punkt nie może być inaczej położony tylko wyżej lub niżej nowej osi A'X', albo też na samej osi.

Nazwijmy y' rzędną punktu odniesionego do nowej osi: w pierwszym przypadku jeżeli punkt przez M jest wystawiony, widocznie jakiekolwiek położenie jego będzie nad nową osią otrzymamy zawsze.

$$P'M = PM - AA'$$

albo $y' = y - \beta$;

w drugim razie gdy punkt jest położony pod nową osią np: N, otrzymamy

$$P'N = AA' - PN$$

Ta ważność rzędnej P'N bezwzględnie jest wyznaczona podobnie jak rzędnej P'M, to jest nie dając uwagi na znak wskazujący jego względne położenie do nowej osi; ale że ta rzędna pada w kierunku przeciwnym dwóm drugiej, zatém jéj ważność względna przeciwnego znaku być musi, i otrzymamy

$$P'N = - AA' + PN$$

albo $y' = -\beta + y$.

Formuła więc $y' = y - \beta$ służy każdemu punktowi wziętemu z którejkolwiek

strony tej nowej osi. Nakoniec i wtenczas nawet ma miejsce gdy punkt na samej nowej osi jest położony: wówczas bowiem ponieważ y staje się β, y' jest zadne, i formuła sprowadza się do $y' = a$. Przeto równanie $y' = y - \beta$ zawsze będzie wyrażało zależność istniejącą między rzędnemi jednego punktu prowadzonemi do osi równoodległych AX, A'X'.

151. Można więc otrzymać równanie między spółrzędnemi x i y, wstawiwszy za y w równaniu (A') ważność $y + \beta$, i ta zmiana wyznaczy zawsze dla każdej ważności $A'P = x$, (Fig 52) rzędne PM i PN dwóch punktów krzywej utworzonej za pomocą równania w x, y: więc równanie w x, y nie tylko tęż samą da krzywę, lecz ją nawet w tem samem położeniu względem płaszczyzny na której wykreślona była, byleśmy ją wykreślając, oś A'X' odnoszoną do równania x, y, w odległości β od pierwotnej osi AX poprowadzili.

Lecz jeżli nie koniecznie dawne położenie krzywej względem płaszczyzny zachować trzeba, oś A'X' dowolnie może być wzięta: gdy bowiem położenie pierwotnej osi AX dowolnem będzie na płaszczyźnie, podobnie się rzecz będzie miała i z równoodległą osią A'X' oddaloną od pierwszej o β.

152. Należy uważać, iż zmiana miejsca osi na płaszczyźnie, wcale nie wpływa na ich względne położenie do krzywej, z którą koniecznie się wiążą; i nie można położenia tych osi względem niej inaczej zmienić, tylko inne równanie biorąc: tak widzieliśmy że oś A'X' wykreślająca krzywę za pomocą równania w x, y, jest więcej posuniętą tu tej krzywej ilością β od osi AX należącej do równania w x, y.

153 To wszystko czyny powiedziele o zmianie położenia osi odciętych względem krzywej, stosuje się i do osi rzędnych; tak, że uczyniwszy $x = x' + \alpha$, osia równoodległe od siebie o ilość α przeniesiona będzie, i nowe równanie w x', y wyznaczy związek mający istnienie między spółrzędnemi należącemi do nowej osi.

154. Dla większej ogólności zgodzimy się na to że α i β zarówno ilościom dodatnie jak ujemnie wystawiać mogą: bo gdybyśmy nie przyjęli tego ostatniego założenia, tylko w kącie XAY moglibyśmy przenosić osie zamiast wolności przenoszenia ich we wszystkich kątach prostych utworzonych około punktu A. Zobacz Liczb. 71.

155. Ponieważ, (gdy przypuszczamy krzywą na płaszczyźnie wykreśloną) osie, będąc równoodległe od siebie poprowadzone, mogą się mniej albo więcej od pierwszego położenia względem tej krzywej oddalać, czujemy zatém że zawsze mogą ją spotkać, jeżeli nieoznaczonemi ilościami α i β stosownie rozrządzimy. Widzieliśmy, Liczb. 148, że aby krzywa przez ogólne równanie (A') wystawiona mogła się spotkać z osią odciętych; koniecznym jest warunkiem dodatność ilości $\frac{e^2}{4c^2} - \frac{f}{c}$. Gdy ten warunek dopełnionym nie jest, można zmienić oś odciętych, Liczb. 151, wziąwszy inne równanie y', pochodzące z wstawienia w równanie krzywej $y + \beta$ na miejsce y, i wówczas nowa oś równoodległe od dawnej w oddaleniu β przeniesioną zostanie. Że zaś β jest dowolnem, można więc mu taką nadać ważność, aby konieczny warunek do spotkania się krzywej z osią dopełnionym został. Wstawiwszy zatém $y + \beta$ w równanie (A') otrzymamy

$$ay'^2 + b|xy' + cx^2 + 2a\beta|y' + e|x + a\beta + a\beta = 0 \ldots (G')$$
$$+ d| \quad + 2b| \quad + \beta$$

naznaczywszy przez I ostatni wyraz, a przez E i D spółczynniki zmiennych

x i y', równanie to zamienimy na

$$ay'^2 + bxy' + cx^2 + Dy' + Ex + F = 0 \ldots (A')$$

Gdy konieczným warunkiem spotkania się krzywej z osią, Licz 148, jest dodatniość wyrażenia $\frac{E^2}{4c^2} - \frac{F}{c}$ można więc takim uczynić β, wchodzące w E i F aby $\frac{E^2}{4c^2} - \frac{F}{c}$ dodatniém było. Natenczas ważność odciętej x odpowiadająca $y=0$ Licz. 148, dwa swoje pierwiastki rzeczywiste będzie, i krzywa przetnie oś nowa we dwóch punktach.

156. Możemy teraz tylko oś nową uważać. Do tego dosyć jest wziąć dla krzywej równanie (A') zamiast równania (A'). Zarzuciwszy oś pierwotną i równanie (A') odnoszące się do niej, wolno jest nam opuścić wyrazy znajdujące się przy y w równaniu (A'), położonych jedynie dla wyróżnienia jego rzędnych od rzędnych rachowanych na pierwotnej osi AX, a nasze równanie (A') stanie się

$$ay'^2 + bxy + cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Ponieważ to równanie jednakowego jest kształtu z równaniem (A'), możemy je zatém wystawić przez to ostatnie, to jest uważać równanie (A') za odnoszące się do osi AX.

157 Gdy ostatni wyraz f jest zadnym, początek na obwodzie krzywej jest położony: gdyż punkta w których krzywa oś przecina wyznaczają się ważnościami jakie x przybiera po uczynieniu $y=0$; otrzymamy w tém założeniu równanie (F'), które gdy f jest zadném, sprowadza się do

$$cx^2 + ex = 0;$$

to równanie rozkładając się na dwa czynniki

$$x(cx+e) = 0$$

sprawdza się jeżeli $x=0$, albo $x = -\frac{e}{c}$; że zaś ważność zmiennej $x=0$, jest to jaka

x w początku osi odciętych przybiera, a z założenia y=0, to jest krzywa oś przecina, więc początek na obwodzie krzywej znajduje się.

158. Rozbrązanie przypadku w którym początek jest na krzywej, naturalnie prowadzi nas do badania, po jakich znakach poznać to można.

Uczyniwszy y=0, ważności zmiennej y będą odległościami początku od punktów w których krzywa oś przecina. To założenie sprowadza równanie (A') do

$$cx^2 + ex + f = 0$$

albo raczej $x^2 + \frac{ex}{c} + \frac{f}{c} = 0$

To równanie daje $x = -\frac{e}{2c} \pm \sqrt{\frac{e^2}{4c^2} - \frac{f}{c}}$.

Jeżeli pierwiastki tego równania które przez x' i x'' oznaczemy, są różnych znaków, ponieważ te pierwiastki wyrażają odległości początku od krzywej wzięte na osi A'X', jedna zatém z tych odległości będzie dodajna, druga ujemna: co wymaga aby się początek znajdował w punkcie na części RR' osi A'X' odciętej krzywą. (Fig 52). Jeżeli przeciwnie pierwiastki są jednakowych znaków, początek musi bydź w punkcie na osi A'X' za częścią RR'.

Abyśmy zatém byli w stanie poznać czy początek jest na części RR', szukajmy koniecznego warunku aby pierwiastki przeciwnych znaków były.

159. Do tego potrzeba, żeby część niespółmierna spółmierną część całej ważności przewyższała: bo w takim razie, pierwiastek będzie stanowił znak ważności odciętej x.

A że w jednym z pierwiastków część niespółmierna jest dodajna, w drugim ujemna, dwa zatém pierwiastki równania (F') przeciwnych znaków będą.

160. Część spółmierna zawsze będzie mniejsza, od niespółmiernej, jeżeli te są

różnych znaków: bo w tém założeniu $-\frac{f}{c}$ dodajnem ilością będąc (*) czynić

$$\frac{e}{2c} < \sqrt{\frac{e^2}{4c^2} - \frac{f}{c}}$$

Więc f i c są różnych znaków, pierwiastki x' i x'' także będą różnych znaków, i początek na części RR' znajdować się będzie. Dla tejże przyczyny jeżeli f i c są jednakowych znaków, $-\frac{f}{c}$ jest dodajnem, część niespółmierna staje się słabszą, i dwa pierwiastki x' i x'' są jednakowych znaków; znowu początek znajdzie się wprawdzie na osi AX, za częścią RR'.

161. Można uważać iż jeżeli f i c różnych są znaków, ponieważ $-\frac{f}{c}$ jest dodajnem, część niespółmierna rzeczywistą będzie, i wzmianek, Licz: 148, aby krzywa za przecinała dopełni się.

162. Uczy nas Teorya równań, że drugi wyraz równania (S) w przeciwnem znaczeniu wzięty, równy jest sumie pierwiastków x' i x'' tego równania.

Te pierwiastki jak widzieliśmy, Licz: 158 wyrażają odległości początku od punktów R i K w których linia wa spotyka się z osią odciętych: a zatém gdy e=0, otrzymamy

$$x' + x'' = 0$$

To równanie pokazuje że x' i x'' mają być równe i znaków przeciwnych. Gdy zatém spółczynnik c jest żadnym, początek znajduje się na linii RR'

(*) Naprzykład jeżeli c jest dodajnem, f zaś wystawia ujemną ilość $-f'$, będzie $\frac{f}{c} = -\frac{f'}{c}$ albo $-\frac{f}{c} = \frac{f'}{c}$

co nam pokazuje że $-\frac{f}{c}$ ma na ważność dodajną ilość $\frac{f'}{c}$

w takim punkcie A'' że A''R = A''R, to jest w poprzedku tej linii: co i zkąd inąd jest oczywistem, bo równanie (1') sprowadzając się do

$$x^2 + \frac{f}{c} = 0$$

daje $x = \pm\sqrt{-\frac{f}{c}}$

a że te ważności nie mogą bydź urojone, gdyż od odciętych powinna się przecinać z krzywą, Liczba 155 i 156, jeżeli zatem weźmiemy odcięte

$$+\sqrt{-\frac{f}{c}} \quad i \quad -\sqrt{-\frac{f}{c}},$$

wystawione w figurze przez A''R' i przez A''R, wyznaczymy punkta spotkania R i R' w równej odległości od początku położone.

163. Nakoniec f i e mogą bydź razem żadne. Wówczas dla warunku f=0 początek na krzywej będzie Liczba 157, zaś dla warunku e=0, Liczba 162, musi znajdować się w równej odległości od punktów w których ją przecina krzywą: więc dwie równe odległości początku od krzywej sprowadzają się do zera, początek bowiem jest na krzywej. Ztąd wypada że od odciętych w jednym tylko punkcie krzywą spotyka, to jest że od odciętych staje się styczną do krzywej. Podobnie dowiedlibyśmy że gdy f i d są zarówno razem, od zgodnych staje się styczną do krzywej.

164. Pozostawał aby spółczynnik wyrazu wx mógł bydź zerowym, potrzeba żeby się początek w środku linii RR' znajdował: jeżeli zatem szukamy równania krzywej odnoszącego się do tego nowego początku, to go cechować będzie, że nie będzie miał wyrazu wx. Dla otrzymania jego weźmy x za odciętą wychodzącą z innego początku jak A' wziętego na osi A'X', a zaś różnicą między odciętemi x i x', mogącą bydź dodatnią albo ujemną, podług

tego, jak x będzie większem albo mniejszem od x': między x i x' będzie zależność $x - x' = \alpha$. Wstawiwszy tę wartość $x = x' + \alpha$ w równanie (A') otrzymamy

$$ay^2 + bxy + cx'^2 + \begin{matrix} d \\ +b\alpha \end{matrix} \Big| y + \begin{matrix} e \\ +2c\alpha \end{matrix} \Big| x' + \begin{matrix} f \\ +c\alpha^2 \\ +e\alpha \end{matrix} = 0 \ldots (J')$$

Ponieważ nowy początek nie jest ustalonym, uważajmy ilość α, wyrażającą jego odległość od dawniego, za ilość dowolną którą tak rozmaicimy, aby współczynnik odciętej x' w nowem równaniu był zadnym, to jest

$$e + 2c\alpha = 0$$

zkąd $\alpha = -\frac{e}{2c}$

Wstawmy tę wartość w równanie (J') które dla skrócenia wypiszemy pod

$$ay^2 + bxy + cx'^2 + Dy + F = 0 \ldots (\dot{I})$$

W nim współrzędne x' i y z innego początku są zachowane odległego od początku (A') ilością $\alpha = -\frac{e}{2c}$ i ponieważ α jest różnicą odciętych x i x'. Krzywa prosto może być wykreślona równaniem $(\dot{I})$, i będzie taka że początek odciętych x' w środku A'' części osi odciętych obiętej krzywą znajdować się będzie: bo gdy $y = 0$, równanie $(\dot{I})$ daje dla x wartości dwie równe wartości i znaków przeciwnych

$$+\sqrt{-\frac{F}{c}} \; ; \; -\sqrt{-\frac{F}{c}}$$

165. Równanie $(\dot{I})$ wykreśli zatem tęż samą krzywą co równanie (A'), lecz biorąc inny początek znajdujący się w środku części RR' osi odciętych. Podobnie i wyraz xy możnaby go usunąć, zrównawszy zero współczynnik tego wyrazu w równaniu (A') i do nowego równania powyższe

działanie zastosowawszy. Lecz zostawalibyśmy w błędzie rozumiejąc że można się pozbyć z równania (A') dwóch wyrazów z pierwszemi potęgami spółrzędnych x i y, gdy z równania (A') wyrzuciwszy wyraz ex, zastąpiemy y przez ważność y'+β dla pozbawienia tego równania i wyrazu dy: bo ta ważność mając się znajdować we wszystkich wyrazach w które y wchodzi, będąc wstawiona w bxy, utworzy dwa wyrazy bxy', i bβx', z których drugi odrodzi w nowém równaniu pierwszą potęgę odciętej: przeto zgubienie jednego z wyrazów obejmujących pierwsze potęgi zmiennych, wznowi drugi.

166. Można widzieć na Figurze 53, przypadek geometryczny odpowiadający tej analizie. bo jeżeli krzywa naprzód równaniem (B') jest wykreślona, i przez RSR'S' wystawiona, początek zaś w A znajdzie się, dla przeniesienia jego w środek A'' linii RR', wstawiemy w równanie (A') ważność x'+α, a powstałe równanie (I) po zniesieniu wyrazu w x', będzie równaniem wykreślającém tę samą krzywę, lecz gdy początek w A'' jest wzięty. Jeżeli potém w to równanie (I) y'+β za y wstawiemy, i z powodu nieoznaczonej ilości β zgubiemy spółrzędnik nowej y', początek w środek nowej osi II', w punkt A''' przeniesiony zostanie; ale natenczas część osi odciętych zawarta w krzywej, nie będąc już RR' ale II', nie jest na dwie równe części podzielona w punkcie A''', jak była RR' w A''.

167. Chociaż wyrazu ax i dy nie podobna razem zgubić, wstawiając następnie x'+α, i y'+β, przecie inaczej się rzecz ma, jeżeli to wstawienie w jednym czasie jest wykonane. Jakoż wstawiwszy x'+α na miejsce x, i nowy spółrzędnik pierwszej potęgi w x zrównawszy zeru, zniszczemy początek (Fig 53). Figs
do znajdowania się w środku A'' linii RR': wstawiwszy potém y'+β za y

nie będziemy mogli dowolnie rozrządzać ilością β, byleby już tak aby się początek na prostej M znajdował; więc początek nie może mieć dowolnego położenia względem krzywej. Położenie początku również będzie ograniczone, chociaż zaczniemy od zgubienia wyrazu mającego pierwszą potęgę y'; lecz początek w każdy punkt pozwoli się przenieść, jeżeli wstawiwszy ważności $x'+\alpha$ i $y'+\beta$, stosownie naznaczymy nieoznaczone α i β.

168. Wstawmy zatém w równaniu (K') ważności $y'+\beta=y$ i $x'+\alpha=x$, a znajdziemy

$$\left.\begin{array}{l} ay'^2+bx'y'+cx'^2+b\alpha \\ \quad +2a\beta \\ \quad +d \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} y' \\ \quad +b\beta \\ \quad +2c\alpha \\ \quad +e \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} x' \\ \quad +a\beta^2 \\ \quad +b\alpha\beta \\ \quad +c\alpha^2 \\ \quad +d\beta \\ \quad +e\alpha \\ \quad +f \end{array}\right\} = 0 \ldots\ldots (K')$$

Wyznaczywszy α i β warunkiem aby współczynniki zmiennych x' i y' były żadne, otrzymamy między α i β równania

$$b\alpha+2a\beta+d=0$$

$$b\beta+2c\alpha+e=0$$

Wyciągniemy zaś z tych równań

$$\alpha=\frac{2ae-db}{b^2-4ac},\quad \beta=\frac{2cd-cb}{b^2-4ac} \ldots\ldots (L')$$

Pamiętnie założenie $b^2-4ac=0$ czyniące te ważności nieskończonemi, ma wtenczas miejsce, gdy Linia 140, krzywa jest Parabolą, więc α i β mają ważności skończone i wyznaczone, tylko w przypadku krzywych dwóch pierwszych rodzajów: dla tego w tém co następuje, tylko te dwa rodzaje krzywych uważać będziemy. Wstawmy w ostatni wyraz równania (K') ważności α i β, i ostatni wyraz przez F naznaczmy; równanie to zamieni się na

$$ay^2 + bxy + cx^2 + I = 0 \ldots\ldots (M')$$

u początek się przeniesie w taki punkt C, że uczyniwszy $y=0$ w równaniu (M'), znajdziemy dla odciętej x liczonej od tego punktu, dwie ważności równe i znaków przeciwnych $+\sqrt{-\frac{I}{c}} \quad -\sqrt{-\frac{I}{c}}$

uczyniwszy zaś $x=0$, znajdziemy dla rzędnej y dwie ważności równe i znaków przeciwnych $+\sqrt{-\frac{I}{a}} \quad -\sqrt{-\frac{I}{a}}$

169. Punkt C jest jedynym w krzywych dwóch pierwszych rodzajów, bo spółrzędne tego punktu α, β jedną tylko ważność mają. Ten punkt, którego własności później poznamy nosi imię środka.

170. Liczniki ułamków (L') nie mogą razem być żadne; gdyż α i β również byłyby żadne; dwa zaś te początki pomieszałyby się, własności nowego należałyby do dawnego, i wpadlibyśmy w tę sprzeczność, iż dawny początek znajduje się w środku części od odciętych dodatnich krzywą; cośmy niepodobieństwa okazali, dopóki równanie wyraźne w x nie utraci.

171. Analiza do tego samego wypadku przyprowadza, bo ważność ilości d wyciągnięta $2ae - db = 0$, i wstawiona w wyrażenie $2cd - eb = 0$, daje

$$\frac{e}{b}(4ac - b^2) = 0$$

co być nie może w krzywych dwóch pierwszych rodzajów.

172. Lecz jeden z tych liczników może być żadnym, nie potrzebując aby drugi żadnym był także. Naprzykład, jeżeli $2ae - db = 0$, ważność ilości e wyciągnięta z tego równania, zmienia ważność spółrzędnej β na

$$\beta = \frac{2cd - \frac{db^2}{2a}}{b^2 - 4ac} = -\frac{d(b^2 - 4ac)}{2ab^2 - 4ac} = -\frac{d}{2a}$$

zatém założenie $\alpha = 0$, daje $\beta = -\frac{d}{2a}$. Podobnie znaleźlibyśmy gdyby $\beta = 0$

$$\alpha = -\frac{e(b^2 - 4ac)}{2c\ b^2 - 4ac} = -\frac{e}{2c}$$

173. Wypada z tego że wszystkie własności krzywych dwóch pierwszych rodzajów, w równaniu (M') zawarte będą: a że to zachodzi ten sam przypadek co pod Liczbą 156, gdyśmy uważali tylko nowe osie JJ', LL', i równanie odnoszące się do nich, zaniechamy przeto kroku i otrzymamy

$$ay^2 + bxy + cx^2 + f = 0 \ldots\ldots (N')$$

za ogólne równanie krzywych mających środek.

Roztrząśnijmy teraz: jaki ma wpływ na krzywą współczynnik b.

174. Gdy rozwiążemy ogólne równanie ze względu na y, istnienie wyrazu bxy, uczyni spółmierną część ważności rzędnej y funkcją, w której x w pierwszej potędze wchodzić będzie. Widzieliśmy, Liczba 142, że z tej części spółmiernej $-\frac{bx}{2a} - \frac{d}{2a}$ powstaje równanie prostej BC albo $B'C'$ (Fig 50) nazwanej średnicą, Fig 50. i dzielącej krzywą na dwie równe części; i że gdy b nie jest zadnem kątem który średnica z którąkolwiek osi odciętych tym jest większy, im bardziej b się powiększa: gdyż styczną trygonometryczną tego kąta jest $\frac{b}{2a}$.

175. Ponieważ wielkość ilości b zależy od kąta który średnica czyni z osią odciętych, jeżeli przeto wystawimy sobie że oś odciętych CX, obraca się około początku C, i bierze położenie CX' (Fig 54), czujemy że średnica, przechodząc przez środki wszystkich cięciw prostopadłych do osi, Liczba 143, zrodzi Fig 54. takie położenie bo cięciwy nie będą te same. To wystarcza do pokazania, że każda osi CX z całą odciętych z swoją średnicą, może bydź różnym od tego jaki

osi pierwotna z swoją czynić, a nawet żadnym. W ostatnim przypadku spółczynnik wyrazu w xy zginie, w równaniu odnoszącym się do nowej osi CX'.

176. Starajmy się zatém wyznaczyć dowolny kąt XCX, warunkiem aby spółczynnik wyrazu w xy stał się żadnym. Niech będzie C początkiem w środku, a CX' osią odnoszącą się do równania

$$ay^2 + bxy + cx^2 + f = 0,$$

poprowadźmy inną oś CX', i z jakiegokolwiek punktu M krzywej spuśćmy na te osie prostopadłe MP i MQ; nazwijmy CP, x; PM, y; CQ, x'; QM, y'; a przez P wystawmy kąt XCX' dwóch osi: ten kąt jest równy kątowi CQN równoodległej NQ od osi CX z drugą osią; ze zaś MQN jest dopełnieniem tego kąta

$$\text{Wst.}MQN = \text{dos.}p; \quad \text{dos.}MQN = \text{wst.}p;$$

to mając będzie widocznie

$$x = CP = CL - PL = CL - NQ$$

$$y = PM = NP + MN = QL + MN.$$

Rozważywszy iż w ogólności w trójkącie prostokątnym, którego jednym z ostrych kątów jest A, przeciwprostokątną b, bok przeciwległy kątowi A, ma za wyrażenie $b\,\text{Wst.}A$, drugi przyległy $b\,\text{dos.}A$ (*) otrzymamy

---

(*) To łatwo się pokaże, bo trójkąt ABC, (Fig 55.) daje

Fig 55

$$AC : CB = 1 : \text{wst.}A$$

$$AC : AB = 1 : \text{dos.}A$$

z kąd $AB = AC\,\text{dos.}A$

$CB = AC\,\text{wst.}A$

$$CL = CQ\,dosp = x'dosp$$
$$QL = Q_1 wstp = x'wstp$$
$$NQ = MQ\,dos MQN = y'wstp$$
$$MN = Q_1 M\,wst MQN' = y'dosp.$$

wstawiwszy te wartości w wartości spółrzędnych x i y będziemy mieli

$$\left.\begin{aligned} x &= x'dosp - y'wstp \\ y &= x'wstp + y'dosp \end{aligned}\right\} \ldots (O')$$

177. Za pomocą tych ogólnych wyrażeń można przerobić równanie

$$ay^2 + bxy + cx^2 + f = 0$$

na inne, tylko x' i y' zawierające, przez to wyrażające stosunek istniejący między nowemi spółrzędnemi. Poczyniwszy potrzebne wstawienia znajdziemy

$$\begin{array}{l|l|l|l} awst^2p & x'^2 + 2awstpdosp & x'y' + ados^2p & y'^2 + f = 0 \ldots (P') \\ +bwstpdosp & \quad -bwst^2p & \quad -bwstpdosp & \\ +cdos^2p & \quad +bdos^2p & \quad +cwst^2p & \\ & \quad -2cwstpdosp & & \end{array}$$

Podzieliwszy przez dos^2p, sprowadziwszy, za $\frac{wstp}{dosp}$: $styp$; położywszy, i zważywszy iż ostatni wyraz staje się $\frac{f}{dos^2p} = (1 + sty^2p)f$, gdyż promień będąc średnią proporcyonalną między dostawą i sieczną, sprawią: że wogólności $\frac{1}{dos} = siecz = \sqrt{1 + sty^2}$ otrzymamy

$$\begin{array}{l|l|l|l} as ty^2p & x'^2 + 2astyp & x'y' + a & y'^2 + (1 + sty^2p)f = 0 \ldots (a') \\ +bstyp & \quad -bstyp & \quad -bstyp & \\ +c & \quad +b & \quad +cstyp^2 & \\ & \quad -2cstyp & & \end{array}$$

Takie jest równanie istniejące między nowemi spółrzędnemi x' i y' liczonemi na osi CX', czyniącej kąt p z kierunkiem pierwotnej osi odciętych CX.

178. Ponieważ ten kąt p jest dowolnym, wyznaczmy go warunkiem, aby spółczynnik w $x'y'$ był zadnym: kąt p dany więc będzie równaniem

$$2astyp - bstyp + b - 2cstyp = 0$$

za pomocą którego wyznaczemy go następującym sposobem.

Ułożywszy podług p i zmieniwszy znaki będzie

$$b\,styp^2 + 2c\,styp - 2a\,styp - b = 0 \ldots (R')$$

podzieliwszy przez b $\quad styp^2 - 2\left(\frac{a-c}{b}\right) styp - 1 = 0$

rozwiązawszy to równanie drugiego stopnia otrzymamy

$$styp = \frac{(a-c)}{b} \pm \sqrt{\frac{(a-c)^2}{b^2} + 1} \quad \ldots (S')$$

ważności, która nigdy urojoną nie będzie, bo wyrażenie pod pierwiastkiem składając się z jedności i kwadratu, istotnie jest dodatnie: przeto zawsze kąt p wyznaczyć można.

179. Widzieliśmy, że gdy $w\,xy$ jest żadnym, średnica równoodległa jest od osi odciętych, a zatem prostopadłą do wszystkich cięciw, które dzieli na dwie równe części. Ponieważ równanie (S') daje dwie ważności dla $styp$, nie istnieje zatem więcej nad dwie średnice AB, DE, (Fig 54) wszystkie cięciwy pod kątem prostym przecinające. Łatwo pokazać że dwie te średnice i między sobą są prostopadłe; że zatem jedna z nich jest tylko podwójną siecznej wyniesioną ze środka na drugą średnicę. Fig 54

Nazwijmy $styp'$ i $styp''$ dwie ważności $styp$ dane równaniem (S'): dwie te ważności będąc przeciwnych znaków, dlatego że zależą od części niespółmiernej wielocznie większej od spółmiernej, wyznaczą styczne kątów DCX, BCX położonych nad i pod osią CX. Łatwo dowieść że styczna kąta BCE wypadająca z nich symetrycznej jest styczną kąta prostego: bo dla skrócenia; naznaczywszy pierwszą ważność $styp'$ równania (S') przez: $a + \sqrt{a^2+1}$

drugą styczną p'' będzie

$$a - \sqrt{a^2+1}$$

albo raczej $-(\sqrt{a^2+}-a-a)$

jeżli uważemy iż znak dodajny tej ostatniej stycznej służy tylko do wyznaczenia jej położenia względem osi lX, i że go można opuścić same bezwzględne ważności tych stycznych uważając, będziemy mieli

$$styp'' = \sqrt{a^2+1} - a$$

Lo mając wiemy z Trygonometryi że

$$sty(p'+p'') = \frac{a+\sqrt{a^2+1}-a+\sqrt{a^2+1}}{1-[(\sqrt{a^2+1})^2-a^2]} = \frac{2\sqrt{a^2+1}}{0} = \infty$$

więc kąt BlD jest prosty, a jeżeli AB jest jedną ze średnic, ED będzie drugą.

180. Wstawiwszy ważność stycznej p w równanie Q' otrzymamy nowe równanie odnoszące się do jednej z osi CD, CB, czyniących zosią lX kąty których styczne takie będą, iż żadna prostokątna dodajna zawsze tej samej długości będzie co żadna ujemna będąca jej przedłużeniem.

Nazwijmy P i Q ważności bezwzględne współczynników współrzędnych x'' i y'^2 równania (Q'), a R stały wyraz który zostawiemy sam po jednej stronie, uczyniwszy go dodajnym gdyby nim nie był, zmieniając wszystkie znaki równania.

Wszelkie przemiany znaków przy wyrazach będących po drugiej stronie, nie mogą nowemu równaniu pozbawionemu wyrazu wxy, dziś 178, innego dać kształtu jak tylko jeden z następujących

$$Py'^2 + Qx'^2 = R \ldots (T')$$

$$Qx'^2 - Py'^2 = R \ldots (U')$$

$$Py'^2 - Qx'^2 = R \ldots (V')$$

181. Gdy nasze równanie stawa pod pierwszym kształtem (I') rozwiązane, daje

$$y' = \pm\sqrt{\frac{R - Qx'^2}{P}} = \pm\sqrt{\left(\frac{R}{Q} - x'^2\right)\frac{Q}{P}}$$

pierwiastek będzie urojonym, jeżeli

$$x'^2 > \frac{R}{Q}, \text{ albo } x' > \sqrt{\frac{R}{Q}};$$

wziąwszy zatém dwie odcięte (Fig 56) CB i CA równe $\sqrt{\frac{R}{Q}}$, krzywa nie może się roz- Fig 56
ciągać za AB, więc jest Ellipsą.

182. Gdy nasze równanie pod drugim kształtem (II') stawa, daje

$$y' = \pm\sqrt{-\frac{R + Qx'}{P}} = \pm\sqrt{\left(x' - \frac{R}{Q}\right)\frac{Q}{P}}$$

i pokazuje że pierwiastek urojonym będzie, jeżeli

$$x'^2 < \frac{R}{Q} \text{ albo } x' < \sqrt{\frac{R}{Q}};$$

ale że nadając dla x ważności większe od $\sqrt{\frac{R}{Q}}$ pierwiastek zawsze prawdziwą ilość wyrażać będzie; zkąd wypada że wziąwszy dwie odcięte CB i CA, (Fig 57) Fig 57
równe $\sqrt{\frac{R}{Q}}$, krzywa tylko w obrębie odpowiadającym części AB osi odciętych w biegu swoim przerwaną zostanie; a za nim dwa swoje ramiona nieskończenie rozciągnie: zatém jest Hyperbolą.

183. Nakoniec nasze równanie pod kształtem równania (V') przedstawić się może. Rozwiązawszy je znajdziemy

$$y' = \pm\sqrt{\left(x' + \frac{R}{Q}\right)\frac{Q}{P}};$$

zkąd się pokazuje że można wziąć dla x jakąkolwiek ważność czy to ujemną, czy dodajną; bo zawsze ta ważność rzeczywistą dla y' wyznaczy. Inaczej się rzecz ma względem y; bo jeżeli $x' = 0$, $y' = \pm\sqrt{\frac{R}{P}}$, i nie jest zdolnem do przyjęcia mniejszej ważności (M), a że dwie te ważności rzędnej y' zawsze są równe i znaków przeciwnych

powstana zatem (Fig 58) podług osią odciętych CX wodległości $CA = CB = \sqrt{\frac{R}{P}}$, druga część Fig
krzywej NAM krzywej, zupełnie podobna części NBM znajdującej się nad osią.

Te dwie części złożone z dwóch ramion rozciągać się będą nieskończenie, od-
dalając się coraz od osi.

Te cechy wskazują że krzywa w rzędzie Hyperbolów powinna być uwie-
szczoną.

184. Hyperbole dane równaniami (U'), (V') nie są różnemi krzywemi. Bo nie-
chaj będzie punkt M (Fig 58) wyznaczony przez spółrzędne $CP = x'$, $PM = y'$.

Wziąwszy CY za oś odciętych, spółrzędne odnoszące się do tej osi będą

$$CG = x, \quad GM = y:$$

Że zaś widocznie $CP = GM$, a $PM = CG$

albo $x' = y$, $y' = x$

więc uważając x' za rzędną, a y za odciętą w równaniu (V') wykreślemy tęż sa-
mą krzywą, byleby śmy odcięte na kierunek osi CY ponieśli: lecz w tém zale-
wie równanie (V') wchodzi w równanie (U'), bo tak w pierwszém jak drugiém
wyraz obejmujący kwadrat z rzędnej ujemnym jest po przeciwnej stronie.

(*) To się pokaże dowodnie uważając że wartość

$$x' = \sqrt{\frac{Py' - R}{Q}}$$

wyciągnięta z równania (V') staje się urojoną jeżeli

$$Py'^2 < R, \text{ albo } y'^2 < \frac{R}{P}$$

a zatem $y' < \sqrt{\frac{a}{P}}$.

185. Wypada z tego że spotrzędne x i y przez z naznaczywszy, równanie (N') krzywych dwóch pierwszych rodzajów, tylko dwa następujące równania obejmować będzie

$$Py^2 + Qx^2 = R \ldots (W')$$

$$Qx^2 - Py^2 = R \ldots (X')$$

z których pierwsze do wszelkiej Elipsy należeć będzie może, dlatego imię równania Elipsy nosi, a drugie dla tejże przyczyny imię równania Hyperboli.

186. Pozostaje nam już tylko wyrazić te równania pod takiem kształtem, pod którymby jednorodność składających je wyrazów widoczną była. Wszystkie wyrazy równania (W') przez R podzieliwszy, otrzymamy

$$\frac{P}{R}y^2 + \frac{Q}{R}x^2 = 1$$

albo raczej

$$\frac{y^2}{\frac{R}{P}} + \frac{x^2}{\frac{R}{Q}} = 1.$$

Ponieważ druga strona jest żadnego wymiaru, więc dwa wyrazy pierwszą stronę składające, także będą żadnego wymiaru: że zaś liczniki x^2 i y^2 są dwóch wymiarów, przeto i mianowniki dwóch wymiarów będą musiały: możemy zatem przypuścić

$$\frac{R}{P} = b^2, \quad \frac{R}{Q} = a^2$$

a nasze równanie zamieni się na

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

i ukaże się pod kształtem jednorodnym. Pozbywszy się mianowników otrzyma:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

równanie Elipsy odniesionej do środka.

187. Stałe b i a przez ważne bardzo linie w krzywej są wystawione. Dla ich poznania, uczyńmy $y = 0$: równanie (W') da

$$x^2 = \frac{R}{Q}$$

ta ważność odciętej x^2, ta sama jest właśnie xx, którą przez a^2 naznaczyliśmy; więc a jest długością odciętej odpowiadającej $y=0$: że zaś rzędna jest zadrzeć w punkcie B (Fig 56) spotkania się krzywej z odciętą, wypada że odcięta CB=a Fig 56

Uczyniwszy potém $x=0$, równanie (W') da nam

$$y = \frac{R}{P}$$

dla ważności którąśmy nazwali b: stała więc b wystawioną będzie przez rzędną przechodzącą przez początek, ta bowiem odpowiada $x=0$, i znajdziemy

$$CD = b:$$

stałe b i a przenoszą zatém w krzywéj stałe P, Q i R, wystawiając linie zdolne dać wyobrażenie budowy krzywéj znalezionéj.

188. Linie AB=2a, i ED=2b są nazywane wielką osią i małą osią ellipsy, a głównemi osiami gdy razem są wymienione.

189. Podobnie okażemy jednorodność równania (X'), wyraziwszy je pod kształtem

$$\frac{Q}{R}x^2 a - \frac{P}{R}y^2 = 1.$$

a potém pod

$$\frac{x^2}{\frac{R}{Q}} - \frac{y^2}{\frac{R}{P}} = 1.$$

uczyniwszy

$$\frac{R}{Q} = a^2, \frac{R}{P} = b^2$$

zamieńmy to równanie na

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

pozbywszy się mianowników na

$$b^2x^2 - a^2y^2 = 1$$

równanie Hyperboli odnoszonej do środka

190. W tém równaniu stała a wystawia linię CB odpowiadającą rzędnej

$y=o$, (Fig 57): bo w tém założeniu równanie nasze sprowadzi się do Fig 57.

$$b^2x^2 = a^2b^2$$

podzieliwszy przez b^2, do $x^2 = a^2$

zkąd $x = \pm a$

Leci nie można podobnie twierdzić że stała b wystawia pewną linię wyznaczoną w krzywej: bo założenie $x=o$, daje

$$y = \pm\sqrt{-b^2} = \pm b\sqrt{-1}$$

a zatém rzędna odpowiadająca odciętej $x=o$ jest urojona: więc ta rzędna dwa razy wzięta, i będąca osią mniejszą takie jest urojona: więc Hyperbola nie ma osi mniejszej. Jednak dla podobieństwa z Elipsą, ilość $2b$ osią mniejszą Hyperboli nazywają, chociaż prawdziwa oś mniejsza jest $2b\sqrt{-1}$.

191. Możemy teraz dowieść to cośmy zawczasu twierdzili, Lic: 141, że równanie postaci

$$Bxy + Dy + Ex + F = o$$

należy do Hyperboli.

Wyrazimy to równanie następującym sposobem

$$xy + \frac{D}{B}y + \frac{E}{B}x + \frac{F}{B} = o$$

nazwawszy $\frac{D}{B} = d$, $\frac{E}{B} = e$, $\frac{F}{B} = f$,

możemy je przemienić za pomocą tych ważności na

$$xy + dy + ex + f = o$$

Ważność zmiennej y wyciągnięta z tego równania jest

$$y = \frac{-ex - f}{x + d}$$

wykonawszy dzielenie $y = -e + \frac{ed - f}{x+d}$ albo $y + e = \frac{ed - f}{x+d}$.

Uczyńmy $y + e = y'$, $x + d = x'$, przeniósłszy osie równoodległe od siebie w oddaleniu

c i d, a równanie nasze zamieni się na

$$y' = \frac{cd - f}{x'}, \text{ albo } x'y' = cd - f$$

a zatem jest równaniem krzywej którąśmy uznali Licz 130 za złożoną z dwóch ramion.

Gdy $cd - f$ jest ujemnem, ponieważ y przybiera zawsze znak przeciwny ważności odciętej x, krzywa przeto zamiast być położoną w kątach XAY, $X'AY'$ (Fig 141) znajdować się będzie w kątach XAY', $X'AY$. Zobacz Licz 77.

192. Dla sprowadzenia równania $xy = k$ do kształtu krzywych mających środek, wstawiemy za x i y ważności dane formułami (O'), Licz 176,

$$x = x' \cos p - y' \sin p$$

$$y = x' \sin p + y' \cos p$$

i otrzymamy $\sin p \cos p x'^2 - \sin^2 p + \cos^2 p \Big| x'y' - \sin p \cos p y'^2 = k$

równanie to wchodzące w równanie (N') krzywych mających środek, i dopełniając konieczne warunku aby krzywa Hyperbolą była. Licz 140.

Nakoniec równanie to zamieni się na równanie Hyperboli odniesionej do środka i głównych osi, jeżeli uczynimy

$$-\sin^2 p + \cos^2 p = 0$$

co daje $\cos^2 p = \sin^2 p = 1 - \cos^2 p$

zkąd $\cos p = \pm \sin p$:

ta ważność sprowadza równanie do

$$\sin^2 p x'^2 - \sin^2 p y'^2 = k, \text{ albo do } \sin^2 p y'^2 - \sin^2 p x'^2 = k$$

ta ważność sprowadza równanie do. Położymy potém za $\sin^2 p$ jej ważność $\frac{1}{2}$ dana przez $\sin^2 p + \cos^2 p = 1 - \sin^2 p$.

193. Używając ogólnego równania do krzywych trzeciego rodzaju widzieliśmy Liczb 168, że wyrazek $b^2-4ac=\alpha$ nieskończonemi czyni ważności zmiennych x i y: co nie pozwala równania (A) przerobić na inne pozbawione wyrazu obejmującego xy w pierwszych potęgach.

Lecz jeżli założymy sobie, tylko jeden z tych wyrazów zgubić, wstawiając w równanie (A') $y+\beta$ za y, lub $x+\alpha$ za x, otrzymamy równanie (G') Liczb 158, albo równanie (I') Liczb 164. Zastanawiając się nad spółczynnikami wyrazów obejmujących pierwsze potęgi zmiennych x i y, przekonamy się że każdy z tych spółczynników tylko jedną z trzech liter a, b, c, posiada, i nie może zrównany zem, żadnej ułożyć zależności między a, b, c, ani koniecznym uczynić który z trzech wyrazków $b^2>4ac$, $b^2<4ac$, $b^2=4ac$, pozbawiających nowe równanie ogólności równania (A') odejmując mu zdolność wystawiania wszystkich trzech krzywych, co widzieliśmy pod Liczb 168.

194. Można więc (którykolwiek rodzaj z trzech krzywych uważać będziemy) zgubić jeden z wyrazów obejmujących pierwsze potęgi w xy: lecz to nam żadnego pożytku nie przyniesie; bo chcąc zmienić kierunek osi odciętych w równaniu już pozbawionem jednego z wyrazów obejmujących x i y w pierwszej potędze, pozostanie jeszcze drugi z tych wyrazów, w który należy wstawić ważność zmiennej x, lub zmiennej y, daną formułami $x=x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$, $y=x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$: a że te ważności zarówno zawierają $x'y'$, wypada z tego że dwa wyrazy z dwiema pierwszemi potęgami zmiennych na nowo powstaną.

195. Naprzód zatém należy zgubić zacząć od zgubienia wyrazu bxy, a potem jednego z wyrazów cx lub dy. Lecz przed zgubieniem tych wyrazów wstawiemy w równanie (A') ważność stałej b wyciągniętą z równania $b^2-4ac=\alpha$, mającego miejsce w krzywych

$$y^2 + px = 0;$$

Łatwo jest poznać w tém równaniu cechę Paraboli; bo daje

$$y = \pm\sqrt{-px}$$

i pokazuje, że x i p przeciwnych znaków bydź muszą, aby ważność zmiennej y rzeczywistą była: a zatém dwa ramiona krzywej, dane podwójną ważnością rzędnej y, nieskończenie rozciągać się będą, lecz tylko w jednym kierunku, a mianowicie odciętych ujemnych jeżeli p jest dodajném, albo dodajnych, jeżeli p jest ujemném. Ponieważ zwyczajnie w tym ostatnim kierunku uważa się Parabolę, będziemy więc mieli $y^2 - px = 0$, albo $y^2 = px$, równanie Paraboli.

197. W tej ostatniej krzywej, gdy nadając inny kierunek osi pierwotnej AX (Fig 89) zgubiliśmy wyraz wx^2 z wyrazem wy, wypadło że oś nowa tylko w jednym punkcie krzywę przecinać mogła; bo ważność odciętej x, odpowiadająca $y = 0$, jedną tylko ważność miała. Osi nowa mogła zatém jedno tylko położenie AX przybrać. Zgubiliśmy potém wyraz wy: nowa oś ponieważ równanie rozwiązane ze względu na y, dawało zawsze dwie ważności równe, i znaków przeciwnych dla y, więc osi odciętych poruszać się musiała równocześnie od siebie o ilość $\beta = AA'$, taką że przybrawszy położenie A'X'', krzywą na dwie równe części przecinać mogła.

Nakoniec zmieniono początek, co równanie do kształtu

$$y^2 = px$$

sprowadziło: a że w tém równaniu $x=0$ daje $y=0$, nowy przeto początek musiał przypaść w punkcie przecięcia się krzywej z osią, to jest w punkcie B.

To co poprzedza wystarcza do pokazania dlaczego zgubienie wyrazu w xy pociąga za sobą zgubienie wyrazu w x^2: można także uważać, że gdy wyraz w xy zginie, gdyby wyraz w x^2 pozostał, krzywa mogłaby tak ujemne jak i dodatnie mieć odcięte, czemu uczuli niepodobném w tym rodzaju krzywych.

Wyrzucenie w jednym czasie tych wyrazów i z tego wypada, że ponieważ nowe równanie nie ma wyrazu w xy, ważnikowe zatém równanie $b^2 - 4ac$, istniejące między jego współczynnikami sprowadza się do

$$4ac = 0,$$

równania mającego miejsce tylko w przypadku $a=0$, albo $c=0$.

Treść ogólnego rozbioru równania drugiego stopnia

198. Mając danem równanie (A) naprzód uważać potrzeba, czy warunek $\frac{e^2}{4c^2} - \frac{f}{c}$ jest dodatnim = ilości dodatniej jest dodatnim: gdyby nie był osi odciętych wystawiona przez AX nie przetnie krzywej (Fig 52): lecz łatwo Fig 52
z równania założonego można przejść do równania (A') odniesionego do osi AX,

wstawiwszy $y+\beta$ za y w pierwsze równanie, i tak β postanowiwszy, aby stały wyraz równania (A') dopełnił warunku żądanego. Natenczas jeżeli dwie ważności odciętej x odpowiadające rzędnej $y=0$ są jednakowych znaków, początek, Lit: RR znajduje się za krzywą, jeżeli przeciwnych, początek jest wkrzywej położony.

Próżno jest gubić następnie wyrazy mające x i y w pierwszej potędze; bo gdy najprzykład wstawimy $x'+\alpha$ za x, i tak rozporządzimy niewyznaczoną α, aby współczynnik wyrazu w x' był żadnym, znajdziemy równanie (I'), a początek odpowiadający temu nowemu równaniu będzie (Fig 53) w środku części RR, Fig: 53 obiętej krzywą, bo gdy dla otrzymania ważności odciętej x' należących do punktów przecięcia się krzywej z osią odciętych, uczynimy $y=0$, ponieważ to nowe równanie posiada x' tylko w drugim stopniu, wyznaczy zatem dwoma równemi i przeciwnych znaków ważnościami zmiennej x', odległości początku (A'') od krzywej. Zgubiwszy potem wyraz mający y w pierwszej potędze, przeniesiemy początek z punktu (A'') w punkt (A''') znajdujący się w pośrodku linii SS: lecz natenczas cięciwa SS' nie będzie na dwie równe części podzielona; w nowem albowiem równaniu, wyraz posiadający x w pierwszej potędze na nowo powstając, Lit: VS dwie ważności odciętej x nierównemi uczyni, gdy $y=0$. Dla uniknienia tej niedogodności $x+\alpha$ i $y+\beta$ w jednym czasie w równanie (A') wstawić należy. Natenczas niewyznaczone α i β ustalemy zrównaniem zera współczynników zmiennych x i y, i otrzymamy równanie (N), lecz jedynie pod warunkiem zawartym

w równaniu (L), aby ważności α i β mogły istnieć.

Że zaś α i β stają się nieskończonemi w razie dopełnienia warunku Paraboli $b^2 - ac = 0$, więc równanie (M) tylko do krzywych dwóch pierwszych rodzajów użytem być może. Początek w tym razie w punkcie C przeniesiony zostaje, który środkiem nazywamy. Ten punkt C jedynym jest w krzywej, bo spółrzędne jego α, β, wyznaczone równaniem pierwszego stopnia jedną tylko ważność mają.

Zgubiemy potem wyraz xy wstawiając za x i y ważności (O') dane w funkcyi kąta p, i do tego stosownie ten kąt wyznaczając. Naówczas odcinków zawsze z tego samego wychodząc początku, jednej z głównych osi krzywej kierunek weźmie, a równanie odnoszące się do tej nowej osi, obejmować będzie tylko stały wyraz i te które posiadają kwadraty z niewiadomych, przeto y będzie zawsze miało dwie równe ważności i znaków przeciwnych.

Tu zaczyna się odróżnienie krzywych dwóch pierwszych rodzajów: bo stały wyraz po jednej stronie zostawiwszy, jeżeli dwa inne są jednakowych znaków, krzywa nie mogąc w obudwu kierunkach rozciągać się nieskończenie, jest Elipsą; jeżeli są różnych znaków, krzywa rozciągając się nieskończenie w obudwu kierunkach jest Hyperbolą. Nakoniec możemy wyrazić stałe tych krzywych w funkcyi wielkiej i małej osi, a otrzymamy

Dla Elipsy równanie $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Dla Hyperboli — — $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

Gdy ogólne równanie (A') do Paraboli się odnosi, nie może razem stracić obudwóch wyrazów z pierwszemi potęgami w x i y. Bo w tém założeniu, ponieważ $b^2 = ac$, gdyby spółczynniki wyrazu w x i wyrazu wy były żadnemi, równanie (B') sprowadziłoby się do

$$y = -\frac{bx}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{4af}$$

i należałoby do linii prostej

Próżno jest także gubić jeden z wyrazów z pierwszemi potęgami zmiennych x i y, przed pozbawieniem wyraza równania (A') wyrazu w xy: bo gdybyśmy naprzykład zgubili wyraz wy, a potém zmienili kierunek osi odciętych, wstawiając za x i y ważności $x\cos p + y\sin p$, i $x\sin p - y\cos p$, ta ostatnia położona w wyraz z pierwszą potęgą odciętej x, wznowiłaby w równaniu wyraz w y'.

Zaczniemy zatém od pozbawienia równania (A') wyrazu w xy, wstawiając w to równanie powyższe ważności spółrzędnych x i y dane w funkcyi w x p i sin p, ale poprzednio pierwsze trzy wyrazy równania (A') wyrazimy pod kształtem kwadratu wypływającego z założenia $b^2 = ac$, skądotrzymamy równanie (Y'). To równanie ponieważ zawiera w sobie wstawy i dostawy kąta p dowolnego p, możemy zatém ten kąt wyznaczyć, zrównawszy zero spółczynnik w x y': a że ten spółczynnik złożony jest z dwóch czynników będących spółczynnikami zmiennych x^2 i y^2, nie może zatém być żadnym, aby razem jeden z tych spółczynników także nie był żadnym. Dla zachowania

wyrazie w y'; zwionamy zone z pożyznych odciętej x'; w tym przypadku wyraz w xy' zginie także, i równanie nasze sprowadzi się do kształtu

$$Ay^2 + By + Cx + D = 0$$

Nie mogąc już teraz pozbawić tego równania wyrazu w x, lecz tylko zgubiony wyraz By, wstawiając $y + \beta$ za y i stosownie stanowiąc ilość dowolną β: nowe równanie będzie natenczas kształtu następującego

$$Py^2 + Qx + R = 0$$

albo $$Py^2 + Q\left(x + \frac{R}{Q}\right) = 0$$

uczyniwszy $x + \frac{R}{Q} = x$ zamieni się na

$$Py^2 + Qx = 0$$

albo $$y^2 + \frac{Q}{P}x = 0$$, albo nakoniec $y^2 + px = 0$

nazwawszy p ułomek $\frac{Q}{P}$

Równanie to natenczas tylko jest prawdziwem w przypadku odciętych dodajnych, gdy p jest ujemnem. Krzywa zatem nie może w tym razie rozciągać swoich dwóch ramion w kierunku odciętych ujemnych, i jest Parabolą na osi odciętych położoną. Podobnie dowiedlibyśmy że gdyby p dodajnem było, Parabola znajdowałaby się na przedłużeniu osi odciętych.

Uwagi nad krzywemi mającemi środek drugiego rzędu.

199. Wyłożenie sposobów jakich używać należy dla otrzymania równań tych krzywych, pozwala przejść w dalsze rozdziały w których o Elipsie

w szczególności będziemy. To co przydamy dla tych jest tylko przeznaczonem którymby nie pomijać nie chcieli

Aby uczynić prostszem równanie ogólne odnoszone do krzywych dwóch pierwszych rodzajów, można było podobnie jak w Parabole, zacząć od zrównania zeru wyrazu w xy: bo gdy ważności

$$x = x' \cos p - y' \sin p$$
$$y = x' \sin p + y' \cos p$$

położemy w równanie (A'), otrzymamy nowe równanie którego współczynnik w x'y' ma tę samą ważność, co by miał w przypadku ex=0, i dy=0, w równaniu (A'). Wypada z tego że zrównawszy ten współczynnik zeru, powinniśmy dla wyznaczenia kąta p otrzymać równanie które przez R' naznaczyli, Liż 178, i poznać jak pod tamtą liczbą, że zawsze kąta stosowną ważność nadać zdolni jesteśmy, aby wyraz w x'y' zginął.

Równanie krzywych dwóch pierwszych rodzajów może być wystawione przez

$$ay^2 + cx^2 + dy + ex + f = 0 \ldots (A'')$$

200. Oś AX' (Fig bc.) do której się odnosi to nowe równanie, przetnie os pierwotną w początku A, i utworzy z nią kąt X'AX wyznaczony warunkiem aby równanie (A'') pozbawionem było wyrazu w xy. Dla tego warunku równanie (B') da nam na ważność rzędnej y równania (A'')

$$y = -\frac{d}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{-4acx^2 - 4aex + d^2 - 4af};$$

Część niewymierną zostawiwszy samą po jednej stronie i naznaczywszy ją przez $\sqrt{X}$, to ostatnie równanie zamienimy na

Fig bc

$$y + \frac{d}{2a} = \pm\sqrt{X} \ldots\ldots (B'')$$

uczyniwszy $$y + \frac{d}{2a} = y' \ldots\ldots (C'')$$

otrzymamy $$y' = \pm\sqrt{X} \ldots\ldots (D'')$$

Ponieważ równanie (C'') wyraża zależność istniejącą między rzędnemi y i y' równań (B'') i (D'') odpowiadającemi jednej ważności odciętej x, widzimy zatem że dodawszy $\frac{d}{2a}$ do y, otrzymamy ważność rzędnej y'.

Jeżeli więc przypuścimy że krzywa była wykreślona na osi AX' za pomocą równania (B''), tę krzywę można łatwo wykreślić za pomocą prostszego równania (D''), biorąc oś $A'X''$ równoodległą od AX', i oddaloną od niej ilością $\frac{d}{2a}$ wystawioną przez AA': bo jakiekolwiek dwie rzędne, takie jak PM i PM', odpowiadające odciętym równym AP i $A'P'$ zawsze się będą różniły stałą ilością $PP' = AA' = \frac{d}{2a}$

201. Ponieważ rzędna y', którą nam daje równanie (D'') ma zawsze dwie jednakowe respektywnie ważności oprócz znaku, więc oś odciętych $A'X''$ dzieli na dwie równe części wszystkie cięciwy prostopadłe do niej, a zatem przystaje do jednej z głównych osi: przeto zgubienie wyrazu xy, które sprawia że oś $A'X$ bierze kierunek AX', czyni ją równoodległą od AX'', a zatem od jednej z głównych osi.

202. Można potem zgubić wyraz dy, wstawiwszy w równanie (A'') $y' + \beta - y$, powstanie ztąd

$$ay'^2 + cx^2 + 2a\beta \left| \begin{matrix} + d \end{matrix} \right| y' + ex + a\beta^2 \left| \begin{matrix} + d\beta \\ + f \end{matrix} \right| = 0 \ldots\ldots (E'')$$

Współczynnik rzędnej y zrównany zeru wyznacza ilość β, o którą ci odcięci tych równoodległe od siebie ma być pomnięta, aby równanie dało zawsze dwie równe ważności dla y; co tylko wtenczas być może gdy oś nowa łączy się z jedną z osi głównych: przeto ważność bezwzględna ilości β zupełnie jest równa ilorazowi $\frac{d}{za}$, o który, jak widzieliśmy Licz 200, oś A'X'' odległa jest od A'X'.

203. Położywszy ważność ilości β w równaniu (E'') w którém ostatni wyraz przez F naznaczymy, otrzymamy

$$ay'^2 + cx^2 + ex + F = 0 \ldots\ldots (F'')$$

równanie odnoszące się do osi A'X'' skierowanej podług jednej z głównych.

104. Można zmienić na tej osi miejsce początku, wstawiwszy za x w równaniu (F'') $x' + \alpha$, i naznaczywszy α dowolnie; natenczas równanie (F'') zamieni się na

$$\begin{array}{l} ay'^2 + cx'^2 + 2c\alpha \\ \quad + e \end{array} \Big| \begin{array}{l} x' + c\alpha^2 \\ \quad + e\alpha \\ \quad + F. \end{array} = 0.$$

Jeżli wstawimy α przypuściwszy $2c\alpha = 0$, równanie w drugim tylko stopniu x' zawierać będzie; a widzieliśmy Licz 168 i 169 że w tym przypadku początek do środka C być przeniesiony. Lecz jeżli wyraz stały zrównamy zeru, początek przeniesionym zostanie w punkt przecięcia się krzywej z osią, Licz 157, i otrzymamy $c\alpha^2 + e\alpha + F = 0$

z kąd wyciągniemy $\alpha = -\frac{e}{2c} \pm \sqrt{\frac{e^2}{4c^2} - \frac{F}{c}} = -\frac{e}{2c} \pm \frac{1}{2c}\sqrt{e^2 - 4cF}.$

ważność zawsze mogącą istnieć, jako i ważność ilości β, bo obydwie nie mogą

nie mogą się stać ani równemi zeru, ani nieskończonemi, ani unjonemi: dwa pierwsze przypadki nie mogą się zdarzyć, bo wymagają aby które ze spółczynników I, e, c, lub a żadnemi bydź mogły, co ostatnie jest niepodobném. Zaś spółczynniki I i e nie mogą za żadne bydź uważane, gdy idzie o ich zgubienie. Co zaś do spółczynników a i c, istnienie ich koniecznem jest dowodzeniu, iż równanie (A') stosuje się do krzywych dwóch pierwszych rodzajów. To założenie to nie miałoby miejsca, gdyby który z tych spółczynników był równym zeru: w tym bowiem razie równanie pozbawione wyrazu w xy, spełniłoby warunek $b^2 = 4ac = 0$ krzywych trzeciego rodzaju. Z drugiej strony niepodobna, abyśmy było unjonym, bo wyrażenie Lic 148, $\frac{e^3}{4c^2} - \frac{I}{c}$ jest zawsze dodatniem, skoro ov przecina krzywą.

208. Uważać razem trzeba ii przy wyznaczaniu ilości α i β, obojętną rzeczą dla nas było, czy wstawienie wartości spółrzędnych x i y razem czy po sobie się odbywały: ale że przeciwnie będzie, jeżeli wyraz xy istnieje w równaniu (A''): bo wstawiwszy na przód za y, $y' + \beta$, spółczynnik rzędnej y' mający bydź zwionarny zeru dla wyznaczenia β, będzie $2a\beta + d$; gdy zaś wjednym czasie wstawiemy $x' + \alpha$, za x, i $y' + \beta$ za y, ten spółczynnik zamieni się na

$$2a\beta + b\alpha + d:$$

więc dwa te działania tylko wtenczas jednę wartość dla β dadzą, gdy $y = o$.

209. Wartości spółrzędnych α i β wstawione w równanie (A'') sprowadzą go

do kształtu $ay^2 + cx^2 + gx = 0$.

To równanie daje $y^2 = -\frac{cx^2}{a} - \frac{gx}{a}$

uczyniwszy zaś $-\frac{c}{a} = n$ i $-\frac{g}{a} = m$

krzywe dwóch pierwszych rodzajów, których początki razem na jednej z głównych osi, Liczba 202, i na krzywej znajdować się będzie Liczba 204, będą miały za równanie $y^2 = mx + nx^2$

Ta formuła ogólna i równanie Paraboli $y^2 = px$ obejmuje, gdy

$m = p$, $n = 0$

więc $y^2 = mx + nx^2$

jest ogólnem równaniem krzywych drugiego rzędu.

C. Ellipsie.

207. Widzieliśmy, Liczba 134, że Ellipsa jest krzywą ograniczoną w obydwóch kierunkach: to prawda bezpośrednio się pokazuje z jej równania

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

albo $$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \ldots (4'')$$

bo rozwiązawszy je otrzymamy

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \ldots (4''')$$

z tąd widać że wszelkie ważności nadawa dla x, a większe od a, czy dodatnie, czy ujemne, urojoną ważność rzędnej y czyni.

208. To samo równanie pokazuje także, iż y ma zawsze dwie równe ważności, i znaków przeciwnych; z tąd wypada że ta wielka przecina krzywą na dwie równe zupełnie, podobne do siebie części. Rozwiązawszy równanie

Elipsy ze względu na x, można się łatwo zapewnić że oś mniejsza tej samej własności używa.

209. Średnica i miała są prostą dwoma średnicami; ale się różnią od innych położeniem względnych: bo jeżeli średnica jest jedną z głównych osi, wszelka rzędna przecinająca tę oś pod kątem prostym, będzie równą rzędnej ujemnej należącej do tego samego punktu osi: tymczasem jeżeli średnica nie jest jedną z głównych osi, rzędna musi mieć pewną pochyłość, Liz 115 i 116, aby równą była w długości rzędnej ujemnej odpowiadającej tej samej odcięty.

210. Punkta A i B (Fig 86) w których krzywa spotyka co większą razy przecinają się wierzchołkami

Można wziąć jeden z wierzchołków za początek, naprzykład wierzchołek A. Nazwawszy x' odcięte AP liczoną od tego wierzchołka, między tą odcięty i odcięty x rachowaną od środka następujące równanie mieć będziemy

$$CP = AP - AC, \text{ albo } x = x' - a$$

Za ważność wstawienia w równanie

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

da

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax' - x'^2) \quad \ldots \quad (7^m)$$

równanie Elipsy odniesionej do wierzchołka

211. Jakkolwiek doszliśmy do tego równania przypuszczając że odcięta x liczona od środka odpowiadała punktowi wziętemu na części DBE Elipsy

równanie przecie nie byłoby zmienionem gdyby ten punkt na części DAE był wzięty; bo naówczas, ponieważ odcięta ujemną by się stała, zamiast $x = x' - a$ mielibyśmy $x = -(x' - a)$ wyrażenie które do kwadratu podniesione, tą samą dałoby wartość dla x^2, jaka posłużyła do przemienienia równania Elipsy odniesionej do środka na równanie w którem początek jest w wierzchołku.

212. Jeżeli zatoczymy na jednej średnicy za koło i elipsę, i nazwiemy y i y' rzędne koła i elipsy odpowiadające jednej odciętej x, równanie elipsy między x i y' następujące da zależność

$$y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

a koła $$y''^2 = a^2 - x^2$$

za ilość $a^2 - x^2$ jej wartość y''^2 w pierwsze równanie podstawiwszy otrzymamy

$$y'^2 = \frac{b^2}{a^2} y''^2$$

wyciągnąwszy pierwiastek

$$y' = \frac{b}{a} y''$$

z czego powstanie proporcya

$$y'' : y' = a : b = 2a : 2b$$

co nam pokazuje iż rzędna koła jest do rzędnej Elipsy w stosunku stałym wielkiej osi do małej osi. Można zatem spółrzędne Elipsy za pomocą rzędnych koła wyznaczyć, znając stosunek wielkiej osi do małej osi w Elipsie.

213. Można podobnie rzędną Elipsy z inną rzędną tej samej Elipsy

porównać. Niechaj będą α i β współrzędne CP i PM punktu M elipsy, α' i β' fig 56
współrzędne CP' i $P'M'$ innego punktu M': wstawiwszy następnie te wielkości zamiast x i y w równaniu Elipsy, a będziemy mieli

$$\beta^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - \alpha^2) \quad . \quad \beta'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - \alpha'^2)$$

więc $$\beta^2 : \beta'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - \alpha^2) : \frac{b^2}{a^2}(a^2 - \alpha'^2)$$

znosi się spólny czynnik $\frac{b^2}{a^2}$ i zważywszy że

$$(a^2 - \alpha^2) = (a + \alpha)(a - \alpha)$$

i że iloczyn $(a^2 - \alpha'^2)$ podobnym sposobem da się rozłożyć, poprzedzająca proporcyę zamienimy na

$$\beta^2 \cdot \beta'^2 = (a+\alpha)(a-\alpha) : (a+\alpha')(a-\alpha')$$

to jest $PM^2 : P'M'^2 = (AC + CP)(CB - CP) : (CB + CP')(AC - CP')$

albo $PM^2 : P'M'^2 = AP \times PB : P'B \times AP'$

a zatém w elipsie kwadrat z rzędnej poprowadzonej do wielkiej osi, ma się do kwadratu z innej rzędnej, jak się ma iloczyn z odległości spodka pierwszej rzędnej od dwóch wierzchołków, do iloczynu z odległości spodka drugiej rzędnej od tych samych wierzchołków.

214. Jeżeli weźmiemy otwór cyrkla (fig 56) równy połowie wielkiej osi AB, fig 56
i z wierzchołka D małej osi zatoczymy dwa łuki DF, DF' punkta F i F' będą ogniskami Elipsy, a odległość jednego z ognisk od środka nazywa się mimośrodem.

215. Wystawmy przez tę odległość CF - CF' jednego z ognisk od środka: dla własności

kwadratu z przeciwprostokątnej będzie

$$CF^2 = CF'^2 = DF'^2 - DC^2$$

czyli $c^2 = a^2 - b^2 \ldots (I'')$

Ważność stałej b wyciągnięta z tego równania, położywszy w równanie Elipsy odnoszonej do środka, znajdziemy

$$y^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2) \ldots (K'')$$

równanie elipsy wyrażonej w funkcyi mimorodu.

216. Ogniska Elipsy używają własności pewnej bardzo ważnej, którą otrzymamy przez rozwiązanie następującego zadania.

Znaleść równanie linii krzywej takiej, aby summa odległości każdego jej punktu od dwóch punktów stałych była zawsze równą danej linii 2a.

Wystawmy przez 2c odległość dwóch punktów F i F'. (Fig 61). Ponieważ rozważamy linię za krzywą, przeto wszystkie jej punkta nie mogą bydź w jednym kierunku: więc ta linia musi mieć punkta za punktami FF'; a jeżeli z któregokolwiek z nich np: M poprowadzimy proste MF, MF', trójkąt MFF' koniecznie będzie miał miejsce: co wymaga żeby 2a przewyższało FF': bo gdybyśmy mieli 2a = 2c = FF', ponieważ z założenia 2a = MF + MF', byłoby MF' + MF = FF', to jest że Summa dwóch boków w Trójkącie byłaby równa trzeciemu; co bydź nie może.

Z drugiej strony byłoby niedorzecznie przypuszczać 2a < 2c, położywszy bowiem ważności linii 2a i 2c, byłoby

$MF + MF' \lessgtr FF'$

z każdby wypadło że proste FM i $F'M$ wychodzące z punktów F i F' nigdyby się spotkać nie mogły, bo ich Summa byłaby mniejsza od rozdzielającej ich prostej FF'. Wypada zatem że nie może bydź tylko

$FM + MF' > FF'$, to jest $2a > 2c$

To przysposobiwszy nazwijmy x, y spółrzędne punktu M, a z', z'', odległości MF i MF' tego punktu od ognisk. Dla własności kwadratu z przeciwprostokątnej, bo kąty prostokątne MPF, MPF' dadzą równania

$$FM^2 = FP^2 + PM^2 = (CF + CP)^2 + PM^2, \text{ albo } z'^2 = (c+x)^2 + y^2 \ldots (L'')$$

$$F'M^2 = F'P^2 + PM^2 = (CP - CF')^2 + PM^2, \text{ albo (*) } z''^2 = (x-c)^2 + y^2 \ldots (M'')$$

do których przyłączemy trzecie bezpośrednio dane zadaniem

$$z' + z'' = 2a \ldots (N'')$$

Odjąwszy równanie (M'') od równania (L'') i sprowadziwszy otrzymamy

$$z'^2 - z''^2 = 4cx \ldots (O'')$$

że zaś w ogólności wyrażenie kwadratu $a^2 - b^2$ wypada z iloczynu $a+b$ przez $a-b$, zatém równanie (O'') następującym sposobem dla się napisać

$$(z' + z'')(z' - z'') = 4cx$$

Gdy położemy ważność Summy $z' + z''$ daną równaniem (N'')

$$2a(z' - z'') = 4cx$$

(*) Gdybyśmy rzędne w obrębie FF', równania $(L'')(M'')$ żadnejby zmianie nie podpadły; bo FP i $F'P$, albo FP'' i $F'P''$ musiałyby wyjąwszy same kwadraty, te same

przez $2a$ podzieliwszy $z' - z'' = \frac{4cx}{2a} = \frac{2cx}{a}$

Dodawszy do tego równania, równanie (N'') znajdziemy

$$2z' = 2a + \frac{2cx}{a}$$

a zatém $$z' = a + \frac{cx}{a}$$

Wstawmy tę ważność ilości z' w równanie (L''); sprowadziwszy, będzie

$$a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} = c^2 + x^2 + y^2$$

zkąd $$y^2 = a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} - c^2 - x^2$$

Sprowadziwszy drugą stronę do jednego mianownika

$$y^2 = \frac{a^4 + c^2x^2 - a^2c^2 - a^2x^2}{a^2} = (a^2 - c^2)a^2 - (a^2 - c^2)x^2$$

więc $$y^2 = \frac{(a^2 - c^2)}{a^2}(a^2 - x^2)$$

i mamy równanie Elipsy, Liczba, której $2a$ jest wielką osią, a c mimorodem.

217. Liniom FM, FM wychodzącym z ogniska, i kończącym się na krzywej nadaje: no imię promieni wodzących.

218. Własność okazana Liczbą 216, podaje nam sposoby wykreślenia Elipsy przykładami, gdy wielka i mała oś jest dana.

Wyznaczemy naprzód na wielkiej osi AB (Fig 56) ogniska F, F', a podzieliwszy AB na dwie części An i Bn, weźmiemy je za promienie dwóch łuków koła, które zatoczemy z ognisk F i F' jako ze środków; te łuki przecinając się wyznaczą punkt Elipsy; gdyż podług tego wykreślenia

---

ważności co FP i F'P, a że te linie w kwadracie tylko w równaniu (L'') (M'') wchodzą, dwojętna przeto jest rzecz, czy są dodajne, czy ujemne.

Suma promieni wodzących FM i FM równa będzie wielkiej osi AB.

219. Można także ciągłem poruszeniem wykreślić Elipsę, w tym zamiarze przytwierdzimy do punktów F i F' końce nitki równej osi AB, a wypręzywszy ją rylcem którym prowadzić będziemy, wykreślimy ellipsę; bo dla każdego punktu otrzymamy $FM + MF' = AB = 2a$.

220. Parametr jest podwójna rzędna AA' przechodząca przez ognisko. Dla jego wyznaczenia wprowadzimy za x wzniosienie ellipsy odcięte od ogniska: a nazwawszy $\frac{p}{2}$ rzędną odpowiadającą tej ważności odciętej x, równanie

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

zamienimy na $$\frac{p^2}{4} = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - c^2)$$

Położywszy na miejsce $a^2 - c^2$ jego ważność b^2 daną równaniem (1) dostaniemy

$$\frac{p^2}{4} = \frac{b^4}{a^2} \text{ albo } p^2 = \frac{4b^4}{a^2}$$

Wyciągnąwszy pierwiastek

$$p = \frac{2b^2}{a} = \frac{4b^2}{2a} = \frac{2b \times 2b}{2a}$$

co nam pokazuje że parametr jest trzecią proporcyonalną do wielkiej i małej osi.

221. Położywszy za iloraz $\frac{b^2}{a}$ ważność jego $\frac{p}{2a}$ w równaniu Elipsy, otrzymamy

$$y = \frac{p}{2a}(a^2 - x^2)$$

równanie Elipsy odnoszonej do Parametru.

O Hyperboli.

222. Rozbiór który z samego kształtu równania Elipsy, Liczb 207 i 208. dał nam poznać wiele własności, można i do Hyperboli zastosować, która gdy jest odniesioną

do środka ma za równanie

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \ldots (P'')$$

223. Rozwiązawszy to równanie ze względu na y, otrzymamy

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)} \ldots (Q'')$$

i widzimy że rzędna staje się urojoną na wszelką wartość odciętej x mniejszej od a, czy dodatnią, czy ujemnie wziętej; co dowodzi że przewy w biegu tej krzywej od A do B. Zobacz Liczbę 182.

224. Równanie (Q'') zawsze dwie równe ważności i znaków przeciwnych dla rzędnej daje, co uczy nas że od odciętych AB do której ta rzędna jest prostopadłą, jest jedną z głównych osi.

225. Można także odnosić Hyperbolę do jednego z jej wierzchołków A lub B. Na fig. 51 zwijmy x' odciętą rachowaną od wierzchołka: jeżeli tym wierzchołkiem będzie A

$$CP = AP - AC$$

czyli $x = x' - a$.

jeżeli zaś B $\qquad CP = BP + CB$,

czyli $x = x' + a$.

te ważności ustawione po sobie w równanie (P'') Hyperboli odnoszonej do środka dadzą

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x'^2 - 2ax') \ldots (R'')$$

równanie Hyperboli odnoszonej do wierzchołka A,

i $\quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x'^2 + 2ax') \ldots (S'')$

równanie Hyperboli odniesionej do wierzchołka B.

226. Jeżeli w równaniu (P'') Hyperboli odniesionej do środka uczyniemy $b=a$, wpadniemy na równanie $y^2=x^2-a^2$ Hyperboli której nadano imię Hyperboli równoramiennej

227. Porównawszy z sobą równania Ellipsy, Hyperboli, koła, i Hyperboli równoramiennej, przekonamy się że Hyperbola równoramienna tem jest w Hyperbolach, czem koło w Ellipsach.

228. Niechaj będą $\alpha\beta$, i $\alpha'\beta'$ spółrzędne dwóch punktów Hyperboli: mamy zatem

$$\beta^2=\frac{b^2}{a^2}(\alpha^2-a^2)$$

$$\beta'^2=\frac{b^2}{a^2}(\alpha'^2-a^2)$$

zkąd wyciągniemy proporcyą

$$\beta^2:\beta'^2=\frac{b^2}{a^2}(\alpha^2-a^2):\frac{b^2}{a^2}(\alpha'^2-a^2)$$

albo zniósłszy $\frac{b^2}{a^2}$ w drugim stosunku

$$\beta^2:\beta'^2=(\alpha^2-a^2):(\alpha'^2-a^2)$$

albo $\beta^2:\beta'^2=(\alpha+a)(\alpha-a):(\alpha'+a)(\alpha'-a)$

to jest $PM^2:P'M'^2=(CP+AC)(CP-CB):(CP'+AC)(CP'-CB')$ fig. 51

albo $PM^2:P'M'^2=(AP\times BP):(AP'\times BP')$.

Przeto w Hyperboli podobnie jak w Ellipsie kwadraty z dwóch rzędnych mają się do siebie w stosunku iloczynów odległości spodków tych rzędnych od dwóch wierzchołków.

229 Gdy początek odcięłych ten sam jest w Elipsie co Hyperboli, dla wyprowadzenia równania jednej z tych krzywych z równania drugiej, dosyć zamienić b^2 na $-b^2$, albo $b\sqrt{-1}$: jest to wypadkiem porównania, jakie można zrobić pomiędzy temi krzywemi.

230. W Elipsie nazwaliśmy ogniskami dwa punkta wzięte na wielkiej osi w odległościach ci-e równych $\sqrt{a^2-b^2}$... Jeżeli nadamy to samo imię punktom odpowiednim w Hyperboli, należy Lic 229 zmienić b^2 na $-b^2$, a ogniska Hyperboli znajdować się będą na osi odcięłych, w odległościach od środka wyrażonych przez $\sqrt{a^2-b^2}$.

Aby wykreślić to wyrażenie, wyprowadzimy (Fig 51) ze środka C prostopadłą CD równą stałej b: i z tego punktu dworem cyrkla równym przeciwprostokątnej D.B, zaczerpiemy dwa łuki przecinające oś wielką w punktach F i F'. Te punkta będą ogniskami; bo własność kwadratu z przeciwprostokątnej da nam $DB^2 = CB^2 + DC^2$

czyli $c^2 = a^2 + b^2$ ... (I'');

zkąd wyciągniemy $c = \sqrt{a^2+b^2}$

231. Można także podobnie jak w Elipsie uczynili, równanie Hyperboli w funkcyi stałej c wyrazić, a znajdziemy że to równanie jest

$$y^2 = \frac{c^2-a^2}{a^2}(x^2-a^2) \ldots\ldots (II'')$$

232. Porównawszy to równaniem otrzymaniem Lic 215 na podobny

przypadek w Ellipsie, przekonamy się że jest to samo: bo gdy się wszelki iloczyn nie zmienia, jeżeli dwa jego czynniki ujemnemi zrobiemy dlatego że $a \times b = -a \times -b$, można zmienić znaki czynników składających drugą stronę równania (C''), i to równanie będzie

$$y^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

233. Ale po czem poznać czy to równanie do Ellipsy czy do Hyperboli należy? W tym celu zważmy, iż $x^2 - c^2$ powinno być dodatnią ilością w Ellipsie, ujemną zaś w Hyperboli.

234. Ognisko Hyperboli używają także własności bardzo ważnej, która nam za sposobność rozwiązanie następującego zagadnienia.

Znaleźć równanie linii krzywej takiej, w której by różnica odległości każdego punktu od dwóch punktów stałych zawsze równą była ilości stałej $2a$.

Wystawmy przez $2c$ odległość dwóch punktów stałych F i F' (fig 61). fig 61.

Ponieważ linia ma być krzywą, zatem wszystkie jej punkta nie mogą być w jednym kierunku; znajdują się więc punkta za punktami linii FF': a jeżeli z jednego z tych punktów M, poprowadzimy proste MF, MF', których MF kończenie będzie miał miejsce przez linią daną za powinna być taką, aby $\text{Prost } MF'$ mógł istnieć: co wymaga aby za miejsce nie były od FF': bo gdybyśmy mieli za=ze, ponieważ z założenia

$2a = MF - MF'$, a $2c = FF'$, byłoby

$$MF - MF' = FF'$$

$$\text{zkąd } MF = FF' + MF'$$

to jest że suma dwóch boków w trójkącie równa jest trzeciemu: co być nie może. Z drugiej strony byłoby niedorzecznie przypuszczać $2c < 2a$; polegający bowiem ważność idei $2a$ i $2c$, mielibyśmy

$$FF' < MF - MF'$$

$$\text{albo } FF' + MF' < MF,$$

z czegoby wypadło że proste FF' i MF' nigdyby się spotkać nie mogły, bo ich suma byłaby mniejsza od przedzielającej ich linii. Przypuścimy zatem $2a < 2c$. To przysposobiwszy obierzmy środek l linii FF' za początek, z punktu M spuśćmy prostopadłą MP na kierunek FF', i nazwijmy

$$CP, x;\ PM, y;\ FM, z';\ FM, z'';$$

dla własności kwadratu z przeciwprostokątnej, trójkąty prostokątne FMP, FMP dadzą równania

$$FM^2 = (CP + CF')^2 + PM^2, \text{ czyli } z'^2 = (x+c)^2 + y^2 \ldots (V'').$$

$$FM^2 = (CP - CF')^2 + PM^2, \text{ czyli } z''^2 = (x-c)^2 + y^2 \ldots (W'')$$

a warunek założenia daje $z' - z'' = 2a \ldots (X'')$

Odjąwszy równanie (W'') od równania (V'') i sprowadziwszy otrzymamy

$$z'^2 - z''^2 = 4cx \ldots (Y'').$$

że zaś wyrażenie kwadratu $a^2 - b^2$ wypada z kwadratu iloczynu $a+b \times a-b$, prze-

to równanie (Y'') tym sposobem dá się napisać

$$(z' + z'')(z' - z'') = 4cx.$$

ustawiwszy za $z' - z''$, jego ważność daną równaniem (X'') będziemy mieli

$$2a(z' + z'') = 4cx.$$

podzieliwszy przez $2a$ $\quad z' + z'' = \frac{4cx}{2a} = \frac{2cx}{a}$.

Dodawszy do tego równania równanie (X'') znajdziemy

$$2z' = 2a + \frac{2cx}{a}, \text{ a zatem } z' = a + \frac{cx}{a}.$$

Wstawiwszy tę ważność za z' w równanie (Y'') i sprowadziwszy, otrzymamy

$$a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} = c^2 + x^2 + y^2$$

z tąd wyciągniemy $\quad y^2 = a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} - c^2 - x^2$.

sprowadziwszy do jednego mianownika drugą stronę

$$y^2 = \frac{a^4}{a^2} + \frac{c^2x^2}{a^2} - \frac{ac^2}{a^2} - \frac{x^2a^2}{a^2} = \frac{(a^2 - c^2)a^2}{a^2} - \frac{(a^2 - c^2)x^2}{a^2}$$

$$\text{zatem } y^2 = \frac{(a^2 - c^2)}{a^2}(a^2 - x^2);$$

równanie Hyperboli to jest które mamy dali Lic: 232.

235. Własności Hyperboli podobnie jak Elipsy, podaje nam sposoby wykreślenia jej punktami. Do tego wyznaczywszy naprzód ogniska Lic: 230, z jednego z ognisk, (Fig 62) zakreślmy łuk promieniem większym Fig 62. od FB, ilością np: m; potem z drugiego ogniska zakreślmy inny łuk

promieniem $F'B + m$: te łuki w dwóch swoich przecięciach wyznaczą dwa punkta Hyperboli; bo różnica tych promieni wychodzących z ognisk widocznie jest równa $FB - F'B = 2a$.

236. Można także wykreślić Hyperbolę ciągłem poruszeniem; a to następującym sposobem. Dwa punkta F i F' wziąwszy za ogniska, (Fig 62), fig 62 jeżeli w jednym z tych punktów np: F przytwierdzimy linię niechaj FH, a w drugim F' nitkę od tej linii krótszą, i drugim końcem z daną linią połączoną w punkcie H; a potém powiadzić będziemy rylec, w ciągłem wyprężeniu trzymający nitkę, ten rylec wykreśli część Hyperboli.

Jakoż niechaj będzie za różnicą linii z nitką: jakikolwiek punkt M na krzywej tak wykreślonej weźmiony, jeżeli od długości linii $= FM + MH$ odejmiemy długość nitki $= FM + MH$, pozostanie

$$FM - FM = 2a$$

co jest własnością Hyperboli.

237. Parametr p czyli podwójną rzędną przechodzącą przez ognisko wyznaczymy, ustawiwszy w równaniu (P'') Hyperboli odnoszonej do środka odciętę ogniska, i znajdziemy

$$\frac{p^2}{4} = \frac{b^2}{a^2}(c^2 - a^2);$$

że zaś $c^2 - a^2 = b^2$, Liczba 230, równanie to zamienia się na

$$p^2 = \frac{b^4}{a^2}$$

wyciągnąwszy pierwiastek

$$p = \frac{2b^2}{a} = \frac{4b^2}{2a} = \frac{2b \times 2b}{2a},$$

więc w Hyperboli tak jak w Elipsie parametr jest trzecią proporcyonalną do wielkiej i małej osi.

238. Jakoteż położywszy za ilorz $\frac{b^2}{a^2}$ wartość jego $\frac{p}{2a}$ w równaniu Hyperboli znajdziemy $y^2 = \frac{p}{2a}(x^2 - a^2)$ równanie odnoszone do Parametru.

O Paraboli.

239. Cecha odróżniająca Parabolę natychmiast widzieć się daje w jej równaniu

$$y^2 = px, \text{ albo } y = \pm\sqrt{px} \ldots (2^n)$$

bo to równanie pokazuje że x i p jednakowych znaków być powinny, aby y nie stało się urojonem: więc krzywa tylko w jednym kierunku rozciągać się może się rozdzielając na dwa ramiona, tem bardziej oddalając się od siebie, im bardziej x się powiększa. Fig 19 b.

240. Gdy uczynimy $x = 0$ dla znalezienia rzędnej przechodzącej przez początek otrzymana wartość $y = 0$, uczy nas że początek jest w punkcie A (Fig 63) w którym Fig 63 krzywa oś przecina: temu punktowi nadano imię wierzchołka.

241. To samo równanie uczy nas jeszcze, iż kwadraty z rzędnych są do siebie

w stosunku odcinków odpowiadających tym rzędnym.

Bo niechaj będą $\alpha, \beta,$ i α', β' rzędne dwóch punktów: mamy dla pierwszego $\beta^2 = p\alpha^2$

dla drugiego $\beta'^2 = p\alpha'^2$

więc $\beta^2 : \beta'^2 = p\alpha^2 : p\alpha'^2;$

albo drugi stosunek przez p podzieliwszy

$$\beta^2 : \beta'^2 = \alpha^2 : \alpha'^2.$$

242. Parabola jest Elipsą której oś wielka jest nieskończona, albo co na to samo wychodzi, jest granicą wszystkich elips w których odległość ogniska od wierzchołka jest jednakowa.

Dla okazania tego nazwijmy c odległość AF (fig 56) ogniska od wierzchołka Fig 5
ka Elipsy, i wstawmy wartość ilości b^2 w funkcyi c w równanie

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

Elipsy odnośnej do wierzchołka, Lic 210, będzie

$$AF = AC - FC, \text{ czyli } c' = a - c;$$

położywszy za c jego wartość, Lic 214, otrzymamy

$$c' = a - \sqrt{a^2 - b^2}$$

przeniosłszy, i wykonawszy podniesienie do potęgi

$$a^2 - b^2 = (a - c')^2 = a^2 - 2ac' + c'^2.$$

z tąd wyciągniemy $b^2 = 2ac' - c'^2$

Za pomocą tej ostatniej ważności równanie Elipsy zamieni się na

$$y^2 = \frac{2ac' - c'^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

a rozwiązawszy $y^2 = 4c'x - 2\left(\frac{c'x^2 + c'^2x}{a}\right) + \frac{x^2c'^2}{a^2}$

równanie które gdy połowa osi wielkiej jest nieskończona sprowadza się do

$$y^2 = 4c'x.$$

243. Porównawszy to równanie z równaniem Paraboli, widzimy że $p = 4c'$: wziąwszy zatem na osi odcięty punkt odległy od wierzchołka ilością równą $\frac{p}{4}$, nazwiemy ten punkt ogniskiem Paraboli.

244. Ogniskowa Paraboli czyni tę własność, że wyprowadziwszy z niego prostą FM do którejkolwiek punktu Paraboli (fig 63), ta prosta która promieniem wodzącym nazwiemy, równa będzie odciętej AP tego punktu powiększonej o $\frac{p}{4}$.

fig 63

Jako bowiem $\angle AFM$ FMP daje równanie

$$FM^2 = FP^2 + PM^2$$

albo $FM^2 = (x - c')^2 + 4c'x$

rozwiązawszy drugą stronę i sprowadziwszy

$$FM^2 = x^2 + 2c'x + c'^2 = (x + c')^2$$

wyciągnąwszy pierwiastek $FM = \pm(x + c')$

albo zaś czyniąwszy tylko znak wyższy

$FM = x + c$, czyli $FM = x + \frac{1}{4}p$.

245. Po zatrzymaniu znaku niższego, nie trzeba zauważać że pomnożony wodzący ma tęż samą ważność z różnicą tylko znaku: bo jeżeli ważność dodajna jest FM, odpowiada ona odcięciej $AP = x$; lecz naówczas ważność ujemna powinna odpowiadać $AP' = x$.

246. Dla wyrażenia parametru Paraboli, to jest podwójnej rzędnej AH' przechodzącej przez ognisko, wstawiemy za x w równanie krzywej odcięciu ogniska $\frac{p}{4}$, a znajdziemy dla ważności rzędnej AF'^2,

$$y^2 = \frac{1}{4}p^2, \text{ i } y = \frac{1}{2}p,$$

więc parametr jest równy p.

247. Jeżeli na przedłużeniu osi odciętych (fig 63) w odległości $AD = \frac{1}{4}p$, po- fig 63
ciągniemy pod kątem prostym nieograniczoną linię DL, i spuścimy prostopadłą MG z którejkolwiek punktu krzywej na tę linię DL, którą nazwiemy kierującą, będzie widocznie

$$MG = AD + AP = \frac{1}{4}p + x.$$

Że zaś jak widzieliśmy, Liczba $\frac{1}{4}p + x$ jest wyrażeniem promienia wodzącego FM, wypadnie przeto że wielka prostopadła spuszczona z punktu Paraboli na tę kierującą, jest zawsze równa odległości tego samego punktu od ogniska.

248. Ta własność podaje nam sposób wykreślenia Paraboli punktami.

Weźmiemy (fig 63) $AD = AF = \frac{1}{4}p$, a wyniesiony prostopadłą nieograniczoną DL

przetniemy ją w M łukiem zatoczonym przez promień FM równy PD: punkt przecięcia M znajdować się będzie na krzywej: gdyż podług tego wykreślenia FM = DP = GM.

249. Można także wykreślić Parabolę cięgłem poruszeniem, a to następującym sposobem: nitkę w długości równą ramieniowi RG węgielnicy przytwierdziwszy jednym końcem do tego ramienia w R, a drugi do punktu F który weźmiemy za ognisko, jeżeli drugie ramię węgielnicy poruszać będziemy po kierzjącej, nitkę za pomocą rylca ciągle trzymając wyciągniętą na ramieniu RG, ten rylec wykreśli nam Parabolę: to zawsze będzie

$$GR = FM + R, \text{ albo } GM + RM = FM + RM$$

a zatém $GM = FM$.

O Stycznych i normalnych do krzywych drugiego rzędu.

250. Pokazaliśmy, liczb 206, że równania krzywych drugiego rzędu odniesione do wierzchołka, mogą być obięte ogólniejszą formułą

$$y = mx + nx^2;$$

przyjdziemy do tego: wyprzedzi, wyrażiwszy równania liczb 210, i 225 pod kształtami następującemi

$$y^2 = \frac{2b^2}{a^2}x - \frac{b^2}{a^2}x^2, \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - \frac{2b^2}{a}x,$$

to widzimy że krzywe drugiego rzędu mogą być wyobrażone formułą

ogólną $y^2 = mx + nx^2$

uzyskujemy dla Elipsy $m = \frac{2b^2}{a}$, $n = -\frac{b^2}{a^2}$

dla Hyperboli $m = -\frac{2b^2}{a}$, $n = \frac{b^2}{a^2}$

dla Paraboli $m = p$, $n = 0$.

251. Ta formuła ogólna $y^2 = mx + nx^2$ może służyć użytecznie w poszukiwaniu własności spólnych trzem krzywym. I pomiędzy tych zaraz nie myśl uważania własności stycznych, normalnych, podstycznych i podnormalnych.

252. Szukajmy naprzód równania stycznej w punkcie α, β krzywej jakiegokolwiek rzędu. Niechaj będzie tym punktem M: (Fig 65) spotrzebne jego α, β Fig 4 powinny zadosyć czynić równaniu $y^2 = mx + nx^2$, będzie zatem

$$\beta^2 = m\alpha + n\alpha^2 \ldots (A''')$$

Uważmy inny jeszcze punkt M' krzywej; $\alpha + \alpha'$ i $\beta + \beta'$ niech wystawiają spotrzebne jego MP' i $P'M'$, będzie także

$$(\beta + \beta')^2 = m(\alpha + \alpha') + n(\alpha + \alpha')^2$$

Rozwiązawszy, i odjąwszy równanie (A''') od tego równania, otrzymamy

$$2\beta\beta' + \beta'^2 = m\alpha' + 2n\alpha\alpha' + n\alpha'^2 \ldots (B''')$$

Równanie to wyznacza dla β' ważności przymiotnik MQ do spotrzebnej PM, gdy z pierwszego do drugiego punktu przechodzimy.

Jeżeli się poprowadzi prosta przez punkt M, równanie tej prostej będzie

$$y-\beta = A(x-\alpha) \ldots\ldots (C''')$$

Ponieważ A wyraża styczną trygonometryczną kąta, który prosta z osią odcięt tworzy, można zatem naznaczyć tę ilość dowolną warunkiem: by prosta była styczną do krzywej. W tym zamiarze jeżeli w to równanie wstawimy tę samą ważność $\alpha+\alpha'$ którąśmy nadali dla x w równaniu krzyw. wej, i nazwiemy $\beta+\beta_1$ rzędną odpowiadającą $P'N'$ linii prostej, otrzymamy

$$\beta_1 = A\alpha' \ldots\ldots (D''')$$

Gdy punkt M złączy się z punktem N, przymiotki $CM=\beta'$, $CN=\beta$ będą równe, i prosta zamieni się na styczną MM'. Jeżeli zmienimy β na β' w równaniu (D''') i wstawimy tę ważność ilości w równanie (B''') znajdziemy

$$2\beta A\alpha' + A^2\alpha'^2 = m\alpha' + 2n\alpha\alpha' + n\alpha'^2$$

Ułożywszy podług α' $\left[(m+2n\alpha-2A\beta)+(n-A^2)\alpha'\right]=0.$

Ponieważ to równanie drugiego jest stopnia, wyznaczy zatem dla α' dwa przymiotki, które potrzeba dodać do α, aby ta odcięta punktowi przecięcia służyła. Jeden z czynników zrównany zero, czyni $\alpha'=0$, co nam pokazuje że $\alpha+0$, to jest α odpowiada punktowi przecięcia M, comyśmy już wiedzieli.

Przeto ważność ilości α' wyznaczona równaniem

$$m+2n\alpha-2A\beta+(n-A^2)\alpha'=0 \ldots\ldots (E''')$$

będzie przymiotkiem jaki dodać do α trzeba, dla otrzymania odcięt. AP' drugiego punktu przecięcia się M'. Równanie (E''') składa się z tego

z dwóch części, jednej $(n-A^2)\alpha$ zmieniającej się wraz z α, drugiej niezależnej wcale $m+n\alpha-2A\beta$. Im się bardziej przyrostek $PP=\alpha$ zmniejsza, tem bardziej prosta MN przybliża się do styczney w punkcie M. Więc uczyniwszy $\alpha=0$ w równaniu (E'''), równanie to należeć będzie do i da

$$A=\frac{\frac{1}{2}m+n\alpha}{3}.$$

Wstawiwszy tę ważność w równanie (C''') otrzymamy

$$y-\beta=\frac{\frac{1}{2}m+n\alpha}{3}(x-\alpha);$$

równanie styczney prowadzonej przez punkt α,β do krzywej drugiego rzędu, gdy się początek w jej wierzchołku A znajduje. (fig 64) fig.

Gdyby za krzywą punkt był dany, niechaj będą α',β' spółrzędne jego, zawsze nazywając α,β spółrzędne nieznane jeszcze punktu α,β; będziemy mieli do wyznaczenia α i β równania

$$\beta'-\beta=\frac{\frac{1}{2}m+n\alpha}{\beta}(\alpha'-\alpha) \quad \text{i} \quad \beta=m\alpha+n\alpha^2.$$

253. Jeżeli w punkcie zetknięcia spuścimy na styczną prostopadłą MR (fig 65), ta prostopadła nosi imię normalnej: łatwo jest (Liv 102 zw. 10.) wnaia styczney równanie normalney wyprowadzić, i znajdziemy

$$y-\beta=\frac{\beta}{\frac{1}{2}m+n\alpha}(x-\alpha)$$

równanie normalnej w punkcie α,β krzywej, gdy początek znajduje się w wierzchołku.

254. Jeżeli tylko równanie linii uważamy, obojętną jest dla nas jej

długość; ale się inaczej rzecz ma, gdy szukamy jej wyrażenia: w tym drugiem razie dajemy imię stycznej tylko części MS ciągnącej się od punktu M zetknięcia do punktu T, w którym ta styczna os odciętych spotyka.

255. W tym samym przypadku normalna sprowadza się do części MR zawartej między punktem zetknięcia i punktem R w którym ta linija spotyka się z osią odciętych.

256. Część PS osi odciętych zawarta między spodkiem rzędnej punktu zetknięcia, i punktem S w którym styczna przecina się z osią odciętych, nosi imię podstycznej; a część PR osi odciętych zawarta pomiędzy spodkiem tej rzędnej i punktem w którym normalna spotyka os odciętych nosi imię podnormalnej.

257. Załóżmy sobie znaleść wyrażenia tych czterech linij.

W równaniu stycznej uczyniwszy $y = 0$, znajdziemy

$$x - \alpha = \frac{\beta^2}{\beta m + n\alpha}$$

Dla poznania co ten wypadek znaczy, uważmy, iż ponieważ odcięta α odnaczona jest do wierzchołka A krzywej drugiego rzędu, $x - \alpha$ jest odcięta liczona od spodka rzędnej β; więc gdy $y = 0$, $x - \alpha$ wyraża odległość PS spodka rzędnej β od punktu w którym styczna spotyka os odciętych

a zatem ta ważność $x-\alpha$ jest wyrażeniem Podstycznej.

Znak ujemny przed nią będący pokazuje że powinna być ujemną: ku $z\frac{\beta^2}{\frac{1}{2}m+n\alpha}$, albo raczej z $\frac{1}{2}m+n\alpha$. Że zaś $\frac{1}{2}m+n\alpha$ jest licznikiem wyrażenia $\frac{\frac{1}{2}m+n\alpha}{\beta}$ stycznej trygonometrycznej kąta który styczna z osią odciętych czyni, znak tej stycznej trygonometrycznej będzie więc tylko zależał od $\frac{1}{2}m+n\alpha$ w tym razie, gdy przyjmiemy kierunek w którym β ma padać. Przypuśćmy zatem β dodajnem: punkt zetknięcia będzie w tym razie nad osią odciętych położony; a jeżeli $\frac{1}{2}m+n\alpha$ jest dodajnem, styczna trygonometryczna powinna być także dodajną; prosta bd. M.T. Posły będzie, a podsteczna będąc ujemną padnie w kierunku odciętych ujemnych od P do T. Jeżeli przeciwnie $\frac{1}{2}m+n\alpha$ jest ujemnem, styczna trygonometryczna do rozważanego kąta należeć będzie, a podsteczna dodajną się stanie.

258. Uważać trzeba, że w przypadku Figury 65', $x-\alpha$ nie powinno być Fig. 65 brane za różnicą dwóch linii: bo gdy x wystawia linię odiemną AT, wyrażenie $x-\alpha$ staje się Summą dwóch ilości ujemnych. Znak ujemny przy wyrażeniu $\frac{\beta^2}{\frac{1}{2}m+n\alpha}$ służy tylko do wskazania po której stronie spodnia rzędnej podsteczna ma być prowadzoną, i nie użytecznym jest zupełnie; mając bowiem dane α i β, wiemy z której strony styczna do osi

odciętych jest nachylona, a zatem w jakim kierunku podstyczną prowadzić powinniśmy; otrzymany zatém wypuściwszy znak ujemny

$$PJ = \frac{\beta^2}{\frac{1}{2}m + n\alpha}$$

za ogólne wyrażenie podstycznej odnoszonej do wierzchołka A.

253. Tym samym sposobem ważność podnormalnej wyznaczemy uczyniwszy $y = 0$ w równaniu normalnej, i uważając że $x - \alpha$ wystawia w tym razie linię PR; będzie zatem $PR = \frac{1}{2}m + n\alpha$

ogólném wyrażeniem podnormalnej odnoszonej do wierzchołka A.

254. Za pomocą wyrażenia podstycznej łatwo znajdziemy wyrażenie stycznej; bo dla własności kwadratu z przeciwprostokątnej mamy

$$TM = \sqrt{PM^2 + PT^2} \text{ albo } TM = \sqrt{\beta^2 + \frac{\beta^4}{(\frac{1}{2}m + n\alpha)^2}}$$

wyrażenie ogólne stycznej odnoszonej do wierzchołka A.

255. Podobnie wyznaczemy wyrażenie normalnej; bo trójkąt prostokątny RPM daje $MR^2 = MP^2 + PR^2$

$$\text{albo } MR^2 = \beta^2 + (\tfrac{1}{2}m + n\alpha)^2$$

$$\text{więc } MR = \sqrt{\beta^2 + (\tfrac{1}{2}m + n\alpha)^2}$$

jest ogólném wyrażeniem normalnej odnoszonej do wierzchołka A.

256. Przystosujmy teraz te formuły do krzywych drugiego rzędu: ponieważ podnormalna i rzędna składają te sześć formuł, pnie to szukajmy naprzód wyrażenia podnormalnej dla Elipsy i Hyperboli.

W formule ogólną podstycznej za m i n ważności ich położywszy, Liczba 250, gdy równanie $y^2 = mx + nx^2$ wystawia równanie Ellipsy i Hyperboli otrzymamy

$\frac{1}{2}m + n\alpha = \frac{b^2}{a^2}(a - \alpha)$ na przypadek Ellipsy.

$m + n\alpha = -\frac{b^2}{a^2}(a - \alpha)$ na przypadek Hyperboli.

Wstawiwszy te wyrażenia ważności w wyrażenia poprzedzające, jako i ważność rzędnej b^2 będącą w pierwszym przypadku $\frac{b^2}{a^2}(2a\alpha - \alpha^2)$; w drugim tąż samą tylko przeciwnego znaku, otrzymamy połączywszy te wypadki, gdy początek znajduje się w wierzchołku

$\frac{b^2}{a^2}(a - \alpha)$ za wyrażenie podnormalnej Ellipsy (*)

$\frac{b^2}{a^2}(\alpha - a)$ za wyrażenie podnormalnej Hyperboli

$\frac{2a\alpha - \alpha^2}{a - \alpha}$ za wyrażenie podstycznej Ellipsy

$\frac{\alpha^2 - 2a\alpha}{\alpha - a}$ za wyrażenie podstycznej Hyperboli

$\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2a\alpha - \alpha^2) + \frac{b^4}{a^4}(a - \alpha^2)^2}$ za wyrażenie normalnej Ellipsy

---

(*) Rachunek te same ważności nam daje dla wyrażeń podstycznych Ellipsy i Hyperboli; tymczasem inaczej je piszemy, bo gdy w przypadku Ellipsy a jest większe od α, a w przypadku Hyperboli przeciwnie a mniejsze od α, aby mianownik wyrażenia podstycznej Hyperboli wyraźnie ilość dodatnią, $\alpha - a$ trzeba napisać, a zatem $\alpha^2 - 2a\alpha$ umieścić w liczniku: podobną uwagę i względem innych wyrażeń uczynić należy.

$\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(\alpha^2 - 2a\alpha) + \frac{b^4}{a^4}(\alpha - a)^2}$ wyrażenie normalnej Hyperboli

$\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2a\alpha - \alpha^2) + \frac{(2a\alpha - \alpha^2)^2}{(a-\alpha)^2}}$ wyrażenie stycznej Ellipsy

$\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(\alpha^2 - 2a\alpha) + \frac{(\alpha^2 - 2a\alpha)^2}{(\alpha - a)^2}}$ wyrażenie stycznej Hyperboli.

Co do równań stycznej i ~~Elipsy~~ normalnej Ellipsy i Hyperboli, rozmnożymy prze

β ogólne równanie stycznej, a przeniesiony β^2 na drugą stronę znajdziemy je pod

tym kształtem $y\beta^2 = \left(\frac{1}{2}m + n\alpha\right)(x - \alpha) + \beta^2$.

Wstawmy ważności wyrazów $\frac{1}{2}m + n\alpha$ i β^2, a otrzymamy gdy początek jest

w wierzchołku $y = \frac{b^2}{a^2\beta}\left[(a-\alpha)x + a\alpha\right]$ równanie stycznej Ellipsy

$y = \frac{b^2}{a^2\beta}\left[(\alpha - a)x - a\alpha\right]$ równanie stycznej Hyperboli.

Łatwo z tych równań równania Normalnych wyprowadzić.

2b2. Należy do tych formuł i te dodać, które dla Paraboli otrzymać można

uczyniwszy $m = p,\ n = 0,\ \beta^2 = p\alpha$

i będzie

$\frac{1}{2}p$ wyrażenie podnormalnej

$\sqrt{p\alpha + \frac{1}{4}p^2}$ wyrażenie normalnej

za wyrażenie podstycznej

$\sqrt{4\alpha^2 + \frac{1}{4}p^2}$ wyrażenie stycznej

$y = \frac{p}{2\beta}(x + \alpha)$ równanie stycznej

} Paraboli

2b3. Otrzymane wyrażenia zmieniają się stają dla Ellipsy i Hyperboli,

gdy początek do środka jest przeniesiony. Niechaj będzie x' odcięta liczona od

od środka, i w kierunku dodajnym od C ku B prowadzona (Fig 64): widzie- Fig
my że między x' i odcięt̨ą x liczoną od xxxxxx wierzchołka istnieje za leżność

$$x = x' + \alpha;$$

naznaczywszy także przez α i α' odcięt̨e punktu styczności odnoszone do wierz: chołka i środka, i zważywszy iż α' wystawia odcięt̨ ujemną, gdy pada w kierunku od C ku A, jak w przypadku Fig: 63, będziemy jeszcze mieli

$$\alpha = a + \alpha'.$$

Wstawmy te ważności odcięt̨ych $x - \alpha$ w wyrażenia poprzedzające, a otrzymamy gdy początek jest we środku

$\frac{b^2}{a^2}\alpha'$ (*) wyrażenie podnormalnej Elipsy i Hyperboli.

(*) Wogólne wyrażenie podnormalnej wstawiwszy ważności wyrazów m in do Elipsy znajdzięc, otrzymujemy wyrażenie podnormalnej z ujemnym znakiem: ten znak pokazuje że odcięta x' liczona od środka, w kierunku od C ku A (Fig 64) powinna Fig
bydź prowadzoną; co daje widzieć że gdy β jest dodajnem, punkt styczności należy do punktu krzywej zawartej między A i wierzchołkiem mniejszej osi, że zatem styczna linia osiny $Mt.x$ (Fig 65) z osią odcięt̨ych czyni β. To założenie już było słuszne Fig
przyjęt̨em, gdy wyprowadzając równanie stycznej, użyliśmy równania prostej

$\frac{a^2-\alpha'^2}{a^2}$ wyrażenie podstycznej Elipsy,

$\frac{\alpha'^2-a^2}{\alpha'^2}$ wyrażenie podstycznej Hyperboli,

$\sqrt{\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-\alpha'^2\right)+\frac{b^4}{a^4}\alpha'^2}$ wyrażenie normalnej Elipsy

$\sqrt{\frac{b^2}{a^2}\left(\alpha'^2-a^2\right)+\frac{b^4}{a^4}\alpha'^2}$ wyrażenie normalnej Hyperboli

$\sqrt{\frac{\left(\alpha'^2-a^2\right)^2}{\alpha'^2}+\frac{b^2}{a^2}\left(\alpha'^2-a^2\right)}$ wyrażenie stycznej Hyperboli

$\sqrt{\frac{\left(a^2-\alpha'^2\right)}{\alpha'^2}+\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-\alpha'^2\right)}$ wyrażenie stycznej Elipsy

$y=\frac{b^2}{a^2\beta}\left(a^2-\alpha x'\right)$ równanie stycznej Elipsy

$y=\frac{b^2}{a^2\beta}\left(\alpha x'-a^2\right)$ równanie stycznej Hyperboli.

265. Wyrażenia stycznych, normalnych, itd. dają nam różne sposoby prowadzenia stycznej do krzywych drugiego rzędu: wyrażenie podstycznej Elipsy za przykład służyć nam będzie. To wyrażenie stałej b nie posiadając, zależy tylko od ilości a i x: zatoczywszy zatem koło na wielkiej osi Elipsy za, i

---

wzięte ze stałemi dodającemi: lecz gdy przypuścimy że kąt $\alpha\beta x$ jest rozwartym, wyr. $\frac{b^2}{a^2\beta}\left(a^2-\alpha x'\right)$ wyrażenie podnormalnej takie znak odmienni. Dzieląc widzieliśmy że znak ten jest nie pożytecznym, Lic. 258, gdyż położenie stycznej zawsze jest wyznaczonem współrzędnemi punktu zetknięcia, we kodrzędnemi, jako dane do zadania: z tego to powodu uważaliśmy tylko bezwzględne ilości wartości normalnych i podnormalnych.

wziąwszy odcinkę spólną obu krzywym, i odpowiadającą rzędnym β Elipsy, β'
koła, można poprowadzić styczną do Elipsy w punkcie α, β następującym spo-
sobem. Przedłużmy styczną przechodzącą przez punkt α, β' koła do punktu T w kie-
runku tą styczna liczonych od odcinkych za spólną, i z punktu T do punktu α, β
Elipsy, poprowadźmy prostą; ta prosta będzie styczną do Elipsy w tym punkcie:
gdyż według powyższego założenia wykreślenia potyczna jest spólna obudwom
krzywym. Podobnie można postąpić i z Hyperbolą, tylko zamiast koła, Hyperbo-
lę wierzchowniczną używając. Do tych samych wypadków dojdziemy za pomo-
cą wykreślen następujących.

266. Gdy punkt M dany jest na Elipsie (Fig 66) poprowadźmy cięciwę Fig 66
koła przez ten punkt prostą F'M, i przedłużmy ją aż do G; uczyniwszy

$$MG = MF'$$

i połączywszy punkta F i G prostą FG, prostopadła MI puszczona z punktu
zetknięcia M na tę linią, będzie styczną w M. Równość linii MF', MG, dowo-
dzi równości trójkątów prostokątnych FMI, IMG, a zatem i linii FI i IG; z tąd
wypada że trójkąty FMI, MIG, także będą równe, i że MF' = MG.

To mając twierdzę że MI tylko w jednym punkcie M dotyka krzywej: bo
gdyby jéżeli jaki jéj punkt na przykład N znajdował się na krzywej,

mielibysmy $FN + NF = 2a$

lub $FN + NG = FG$

co bydź nie może dopáki bokiem FNG istnieje; a tak punkt N nie ten jest co M.

262. Gdy punkt M (fig 67) dany jest na Hyperbole, poniesiemy krotszy z promieni wodzących FM na kierunek drugiego od M ku G; polączywszy punkta G i F prostą GF, z punktu M spuścimy na tę linię prostopadłą MI która będzie styczną do Hyperboli. Bo niechaj będzie punkt N wzięty na kierunku MI; dowiódłszy podobnie jak w Ellipsie że $NG = NF$, i gruntujące się na równości linii GK i MF, gdyby się punkt N znajdował na krzywej, mielibysmy $FN - NF = 2a$

lub $FN - NG = FG$

zkąd $FN = NG + FG$,

a zatem w Trójkącie summa dwóch boków, byłaby równa trzeciemu, co bydź nie może; a zatem punkt N nie należy do krzywej. Fig 67

268. Gdy punkt M (fig 68) dany jest na Parabolí, spuścimy z niego na kierunkującą prostopadłą MG, i połączemy punkta F i G prostą FG; prostopadła MI spuszczona z punktu zetknięcia M na FG będzie styczną do Paraboli. Jakoż ta prosta MI tylko w jednym punkcie dotykać będzie tej krzywej: bo dla równości prostych MF i MG; NF i NG czego podobnie jak pod Liczbą 266 Fig 68

dowieść można, gdyby punkt N był na krzywej, mielibyśmy

$$NH = NF$$

albo $NH = NG$

niedorzeczność jeżeli punkt M różny jest od N.

269. Te same zagadnienia według Biota rozwiąże, punkt przez który ma przechodzić styczna za krzywą biorąc.

Dla poprowadzenia przez dany punkt N (Fig 66) za Ellipsą styczney do Fig. tej krzywej, zakreślamy z ogniska F jako środka promieniem równym za łuk przecinający w G inny łuk zakreślony ze środka N promieniem NF. Punkt M wyznaczony spotkaniem się FG z krzywą, będzie punktem styczności: bo to wykreślenie daje $NG = NF$,

a że $fg = za$, powinno być $MG = MF$;

więc dla równości pochyłych NF prostopadłą jest GF, a zatem styczną w M.

270. Jeżeli dany punkt położony jest za Hyperbolą (Fig 67), z ogniska F Fig. jako środka promieniem za zakreślony łuk przecinający w G inny łuk zakreślony z danego punktu N promieniem NF; punkt M wyznaczony przedłużeniem linii FG, będzie punktem styczności: to łatwo pokazać podobnie jak Liczbą 269 że NM jest prostopadłą na GF, z wykreślenia mając $NG = NF$, z natury krzywej $MF = FM - za = GM$.

271. Jeżeli na koniec przez punkt N (Fig 68) za parabolą dany, chcemy Fig.

chcemy styczną do tej krzywej poprowadzić, z punktu N prowadzimy NT, za-
toczony łuk przecinający hiperbolę w punkcie G. Równoległa GM do osi od-
ciętych wyznaczy punkt M styczności: bo równe pochyłych GN i NT, GM i MT
dowodzi że NM jest prostopadła do GT, i że musi być styczną do Parabole.

272. Łatwe rozwiązanie trzech ostatnich zagadnień, wykreślaliśmy tylko
po jednej stycznej do każdej krzywej: ale można dwie prowadzić, to takie któ-
re w przecięciu swoim punkt G wyznaczyły, w dwóch punktach się przecinają.

273. W krzywych mających środek linie prowadzone z ognisk do punktu
zetknięcia, równe kąty czynią ze styczną. Jak (fig 67) równość trójkątów fig 67.
FMT, FMf dowodzi równości kątów FMT. FMT. W Elipsie (fig 66) ponieważ ten fig 66
ostatni równy jest wierzchołkowemu FMB, wypada że FMT = FMB.

274. Ta własność i przez analizę da się okazać. Poprowadźmy (fig 67) przez ogni- fig 67
ska Fg Elipsy równoległe Fg i Gg od MT; widocznie kąt

$$FMT = MFg = MFB = gFB = MfB = MTf$$

i kąt $FMT = MFg = MFB = gFB = MfB = MTf$.

Jeżeli kąty FMT, FMf są równe, kąty FMT i FMT spełnieniem są jednego dwóch-
go, i mają te same styczne trygonometryczne jedynie z różnicą znaku, co zamie-
rzamy sprawdzimy. W ogólności

$$Mg(a-b) = \frac{Mga - Mgb}{1 + Mga.Mgb}$$

więc $\operatorname{tg} FMF = \frac{\operatorname{tg} MFB - \operatorname{tg} MFF}{1 + \operatorname{tg} MFB \cdot \operatorname{tg} MFF}$ ..... (I''')

Szukajmy teraz wyrażeń analitycznych $\operatorname{tg} MFB$ i $\operatorname{tg} MFF$ które w tę formułę wstawić nam trzeba. Styczna trygonometryczna MFF dana jest przez spółczynnik, Liczb: 82, odciętej x w równaniu stycznej odnoszonej do środka, Liczb 2b4, i wyrażonej pod kształtem równania 2, a zatem

$$\operatorname{tg} FMF = \frac{b^2\alpha}{a^2\beta};$$

styczna zaś kąta MFB jest spółczynnikiem odciętej x, Liczb: 82, w równaniu promienia wodzącego FM, które starajmy się znaleść.

Dla punktu F jest odcięta $= -c$, rzędna $= 0$

Dla punktu M odcięta $= \alpha$, rzędna $= \beta$,

więc równanie promienia FM jest

$$y = \frac{\beta}{\alpha + c}(x + c)$$

zkąd $\operatorname{tg} MFB = \frac{\beta}{\alpha + a}$

Wstawiwszy w równanie (I''') wyrażenia $\operatorname{tg} F$, i $\operatorname{tg} MFB$, otrzymamy

$$\operatorname{tg} FMF = \frac{\frac{\beta}{\alpha+c} + \frac{b^2\alpha}{a^2\beta}}{1 - \frac{b^2\alpha}{a^2(\alpha+c)}}$$

Rozmnożywszy tak licznik jak mianownik ułamku przez $a^2\beta(\alpha+c)$ dla zgubienia mianownika, będziemy mieli

$$\operatorname{tg} FMF = \frac{a^2\beta + b^2\alpha(\alpha+c)}{a^2\beta(\alpha+c) - b^2\alpha\beta} = \frac{a^2\beta + b^2\alpha(\alpha+c)}{\beta\left[a^2c + (a^2 - b^2)\alpha\right]}$$

Położywszy w liczniku ważność ilości $a\beta^2$ wyciągniętą z równania odnoszącego do środka $\beta^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - \alpha^2)$; położywszy także w mianowniku ważność ilości $a^2 - b^2$ Art. 215, równą c^2; i sprowadziwszy otrzymamy

$$\text{Sty } \angle MSF = \frac{a^2b^2 + b^2\alpha^2}{\beta(a^2c + c\alpha^2)} = \frac{b^2(a^2 + a\alpha)}{\beta c(a^2 + a\alpha)} = \frac{b^2}{\beta c}$$

Podobnie znajdziemy Styczną trygonometryczną kąta FMF', który dłuższy promień wodzący z MF' czyni: Lecz nie wszczynając działania uważamy, iż biorąc FM za $F'M$, ponieważ odcięta ogniska F' zamieni się na $+c$, dosyć jest zmienić znak tej odcięty c w wypadku $+\frac{b^2}{\beta c}$, a otrzymamy $-\frac{b^2}{\beta c}$ dla stycznej trygonometrycznej kąta, który promień wodzący $F'M$ z MF' czyni: że zaś ważności tych stycznych oprócz znaku są te same, wypada, że promienie wodzące prowadzone do punktu zetknięcia równie kąty ze styczną czynią. Podobnie okazałoby się tę samą własność w Hyperboli.

275. Co do Paraboli z równości trójkątów FSM, FMT (Fig 68) wypływa, iżkąt Fig 68
FMS stycznej z promieniem wodzącym równy jest kątowi MSF, który ta styczna z osią odciętych czyni: bo gdy kąty naprzeciwległe MSF i FMS są równe jako i kąty FMS i FMT z wykreślenia, wypada że i $MSF = FMT$.

276. Można także i analitycznie tę własność dowieść: poprowadzemy prze ognisko równoodległe od FM: kąt FMT widocznie równy jest różnicy kątów MFX i MSF a zatem

$$Sty:TMT = Sty(MTX - TMX) = \frac{Sty\,MTX - Sty\,MXT}{1 + Sty\,MTX \cdot Sty\,MXT}$$

Wyrażenia analityczne $Sty:MXT$ i $Sty:MTX$ dane są przez spółczynniki odcięte x w równaniu stycznej do Paraboli i promienia wodzącego TM przechodzącego przez punkta których spółrzędne są $\frac{1}{4}p$ i α, α i β; zatém Liz:263, $Sty\,MXT = \frac{p}{2\beta}$, i $Sty\,MTX = \frac{\beta}{\alpha - \frac{1}{4}p}$. Wstawiwszy te ważności mamy

$$Sty:TMT = \frac{\frac{\beta}{\alpha - \frac{1}{4}p} - \frac{p}{2\beta}}{1 + \frac{p}{2(\alpha - \frac{1}{4}p)}} = \frac{2\beta^2 - (\alpha - \frac{1}{4}p)p}{2(\alpha - \frac{1}{4}p)\beta + p\beta}$$

Położywszy za β^2 ważność $p\alpha$, sprowadziwszy, i rozwiązawszy, znajdziemy

$$Sty:TMT = \frac{p\alpha + \frac{1}{4}p^2}{2\alpha\beta} = \frac{p(\alpha + \frac{1}{4}p)}{2\beta(\alpha + \frac{1}{4}p)} = \frac{p}{2\beta}.$$

Ponieważ ta ważność stycznej trygonometrycznej kąta TMT ta sama jest co znaleziona dla stycznej trygonometrycznej kąta TMS, wypada przeto iż te kąty są równe.

O Prawiestycznych Hyperboli.

277. Styczne Hyperboli dają nam szczególność ważną: to jest Prawiestyczne. Jak nazywamy dwie linie styczne do krzywej w punktach nieskończonej odległości. Następujące dostrzeżenia przyprowadzają nas do Prawiestycznych

Wyrażenie $\frac{a'^2 - a^2}{\alpha'}$ podstycznej PT Hyperboli, Liz 264, odjąwszy od odcięty $CP = \alpha'$ (Fig 67) otrzymamy

Fig 67

$$CT = \alpha' + \frac{a^2 - a'^2}{\alpha'} = \frac{a^2}{\alpha'}$$

Gdy odcięta α' staje się nieskończoną, ta ważność CS sprowadza się do

$$\frac{a^2}{\infty} = 0$$

więc naówczas styczna przez środek przechodzi. Dla wyznaczenia jéj położenia, jeszcze drugi punkt na jéj kierunku znaleść potrzeba: że zaś styczna trygonometryczna kąta kliny styczna Hyperbola z osią odciętych czyni, jest spółczynnikiem odciętej x w równaniu stycznej, będziemy więc mieli liczbę,

$$\frac{b^2\alpha'}{a^2\beta}$$

za wyrażenie téj stycznej trygonometrycznej. Jeżeli w nie położymy ważność rzędnej β wyciągniętą z równania Hyperboli odnoszonej do środka, wyrażenie to zamienimy na

$$\pm\frac{b\alpha'}{a\sqrt{\alpha'^2-a^2}} = \pm\frac{b}{a\sqrt{1-\frac{a^2}{\alpha'^2}}},$$

a gdy $\alpha' = \infty$ sprowadzimy je do

$$\pm\frac{b}{a}.$$

278. Dla wykreślenia pierwszej z tych ważności, wyprowadźmy z wierzchołka B prostopadłą $BL = b$, (fig 70), a kąt BLC będzie miał $\frac{b}{a}$ za styczną trygonometryczną. Jakoż z tego kąta CBL daje proporcyą

$$CB : BL = 1 : \text{styczna } BCL,$$

albo $a : b = 1 : \text{styczna } BCL,$

więc styczna $BCL = \frac{b}{a}$

fig 70

Druga ważność wyznaczy się wyniosłszy w B prostopadłą $BL = b$, a dalej

nieograniczone linie ll, ll będą Prawdziwymi Hyperboli.

O cięciwach spełniających.

279. Niechaj będzie A styczną trygonometryczną kąta który czyni z osią odciętych prosta MA, przechodząca przez wierzchołek A (Fig 82) Elipsy, albo Hyperboli; (Fig 83) (Fig 83) równanie tej prostej będzie Lic. 89

$$y-\beta = A(x-\alpha);$$

a położywszy za spółrzędne α, β, spółrzędne punktu A, $-a$ i 0, równanie prostej MA, zamienimy na

$$y = A(x+a);$$

podobnie jeżeli A' jest styczną kąta MBD (Fig 82 i 83) (Fig 82, 83) który prosta BM przechodząca przez punkt B z osią odciętych czyni, ponieważ spółrzędne tego punktu B są $+a$ i 0, równanie tej prostej BM będzie

$$y = A'(x-a);$$

tylko w punkcie M w którym się prosta BM i MA spotykają, x i y te same będą w obudwu równaniach

$$y = A(x+a), \quad y = A'(x-a) \quad \ldots\ldots (J''')$$

Ponieważ punkt M znajduje się na krzywej, będzie także pomiędzy temi spółrzędnemi zależność

$$y^2 = \mp \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)(*) \ldots\ldots (A''')$$

Równania (A''') rozmnożone przez siebie dadzą

$$y^2 = AA'(x^2 - a^2)$$

wyrugowawszy y^2 z tego równania i równania (A'') otrzymamy

$$AA' = \mp \frac{b^2}{a^2}$$

zkąd wyciągniemy $A = \mp \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{A'}$

To równanie pokazuje że gdy nadamy pewną ważność kątowi MBD dla wyznaczenia A', styczna A kąta MAD wypadnie z tej ważności. Ta stała zależność między kątami MAD i MBD utworzonemi przez cięciwy MA, BM nadała tym cięciwom imię cięciw spełniających.

280. Uczyniwszy $b = a$, zamienimy równanie poprzedzające na

$$A = \mp \frac{1}{A'},$$

Zatrzymawszy znak wyższy, otrzymujemy koło, i dostrzegamy że między kątami MAD, MBD (fig 82) jest konieczna zależność, aby cięciwy MA, BM prostopadłemi do siebie były; lecz jeżli weźmiemy znak niższy, mamy przypadek Hyperboli równoramiennej, a zależność

$$A = \frac{1}{A'}$$

(*) Znak wyższy służy Hyperboli, Ellipsie, niższy Hyperboli.

pokazuje że styczne A i A' należą do kątów spełniających się nawzajem, Licz 102; więc kąty MAD, MBD (Fig 83) wzięte razem jeden kąt prosty. Fig 83

281. Równanie $AA' = -\frac{b^2}{a^2}$ uczy nas, że gdy kąt MAB, (Fig 82) jest ostry, kąt Fig 82 MBD jest rozwarty: więc MBA także jest ostry; a zatem kąt MBA znów jest rozwarty. Podobnie dowiedlibyśmy że ponieważ kąt MBA (Fig 83) jest rozwartym, kąt AMB ostrym być musi.

282. Pokażemy jeszcze iż w ellipsie, największy z kątów utworzonych przez cięciwy spełniające, na końcu małej osi ma swój wierzchołek. Ponieważ kąty styczne kątów MAD, MBD, są A i A', będziemy mieli

$$\text{tg } M = \frac{A' - A}{1 + AA'}$$

Równania zaś (f''') dają

$$A = \frac{y}{x+a} = \frac{b}{a}\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x+a}$$

$$A' = \frac{y}{x-a} = \frac{b}{a}\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x-a}$$

Wstawiwszy te ważności znajdziemy

$$\text{tg } M = \frac{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)}{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{ab\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 - b^2} \cdot \frac{2a}{x^2 - a^2} = -\frac{2a^2 b}{(a^2 - b^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Znak ujemny poprzedzający to wyrażenie pokazuje że styczna do rozwartego kąta należy: im zaś kąt jest większy, tym jego styczna jest mniejsza, najmniejszem zaś wyrażenie tej stycznej jest, gdy $x = 0$, co wtenczas ma miejsce, gdy się punkt M na końcu małej osi znajduje.

283. Cięciwy spełniające podają nam łatwy sposób prowadzenia stycznej do której z krzywych drugiego rzędu mających środek. Wystawmy sobie że przez punkt G Ellipsy (Fig 82) pociągniętiśmy styczną czyniącą kąt A' z osią odciętych: Fig 82
jeżeli nazwiemy α' i β spółrzędne punktu G liczone od środka, spółczynnik kie-
runku x' w równaniu stycznej Ellipsy, Liz 2bx, będzie ważnością stycznej A. Znaj-
dziemy przeto $A' = \frac{b^2}{a^2\beta} \chi(-\alpha') = -\frac{b^2\alpha'}{a^2\beta}$.

Niechaj będzie $y = Ax$ równanie linii CG; otrzymany dla punktu G, $\beta = A\alpha'$,
Wstawiwszy tę ważność rzędnej β w równanie poprzedzające, otrzymamy

$$AA' = -\frac{b^2}{a^2},$$

więc półśrednicy GC i styczna w G czynią z osią kąty mające tę samą zależność
która istnieje między kątami utworzonemi przez dwie cięciwy spełnia-
jące. A zatem jeżeli przez dany punkt G styczną poprowadzić chcemy,
przez ten punkt G i środek C prostą CG poprowadzimy, a przez wierzchołek
A równoległą AM od CG: ta równoległa kąt A z osią odciętych czynić bę-
dzie: że zaś dla własności cięciw spełniających, kąt MBD jest równy A, to
jest kątowi utworzonemu przez styczną szukaną z osią odciętych, więc do-
syć poprowadzić przez punkt G równoległą GT od BM.

Ponieważ tę samą własność posiada i Hyperbola, jeżeli przeto (Fig 83) Fig 83
chcemy wyznaczyć położenie stycznej w punkcie G, poprowadzimy przez ten

i przez środek Cf, a przez wierzchołek A równoodległę AM od Cf: pociągnąwszy potem linię MB, równoodległą od niej fS będzie styczną szukaną.

O kwadraturze krzywych drugiego rzędu.

284. Widzieliśmy Liczb. 212. że gdy za wielką Ellipsy wzięta jest za średnią koła, i gdy nazwiemy y' i y'' dwie rzędne jednej odcięty, należące pierwsza do Ellipsy, druga do koła, mamy

$$y' = \frac{b}{a} y''.$$

Ta zależność między spółrzędnemi tych dwóch krzywych, może nam do znalezienia powierzchni Ellipsy posłużyć.

Podzielmy oś odciętych na równe części AP', $P'P''$, $P''P$, (Fig 84) i nazwijmy n Fig 84 jedną z tych części; w punktach podziałów P', P'' etc: wyniesiemy prostopadłe, a przez punkta w których te prostopadłe spotykają krzywą, poprowadzimy linie proste; te utworzą dwa wielokąty wpisane jeden w Ellipsę drugi w koło. Niechaj będzie $PM = y$, $P'M' = y'$, $P''M'' = y''$ etc: znajdziemy z przyczyny równania przytoczonego

$$NP = \frac{b}{a} y, \quad N'P' = \frac{b}{a} y', \quad N''P'' = \frac{b}{a} y''$$

a że z założenia $AP = PP' = P'P''$, łatwo przekonamy się że trapez $PP'N'N$ ma za

wyrażenie $\frac{1}{2}(PN+P'N')PP' = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}y+\frac{b}{a}y'\right)n = \frac{1}{2}\frac{b}{a}(y+y')n$

że zaś trapez $PP'M'M$ ma za wyrażenie

$$\frac{1}{2}(PM+P'M')PP' = \frac{1}{2}(y+y')$$

Stosunek zatém dwóch powierzchni przez $\frac{b}{a}$ wyrażony będzie. Podobnie dowie dliśmy że wielki trapez wpisany w ellipsę do trapezu odpowiadającego wpisanego w koło w tym samym jest stosunku, który także i do trójkątów NPN' i MPM', $BP''N''$ i $BP'''M'''$ należeć będzie.

A zatém ponieważ w szeregu stosunków równych, Summa poprzedników ma się do Summy następników, jak jeden poprzednik do swego następnika, będzie Summa trapezów $n \cdot EN$ wpisanych w ellipsę i trójkątów NPN i $BP'''N'''$ do Summy trapezów wpisanych w koło i w trójkątów MPM i $BP'''M'''$ w stosunku b do a: ponieważ ta własność niezależną jest od liczby boków tych wielokątów, przeto należeć będzie do Ellipsy i do koła, jako granic powierzchni tych wielokątów, a zatém

$$\text{Powierzchnia Ellipsy} = \frac{b}{a}\text{ Powierzchni koła.}$$

Gdy $1:\pi$ jest stosunkiem średnicy do obwodu, powierzchnia koła mającego a za promień jest πa^2: wstawiwszy tę wartość będzie

$$\frac{b}{a}\pi a^2 = \pi ab$$

283 Naznaczmy przez m średnią proporcyonalną między a i b: koło zaleco-

ne

promieniem m równe będzie Ellipsie; bo to koło ma za powierzchnię πm^2, a że $m^2 = ab$, więc $\pi m^2 = \pi ab$.

286. Podobnie dowiedlibyśmy że powierzchnia Hyperboli równa jest Hyperboli równoramiennej rozmnożonej przez stosunek $\frac{b}{a}$ małej osi do wielkiej.

287. Zabiedrzemy się teraz szukaniem powierzchni Paraboli. Przypuszczamy iesmy opisali na Paraboli wielokąt nieforemny, ale którego wszystkie boki na dwie równe części w punkcie zetknięcia są podzielone: co można zawsze uskutecznić tym sposobem.

Przez S (Fig 85) punkt osi odciętych poprowadź do krzywej styczną SM'', i przedłuż ją aż do S: wziąwszy $M'S = SM''$; przez punkt S poprowadź do krzywej drugą styczną SM', i przedłuż ją aż do R, wziąwszy $M'R = SM'$; i tak dalej. To mając uczyń prostokąt $ABQP$, poprowadź potem równoległe DL, LN, od osi odciętych, i uczyń

$$AP = \alpha,\ PM = \beta,\ AP' = \alpha',\ P'M' = \beta',\ AP'' = \alpha'',\ P''M'' = \beta'';$$

przedłużywszy bok RQ do S, MS będzie styczną do krzywej, i podług własności podstycznej, Liczba 263, znajdziesz $AS = AP = \alpha$; że zaś styczna MS przechodzi przez punkt M, mający spółrzędne α i β, i przez punkt S mający spółrzędne $-\alpha$, 0, równanie jej będzie $y - \beta = \frac{\beta}{2\alpha}(x - \alpha)$

ponieważ punkta R i Q znajdują się na tej stycznej, otrzymamy

$$y' - \beta = \frac{\beta}{2\alpha}(x' - \alpha) \quad y'' - \beta = \frac{\beta}{2\alpha}(x'' - \alpha)$$

z tąd wyciągniemy $\beta(x' - \alpha) = 2\alpha(y' - \beta)$, $\beta(\alpha - x'') = 2\alpha(\beta - y'')$

albo $MP.PP' = 2AP.QN$, $MP.PP'' = 2AP.MK$

dodawszy te równania otrzymamy

$$MP(PP' + PP'') = 2AP(QN + MK)$$

albo $MP.P'P'' = 2AP.QL$,

albo co wyjdzie na jedno

$$\text{Prostokąt } NP'' = 2 \text{ prostokątom } Bk \ldots\ldots (i''')$$

Ponieważ bok RQ na dwie równe części w punkcie M jest podzielony, trójkąty prostokątne QMR, QMN, są równe: a zatém jeżeli od prostokąta NP'' odejmiemy pierwszy z tych trójkątów a dodamy drugi, będzie

$$\text{Prostokąt } NP'' = \text{Trapezowi } P'PRQ \ldots\ldots (j''');$$

podobnie ponieważ trójkąty RMK, QMJ są równe, jeżeli odejmiemy RMK od prostokąta Bk, a dodamy QMJ, będzie

$$\text{Prostokąt } Bk = \text{Trapezowi } BDRQ \ldots\ldots (k''')$$

Za pomocą równań (j''') i (k''') równanie (i''') zamieni się na

$$\text{Trapez } P'PRQ = 2 \text{ Trapezom } BDRQ.$$

Ponieważ to samo da się zastosować do wszystkich boków wielokąta, wypada przeto że obwód wielokąta $QRST$ powierzchnię $ABQP'$ w tym samym stosunku

dzieli. Ta własność niezależną będąc od liczby boków wielokąta, służy także i Paraboli będącej granicą obwodu wielokąta: zatém tak Parabola AMZ dzieli prostokąt AVZP' na dwie części będące do siebie w stosunku 2 do 1: mamy więc

Powierzchnię AMZP' = 2 Powierzchniom AMZV

więc Powierzchnia AMZV = $\frac{1}{3}$ prostokąta AVZP',

a zatém Powierzchnia AMZP' = $\frac{2}{3}$ Prostokąta AVZP' = $\frac{2}{3}$ AP' × P'Z.

O przemianie układu spółrzędnych w ogólności.

288. Dotychczas wyznaczaliśmy każdy punkt M krzywej (Fig 71) dwoma Fig
spółrzędnemi AP i PM odnoszonemi do osi prostokątnych AX i AY: lecz położenie tego punktu M równie będzie wyznaczoném, jeżeli wziąwszy dwie nowe osie AX', AY' z pierwotnemi osiami dowolne kąty X'AX, Y'AX czyniące, będziemy znali spółrzędne tego punktu MQ = x' i QM = y' (*): x' i y' są więc funkcjami kątów X'AX, Y'AX i spółrzędnych x, y; nawzajem x i y są funkcjami spółrzędnych x' i y' i tych kątów.

289. Szukajmy zależności istniejącej między temi ilościami. W tym zamiarze

(*) Rzędne QM ukośne są na figurze, gdyż powinny być równoodległe od osi AY rzędnych, czyniącej kąt ostry z AX.

poprowadźmy równoodległe QN, QL od pierwotnych osi AX, AY, i niechaj będzie kąt X'AX = p, kąt zaś Y'AX albo MQN = q; mamy widocznie

$$x = AP = AL + QN, \quad y = PM = QL + NM$$

podług przypisku Liczb 176

$$AL = x\cos p, \quad QL = x\sin p, \quad QN = y\cos q, \quad NM = y\sin q;$$

Wstawiwszy te ważności znajdziemy

$$\left.\begin{aligned} x &= x\cos p + y\cos q \\ y &= x\sin p + y\sin q \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (L''')$$

Formuły do przejścia z układu spółrzędnych prostokątnych x, y do układu spółrzędnych ukośnych x', y', gdy ten sam jest początek.

290. Mówię że początek ten sam jest, bo uczyniwszy x' = 0 i y' = 0, znajdziemy x i y zadne.

291. Jeżeli nowe spółrzędne także są prostokątne (fig 86) kąt MQX' = q - p będzie prosty = znajdziemy, zatem nazwawszy π okręg q - p = ½π, przeto

$$\sin q = \sin(\tfrac{1}{2}\pi + p) = \sin\tfrac{1}{2}\pi\cos p + \sin p\cos\tfrac{1}{2}\pi$$

$$\cos q = \cos(\tfrac{1}{2}\pi + p) = \cos\tfrac{1}{2}\pi\cos p - \sin\tfrac{1}{2}\pi\sin p.$$

a że $\sin\frac{1}{2}\pi = 1$, a $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$, ważności $\sin q$ i $\cos q$ sprowadzą się do

$$\sin q = \cos p, \quad \cos q = -\sin p$$

Wstawiwszy te ważności w formuły (L''') otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos p - y' \operatorname{wsin} p \\ y &= x' \operatorname{wsin} p + y' \cos p \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (M''')$$

Formuły do przejścia z układu spolrzędnych prostokątnych x, y do układu innych spolrzędnych prostokątnych x', y' gdy początek ten sam jest.

292. Można poznać w tych formułach formuły przez (6) naznaczone; Liczb 176; znaleźliśmy je przypuszczając (Fig 87) że osi lX nowych odciętych x, pod $\frac{Fig 8}{7}$ osią lX dawnych odciętych x' jest położona. Jeżeli przeciwnie otrzymać chcemy formuły na przypadek gdy nowa oś odciętych jest pod lX, należy uważać x i y za nowe odcięte, a x' i y' za dawne. Szukamy więc oznaczenie x i y w funkcyi x' i y'; rozmnożywszy pierwsze równanie przez $\cos p$, a drugie przez $\operatorname{wsin} p$, dodawszy je, i zważywszy iż $\cos^2 p + \operatorname{wsin}^2 p = 1$, znajdziemy

$$x \cos p + y \operatorname{wsin} p = x'$$

Rozmnożywszy potem pierwsze przez $\operatorname{wsin} p$, a drugie przez $\cos p$, i odjąwszy pierwsze od drugiego otrzymamy

$$y \cos p - x \operatorname{wsin} p = y'.$$

Dwie te formuły mogą służyć (*) do przejścia z układu osi prostokątnych

---

(*) Te formuły bezpośrednio tym sposobem okazać można, gdy mamy (Fig 87) $\frac{Fig 8}{7}$

do innego układu osi prostokątnych.

293. Gdybyśmy chcieli aby i początki dwóch układów były różne, niechaj będzie A (fig 71*) początek z którego wychodzi oś pierwotna AX, zaś A' nowy początek którego spółrzędne są $AD=a$, $DA'=b$; widocznie dla punktu M bżywej, mamy

$$x=AP=AD+AL+QN,\quad y=PM=AD+QL+MN,$$

Wstawiwszy za te linie ich urzędności, które podobnie wyznaczymy jak pod liczbą 289, znajdziemy

$$\left.\begin{aligned} x &= a+x'\cos p+y'\cos q,\\ y &= b+x'\sin p+y'\sin q.\end{aligned}\right\}\ldots.(N''')$$

formuły do przejścia z układu spółrzędnych prostokątnych x, y, do układu spółrzędnych ukośnych x', y' gdy początek jest różny.

294. Jeżeli chcemy aby nowe spółrzędne prostokątnemi były, działając podobnie jak pod Licz 291, otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} x &= a+x'\cos p-y'\sin p,\\ y &= b+x'\sin p+y'\cos p.\end{aligned}\right\}(O''')$$

formuły do przejścia z układu spółrzędnych prostokątnych do innego układu spółrzędnych prostokątnych, gdy początek jest różny.

$$AP=AN+PL=x\cos A+y\sin M,$$

$$PM=LM-PN=y\cos M-x\sin A.$$

$M=A=p$. Wstawiwszy znajdziemy formuły Licz 292.

295. Można więcej jeszcze ogólności tym formułom nadać, przypuszczając że nie tylko nowe osie dowolny kąt czynią między sobą ale i dawne.

W tym zamiarze rozwijmy (Fig 72) x i y dawne spółrzędne AP, PM punktu M, x' i y' nowe spółrzędne AQ, QM tegoż punktu, a i b spółrzędne AD, AD nowego początku A', p kąt $QA'X''$ nowych odciętych z dawnemi, q kąt MQN nowych rzędnych z dawnemi odciętemi, m kąt $A'QL$ nowych odciętych z dawnemi rzędnemi, n kąt QMN nowych rzędnych z dawnemi rzędnemi, r kąt XAY dawnych spółrzędnych: widocznie jest

$$x = AP = a + A'L + QN, \quad y = PM = b + QL + MN,$$

Cztery ważności linii $A'L$, QL, QN, MN, otrzymają się bezpośrednio przez twierdzenie Trygonometryczne, uczące nas, że wsławy kątów w trójkącie są proporcyonalne do boków im odpowiadających, uważając do tego że kąt QLA' mający samą wsławę co $QLX'' = r$, otrzymamy

$$\text{Wst } A'LQ : \text{Wst } A'QL = A'Q : A'L, \quad \text{czyli } \text{wstr} : \text{wstm} = x' : A'L;$$

$$\text{Wst } A'LQ : \text{Wst } QA'L = A'Q : QL, \quad \text{czyli } \text{wstr} : \text{wstp} = x' : QL;$$

$$\text{Wst } MNQ : \text{Wst } QMN = QM : QN, \quad \text{czyli } \text{wstr} : \text{wstn} = y' : QN;$$

$$\text{Wst } MNQ : \text{Wst } MQN = QM : MN, \quad \text{czyni } \text{wstr} : \text{wstq} = y' : MN$$

wyciągniemy z tych proporcyj,

$$A'L = x' \frac{\text{wstm}}{\text{wstr}}; \quad QL = x' \frac{\text{wstp}}{\text{wstr}}; \quad QN = y' \frac{\text{wstn}}{\text{wstr}}; \quad MN = y' \frac{\text{wstq}}{\text{wstr}};$$

Wstawiwszy te wartości w wartości spółrzędnych x i y, będziemy mieli,

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x'\frac{\text{wst}\,m}{\text{wst}\,r} + y'\frac{\text{wst}\,n}{\text{wst}\,r} \\ y &= b + x'\frac{\text{wst}\,p}{\text{wst}\,r} + y'\frac{\text{wst}\,q}{\text{wst}\,r} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (P''')$$

A że w trójkącie AQL suma kątów po im równa jest zewnętrznemu kątowi $QLX'' = r$, i w trójkącie MQN, $q + n = MNJ = r$, można przeto wstawić za m i n wartości $r-p$, i $r-q$, a formuły poprzedzające zamienią się na

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= a + x'\frac{\text{wst}(r-p)}{\text{wst}\,r} + y'\frac{\text{wst}(r-a)}{\text{wst}\,r} \\ y &= b + x'\frac{\text{wst}\,p}{\text{wst}\,r} + y'\frac{\text{wst}\,q}{\text{wst}\,r} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (Q''')$$

formuły do przejścia z układu spółrzędnych ukośnych do innego układu spółrzędnych ukośnych, gdy początek jest różny. (*)

(*) Podobnym sposobem więcej ogólności równaniu linii prostej nadać możemy, przypuszczając że jej spółrzędne są ukośne. Niechaj będzie (Fig 88) α kąt MCJ kto: Fig 88 ry ta prosta CM z osią odciętych czyni, β kąt XJX który tworzą dwie osie spółrzędne, a zaś linia MC mamy widocznie

$$PM = MJ + JP, \text{ albo } PM = MJ + b,$$

poprowadziwszy przez punkt P równoodległą PK od CM, kąt $PKX = MCJ = \alpha$, i kąt $MPR = \beta - \alpha = CMP$; to mając w trójkącie CMJ

$$CJ : JM = \text{wst}\,CMP : \text{wst}\,MCJ = \text{wst}\,\alpha,$$

298. Nakoniec jeżeli dawne spółrzędne ukośne były, a chcemy przejść do spół-rzędnych prostokątnych, będziemy uważali osie $A'X'$, $A'Y'$ za osie dawnych spółrzędnych. (Fig 71.ª). Naówczas osie AX i AY należałyby do nowych, i szłoby tylko o wyznaczenie za pomocą równań (N''') ważności spółrzędnych x' i y' w funkcyi x i y. W tym zamiarze wyrugujemy y' z tych równań, rozmnożywszy pierwsze przez wsq, a drugie przez dosq: odjąwszy drugi przekrzywy wypadek od drugiego pierwszego, i podzieliwszy przez mnożnik odcięty x', otrzymamy ważność tej zmiennej; rozmnożywszy potém drugie z równań (N''') przez dosp, a pierwsze przez wsp, i odjąwszy drugi wypadek od pierwszego otrzymamy podobnie ważność rzędnej y'. Oto są dwie te ważności

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{(x-a)\,\mathrm{wsr}\,q-(y-b)\,\mathrm{dosq}}{\mathrm{wsr}\,(q-p)} \\ y' &= \frac{(y-b)\,\mathrm{dosp}-(x-a)\,\mathrm{wsr}\,p}{\mathrm{wsr}\,(q-p)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (N''')$$

formuły do przejścia z układu spółrzędnych ukośnych x', y' do układu spół-rzędnych prostokątnych x, y, gdy początek jest różny.

299. Gdy chcemy na koniec, aby ten sam był początek, uczynimy w tych

---

albo $x : y - b = \mathrm{wsr}\,(\beta-\alpha) : \mathrm{wsr}\,\alpha$,

zkąd wyciągniemy $$y = \frac{x\,\mathrm{wsr}\,\alpha}{\mathrm{wsr}\,(\beta-\alpha)} + b$$

Jeżeli β jest prosty, $\beta-\alpha$ jest dopełnieniem kąta α, a zatém równanie zamieni się na $$y = \frac{\mathrm{wsr}\,\alpha}{\mathrm{dos}\,\alpha} + b, \text{ albo } y = \mathrm{tg}\alpha \times x + b.$$

w tych formułach $a=o$ i $b=o$, zkąd otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x\,\mathrm{wsin}\,q - y\,\mathrm{dos}\,q}{\mathrm{wsin}\,(q-p)} \\ y' &= \frac{y\,\mathrm{dos}\,p - x\,\mathrm{wsin}\,p}{\mathrm{wsin}\,(q-p)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (S''')$$

formuły do przejścia z układu spółrzędnych ukośnych x', y' do układu spół=rzędnych prostokątnych x, y, gdy początek ten sam jest.

O przemianie spółrzędnych Elipsy.

300. Równanie Elipsy którśmy otrzymali biorąc spółrzędne prostokątne, może się na inne równanie przemienić którego spółrzędne dowolny kąt między sobą czynić będą. Wstawmy w równanie $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ ważności spółrzędnych x i y dane formułami (S'''), a znajdziemy

$$\left.\begin{matrix} b^2\,\mathrm{dos}^2 p \\ +a^2\,\mathrm{wsin}^2 p \end{matrix}\right| x'^2 + \left.\begin{matrix} 2b^2\,\mathrm{dos}\,p\,\mathrm{dos}\,q \\ +2a^2\,\mathrm{wsin}\,p\,\mathrm{wsin}\,q \end{matrix}\right| x'y' + \left.\begin{matrix} b^2\,\mathrm{dos}^2 q \\ +a^2\,\mathrm{wsin}^2 q \end{matrix}\right| y'^2 = a^2b^2 \ldots (T''')$$

Ponieważ kąty p i q są dowolne można je zatém wyznaczyć dwoma warunkami.

301. Gdy rozrządzimy pierwszym z tych warunków, zgubiwszy jeden z trzech wyrazów składających pierwszą stronę, i gdy zrównamy zero spółczynnik odcięłej x'^2, otrzymamy $\qquad b^2\,\mathrm{dos}^2 p + a^2\,\mathrm{wsin}^2 p = o.$

Położywszy za $\mathrm{dos}^2 p$ jéj ważność $1-\mathrm{wsin}^2 p$, znajdziemy

$$\mathrm{wsin}^2 p = \frac{b^2}{a^2-b^2};$$

ponieważ a^2 większém jest od b^2, ta ważność $\mathrm{wsin}^2 p$ koniecznie jest ujemną;

więc $w\sin p$ jest urojona, i niepodobna wyznaczyć kąt p zrównawszy zero współczynnik odciętej x'.(*) Podobnie dowiedlibyśmy że nie można wyznaczyć kąta q, zrównawszy zero współczynnik rzędnej y'.

302. Nie pozostaje nam zatem jak tylko zgubić wyraz wxy', zrównawszy zero współczynnik tego wyrazu: będziemy więc mieli

$$b^2\cos p\cos q + a^2w\sin p w\sin q = 0 \ldots (IV''')$$

Podzieliwszy przez $\cos p\cos q$ i zważywszy iż

$$\frac{w\sin p}{\cos p} = \operatorname{tg} p, \text{ i } \frac{w\sin q}{\cos q} = \operatorname{tg} q$$

równanie poprzedzające da

$$\operatorname{tg} p \operatorname{tg} q = -\frac{b^2}{a^2}$$

a równanie krzywej zamieni się w tem założeniu na

$$(b^2\cos^2 p + a^2w\sin^2 p)x'^2 + (b^2\cos^2 q + a^2w\sin^2 q)y'^2 = a^2b^2 \ldots (V''')$$

To równanie (V''') wyznaczy rzędną y' w funkcyi odciętej x', gdy ustawiemy ważność wzlaw i dostaw kątów p i q.

303. Że zaś te kąty poddane są tylko warunkowi wyrażonemu równaniem (V'''), można więc prowadzić jedną z osi pod kątem jakimkolwiek, a drugą ośmiącą czynić kąt q, równaniem (V''') wyznaczoną zostanie, i wezmiemy ciągnoch

---

(*) Można także uważać iż suma dwóch kwadratów nie może być żadną

Kierunek CD.

304. Sam kształt równania tego (V''') dostatecznym jest do pokazania że nowa oś odciętych na dwie równe części krzywą dzieli; bo to równanie rozwiązaniem będąc ze względu na y, zawsze daje dwie równe ważności i znaków przeciwnych dla y; więc rzędne poniższy równoodległe od prostej DE, czyniącej kąt z kierunkiem pierwotnej osi odciętych, wypadnie ze krzywa na dwie części symetryczne DBE, DAE przez nową oś odciętych podzielony będzie. Nowa oś odciętych jest zatem średnicą.

305. Podobnie jest średnicą każda cięciwa przechodząca przez środek bo kąt p jest dowolnym: a zatem nowa oś rzędnych także jest średnicą. Jedna z nowych osi uważana ze względu na drugą jest jej średnicą sprzężoną; to imię nadane im dla związku istniejącego między temi osiami, związku który jest takim, że gdy jednej położenie mamy danem, drugiej położenie za pomocą równania (V''') wyznaczamy. Liczba 303.

306. Średnica uważana co do swojej rozciągłości, jest częścią swego kierunku zawartą w krzywej.

307. Wszystkie średnice Ellipsy na dwie równe części przez środek są podzielone: bo odcięte punktów w których y jest zadanym, są różne i znaków przeciwnych.

308. Równanie (W''') może się wyrazić w funkcyi średnic sprzężonych. Podzielmy je przez a^2b^2, a zamieni się na

$$\frac{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}{a^2b^2}x'^2 + \frac{b^2\cos^2\psi + a^2\sin^2\psi}{a^2b^2}y'^2 = 1.$$

albo raczej $$\frac{x'^2}{\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}} + \frac{y'^2}{\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\psi + a^2\sin^2\psi}} = 1 \ldots\ldots (X'')$$

uważając zaś że ponieważ druga strona tego równania żadnego wymiaru nie ma, przeto i pierwsza mieć go nie może, co wymaga żeby dzielniki wyrazów x^2 i y^2 były dwóch wymiarów, możemy więc przypuścić

$$\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi} = a'^2 \ldots (Y''')$$

$$\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\psi + a^2\sin^2\psi} = b'^2 \ldots (Z''')$$

a równanie (X''') zamieni się na

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1, \quad \text{czyli} \quad b'^2x'^2 + a'^2y'^2 = a'^2b'^2 \ldots (A'')$$

309. Stałe b' i a' wchodzące w to równanie, niczem innem nie są, tylko półśrednicami sprzężonemi, bo uczyniwszy $x' = 0$, i $y' = 0$, znajdziemy

$$x' = \pm a' = \pm CB', \quad y = \pm b' = \pm CD'.$$

310. Ponieważ równanie (A'') jednakowego jest kształtu z równaniem (G''') Elipsy odniesionej do środka, pokazaliby śmy przeto jak pod Liczbą 213, że kwadraty z nędznych prowadzonych do jednej ze średnic równoodległe od swojej średnicy sprzężonej, mają się do siebie jak iloczyny z odległości x spodka każdej z nędznych od punktów w których średnica krzywą spotyka.

311. Trzeba uważać iż spółrzędne nie są do siebie pod kątem prostym: bo średnice sprzężone miałyby własność służącej samej wielkiej i małej osi dzielenia wszystkich cięciw prostopadłych do nich na dwie równe części. (*).

312. Jeżeli jedna ze średnic sprzężonych z osią odcinających kąt ostry czyni, druga rozwarty koniecznie tworzyć będzie: bo równanie $\operatorname{tg} q = -\frac{b^2}{a^2 \operatorname{tg} p}$ pokazuje że jeżeli styczna kąta p jest dodajna, styczna kąta q ujemną bydź musi, a więc należącą do kąta rozwartego.

313. Łatwo dowieść że każda średnica równoodległą jest od stycznej prowadzonej przez punkt w którym jej średnica sprzężona krzywę spotyka: bo gdy ważność rzędnej y dana równaniem (A'') tem mniejszą się staje im bardziej x się powiększa, wypada że dwie ważności równe i znaków przeciwnych rzędnych y, ciągle zmniejszać się będą w miarę oddalania się rzędnej od

---

(*) Dla okazania tego bezpośrednio, jeżeli w trygonometryczne wyrażenie stycznej $\frac{\text{kąta}}{q-p}$ utworzonego przez dwie średnice sprzężone, położymy ważność tangensowej stycznej q, daną równaniem (V''') znajdziemy

$$\operatorname{tg}(q-p) = \frac{1}{b^2 a^2}\left(a^2 \operatorname{tg} p + \frac{b^2}{\operatorname{tg} p}\right);$$

Aby to wyrażenie do kąta prostego należeć mogło, potrzeba aby się stało nieskończonem, co bydź nie może chyba w przypadku $p = \infty$, albo $p = 0$.

środka a_1 do $x=a_1$: naówczas obydwie znikną zarazem łącząc się ze styczną po-
ciągniętą w punkcie B_1 albo A_1.

I łatwością przychodzi rozwiązać wiele zagadnień o średnicach sprzężo-
nych za pomocą dwóch twierdzeń pozostaje język nam do wytłożenia.

314. Pierwsze z nich jest, że w Elipsie równoległobok na dwóch średnicach
sprzężonych wystawiony, równy jest prostokątowi przez wielką i małą osi u-
twornionemu.

Jeżeli równanie (Z''') przez równanie (Y''') rozmnożymy, otrzymamy

$$a'^2b'^2=\frac{a^2b^4}{b^4\cos^2\varphi\cos^2\psi+a^2b^2\operatorname{wst}^2\varphi\cos^2\psi+a^2b^2\operatorname{wst}^2\psi\cos^2\varphi+a^2\operatorname{wst}^2\psi\operatorname{wst}^2\varphi}$$

Dodawszy do mianownika ilość,

$$2a^2b^2\operatorname{wst}\psi\operatorname{pwst}\varphi\cos\psi\cos\varphi\,(*)-2a^2b^2\operatorname{wst}\psi\operatorname{pwst}\varphi\cos\psi\cos\varphi$$

rozbija ten mianownik na dwa kwadraty rozdzielić, i równanie poprzedzają-
ce zamieni się na

$$a'^2b'^2=\frac{a^2b^4}{(b^2\cos\varphi\cos\psi+a^2\operatorname{wst}\psi\operatorname{pwst}\varphi)^2+(ab\operatorname{wst}\varphi\cos\psi-ab\operatorname{wst}\psi\cos\varphi)^2}$$

Uważając że $b^2\cos\varphi\cos\psi+a^2\operatorname{wst}\varphi\operatorname{wst}\psi=0$, bo to wyrażenie jest współczynnikiem wyrazu
w xy. Licz 302, będącego zadnym z założenia, równanie poprzedzające zamienie-
my na

$$a'^2b'^2=\frac{a^2b^4}{(ab\operatorname{wst}\varphi\cos\psi-ab\operatorname{wst}\psi\cos\varphi)^2}$$

(*) Wyrażenie $2a^2b^2\operatorname{wst}\psi\operatorname{pwst}\varphi\cos\psi\cos\varphi$ jest podwojonym pierwiastkiem iloczy-
nu z ostatnich wyrazów tego mianownika.

albo raczey $a^2b^2 = \overline{[ab(wstgdosp - wstgdosq)]^2}^{a^4b^4}$

A że kwadrat z iloczynu złożonego z dwóch czynników równy jest iloczynowi kwadratów z tych czynników, równanie to następującym sposobem wyrazić się może

$$a^2b^2 = \overline{a^2b^2(wstgdosp - wstgdosq)^2}^{a^4b^4} = \overline{(wstgdosp - wstp)^2}^{a^2b^2}$$

Ponieważ mianownik drugiej strony jest kwadratem z $wst(q-p)$ mamy nakoniec

$$ab = \frac{a^2b^2}{wst(q-p)};$$

a wyciągnąwszy pierwiastek $ab = \frac{ab}{wst(q-p)}$ ..... (B^w)

Zniósłszy mianownik $abwst(q-p) = ab$

Pierwsza strona tego równania wystawia powierzchnię równoległoboku $DCB'\mathfrak{f}$ (fig 73) fig 73

Bo niechaj będzie $D'H$ wysokością tego równoległoboku widocznie podług przypisku Liczb: 176,

$$D'H = DC \times wstD'CH,$$

albo $DH = bwst(q-p$

Rozmnożywszy podstawę CB' przez tę wysokość, otrzymamy

$$\text{Powierzchnię } D'CB\mathfrak{f} = CB' \times D'H = abwst(q-p);$$

a że ab wystawia prostokąt na dwóch połowiach a i b, więc równoległobok na dwóch półśrednicach wykreślony równy jest prostokątowi z dwóch połosi a i b: a zatem i równoległobok z całych dwóch średnic, równy jest prostokątowi z obudwóch osi. (*)

(*) Twierdzenie to następującym jeszcze sposobem okazać można. Niechaj będą

315. Drugie twierdzenie o średnicach sprzężonych jest, że w Elipsie Suma kwadratów ze średnic sprzężonych równa jest Sumie kwadratów z większej i małej osi.

Ważność iloczynu a^2b^2 wyciągniętą z równania (B''') wstawiwszy w formuły

---

CB' i CD' (fig 73) półśrednice sprzężone a' i b', q i p kąty DCB, $B'CB$, a α i β, α' i β' fig 73
spółrzędne punktów B' i D'. Ponieważ punkt D' jest wyznaczony, gdy B' jest dany, wypada że między α, β i α', β' istnieje zależność którą znaleść mamy. Trójkąt CKD' daje

$$\alpha'^2 + \beta'^2 = b'^2$$

Położywszy w to równanie ważność ilości b^2 daną równaniem (Z'''), i spółrzędnej β'^2 którą znajdziemy uczyniwszy $x = \alpha'$, i $y = \beta'$ w równaniu prostej CD' będącem

$$y = x \operatorname{tg} q$$

otrzymamy

$$\alpha'^2 + \alpha'^2 \operatorname{tg}^2 q = \frac{a^2b^2}{b^2 \cos^2 q + a^2 \sin^2 q}$$

pozbywszy się mianownika będzie

$$b^2\alpha'^2(\cos^2 q + \operatorname{tg}^2 q \cos^2 q) + a^2\alpha'^2 \sin^2 q (1 + \operatorname{tg}^2 q) = a^2b^2$$

uważając że $\cos q \operatorname{tg} q = \sin q$, $\sin^2 q + \cos^2 q = 1$, a $1 + \operatorname{tg}^2 q = \frac{1}{\cos^2 q}$

sprowadzimy to równanie do

$$b^2\alpha'^2 + a^2\alpha'^2 \frac{\sin^2 q}{\cos^2 q} = a^2b^2$$

albo

$$b^2\alpha'^2 + a^2\alpha'^2 \operatorname{tg}^2 q = a^2b^2$$

zkąd wyciągniemy

$$\alpha'^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 q}$$

$(I'''), (V''')$ znajdziemy

$$\frac{a'^2b^2\cos^2(q-p)}{b^2\cos^2 q + a^2\sin^2 q} = b'^2 \quad i \quad \frac{a^2b'^2\cos^2(q-p)}{b^2\cos^2 p + a^2\sin^2 p} = a'^2$$

Pozbywszy się mianowników i zniósłszy spólny czynnik w każdem z tych

---

Jeżeli w równaniu (V''') położymy za $\operatorname{tg} p$ jej ważność $\frac{\beta}{\alpha}$ znajdziemy

$$\operatorname{tg}^2 q = \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}^2 p} = \frac{b^4}{a^4}\cdot\frac{\alpha^2}{\beta^2}$$

Wstawiwszy tę ważność $\operatorname{tg}^2 q$ w wyrażenie a'^2 i zważywszy iż punkt $M\alpha,\beta$ będący na krzywej ma

$$a^2\beta^2 + b\alpha^2 = a^2b^2$$

otrzymamy

$$a'^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 + a^2\frac{b^4\alpha^2}{a^4\beta^2}} = \frac{a^2}{1 + \frac{b^2\alpha^2}{a^2\beta^2}} = \frac{a^4\beta^2}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2} = \frac{a^4\beta^2}{a^2b^2} = a^2\alpha^2.$$

Dla wyznaczenia ważności rzędnej β, odmierzymy x i y na α i β' wprowadzonej prostej CD', a będziemy mieli $\beta' = \alpha\operatorname{tg} q$; podniosłszy to wyrażenie do kwadratu i wstawiwszy znalezioną ważność $\operatorname{tg}^2 q$, otrzymamy

$$\beta'^2 = \frac{b^4}{a^4}\cdot\frac{\alpha^2}{\beta^2}\alpha'^2;$$

zastąpiwszy α'^2 i β'^2 przez ich wyrażenia w funkcyi α, i sprowadziwszy znajdziemy

$$\beta'^2 = \frac{b^2}{a^2}\alpha^2;$$

wypada zatem z tego co poprzedza iż

$$\alpha' = \sqrt{a^2 - \alpha^2}, \quad \beta = \frac{b}{a}\alpha.$$

To mając widzimy że trójkąt $D'CB'$ (fig. 73) jest połową równoległoboku

z tych równań otrzymamy

$$a^2 wst^2(q-p) = b^2 dos^2 q + a^2 wst^2 q,$$

$$b^2 wst^2(q-p) = b^2 dos^2 p + a^2 wst^2 p;$$

Dodawszy te równania

$$(a^2+b^2) wst^2(q-p) = a^2(wst^2 p + wst^2 q) + b^2(dos^2 p + dos^2 q) \ldots\ldots (C'')$$

Druga strona tego równania może się pod kształtem pierwszej wyrazić.

W tym zamiane weźmy wyrażenie w a i b pod kształtem pierwszej strony; to wyrażenie $(a^2+b^2) wst^2(q-p)$ samemu sobie zrównane i rozwinięte w części da

---

zbudowanego na półśrednicach sprzężonych. Powierzchnia tego Trójkąta wyrażona jest formułą Licz 119, po uczynieniu w niej α', ujemnem; lecz i zkądinąd bezpośrednio możemy ją znaleść uważając że

Trójkąt $D'CB'$ = Trapezowi $D'KJB'$ - trójkątem $D'Ck$ - Trójkątem $B'CJ$,

albo Trójkąt $D'CB' = \frac{\beta+\beta'}{2}(\alpha'+\alpha) - \frac{\alpha'\beta'}{2} - \frac{\alpha\beta}{2} = \frac{\alpha'\beta+\alpha\beta'}{2} = \frac{\alpha'\beta+\alpha\beta'}{2}$

ustawiwszy ważności spółrzędnych α', β' i β znajdziemy

$$\text{Trójkąt } D'CB' = \frac{ab}{2}$$

więc $$\text{Równoległobok } D'CB' = ab.$$

Rozmnożywszy to równanie przez y pierwsza strona zamieni się na równoległobok na średnicach sprzężonych zbudowany, druga na prostokąt przez dwie główne osie ellipsy

$$(a^2+b^2)wst^2(q-p)=(a^2+b^2)(wst^2qdos^2p-wst^2pdos^2q)^2$$

albo rozwinąwszy drugą stronę

$$(a^2+b^2)wst^2(q-p)=a^2wst^2qdos^4p-2a^2wst^2pwst^2qdos^2pdos^2q+a^2wst^4pdos^2q$$

$$+b^2wst^2qdos^4p-2b^2wst^2pwst^2qdos^2pdos^2q+b^2wst^4pdos^2q.$$

Wstawiwszy w skrajne wyrazy (*) prawej linii drugiej strony, ważności dos^2p i dos^2q, a w skrajne wyrazy drugiej linii ważności wst^2p i wst^2q, wyciągnięte z równań $1=wst^2p+dos^2p$, i $1=wst^2q+dos^2q$ daneych trygonometrycznych, otrzymamy

$$(a^2b^2wst^2(q-p))=a^2wst^2q-a^2wst^2qwst^2p-2a^2wst^2pwst^2qdos^2pdos^2q+a^2wst^2p-a^2wst^2pwst^2q$$

$$+b^2dos^2p-b^2dos^2pdos^2q-2b^2wst^2pwst^2qdos^2pdos^2q+b^2dos^2q-b^2dos^2pdos^2q.$$

Położywszy w wyraz $-2a^2wst^2pwst^2qdos^2pdos^2q$ ważność ilości a^2, a wyraz $-2b^2wst^2pwst^2qdos^2pdos^2q$, ważność ilości b^2 wyciągniętą z równania (II''') i sprowadziwszy otrzymamy

$$(a^2+b^2)wst^2(q-p)=a^2wst^2q+a^2wst^2p+b^2dos^2q+b^2dos^2p$$

albo $$(a^2+b^2)wst^2(q-p)=a^2(wst^2q+wst^2p)+b^2(dos^2q+dos^2p)$$

Wstawiwszy ważność drugiej strony w równanie (C''), podzieliwszy potem przez

---

(*) Przewodniczył mi w tém wystawieniu zalożony cel sprowadzenia wyrażenia

$$(a^2+b^2)wst^2(q-p)$$

do rezultatu drugiej strony równania (C''). Co zaś równanie (C'') pokazuje ia^2 razmnożone jest w stawy, a b^2 przez dostawy.

przez wst^{a}(q-p) będzie $a'^2+b'^2=a^2+b^2$ ....(D'')

rozmnożywszy przez 4 obydwie strony, równanie to zamieńmy na

$$4a'^2+4b'^2=4a^2+4b^2 \ldots (*)$$

316. Można rozwiązywać różne zadania o średnicach sprzężonych w Elipsie. Naprzykład jeżli zażądamy sobie znaleść dwie średnice sprzężone równe w Elipsie uczyniemy $b'=a'$, a równanie (D'') da

$$2a'^2=a^2+b^2, \text{ i } a'=\pm\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

przeciąwszy Elipsę półśrednicami równemi $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ wyznaczemy położenie średnic sprzężonych równych w Elipsie.

317. Aby znaleść ich kierunki, niechaj będą α i β współrzędne punktu wkoło nych te średnice przecinają krzywą; zawsze między α i β będzie zależność

$$a^2\beta^2+b^2\alpha^2=a^2b^2;$$

ponieważ α i β są bokami trójkąta prostokątnego, więc przeciwprostokątna

---

(*) Łatwo dowieść to twierdzenie przez wyrażenia współrzędnych punktów B' i D', któ ryche użyliśmy w Przypisku Liczb 314; bo trójkąty prostokątne B'CJ, D'Ck dają

$$\alpha^2+\beta^2=a'^2, \quad \alpha'^2+\beta'^2=b'^2$$

Dodawszy te równania i położywszy ważności współrzędnych α', β', β w funkcyi α, znajdzie my $\alpha^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-\alpha^2)+a^2-\alpha^2+\frac{b^2}{a^2}\alpha^2=a'^2+b'^2$;

sprowadziwszy $a^2+b^2=a'^2+b'^2$, albo $(2a)^2+(2b)^2=(2a')^2+(2b')^2$.

będzie jedną ze średnic równych, i znajdziemy

$$\alpha^2+\beta^2=\frac{a^2+b^2}{2}:$$

Rozmnożywszy to równanie przez b^2 i odjąwszy wypadek od poprzedzającego znajdziemy po sprowadzeniu $\beta^2=\frac{b}{2}$, a całém $\alpha=\frac{a^2}{2}$;

Że zaś styczna trygonometryczna kąta, p wyrażona jest przez $\frac{\beta}{\alpha}$, będziemy więc mieli $Sty^2p=\frac{\beta^2}{\alpha^2}=\frac{b^2}{a^2}$, i $Styp=\pm\frac{b}{a}$;

Dwie te ważności Styp: należą do kątów BCB i DCB utworzonych przez średnice sprzężone równe. Porównawszy ważności teraz dla Styp otrzymane z ważnościami znalezionemi Liczb: 278, dostrzeżemy iż średnice równe w Elipsie są asymptotami pochodzącemi do Hyperboli mającej tę samą oś małą i wielką co Elipsa.

318. Nakoniec jeżeli kąt (q-p) utworzony przez dwie średnice sprzężone jakoteż same średnice mamy dane, otrzymamy z równań (B^{iv}) i (D^{iv}) ważności wielkiej i małej osi Elipsy.

O przemianie spółrzędnych Hyperboli.

319. Jeżeli w równanie Hyperboli $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ wstawimy ważności spółrzędnych x i y dane formułami (L^{iii}) znajdziemy

$$\begin{matrix} b^2\cos^2p \\ -a^2\sin^2p \end{matrix}\Big|x'^2+\begin{matrix} 2b^2\cos p\cos q \\ -2a^2\sin p\sin q \end{matrix}\Big|x'y'+\begin{matrix} b^2\cos^2q \\ -a^2\sin^2q \end{matrix}\Big|y'^2=a^2b^2\ldots(E^{iv})$$

Ponieważ kąty p i q są dowolne, możemy wiec niemi tak rozmaicić, aby dwa wyrazy przerobionej zginęły. Lecz byłoby dwa następujące wyrazy mie-

my

możemy wybrać do zgubienia,

1. Wyraz wxy i jeden z wyrazów wx^2 lub wy^2;

2. Dwa wyrazy $w.x^2$ i y^2.

320. Zrównawszy zero wyraz wxy łatwo dostrzedz że nie można uczynić zadnym którego z innych spółczynników bez sprowadzenia równania (E^{IV}) do jednego z kształtów następujących $Ax^2=a^2b^2$, albo $By^2=a^2b^2$, równań do wykreślenia krzywej nie mogących służyć, gdyby nawet A i B nie zginęły; (*) bo te równania dwie tylko ważności dają dla niewiadomej.

321. Przypuściwszy zatem spółczynnik wxy żadnym, nie zrównamy więcej zero innego wyrazu, i będziemy mieli warunkowe równanie

$$b^2 dosp\, dosq - a^2 wstp\, wstq = 0 \ldots (F^{IV})$$

Podzieliwszy przez $dosp$ i $dosq$ i zważywszy iż $\frac{wstp}{dosp} = styp$ a $\frac{wstq}{dosq} = styq$, możemy przerobić te równanie na

$$b^2 - a^2 styp\, styq = 0$$

(*) Zrównawszy zero spółczynnik wxy i jeden ze spółczynników wx^2 lub wy^2, otrzymujemy dwa równania, które połączone razem dają trzecie, w którym drugie ze spółczynników wx^2 lub wy^2 sprowadza się do zera. Więc druga strona równania (E^{IV}) wskutek założenia koniecznie jest żadną, przeto założenia tego nie można przypuszczać.

zkąd wyciągniemy $\operatorname{tg} q = \frac{b^2}{a^2 \operatorname{tg} p} \ldots (G^{IV})$

To równanie zawsze nam wyznaczy jeden z kątów q i p, gdy drugiemu jakąś do = wiek nadamy wartość. A zatem ustanowiwszy p, osi CX (Fig 74) dowolne położenie do osi pierwotnej nadać możemy, i sprawić to aby się przecięła z krzywą, bo są położenia w których jej nigdy spotka.

323. Uważmy naprzód iż obydwie osie CX, CY z jednej strony osi odciętych są nachylone: bo równanie $\operatorname{tg} q = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} p}$ pokazuje że $\operatorname{tg} q$ jednakowy znak może powinna ze $\operatorname{tg} p$, że zatem kąty p i q razem albo są rozwarte, albo ostre. Przypuśćmy że kąty p i q są ostre, a i że q przewyższa p, naówczas $\operatorname{tg} q > \operatorname{tg} p$.

Za pomocą ważności $\operatorname{tg} q$ danej równaniem (G^{IV}) odmieńmy tę nierówność na

$$\frac{b^2}{a^2 \operatorname{tg} p} > \operatorname{tg} p, \text{ albo } \frac{b^2}{a^2} > \operatorname{tg}^2 p,$$

a że styczna równa jest wielkości podzielonej przez dostawę, ta ostatnia przeto nierówność zamieni się na $\frac{b^2}{a^2} > \frac{\operatorname{wst}^2 p}{\operatorname{dos}^2 p}$;

zgubiwszy mianowniki będzie $b^2 \operatorname{dos}^2 p > a^2 \operatorname{wst}^2 p$;

a zatem $b^2 \operatorname{dos}^2 p - a^2 \operatorname{wst}^2 p =$ ilości dodatniej;

Że zaś $b^2 \operatorname{dos}^2 p - \operatorname{wst}^2 p a^2$ jest współczynnikiem ilości x^2 w równaniu (E^{IV}), wypada: dla że ten współczynnik jest koniecznie dodatni.

Z drugiej strony jeżeli w tej samej nierówności $\operatorname{tg} q > \operatorname{tg} p$ położymy wartość $\operatorname{tg} p$ wyciągniętą z równania (G^{IV}), znajdziemy tymże sposobem że

współczynnik rzędnej y'^2 jest ujemny.

324. Ponieważ podług założenia kąt ostry q przewyższa kąt ostry p, wyrażiwszy zatém współczynnik odciętej x'^2 pod kształtem dodajnym, a współczynnik rzędnej y'^2 pod kształtem ujemnym, równanie (I^{IV}) pozbawione wyrazu w $x'y'$ może się tak napisać

$$\left(b^2\cos^2 p - a^2\sin^2 p\right)x'^2 - \left(a^2\sin^2 q - b^2\cos^2 q\right)y'^2 = a^2b^2,$$

a wyrażenia zawarte między nawiasami, będą ilościami dodajnemi.

To równanie podzielone przez a^2b^2 zamieni się na

$$\frac{\left(b^2\cos^2 p - a^2\sin^2 p\right)x'^2}{a^2b^2} - \frac{\left(a^2\sin^2 q - b^2\cos^2 q\right)y'^2}{a^2b^2} = 1.$$

czyli

$$\frac{x'^2}{\left(b^2\cos^2 p - a^2\sin^2 p\right)} - \frac{y'^2}{\left(a^2\sin^2 q - b^2\cos^2 q\right)} = 1 \ldots (H^{IV})$$

ponieważ druga strona żadnego wymiaru nie ma, podobnie i pierwsza nie będzie go miała; więc ilości dodajne

$$\frac{a^2b^2}{\left(b^2\cos^2 p - a^2\sin^2 p\right)} \quad \frac{a^2b^2}{\left(a^2\sin^2 q - b^2\cos^2 q\right)}$$

dwóch będą wymiarów. Przypuściwszy zatém

$$\frac{a^2b^2}{\left(b^2\cos^2 p - a^2\sin^2 p\right)} = a'^2 \ldots (I^{IV}) \quad \frac{a^2b^2}{\left(a^2\sin^2 q - b^2\cos^2 q\right)} = b'^2 \ldots (J^{IV})$$

równanie (H^{IV}) zamienimy na

$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 1$$

albo zgubiwszy mianowniki $b'^2x'^2 - a'^2y'^2 = a'^2b'^2$.

325. To samo równanie znaleźlibyśmy, gdyby w przypadku rozwartości

kątów p i q, był $q < p$; bo ważność bezwzględna styp zawsze byłaby mniejsza od styczney q. Lecz gdy kąty p i q są ostre, a p przewyższa q będzie przeciwnie styq < styp. Ta nierówność istniałaby jeszcze gdyby q i p rozwarte były a $q < p$. W dwóch ostatnich przypadkach dosyć zamienić znak $>$ na $<$ w dowodzeniu Liczb 323, aby okazać że równanie (E^{IV}) może się sprowadzić do kształtu $a'^2y'^2 - b'^2x'^2 = a'^2b'^2$.

Naówczas weźmiemy oś y' za oś odciętych. Liczb 184.

326. W równaniu $b'^2x'^2 - a'^2y'^2 = a'^2b'^2$, uczyniwszy $y' = 0$, znajdziemy $x' = a'$ i $x' = -a'$, dla ważności odciętych CB' i CA' tych punktów w których oś przecina krzywę; uczyniwszy zaś $x' = 0$ to samo równanie da nam

$$y = \pm\sqrt{-b'^2} = \pm b'\sqrt{-1};$$

na dwie ważności rzędnej przechodzącej przez środek. Te ważności urojone pokazują że gdy nowa oś CX' przecina się z krzywą, druga oś CY' nie może nigdy jej spotkać.

327. Tym dwom nowym osiom nadano imię średnic sprzężonych; bo są średnicami zależącemi od siebie dla warunkowego równania (F^{IV}).

328. Uważając te średnice pod względem długości, poznajemy średnicę która bydź części obwodzie krzywej zawartą przez prostą przechodzącą przez środek, rzeczywiście prostą z tych średnic sprzężonych w Hyperboli

jedna tylko istnieć będzie, druga bowiem nie może jej spotkać. Jednakiella zgodności z Ellipsą stałym 2a i 2b imię sprzężonych średnic nadano. Podobną uwagę jużśmy uczynili pod Licz 190 traktując o głównych osiach będących także średnicami sprzężonemi

329. Jeżeli główna oś cykli kąt pęku prostych, równaniem y^{iv} wtem założeniu daje $\lambda_{yy} = \infty$; co pokazuje że średnica sprzężona kąt prosty z główną osią czynić powinna, i wziąć kierunek małej osi.

330. Można tu okazać podobnie jak pod Licz 311, że w innych układach średnic sprzężonych spotrzednie ukośnemi bydź powinny.

331. Ponieważ y ma zawsze dwie równe ważności, ginące wtenczas, gdy $x = \pm a$, wypada z tego że styczne poprowadzone w punktach A i B równoodległe są od rzędnych, a zatém od osi CY.

332. Nakoniec ponieważ dowodzenie Licz 213, może się zastosować do sprzężonych średnic w Hyperbole, przeto kwadraty z rzędnych poprowadzonych do jednej z średnic sprzężonych równoodległe od drugiej, są do siebie w stosunku iloczynów z odległości spodka każdej z rzędnych od punktów w których średnica krzywę spotyka.

333. W Rozdziale poprzedzającym daliśmy dwa twierdzenia o średnicach sprzężonych w Ellipsie porównanych z wielką i małą osią; zatrudnimy

się teraz twierdzeniami jakie nam Hyperbola poda. Pierwsze z tych twierdzeń jest, że w Hyperboli równoległobok na sprzężonych średnicach wystawiony, równy jest prostokątowi utworzonemu przez wielką i małą oś.

Dla okazania tego, jeżeli równanie (I^{mo}) przez równanie (I^{mo}) rozmnożymy otrzymamy $a'^2b'^2 = \frac{a^4b^4}{b^4dos^2gdos^2p + a^2b^2wst^2qdos^2p + a^2b^2wst^2pdos^2q - a^2wst^2pwst^2q}$;

dodawszy do mianownika ilość

$$2a^2b^2wstpwstqdospdosq - 2a^2b^2wstpwstqdospdosq,$$

można rozdzielić ten mianownik na dwa kwadraty, a równanie poprzedzające:

ce odmieni się na $a'^2b'^2 = \frac{a^4b^4}{(b^2dospdosq - a^2wstpwstq)^2 + (abwstqdosp - abwstpdosq)^2}$

uważając że $b^2dosdosq - a^2wstpwstq = o$, bo to wyrażenie jest spółczynnikiem w xy Liczb 321, który podług naszego założenia jest żadnym, zatém poprzedzające równanie zamieni się na

$$a'^2b'^2 = \frac{a^2b^2}{(abwstqdosp - abwstpdosq)^2}$$

albo raczej $a'^2b'^2 = \frac{a^2b^2}{[ab(wstqdosp - wstpdosq)]^2} = \frac{a^2b^2}{ab^2(wstqdosp - wstpdosq)^2}$

więc $a'^2b'^2 = \frac{a^2b^2}{(wstpdosp - wstpdosq)^2}$.

Ponieważ mianownik długiej strony jest kwadratem z $(wst(q-p)$ będzie

$$a'^2b'^2 = \frac{a^2b^2}{wst^2(q-p)}.$$

a wyciągnąwszy pierwiastek $a'b' = \frac{ab}{wst(q-p)}$

albo $$a'b'wst(q-p) = ab \ldots (K^{mo})$$

Jeżeli weźmiemy (Fig 74) na kierunku półśrednicy sprzężonej CJ, z poł- Fig 74
średnicą C'K' linię D'B' w długości równą stałej b, i wykreślemy równoległobok D'C B'G, ten równoległobok przyjmiemy stronę równania poprzedzającego wystawiać będzie. Bo niech AH jest wysokością tego równoległoboku, mamy Liczba 176,

$$D'H = D'C \operatorname{cost} D'CH = D'C \operatorname{cost} D'CB' = b \operatorname{cost}(q-p)$$

więc Powierzchnia D'C B'G, albo CB. D'H = $ab \operatorname{cost}(q-p)$.

Ta więc powierzchnia równa jest iloczynowi ab, który może być wystawiony przez prostokąt mający a za podstawę, a za wysokość stałą b równania Hyperboli. Rozmnożywszy przez 4 poprzedzające równanie, znajdziemy

$$2a' \times 2b' \operatorname{cost}(q-p) = 2a \times 2b.$$

Dowiedliśmy zatem twierdzenia. (*)

(*) Dowodzenie wyłożone pod Liczbą 314, i do tego twierdzenia da się zastosować. W tym celu, dosyć zamiast równań (V''') i (X''') równań (G'') i (J'') użyć, a będziemy mieli $\alpha' = \sqrt{a^2 - a^2}$, $\beta' = \frac{b}{a}\alpha$;

To mając widocznie trójkąt CD'B' jest połową równoległoboku utworzonego z dwóch półśrednic sprzężonych. Tą powierzchnią znajdzie się albo za pomocą formuły Liczba 118, albo uważając iż

Trójkąt D'C B' = Trapezowi D'K J B' + Trójkątowi D'K C - Trój: B'CJ

334 Drugie twierdzenie jest że w Hyperboli różnica kwadratow ze średnic sprzężonych równa jest różnicy kwadratow z wielkiej i małej osi.

Dla okazania tego ważności iloczynu a^2b^2 wyciągnięta z równania (K^{IV}) i wstawiwszy w formuły (I^{IV}) i (I'^{IV}) będziemy mieli

$$\frac{a'^2b'^2 wst^2(q-p)}{a^2 wst^2 q - b^2 dos^2 q} = b'^2, \quad \frac{a'^2b'^2 wst^2(q-p)}{b^2 dos^2 p - a^2 wst^2 p} = a'^2.$$

Zgubiwszy obadwa mianownikii i zniosłszy spólny czynnik w tych równaniach, znajdziemy

$$a'^2 wst^2(q-p) = a^2 wst^2 q - b^2 dos^2 q$$

$$b'^2 wst^2(q-p) = b^2 dos^2 p - a^2 wst^2 p.$$

Dodawszy drugie z tych równań od pierwszego będzie

$$(a'^2 - b'^2) wst^2(q-p) = a^2(wst^2 q + wst^2 p) - b^2(dos^2 q + dos^2 p) \quad \ldots (L^{IV})$$

Drugą stronę tego równania można pod kształtem pierwszej wyrazić: w tym zamiast weźmy wyrażenie wa i b kształtu pierwszej strony; to wyrażenie samemu sobie zrównane, i rozwinięte wezmiesz dla

$$(a^2 - b^2) wst^2(q-p) = (a^2 - b^2)(wstq\,dosp - wstp\,dosq)^2$$

$$Trójkąt\ DLB' = \tfrac{1}{2}(\beta+\beta')(\alpha-\alpha') + \tfrac{1}{2}\alpha'\beta' - \tfrac{1}{2}\alpha\beta = \tfrac{1}{2}(\alpha\beta' - \alpha'\beta)$$

Wstawiwszy ważności spółrzędnych $\alpha, \beta', i\ \beta$ znajdziemy

$$Trójkąt\ DCB' = \tfrac{1}{4}ab, \text{ więc Równoległobok } DCB'\mathcal{G} = ab,$$

Rozmnażywszy to, mnożąc 4 mamy twierdzenie dowiedzione.

albo rozwinąwszy drugą stronę

$$(a^2-b^2)\,wst^2(q-p) = a^2 wst^2 q\, dos^2 p - 2a^2 wst p\, wst q\, dos p\, dos q + a^2 wst^2 p\, dos^2 q$$

$$- b^2 wst^2 q\, dos^2 p + 2b^2 wst p\, wst q\, dos p\, dos q - b^2 wst^2 p\, dos^2 q.$$

W skrajne wyrazy pierwszej linii drugiej strony wstawiwszy ważności $dos^2 p$ i $dos^2 q$, a wskrajne wyrazy drugiej linii ważności $wst^2 p$ i $wst^2 q$ wyciągnięte z równania

$$wst^2 p + dos^2 p = 1, \text{ i } wst^2 q + dos^2 q = 1,$$

otrzymamy $(a^2-b^2)\,wst^2(q-p) =$

$$= a^2 wst^2 q - a^2 wst^2 q\, wst^2 p - 2a^2 wst p\, wst q\, dos p\, dos q + a^2 wst^2 p - a^2 wst^2 p\, wst^2 q$$

$$- b^2 dos^2 p + b^2 dos^2 q\, dos^2 p + 2b^2 wst p\, wst q\, dos p\, dos q - b^2 dos^2 q + b^2 dos^2 q\, dos^2 p.$$

W wyraz $-2a^2 wst p\, wst q\, dos p\, dos q$ ważność ilości a^2 położywszy, a w wyraz $+2b^2 wst p\, wst q\, dos p\, dos q$ ważność ilości b^2 wyciągniętą z równania $-a^2 wst p\, wst q + b^2 dos p\, dos q = 0$, otrzymamy po sprowadzeniu $(a^2-b^2)\,wst^2(q-p) = a^2(wst^2 q + wst^2 p) - b^2(dos^2 p + dos^2 q)$.

Ważność drugiej strony tego równania położywszy w równanie (L^{IV}) i zgubiwszy spólny czynnik będzie $a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2 \ldots (M^{IV})$.

Rozmnożywszy przez 4 obydwie strony znajdziemy

$$4a'^2 - 4b'^2 = 4a^2 - 4b^2, \text{ albo } (2a')^2 - (2b')^2 = (2a)^2 - (2b)^2.$$

Taką jest własność będąca przedmiotem tego twierdzenia. (*)

(*) Twierdzenie to może się łatwiej dowieść sposobem już użytym dla elipsy

335. Jeżeli będziemy chcieli znaleść sprzężone średnice równe w Hyperboli, przekonamy się że $\alpha = \beta$ jedynie w Hyperboli równoramiennej istnieć mogą: bo założenie $a' = b'$ sprowadza równanie (M^{iv}) do $a^2 - b^2 = 0$, więc $b^2 = a^2$. Ta ważność wstawiona w równanie (G^{iv}) sprowadza je do

$$Ayq = Typ;$$

że zaś Typ jest wyrażeniem które nam Trygonometria dla kosp dostycznej p daje wypada że styq = dostyp, że zatem kąty utworzone przez średnice sprzężone równe są dopełnieniem jeden drugiego.

O Hyperboli odnoszonej do swoich Prawdziwych.

336. Pozostaje nam jeszcze do rozbrajnienia przypadek, gdy linie 319 obadwa współczynniki w x^2 i y^2 równania (E^{iv}) zniknane są zeruje równanie

---

Przypisek Linie 318. Jako: trójkąty prostokątne BCf, DCK (fig 74) dają fig 74

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2, \quad a'^2 + \beta'^2 = b'^2;$$

Dodawszy do siebie te równania i położywszy za α' i β' ich ważności wyprzedzającym przypisku otrzymane, a za β ważność dana w funkcyi α wn: równania Hyperboli, znajdziemy po sprowadzeniu.

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2, \text{ albo } (2a')^2 - (2b')^2 = (2a)^2 - (2b)^2.$$

to sprowadzi do $(2b^2 dos q dos p - 2a^2 wst p wst q)\, x'y' = a^2 b^2$ . . . . (N'').

Mamy zatém dwa równania warunkowe

$$b^2 dos^2 p - a^2 wst^2 p = 0, \quad i \quad b^2 dos^2 q - a^2 wst^2 q = 0$$

Te równania dają nam $\frac{wst^2 p}{dos^2 p} = \frac{b^2}{a^2}$ i $\frac{wst^2 q}{dos^2 q} = \frac{b^2}{a^2}$,

albo $$sty^2 p = \frac{b^2}{a^2} \quad i \quad sty^2 q = \frac{b^2}{a^2};$$

wyciągnąwszy pierwiastek $sty p = \pm \frac{b}{a}$, i $sty q = \pm \frac{b}{a}$;

337. Dwie te ważności $sty p$ i $sty q$ nie mogą bydź jednakowych znaków; bo gdyby kąty p i q równemi były, nowe osie pomięszałyby się, i nowe rzędnewzięcia odciętych prowadzić by należało, a zatém wyznaczyłyby tylko punkta w linii prostej ułożone.

Ta konieczność nadania różnych znaków tym dwom stycznym, pokazuje się jeszcze z rozbrązienia równania (E''); bo w naszém założeniu, jeśli $p = q$, pierwsza strona równania (E'') sprowadza się do zera.

338. Przypuścimy zatém że ważności $sty p$ i $sty q$ są przeciwnych znaków: a ieśli ważność ujemna do kąta rozwartego należy, nadamy zatém ważność ujemną, większemu z kątów, to jest q, i napiszemy

$$sty p = \frac{b}{a}, \quad sty q = -\frac{b}{a};$$

Te ważności stycznych p i q, znaleźliśmy już dawniej: liez 277 dla stycznych trygonometrycznych kątów $\angle CB$, $\angle CB$ (fig 70) utworzonych przez prawiestyczne z osią odciętych; więc nowe osie, liez 278 wezmą kierunki CL, CL' Prawiestycznych.

Dla tej przyczyny równaniu wykreślającemu krzywą w niniejszem założeniu, nadamy inne równania Hyperboli odniesionej do Prawiśtycznych.

339. Dla otrzymania jego uważmy, że jeżli założymy koło (Fig 75) i weźmiemy Fig 75 mierny $SB = S'B = \frac{b}{a}$ znajdziemy

$$Wt\,SCB = wst\,p\,;\quad Do\,SCB = dos\,p,$$

$$Wt\,SOB = wst\,q,\quad Do\,SOB = dos\,q;$$

że zaś wstawy padają w jednym kierunku, dostawy w przeciwnym, mamy

$$wst\,q = wst\,p\,,\quad dos\,q = -dos\,p.$$

Wstawiwszy te ważności w równanie (N'''), zamienimy je na

$$-(2b^2 dos^2 p + 2a^2 wst^2 p)\,xy = a^2 b^2,$$

W to równanie położywszy ważność iloczynu $a^2 wst^2 p$, wyciągniętą z równania warunkowego $b^2 dos^2 p - a^2 wst^2 p = o$, otrzymamy

$$-(2b^2 dos^2 p + 2b^2 dos^2 p)\,x''y'' = a^2 b^2$$

albo

$$-4b^2 dos^2 p\,xy = a^2 b^2 \ldots (10^{ma})$$

Uważając że promień jest średnią proporcyonalną między dostawą i wstawą mamy $dos\,p = \frac{1}{sec\,p}$, a $dos^2 p = \frac{1}{sec^2 p} = \frac{1}{1 + tg^2 p} = \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{a^2}{a^2 + b^2}$;

Jeżli położymy tę ważność $dos^2 p$ w równanie (10^{ma}), zamieni się to równanie na

$$-\frac{4a^2 b^2}{a^2 + b^2}\,xy = a^2 b^2$$

Lewostrzy mianownik, zgubiwszy spólny czynnik, podzieliwszy przez 4, i ważność rzędnej y wyciągnąwszy znajdziemy

$$y' = -\left(\frac{a^2+b^2}{4}\right).$$

i dostrzeżemy iż każdej ważności dodatniej CPodciętej x' (Fig 76) odpowiadająca rzędna $P'M'$ jest ujemna. Fig 76

340. Gdy odciętej na osi Prawidłowej zachować chcemy, dosyć Lic 184, odmienić CPalbo x na y, zaś PM albo $-y'$ na $+x$, a będziemy mieli

$$xy = \frac{(a^2+b^2)}{4};$$

341. Niechaj będzie $\sphericalangle$ kąt LCL' utworzony przez dwie Prawidłowe, jeżeli poprzedzające równanie przez wstę rozmnożymy, otrzymamy

$$xy\,wst\sphericalangle = \frac{(a^2+b^2)}{4}.wst\sphericalangle \ldots (P^{IV});$$

wystawiwszy przez CQ i QN spółrzędne x i y punktu N wziętego na krzywej iloczyn $yw.st\sphericalangle = QN.wst\sphericalangle = CH.wst\sphericalangle$, wyraża będzie Przypis: Lic 176, prostopadłą Hs, mierzącą wysokość trójkąta $CH.S$, albo równoległoboku $CQ.NH$, a rozmnożywszy ją wysokość przez podstawę $CQ = x$, iloczyn $xy\,wst\sphericalangle$ będzie powierzchnią równoległoboku, i poprzedzające równanie zamieni się na

$$\text{Powierzchnia } CQ.NH = \frac{a^2+b^2}{4}.wst\sphericalangle.$$

Ponieważ położenie punktu x, y zbora na Hyperbole jest dowolnem, weźmy go za lem w wierzchołku B, a będziemy mieli

$$\text{Równoległobok } CB.BF = \frac{a^2+b^2}{4}\,wst\sphericalangle,$$

Za pomocą tej ważności $\frac{a^2+b^2}{4}\,wst\sphericalangle$, równanie (P^{IV}) zamieni się na

$$xy\,wst\sphericalangle = \text{Równoległobokowi } CB.BF;$$

co nam pokazuje że równoległobok przez spółrzędne utworzony, zawsze jest równy równoległobokowi CGBF; równoległobok ADBE cztery razy odległego więk-
szy nazywa się potęgą Hyperboli.

342. Gdy Hyperbola jest równoramienna Liczba 226, styczna kąta LCB wy- Fig 76
stawiona przez $\frac{b}{a}$, sprowadza się do jedności, a zatem do połowy kąta pro-
stego należy: więc kąt LCL' utworzony przez Prawiestyczne, jest w tym ra-
zie prosty, a równoległobok CGBF zamienia się na kwadrat.

343. Proste przecinające Prawiestyczne posiadają własności ważne, które
mi się zajmiemy teraz. Nazwijmy x', y' spółrzędne punktu R (Fig 76) Fig 76
wziętego na prawiestycznej CL. Ta prawiestyczna czyniąc z osią odciętych
kąt którego styczna jest $\frac{b}{a}$ Liczba 278. ma równanie Liczba 80, 81.

$$y = \frac{b}{a} x;$$

więc dla punktu R mającego spółrzędne x', y' równanie to będzie

$$y' = \frac{bx'}{a};$$

Poprowadźmy przez punkt R jakąkolwiek prostą RR', ta prosta przecho-
dząc przez punkt x', y' ma za równanie Liczba 89

$$y - y' = A(x - x');$$

gdy w nie położymy ważność rzędnej y' daną poprzedzającem równaniem
otrzymamy $$y - \frac{b}{a} x' = A(x - x');$$

Odległość punktu x', y' od innego punktu x, y wziętego na prostej RR', wogólności jest wyrażona, Licz 10 b, przez

$$z = \sqrt{(x-x')^2 + (y - \frac{b}{a}x')^2} \ldots\ldots (Q^{10})$$

a ważności spółrzędnych x i y dane w punkcyi z, i spółrzędnych x' i $\frac{b}{a}x'$ punktu R będą, Licz 119 $x = \frac{z}{\sqrt{1+A^2}} + x'$, $y = \frac{Az}{\sqrt{1+A^2}} + \frac{b}{a}x' \ldots\ldots (R^{IV})$

Ponieważ początek tych spółrzędnych rachowanych na wielkiej osi jest we środku, jeżeli zatém punkt x, y, wzięty jest na Hyperboli, będzie pomiędzy niemi zależność, Licz 222, $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$; gdy wstawiemy ważności spółrzędnych x i y w to ostatnie równanie, wyznaczy nam to równanie ważności odległości z punktu x', y' wziętego na prawościętycznej, od innego punktu x, y w którym prosta RR' krzywę spotyka. Wykonawszy działania, i ułożywszy równanie podług z, otrzymamy

$$\frac{(b^2 - a^2A^2)}{1+A^2}z^2 + \frac{2bx'(b-aA)}{\sqrt{1+A^2}}z = a^2b^2$$

Rozmnożywszy przez przewrócony spółczynnik ilości z^2, i zważywszy że licznik tego spółczynnika zamienia się na $(b+aA)(b-aA)$, pozyskowadzeniu otrzymamy

$$z^2 + \frac{2bx'\sqrt{1+A^2}}{b+Aa}z - \frac{a^2b^2(1+A^2)}{b^2 - a^2A^2} = 0 \ldots\ldots (S^{IV})$$

To równanie będąc drugiego stopnia daje dla dwóch pierwiastków szukanej z, odległości RM, RM' punktu R od krzywej: nazwawszy z' i z'' te odległości, ich summa ze znakiem przeciwnym wzięta będzie równa Licz 64

spółczynnikowi drugiego wyrazu, a więc

$$z' + z'' = \frac{2b.x'\sqrt{1+A^2}}{b+Aa}.$$

Z drugiej strony prawiesłyczna CL' czyniąca z osią odciętych kąt którego tyczna trygonometryczna jest $-\frac{b}{a}$, ma za równanie Liczb 84,

$$y = -\frac{b}{a}.x.$$

Chcąc mieć spółrzędne punktu w którym ta Prawiesłyczna przecina się z prostą RR', należy spółrzędnej tej prostej (R'') równanie $y = -\frac{bx}{a}$ ostawić, a znajdziemy $\frac{Az}{\sqrt{1+A^2}} + \frac{b}{a}x' = -\frac{bz}{a\sqrt{1+A^2}} - \frac{b}{a}x'$,

zkąd wyciągnięmy po zniesieniu mianownika

$$z = -\frac{2b.x'\sqrt{1+A^2}}{Aa+b};$$

Takiem jest wyrażenie odległości RR' punktu x', y' od punktu R', w którym prosta RR' drugą prawiesłyczną spotyka. Ponieważ to wyrażenie należy także że i do z' + z'', wnięnięmy zatem iż

$$RR' = RM + RM, \text{ albo } RM' + M'R' = RM + RM'$$

a po sprowadzeniu $M'R' = RM$.

zkąd wypada, że gdy, jaka prosta przecina dwie prawiesłyczne, część tej krzywej zawarte między każdem ramięniem krzywej a jej prawiesłyczną są równe.

344. Jeżeli prosta RR' takiem sposobem jest prowadzona, że cięciwa MM' do

punktu się sprowadza, ta linia styczną jest do krzywej; wnieśmy zatem: że co poprzedza, że punkt zetknięcia jest wśrodku na części tiemenku tej stycznej, zawartej między Prawiestycznemi.

345. Dwie proste CL, CL' (Fig 77) tworzące między sobą kąt jakikolwiek, Fig 77
wziąwszy za Prawiestyczne Hyperboli przechodzącej przez dany punkt M, jeżeli chcemy wyznaczyć inne punkta Hyperboli, pociągniemy przez ten punkt proste rs, r's', r"s" itd: a odciąwszy sm = Mr, s'm' = M'r', s"m" = M"r", itd: wyznaczemy punkta m, m', m" itd: mogące nam służyć do wyznaczenia dalszych punktów tym samym sposobem.

346, Ponieważ ostatni wyraz $-\frac{a^2b^2(1+A^2)}{b^2-a^2A^2}$ równania (5''') jest iloczynem pierwiastków z, z', z" wyrażających odległości punktu x', y' od krzywej, a dotego ten iloczyn niezależnem jest od x', wypada przeto że jeżeli przez inny punkt x", y" wzięty na Prawiestycznej CL, poprowadziemy prostą czyniącą kąt A z odcinkami odciętych, iloczyn odległości punktu x", y" od krzywej jeszcze ten sam będzie, a zatem we wszystkich równoodległych od linii AA', części RR, i R'R' albo raczej, Liczb 343 RM i R'M' ten sam iloczyn liczyć będą.

O przemianie spółrzędnych Paraboli.

347. Jeżeli w równanie Paraboli $y^2 = 4cx$, Liczb 243, wstawiemy wartości

spółrzędnych x i y, wyciągnięte z formuł (L''') i otrzymamy

$$\text{wsł}^2p\,x'^2 + 2\text{wsł}p\text{wsł}q\,x'y' + \text{wsł}^2q\,y'^2 - 4c\,\text{dos}p\,x' - 4c\,\text{dos}q\,y' = 0 \quad \ldots (I''')$$

Niepodobna zgubić kłopotu z wyrazów tego równania, nie przypuszczając jednego z kątów p i q prostym albo żadnym; naówczas bowiem dostawca lub wstawa stając się zero, niszczy wyraz w którym się znajduje. Ponieważ p i q nie mogą bydź razem uważane za żadne, bo w takim razie rzędna nie czyniłaby kąta z osią odciętych, i tylkoby w jednym kierunku punkta wyznaczała, coby nie dozwoliło wykreślenia krzywej, nie można zatem dowolnie rozrządzać kątami p i q, lecz tylko przypuścić jeden z nich prostym lub żadnym: uczyniwszy $p = o$, znajdziemy

$$\text{wsł}^2q\,y'^2 - 4c\,x' - 4c\,\text{dos}q\,y' = 0,$$

uczyniwszy zaś $p =$ kątowi prostemu, znajdziemy,

$$x'^2 + \text{wsł}q\,x'y' + \text{wsł}^2q\,y'^2 - 4c\,\text{dos}q\,y' = 0.$$

Nie można z tych równań innych wyrzucić wyrazów: przeto zawilsze mi są od równania $y^2 = 4cx$, istniejącego między spółrzędnemi prostokątnemi.

Ponieważ równanie symetryczne jest ze względem na p i q, to czyniąc o p powiększeli i do q się stosuje.

348. Doświadczmy teraz czy odmieniwszy położenie początku dopuszczego równania między niemi spółrzędnemi nie przyjdziemy

Wstawmy w równanie $y'^2 = 4cx$ ważności spółrzędnych x i y dane formułami (N''') a znajdziemy

$$wst^2 p x'^2 + 2wst p wst q x'y' + wst^2 q y'^2 + \begin{matrix} 2b wst p \\ -4c dos p \end{matrix} \Big| x' + \begin{matrix} 2b wst q \\ -4c dos q \end{matrix} \Big| y' + b^2 - 4ac = 0 \ldots (II''').$$

Nastręczają się w tém równaniu dwa spółczynniki zdolne do przyjęcia dla p i q innych ważności jak kąt prosty albo zero: ale dwa te spółczynniki do x i y należące, nie mogą bydź razem żadne; byłoby albowiem $p=q$, i nie możnaby wykreślić krzywej, bo rzędna nie czyniłaby kąta z osią odciętych.

I zatém jeden tylko z tych spółczynników zrównamy zeru, np: wq, napisawszy równanie warunkowe

$$2b wst q - 4c dos q = 0;$$

ponieważ kąt p zostaje dowolnym, zrównamy go zeru: to założenie daje $wst p = 0$, $dos p = 1$, a równanie (II''') sprowadza się do

$$wst^2 q y'^2 - 4cx' + b^2 - 4ac = 0 \ldots (V''').$$

A że stałe a i b są dowolne, a wyznaczają miejsce początku, możemy zatém przypuścić że początek jest punktem na Paraboli. Spółrzędne a i b początku powinny przeto zadosyć uczynić równaniu $y'^2 = 4cx$ będzie więc pomiędzy niemi zależność $b^2 - 4ac = 0$, a równanie (V''') sprowadzi się do $wst^2 q y'^2 - 4cx' = 0$,

i da $$y'^2 = \frac{4c}{wst^2 q} x' \ldots (W''').$$

równania bliższego kształtu równania Paraboli.

349. Gdybyśmy zmnożyli zem spółczynnik odciętej x', i podobnie postępowali, jak w poprzedzającym razie, znaleźlibyśmy równanie tego samego kształtu, w którem by tylko x' było rzędną, y' odciętą.

350. Wyznaczmy teraz ważność stałej $\frac{4c}{wsl^2q}$: równanie $zbwsq - 4csq = 0$, albo raczej $b^2wsl^2q = 4c^2dos^2q$, do kwadratu podniesione daje

$$b^2wsl^2q = 4c^2dos^2q;$$

położywszy na miejsce dos^2q jej ważność $1 - wsl^2q$, mamy

$$b^2wsl^2q = 4c^2 - 4c^2wsl^2q,$$

zkąd wyciągniemy $wsl^2q = \frac{4c^2}{b^2+4c^2}$.

a że $b^2 = 4ac$, więc

$$wsl^2q = \frac{4c^2}{4ac+4c^2}.$$

Podzieliwszy obadwa wyrazy ułomku przez $4c$,

$$wsl^2q = \frac{c}{(a+c)};$$

Wstawiwszy tę ważność w równanie (W^{10}) znajdziemy

$$y'^2 = \frac{4c}{a+c}x'.$$

albo raczej $y'^2 = 4(a+c).x'$.

351. To ostatnie równanie odnoszonem jest do osi której rzędne równe i zna kowo przeciwnych.

średnica równoodległą jest od pierwotnej osi, bo kąt p kłony czyni rzędnych odciętych AX (fig 68) jest żadnym: Liczba 348. Fig 68

Zależność $b^2 = 4ac$ między spółrzędnemi nowego początku przymuszą tylko ten początek do znajdowania się na krzywej: zatém wszelka prosta nieograniczona A'X', równoodległe od osi AX krzywę przecinająca jest średnicą.

352. Punkt A' w którym średnica krzywę spotyka, nosi imię wierzchołka średnicy.

353. Ponieważ a jest odcięta wierzchołka średnicy, wypada Liczba 244, że $a+c$ jest wyrażeniem promienia wodzącego przez wierzchołek średnicy przechodzącego. Stała przeto $4(a+c)$ w równaniu średnicy za spółczynnik dla x służąca, waży ciąg promienie wodzące przechodzące przez wierzchołek średnicy. Ta stała $4(a+c)$ nosi imię parametru średnicy

354. Widocznie $4(a+c)$ sprowadza się do $4c$ gdy $a=0$, to jest gdy średnica jest główną osią Paraboli; co się zupełnie z tém zgadza cośmy o tej osi powiedzieli.

355. Równanie $wtg^2 = \frac{c}{a+c}$ daje $wtg = \sqrt{\frac{c}{a+c}}$ dla ważności wstawy kąta utworzonego przez nowe spółrzędne średnicy. Te spółrzędne będą

ukośne, bo trzeba żeby a było żadnem aby ważność wstęg sprowadziła się do jedności: w tym przypadku średnica A'X' sprzężona złączy się z osią AX.

Nakoniec widocznie się pokazuje z równania poprzedzającego, że im bardziej a się powiększa tem więcej kąt φ się zmniejsza.

358. Ponieważ ważności rzędnej y wyznaczona jest ważnością odciętej x, za pomocą równania $y^2 = 4cx$, z którego wyciągniemy $y = \sqrt{4cx}$, wypada że dla większej wszelkiej ważności odciętej x, rzędna y ma dwie ważności równe i znakiem przeciwnych, ginące razem gdy x = 0, co dowodzi iż rzędna równoodległą jest od styczney przechodzącej przez wierzchołek Parametru.

359. Nakoniec równanie odniesione do Parametru pokazuje, że kwadraty z rzędnych są jak odcięte tych rzędnych.

O równaniach polarnych.

360. Dotychczas położenie każdego punktu na krzywej wyznaczaliśmy za pomocą dwóch zmiennych spółrzędnych x i y, i kąta stałego który spółrzędne tworzą pomiędzy sobą.

Przypuśćmy teraz że jedna ze spółrzędnych jest stała, że zaś żad

się zmienia, a nowy sposób wykreślania krzywej będziemy mieli. Jakoż jeżeli odcięta jest stała, i weźmiemy za wiązkę odległości wierzchołka od ogniska (fig 78), gdy zmieniać będziemy kąt $\varphi = MFB$, rzędna FM, fig 78
będzie następnie FM', FM'', FM''' itd: i wyznaczy punkta M', M'', M''' itd: krzywej. Tej zmiennej rzędnej imię promienia wodzącego nadano.

Jeżeli jakie równanie stanowi zależność między promieniem wodzącem i kątem φ, a następnie zmieniać będziemy ten kąt φ, możemy wyznaczyć odpowiadające ważności promienia wodzącego.

359. Dla znalezienia tego równania gdy krzywa jest ellipsą szukajmy naprzód zależności między promieniem wodzącem FM (fig 66) i fig 66
spółrzędnemi x i y.

Niechaj będzie $FM = z$: widocznie

$$FM^2 = PM^2 + (PC + CF)^2; \text{ albo } z^2 = y^2 + (x+c)^2.$$

Położywszy w to równanie ważność zmiennej y^2 wyciągniętą z równania Ellipsy odnoszonej do środka, mamy

$$z^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) + (x+c)^2;$$

albo wziąwszy $z^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} + x^2 + 2cx + c^2;$

ułożywszy podług x $z^2 = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + 2cx + c^2 + b^2,$

albo $z^2 = \frac{(a^2 - b^2)}{a^2}x^2 + 2cx + c^2 + b^2.$

Po:bywszy się b^2 za pomocą równania $c^2=a^2-b^2$, Lice 215, otrzymamy

$$x^2=\frac{c^2x^2}{a^2}+2cx+a^2=\left(\frac{cx}{a}+a\right)^2;$$

a zatém $$z=\pm\left(\frac{cx}{a}+a\right):$$

Że zaś z założenia linia FM która z wystawia jest dodatnia, weźmiemy zatém tylko znak wyższy i będzie

$$z=a+\frac{cx}{a}\ (*)$$

Łatwo nam teraz wyrazić ważność promienia wodzącego z w funkcji kąta $f=M\hat{F}P$.

Niechaj będzie x' odcięta FP rachowana od ogniska; mamy wiadomie $x=x'-c$. Wstawiwszy będzie

$$z=a+\frac{x'-c}{a}c=\frac{a^2-c^2}{a}+\frac{cx'}{a}.$$

(*) Ważność ilości z ze znakiem ujemnym wziętą, pokazuje że długa ważność ilości z w kierunku przeciwnym kierunku ponieść należy, to jest od F ku M. Ponieważ długa ważność szukanej z jest $z=-a-\frac{cx}{a}$, widzimy że jakikolwiek znak będzie przy odciętej x, promień wodzący ujemnym będzie; bo gdy a^2 przewyższa cx, $\frac{cx}{a}$ musi bydź mniejszem od a: zaś odcięta punktu M ma znak przeciwny odciętej do punktu M należącej, przeto znak odciętej x w tej długiej ważności odmienić potrzeba i będzie

$$FK=-a+\frac{cx}{a}.$$

Uczyniwszy $x' = z\cos\varphi$ poprzedzające równanie zamienimy na

$$z = \frac{a^2 - c^2}{a} + \frac{z\cos\varphi}{a};$$

zkąd $\quad az - z\cos\varphi = a^2 - c^2$

i nakoniec $\quad z = \frac{a^2 - c^2}{a - \cos\varphi}$

albo raczej, Licz 218, $\quad z = \frac{b^2}{a - \cos\varphi}$

równanie polarne Ellipsy odniesionej do ogniska F, gdy kąt $\varphi = MFS$ jest ostry.

3ba. Jeżeli ten kąt jest rozwarty, znak wyrazu $\cos\varphi$ zmienić na: lecz.

3bi. Dla znalezienia równania polarnego Hyperboli, rozpoznajemy za: uprzednie z powyższych wodzący FM (Fig 67), Fig 67

będzie $\quad z^2 = y^2 + (c + x)^2$

Położywszy w to równanie ważność rzędnej y wyciągniętą z równania Hyperboli odniesionej do środka,

znajdziemy $\quad z^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) + (c + x)^2 = \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + 2cx - b^2 + c^2.$

Pozbywszy się b^2 za pomocą równania $c^2 = a^2 + b^2$, Licz: 230,

otrzymamy $\quad z^2 = \frac{c^2 x^2}{a^2} + 2cx + a^2 = \left(\frac{c}{a}x + a\right)^2;$

zkąd wyciągniemy $\quad z = \frac{cx}{a} + a;$

Chociaż to równanie stawa pod kształtem znalezionym dawniej dla Ellipsy, jednak się różni ważnościami, jakie c przyjmuje w tych

obudwu równaniach. Nazwawszy x' odcięte FP rachowaną od ogniska będziemy mieli $x = x' - c$. Wstawiwszy tę ważność otrzymamy

$$z = \frac{cx'}{a} - \frac{(c^2 - a^2)}{a},$$

uczyniwszy $x' = zdosq$ będzie

$$z = \frac{czdosq}{a} - \frac{c^2 - a^2}{a};$$

zkąd łatwo znaleść $z = \frac{c^2 - a^2}{cdosq - a}$;

albo raczej Licz 230 $z = \frac{b^2}{cdosq - a}$

równanie polarne Hyperboli odniesionej do ogniska F gdy kąt $q = MCF$ jest ostry.

362. Nakoniec jeżeli nazwiemy z promień wodzący FM Paraboli, uważając że (Fig 68) $AF = \frac{p}{4}$, Licz 242. Fig 68.

mamy $$z = \left(x - \frac{p}{4}\right)^2 + y^2.$$

Położywszy zamiast y^2 ważność jego px, i sprowadziwszy,

otrzymamy $$z^2 = x^2 + \frac{1}{2}px + \left(\frac{p}{4}\right)^2,$$

a że druga strona doskonałym jest kwadratem

$$z^2 = \left(x + \frac{p}{4}\right)^2$$

zkąd wyciągniemy $$z = x + \frac{p}{4}$$

Nazwawszy x' odcięte FP rachowaną od ogniska będzie

$$x = x' + \frac{p}{2};$$

położywszy zdesf zamiast x, i ważność promienia z wyciągnąwszy

otrzymamy $z = \frac{\frac{1}{2}p}{1 - \cos\varphi}$,

równanie polarne Paraboli odnoszonej do ogniska gdy kąt φ - MOX jest ostry.

Szczególne przypadki w których ogólne równanie krzywych drugiego rzędu nie może wykreślić jednej z trzech krzywych.

363. Gdy równanie ogólne nie stosuje się do jednej z trzech krzywych, o których mówiliśmy, wykreśla tylko albo linie niższego rzędu od pierwszego, albo punkta, albo nie ma żadnego znaczenia. Rozbrajmy naprzód pierwszy przypadek: jeżeli $b^2 - ac = 0$, i $bd - ae = 0$, ogólne równanie (B') Lica 133, sprowadza się do

$$y = -\frac{(bx + d)}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{d^2 - 4af} \ldots\ldots (X''').$$

W tém równaniu jednej ważności α odciętej x, dwie ważności rzędnej y będą odpowiadały, które przez β, β wystawię: podobnie drugiej ważności α' odciętej x, inne dwie ważności β' i β' odpowiadać będą: i tak dalej. Rzędne β, β', β'' wykreślą nam linię prostą, i tej równanie będzie

$$y = -\frac{(bx + d)}{2a} \mp \frac{1}{2a}\sqrt{d^2 - 4af} \ldots\ldots (Y''').$$

Podobnie rzędne β, β', β'' drugą linię prostą wykreślą, mającą równanie

$$y = -\frac{(bx+d)}{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{d^2-4af} \ldots (Z'').$$

Ponieważ spółczynnik odciętej x ten sam jest w obudwu równaniach, te dwie proste równe kąty z osią odciętych czynią, zatém równo: odległe są od siebie.

364. Jeżeli d^2-4af takie jest żadném, równanie (X'') sprowadza się do $$y = -\frac{bx}{2a} - \frac{d}{2a},$$ i układ dwóch równoodległych danych równaniami (Y'') i (Z'') sprowadza się do jednej prostej.

365. Nakoniec $\sqrt{d^2-4af}$ może bydź urojonem; naówczas ważności spółrzędnych y dane równaniami (Y'') i (Z'') w każdym przypadku pozostaną urojonemi, i nie podobna aby równanie wykreśliło jaki układ punktów.

366. Gdy b^2-4ac nie jest żadném, ogólne równanie do linii prostych odnosić się może: dla okazania tego wyrazimy równanie (P') Lica 133 pod kształtem $$y = -\frac{bx+d}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\sqrt{x^2 + 2\frac{(bd-2ae)}{b^2-4ac}x + \frac{d^2-4af}{b^2-4ac}}$$

Gdy część niespółmierna jest kwadratem mamy

$$\left(\frac{bd-2ae}{b^2-4ac}\right)^2 = \frac{d^2-4af}{b^2-4ac};$$

zkąd $$(bd-2ae)^2 = (b^2-4ac)(d^2-4af) \ldots (A^v).$$

Jżeli temu rownaniu zadosyć uczyniemy ważność zmiennej y sprowadzi się do $$y = -\frac{(bx+d)}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}\left(x+\frac{bd-2ae}{b^2-4ac}\right)} \ldots (B^v)$$

ułożywszy zaś podług x do

$$y = \frac{1}{2a}\left[(-b \pm \sqrt{b^2-4ac})x \mp \frac{bd-2ae}{\sqrt{b^2-4ac}} - d\right] \ldots (C^v)$$

361. Gdy równanie (A^v) sprawdzimy, i b^2-4ac jest dodajnem, pierwiastek rzeczywistym będzie; naówczas nie trudno dowieść jak pod Licz 363, że równanie (C^v) należy do układu dwóch prostych nierównoodległych, bo ważność spółczynnika w x dana zatrzymaniem znaku wyższego przy pierwiastku różna jest z ważnością otrzymaną za wzięciem znaku niższego.

364. Gdy równanie (A^v) sprawdzimy, a b^2-4ac jest ujemnem, równanie (B^v) posiadając wyraz urojony, nie da rzeczywistej ważności dla y, aż dopiero po uczynieniu $x = -\frac{(bd-2ae)}{b^2-4ac}$ w tym razie równanie (B^v) da

$$y = \frac{b}{2a}\left(\frac{bd-2ae}{b^2-4ac}\right) - \frac{d}{2a}.$$

Dwie te ważności dla x i y otrzymane, pokazują że Ellipsa do punktu się sprowadza.

369. Równanie (B^v) nie ma żadnego znaczenia, gdy y pozostaje urojonem; i ciągle nie będzie miało, chociaż wszelkie ważności dla x nadawać będziemy. Rozbrząśnijmy warunki tego przypadku, i wystawmy prze

$Px + Qx + R$, Polynom znajdujący się pod pierwiastkiem równania (B'); równanie to wyrażiwszy pod kształtem

$$y = -\frac{1}{2a}(bx + d) \pm \sqrt{P\left(x^2 + \frac{Q}{P}x + \frac{R}{P}\right)} \ldots (D'');$$

jasno widzimy że jeżli na wszelką ważność odciętej x, wyrażenie

$$x^2 + \frac{Q}{P}x + \frac{R}{P}$$

dodajnem zostanie, a razem P ujemnem, Polynom $Px^2 + Qx + R$ będąc iloczynem dwóch czynników z przeciwnemi znakami, ujemnym będzie, i da urojoną ważność dla y. Roztrząśnijmy zatém w jakim przypadku Polynom $x^2 + \frac{Q}{P}x + \frac{R}{P}$ zawsze dodajnym bydź może, czémkolwiek będzie x.

Dodajmy do tego Polynomu ilość $\frac{Q^2}{4P^2} - \frac{Q^2}{4P^2}$; na ówczas otrzymamy

$$x^2 + \frac{Q}{P}x + \frac{R}{P} = \left(x + \frac{Q}{2P}\right)^2 + \frac{R}{P} - \frac{Q^2}{4P^2}.$$

Że zaś kwadrat z natury swojej zawsze jest dodajnym, więc druga strona tego równania pozostanie zawsze dodajną, jeżeli $\frac{R}{P} - \frac{Q^2}{4P^2}$ dla wypadek dodajny. Dopełni się ten warunek gdy R i P jednakowych będąc znaków dadzą $\frac{R}{P} > \frac{Q}{4P^2}$,

albo rozmnożywszy przez $4P^2$

$$4PR > Q^2;$$

Dwa te warunki P ujemnego, i P i R jednakowych znaków, wychodzą na P i R ujemne razem; przeto koniecznym warunkiem, aby rzecz

y zawsze urojoną była jest, aby każdy z wyrazów P i R był ujemnym i $4PR > Q^2$.

370. W przypadku ujemności wyrażenia $\frac{R}{P} - \frac{Q}{4P^2}$, łatwo dostrzedz że y może mieć ważności prawdziwe: bo wystawmy tę ilość ujemną przez $-\alpha^2$: Polynom $Px^2 + Qx + R$, sprowadzi się w tym razie do

$$P\left[\left(x + \frac{Q}{2P}\right)^2 - \alpha^2\right].$$

Jeżeli P jest dodajnem, to wyrażenie dodajnem będzie, gdy x tak wielkiem się stanie, aby $\left(x + \frac{Q}{2P}\right)^2$ przewyższało α^2; jeżeli P jest ujemnem, nadawszy dla x ważność zbliżoną bardzo do $-\frac{Q}{2P}$, uczyniemy drugi czynnik $\left(x + \frac{Q}{2P}\right)^2 - \alpha^2$, ujemnym podobnie jak pierwszy; a w tym przypadku Polynom dodajnym będzie.

371. Jeżeli zamiast P, Q i R, ich ważności położemy, trzy warunki P i R ujemnych, $4PR > Q^2$ konieczne do tego aby y zawsze było urojonem, zamienią się na

$b^2 - 4ac$ = ilości ujemnej

$d^2 - 4af$: ilości ujemnej

$$4(b^2 - 4ac)(d^2 - 4af) > [2(bd - 2ae)]^2.$$

Ten ostatni warunek sprowadza się do

$$\sqrt{(b^2 - 4ac)(d^2 - 4af)} > bd - 2ae$$

Gdy te trzy warunki są dopełnione równanie krzywej nie ma żadnego

żadnego znaczenia. (*).

(*). Dodowodzenie pod Licz 367 wykonaliśmy, nie przypuszczając aby które z wyrażeń P, Q, R, było żadnem. Rozważmy co wypadnie w przeciwnym razie. Przypuśćmy naprzód P=0; część niespółmierna $\sqrt{Qx+R}$ w równaniu (D') nie może bydź zawsze urojona: bo dla wsze dla x ważność jednakowego znaku z Q, i taką aby wyraz Qx przewyższał drugi; wyrażenie Qx+R koniecznie dodajnem bydź musi, a zatem ważność y nie będzie w każdym przypadku urojoną.

Jeżeli P i Q są żadne, wpadamy na przypadek Licz 363 i 365; Jeżeli Q tylko jest żadnem, a P i R ujemnemi, wyrażenie pod pierwiastkiem przybierze kształt $\sqrt{-Px^2-R}$, i stanie się urojonem przy wszelkiej ważności odciętej x; ale inaczej się rzecz ma, jeżeli w ostatnim przypadku P i R są przeciwnych znaków; gdyż według tego jak R dodajnem będzie albo ujemnem, można, stosowną dla x ważność nadając, uczynić Px^2 dosyć małem, albo znacznem, aby wyrażenie pod pierwiastkiem dodajnem było. Jeżeli P i Q są żadne, a P ujemnem, równanie tylko jeden punkt wykreśli, którego współrzędne będą x=0, $y=-\frac{d}{2a}$; gdy część niespółmierna sprowadza się do $\sqrt{Qx}$, będzie ona prawdziwą jeżeli nadamy dla x ważności jednakowego

372. Powinnibyśmy zakończyć już rozbieranie przypadków w których ogólne równanie nie stosuje się do jednej z trzech krzywych: bo koło o którém jeszcze pozostaje mówić jest Elipsą o równych osiach: ale że koło ważném jest w Analizie, radamy zatém mu cechę po jakiej będzie go można poznać.

Rozwiązawszy równanie koła, Liczb 107, znajdziemy

$$y^2 + x^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0.$$

Porównawszy to równanie z równaniem (A') podzielonem przez współczynnik w y^2, przekonamy się że równanie ogólne sprowadza się do równania koła, jeżeli $b=0$ i $\frac{c}{a}=1$, albo raczej $c=a$. Warunek $b=0$ pokazuje że średnica

---

znaku z Q: nakoniec tylko samo R może być żadném: w tym przypadku wyrażiwszy część niespółmierną pod kształtem $\sqrt{x(Px+Q)}$, i nadając dla x ważności jednakowego znaku z Q, iloczyn Q przez x dodajnym uczyniemy; a jeżeli iloczyn Px przez x ujemnym jest, można zawsze wziąć x tak małém, aby ten ostatni iloczyn mniejszym był od pierwszego, i abyśmy rzeczywistą wartość dla części niespółmiernej otrzymali.

Widzieliśmy że te warunki są te same, co mające miejsce, gdy żaden ze współczynników nie był uważany za równy zeru.

równoodległa od osi odciętych, przecina wszystkie cięciwy prostopadłe do niej na dwie równe części, co jest własnością spólną wszystkim średnicom koła. Wanicek a: c pokazuje, że gdy zgubiemy wyrazy posiadające pierwsze potęgi w x i y, równanie sprowadzone do kształtu $ay^2 + cx^2 + \mathcal{E}$, jednakowe dla wyrażenia dla wielkiej osi i małej osi.

O punktach danych na płaszczyźnie, i mogących się znajdować na której z krzywych drugiego rzędu.

373. Gdy znamy spółrzędne α, β; α', β'; α'', β''; α''', β'''; α^{IV}, β^{IV}; pięciu punktów znajdujących się na płaszczyźnie, może się zdarzyć iż jaka z krzywych drugiego rzędu, właśnie przechodzi przez te punkta. Dla znalezienia równania tej krzywej, położemy następnie spółrzędne danych punktów w ogólne równanie $y^2 + Axy + Bx^2 + Cy + Dx + \mathcal{E} = 0 \ldots (\mathcal{E}^V)$, przez co otrzymamy pięć równań do wyznaczenia stałych $A, B, C, D, \mathcal{E}$, w funkcyi spółrzędnych danych punktów. Jeżeli po wstawieniu tych ważności w równanie $(\mathcal{E}^V)$, przerobiona taką jest iż jej spółczynniki dopełniają koniecznych warunków, ażeby mogła bydź równaniem jednej z trzech krzywych drugiego rzędu, ta krzywa przez dane punkta przechodzić będzie: lecz może się zdarzyć, iż przyjdziemy tylko do

równania linie prostej, albo układu dwóch prostych, podług tego, jak wa-
runki tego zaszły przypadku przez spółczynniki nowego równania do-
pełnionemi zostaną. Nakoniec te spółczynniki mogą warunkom nie-
dorzeczności zadosyć uczynić; Liczba 369, naówczas żadna linia w równa-
niu ogólném drugiego stopnia istnieć nie będzie, mogąca przechodzić
przez dane punkta.

374. Jeżeli krzywą drugiego rzędu pod pewne warunki podległą, mniej-
sza liczba punktów wystarczy do jej wyznaczenia: tak np: naznaczywszy
naturę krzywej i kierunek jej osi, równanie $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ już tylkowy-
maga znajomości spółrzędnych dwóch punktów, aby wyznaczyć mo-
gło stałe a i b Elipsy, którą wyraża.

Rozwiązanie równań drugiego
stopnia zastosowane do przykładów.

375. Gdy przedsiębieramy rozbierać równanie, to jest analizować krzy-
wą, mogącą brać istnienie z niego, w ogólności należy zacząć od rozwa-
żenia natury ilości b^2-4ac, $bd-2ae$, d^2-4af.

376. Gdy b^2-4ac jest ujemnem, a wyrażenia b^2-4ac, $bd-2ae$, b^2-4af, spra-
wdzają równanie (A^v), dane równanie sprowadza się do jednego punk-
tu. Liczba 368. Jeżeli warunki Liczby 371 są dopełnione, równanie żadnego

nie ma znaczenia: nakoniec jeżeli tylko jest wanorek b^2-4ac = ilości ujemnej, krzywa jest Ellipsą; a ta Ellipsa jest kołem gdy $a=c$, $b=0$, Licz 372.

377. Gdy b^2-4ac jest dodajniem, a wyrażenia b^2-4ac, $bd-2ae$, d^2-4af sprawdzają równanie (A^v), krzywa sprowadza się do układu dwóch linii prostych nierównoodległych Licz 367; jeżeli zaś równanie (A^v) nie sprawdza się, krzywa jest Hyperbolą.

378. Gdy $b^2-4ac=0$, jeżeli $bd-2ae$ nie jest żadnem, krzywa jest Hyperbolą. Lecz jeżeli $b^2-4ac=0$, $bd-2ae=0$, należy roztrząsnąć czém będzie d^2-4af; bo jeżeli d^2-4af = ilości dodajnej, prosta sprowadza się do układu dwóch prostych równoodległych, Licz 363; jeżeli d^2-4af = ilości ujemnej równanie żadnego nie ma znaczenia, Licz 365; nakoniec jeżeli $d^2-4af=0$, należy do linii prostej. Licz 364.

379. Na pierwszy przykład załóżmy sobie rozebrać równanie

$$y^2-6xy+9x^2-y\sqrt{10}=0:$$

ponieważ wanorek $b^2-4ac=0$, jest dopełnionym, uważam jaką jest wartość $bd-2ae$; przekonawszy się że nie jest żadną, twierdzę iż krzywa jest Parabolą.

Dane równanie wyrażam pod kształtem następującym, zobacz Licz 195

$$(y-3x)^2 - y\sqrt{10} = 0;$$

Położywszy ważności spółrzędnych x i y dane formułami (A') albo (A''') znajdziemy $\left[y'(\cos p + 3\sin p) + x'(\sin p - 3\cos p)\right]^2 - x'\sin p\sqrt{10} - y'\cos p\sqrt{10} = 0;$

Widzieliśmy pod Licz 195, że gdy wyrazy objęte nawiasami podniesione są do kwadratu, nie można zgubić wyrazu w xy, w przód nie zrównawszy zem spółczynnik w y^2 lub x^2. Zrównawszy zatém zem ten ostatni spółczynnik, mamy równanie warunkowe $\sin p - 3\cos p = 0$, z którego wyciągniemy $\operatorname{tg} p = 3$, $\sin p = \sqrt{10}$, $\cos p = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin = \frac{3}{\sqrt{10}}$;

Wstawiwszy te ważności w równanie

$$y'^2(\cos p + 3\sin p)^2 - x'\sin p\sqrt{10} - y' - y'\cos p\sqrt{10} = 0,$$

do którego sprowadzi się przerobiona, mam

$$10y'^2 - 3x' - y' = 0, \text{ albo } y'^2 = \frac{3}{10}x' + \frac{1}{10}y' = 0.$$

Potém do wierzchołka początek odniesiemy, wyraz w y' zgubiwszy.

380. Weźmy za drugi przykład równanie

$$2y^2 - 4xy + 3x^2 - 4y = 0,$$

To równanie porównane z ogólném (A') daje

$$b^2 - 4ac = 8, \quad bd - 2ae = 16, \quad d^2 - 4af = 16;$$

ponieważ wyrażenie $b^2 - 4ac$ jest ujemném, uważam Licz 376, czy równanie

(A'), albo wszystkim warunkom Lica 371 zadosyć się uczyniło; ale że nie, widać że krzywa jest Ellipsą i nie sprowadza się do koła, Lica 376.

Wstawiwszy w to równanie ważności $x = x' + \alpha$, $y = y' + \beta$, i spółczynniki w y' zrównawszy zeru, znajduję $\alpha = 2$, $\beta = 3$; zniosłszy kreski. Te ważności sprowadzają przerobioną do $2y^2 - 4xy + 3x^2 - 6 = 0$;

położywszy w to równanie ważności spółrzędnych x i y dane formułami (C) i zrównawszy zeru spółczynnik w $x'y'$, otrzymam

$$wstp\,dosp = 2(wst^2p - dos^2p);$$

zależność $dos^2p = 1 - wst^2p$ sprowadzi to równanie do

$$wstp\sqrt{1 - wst^2p} = 4wst^2p - 2.$$

Podniosłszy do kwadratu i rozwinąwszy otrzymam równanie 4 stopnia, które się sprowadzi do drugiego i da

$$wst^2p = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{17}} \text{ albo raczej } wst^2p = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{17}};$$

weźmiemy zatém tylko jedną z ważności wst^2p, druga bowiem do drugiej głównej osi należyi i w istocie, ponieważ gdyby q było kątem utworzonym przez tę oś drugą, mielibyśmy Lica 291,

$$wst^2q = dos^2p = 1 - wst^2p = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{17}};$$

rozwiązawszy na nowo poprzedzające równanie znajdziemy

$$wstp = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{17}}},$$

zatrzymawszy znak wyższy, wówczas właściwy gdy oś nowa nad dawną pada, wstawmy w spółczynniki zmiennych x i y ważności

$$wst^2 p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{17}}, \quad dos^2 p = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{17}}, \quad wstp dos p = \frac{2}{\sqrt{17}};$$

a przerobiona zamieni się na

$$\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}\right) y'^2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}\right) x'^2 = 6.$$

381. Weźmy jeszcze za przykład równanie

$$3y^2 + 5xy - 2x^2 + y = 0;$$

ponieważ 6^2-właściwości dodajnej, nie potrzebuję zatém tylko uważyć, czy równanie (A^V) ma miejsce; a że nie może się sprawdzić, zatém równanie do hyperboli należy, którą odnieść do głównych osi, sposobem użytym w poprzedzającym przykładzie.

382. Wykonawszy te działania na wielu przykładach, przekonamy się o użyteczności formuł ogólnych, przez które uniknąć można powtarzań w robocie. Ten przedmiot zatrudni nas teraz.

Formuły do wykreślania krzywych mających środek drugiego rzędu za pomocą ich równań.

383. Jeżeli w równanie (A') wstawimy $x' + \alpha$ za x, i $y' + \beta$ za y dla odniesienia go do środka, otrzymamy

$$ay'^2 + bx'y' + cx'^2 + 2a\beta + b\alpha + d \,\Big|\, y' + b\beta + 2c\alpha + e \,\Big|\, x' + a\beta + b\alpha\beta + c\alpha^2 + d\beta + e\alpha + f \,\Big| = 0 \ldots\ldots (F^v)$$

Postanowiwszy tak α i β, aby wyrazy w x' i y' zginęły mamy

$$2a\beta + b\alpha + d = 0 \ldots\ldots (G^v),$$

$$b\beta + 2c\alpha + e = 0 \ldots\ldots (H^v).$$

Zkąd wyciągniemy

$$\alpha = \frac{2ae - db}{b^2 - 4ac}, \quad \beta = \frac{2cd - eb}{b^2 - 4ac} \ldots (I^v)$$

Takie będą rzędne środka. Rozmnożywszy równanie (H^v) przez α, równanie (G^v) przez β, i dodawszy je do siebie

$$2a\beta^2 + 2b\alpha\beta + 2c\alpha^2 + e\alpha + d\beta = 0$$

zkąd $$a\beta + b\alpha\beta + c\alpha^2 = -\tfrac{1}{2}d\beta - \tfrac{1}{2}e\alpha.$$

Wstawiwszy tę ważność w ostatni wyraz równania (F^v), sprowadzimy je do $$\tfrac{1}{2}(d\beta + e\alpha) + f$$

Położywszy w ten ostatni wyraz ważności spółrzędnych α i β, i sprowadziwszy, zamienimy go na $$\frac{cd^2 - ebd + ae^2}{b^2 - 4ac} + f:$$

a zatém równanie (F^v) przemieni się na

$$ay'^2 + bx'y' + cx'^2 + \frac{cd^2 - ebd + ae^2}{b^2 - 4ac} + f = 0.$$

Dla uczynienia go prostszém uczyńmy

$$\frac{cd^2 - ebd + ae^2}{b^2 - 4ac} + f = \mathcal{E} \ldots (T^v)$$

odejmijmy kreski a będziemy mieli

$$ay^2 + bxy + cx^2 + \mathcal{E} = o \ldots (X^v)$$

Że zaś ważności spółrzędnych α i β stają się nieskończonemi gdy $b^2 - 4ac = o$, to więc przerobienie służy tylko krzywym środek mającym. Odnieśmy krzywę do głównych osi za pomocą formuł (O'), znajdziemy

$$\begin{array}{l|l|l|l} a\,wst^2p & x'^2 + 2a\,wst\,dos\,p & x'y' + a\,dos^2p & y'^2 + \mathcal{E} = o \ldots (\mathcal{L}^v) \\ +b\,wst\,p\,dos\,p & -b\,wst^2p & -b\,wst\,p\,dos\,p & \\ +c\,dos^2p & +b\,dos^2p & +c\,wst^2p & \\ & -2c\,wst\,p\,dos\,p & & \end{array}$$

Spółczynnik $w\,x'y'$ zrównany zem daje równanie warunkowe

$$2a\,wst\,p\,dos\,p - b\,wst^2p + b\,dos^2p - 2c\,wst\,p\,dos\,p = o,$$

albo $$2\,wst\,p\,dos\,p(a - c) + b(dos^2p - wst^2p) = o$$

Że zaś $$2\,wst\,p\,dos\,p = wst\,2p \quad i \quad dos^2p - wst^2p = dos\,2p \ldots (*)$$

(*) Takoż jeżeli w formule trygonometrycznej $wst(a+b) = wst\,a\,dos\,b + wst\,b\,dos\,a$, uczyniemy $b = a$, znajdziemy $wst\,2a = 2\,wst\,a\,dos\,a$:

podobnie jeżeli w formule $dos(a+b) = dos\,a\,dos\,b - wst\,a\,wst\,b$, uczyniemy $b = a$, otrzymamy $$dos\,2a = dos^2a - wst^2a.$$

będzie więc $wst 2p(a-c) + b\,dos 2p = 0.$

zkąd wyciągniemy $\frac{wst 2p}{dos 2p} = -\frac{b}{a-c}$ albo $sty 2p = -\frac{b}{a-c}$

Podług Trygonometryi $sie = \sqrt{1+sty^2}$, $dos = \frac{1}{sie}$, $wst = \frac{sty}{sie}$:

Za wstawieniem ważności sty 2p znajdziemy z łatwością za pomocą tych formuł

$$sie 2p = \sqrt{1 + \frac{b^2}{(a-c)^2}} = \frac{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{a-c}, \quad dos 2p = \frac{a-c}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}} \ldots\ldots (M^v)$$

$$wst 2p = \frac{-b}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}} \ldots\ldots (N^v).$$

Położywszy tę ważność dos 2p w formułę trygonometryczną

$$wst^2 p = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} dos 2p \quad (*) \ldots\ldots (O^v)$$

będzie

$$wst^2 p = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\frac{a-c}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}} \ldots\ldots (P^v) \quad (**)$$

Wyrugowawszy $wst^2 p$ z pomiędzy tego równania i następującego $wst^2 p = 1 - dos^2 p$, znajdziemy

$$dos^2 p = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\frac{a-c}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}} \ldots\ldots (Q^v).$$

Gdy w spółczynnik odciętej x^2 równania (L^v), wstawiemy ważności $wst^2 p$, $dos^2 p$ i $2 wst p dos p = wst 2p$, dane równaniami (P^v), (Q^v), (N^v) ten spółczynnik sprowadzi się do

$$\tfrac{1}{2}(a+c) - \tfrac{1}{2}\frac{(a-c)+b^2}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$$

(*) Dosyć w równanie $dos 2a = dos^2 a - wst^2 a$ położyć ważność $dos^2 a = 1 - wst^2 a$ dla otrzymania $wst^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} dos 2a$.

(**) Przyjdziemy do tego równania i sposobem użytym pod Liczb. 380.

$$\frac{(a+c)}{2} - \frac{1}{2}\frac{(a-c)^2+b^2}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$$

albo do $\quad \frac{1}{2}(a+c) - \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2+b^2}$

Tym samym sposobem sprowadziemy spółczynnik rzędnej y'^2 do

$$\frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2+b^2}.$$

Nakoniec jeżeli w równaniu ($\mathfrak{L}^{\nu}$) spółczynniki w x'^2 i y'^2 znalezionemi ważnościami zastąpiemy, otrzymamy

$$\left[\frac{1}{2}(a+c) - \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2+b^2}\right]x'^2 + \left[\frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2+b^2}\right]y'^2 + \mathfrak{E} = 0.$$

Takiem będzie równanie krzywej odniesionej do głównych osi.

384. Dla otrzymania długości tych osi uczyniemy następnie $y'=0$, $x'=0$; a zważywszy (*) a' i b' to czém się stanie w tym razie x' i y' będziemy mieli

$$a' = \frac{-2\mathfrak{E}}{a+c-\sqrt{(a-c)^2+b^2}} \quad \ldots\ldots (\mathfrak{R}^{\nu})$$

$$b' = \frac{-2\mathfrak{E}}{a+c+\sqrt{(a-c)^2+b^2}} \quad \ldots\ldots (\mathfrak{S}^{\nu})$$

Te wyrażenia są wyrażeniami kwadratów z pół osi głównych.

385. Podzieliwszy jedno z tych wyrażeń przez drugie, otrzymamy

$$\frac{a'^2}{b'^2} = \frac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{a+c-\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$$

(*) Ponieważ litery a i b do naznaczenia spółczynników równania (A') użyte były, przymuszeni jesteśmy połowy głównych osi innemi znakami wyrazić.

Ten stosunek stanie się równym jedności, jeżeli część nie potrzebna żadną będzie, to jest jeżeli $(a-c)^2+b^2=0$. Że zaś suma dwóch kwadratów tylko wtenczas może bydź żadną, gdy każdy z kwadratów z osobna równym jest zeru, więc wtenczas tylko pierwiastek zginie gdy $b^2=0$, $(a-c)^2=0$. Z tych równań powstają równania $b=0$, $a=c$ wyrażające warunki aby $\frac{a^2}{b^2}=1$, albo żeby $a=b$. W tym razie Ellipsa na koło się zamienia.

386. Gdyby tylko b żadnem było, ważność wst^{2}p dana równaniem (P^v) sprowadzałaby się do zera; więc osi odciętych należałaby do nędznych prostokątnych. Tę prawdę już inny sposobem poznali pod Liczbą 46.

387. Gdy b nie jest żadnem, wyrażenie $\frac{a-c}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$ wchodzące w równania (P^v) i (R^v) mniejszem jest od jedności, a zatem gdy $a-c$ jest dodatnim, te równania dadzą: wst^{2}p$<\frac{1}{2}$, dos^{2}p$>\frac{1}{2}$

zkąd wyprowadzimy wstp$<\frac{1}{\sqrt{2}}$, dosp$>\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Jeżeli w koło MB (fig 75) weźmiemy łuk MB$=\frac{1}{8}$ okręgu, kąt MOB jest połową kąta prostego, więc kąt M waży drugą połowę, i otrzymamy

$$2OP^2 \text{ albo } 2PM^2 = OM^2 = 1.$$

zkąd $$OP \text{ albo } PM = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

To mając, ponieważ bezwzględna ważność wstawyp, powinna bydź mniejsza od $\frac{1}{\sqrt{2}}$, dostawy zaś większa od $\frac{1}{\sqrt{2}}$, potrzeba żeby kąt p mniejszym

był od kąta MOB mającego za miarę $\frac{1}{8}$ okręgu, albo większym od kąta MOB będącego spełnieniem kąta MOQ = MOB. Znajdziemy podobnie że gdy a-c jest ujemnem, mamy wstp $> \frac{1}{\sqrt{2}}$, a dosp $< \frac{1}{\sqrt{2}}$, że zatem kąt p większym bydź powinien od MOB = $\frac{1}{8}$ okręgu, nie przechodząc jednak MOB mającego za spełnienie MOQ = $\frac{1}{8}$ okręgu.

388. Zastósujmy to co poprzedziło do wykreślenia krzywej mającej równanie

$$2y^2 - 4xy + 5x^2 - 3x = 0.$$

Widzę napród iż $b^2 - 4ac$ jest ujemnem, zaś $bd - 2ae$ dodajnem, a zatem równanie dane nie jest niedorzecznem, i nie sprowadza się ani do punktu, ani do koła, bo wanunek $(bd - 2ae) = (b^2 - 4ac)(d^2 - 4af)$ Licz 366 i inne Licz 371 nie są dopełnione.

A tak wanunek $b^2 - 4ac$ = ilości ujemnej, któremu zadosyć czyni pokazuje że krzywa jest Elipsą. Ta Elipsa nie odnosi się do głównych osi, bo wyraz w xy istnieje, Licz 174. Wyraz 3x uczy nas Licz 164, że początek spółrzędnych nie znajduje się we środku krzywej. Łatwo przekonać się że początek na samej krzywej jest położony; bo uczyniwszy x = o znajdziemy y = o.

Dla wyznaczenia spółrzędnych środka porównamy spółczynniki założonego równania ze spółczynnikami ogólnego równania krzywych drugiego rzędu (A'), a zobaczemy iż

$$a = 2, \quad b = -4, \quad c = 5, \quad d = 0, \quad e = -3, \quad f = 0.$$

Wstawiwszy te ważności w równania (1°) otrzymamy:

$$\alpha = \frac{-12}{-24} = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{-12}{-24} = \frac{1}{2};$$

Podobne wstawienie w równaniu (I°) wykonawszy, znajdziemy

$$\mathcal{E} = \frac{18}{-24} = -\frac{3}{4}.$$

Za pomocą tej ważności stałej $\mathcal{E}$ i współczynników a, b, c położonych w równania (R°), (S°) otrzymamy

$$a' = \frac{3}{2(7-5)} = \frac{3}{4}, \quad b' = \frac{3}{2(7+5)} = \frac{1}{8}.$$

Sprowadziwszy te ważności do jednego mianownika, będzie

$$a'^2 = \frac{4 \times 3}{16}, \quad b'^2 = \frac{2}{16}$$

Więc $$a' = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad b' = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Podobnie równanie (P°) sprowadzi się do

$$wstęp = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times -\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{8}{10}.$$

Dla wyznaczenia ważności kąta p za pomocą tablic logarytmicznych

mamy $$\log wstęp = \frac{1}{2}(\log 8 - \log 10) = \frac{1}{2}(0,903090 - 1) = -0,048455.$$

Logarytm ten jest ujemny, promień bowiem za równy jedności uważaliśmy. Lecz jeżeli weźmiemy promień tablic 10 Milliardów razy większy, będzie należało cechę 10 do tego logarithmu dodać, i będziemy mieli 9,951545. Ta liczba odpowiada w tablicach wstawie

70°,48 podziału dziesiętnego, albo 63°,26' podziału dawnego

Wziąwszy zatem za odcięty prostą $\alpha = \frac{1}{2}$, a za rzędną prostą $\beta = \frac{1}{2}$ wyznaczę

środek, przez który przeprowadzić prostą, czyniącą z osią odciętych kąt 70°,48', podziału dziesiętnego, abiorąc po każdej stronie tej prostej, rachując od środka długość $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, wykreślą oś wielką na której wystawią oś małą $2b' = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Za pomocą tych osi krzywa będzie wyznaczoną i położoną właściwie.

389. Uważmy że dla wykreślenia krzywej dosyć wziąć linie będące w stosunku poprzedzających: dla uniknienia zatem ułamków rozmnożą ważności α, β, a' i b' przez 100, a będą miał

$$\alpha = 50, \quad \beta = 50, \quad a' = 50\sqrt{3}, \quad b' = 25\sqrt{2}.$$

390. W równaniu (K'') $ay^2 + bxy + cx^2 + E = 0$, uczyniwszy $y = 0$ znajdziemy

$$x = \pm\sqrt{-\frac{E}{c}}.$$

Ta ważność jest urojona jeżeli c i E są jednakowych znaków. Dobrze pojmujemy, jakim sposobem urojona ważność rzędnej y może w Hyperboli odpowiadać $x = 0$; ale gdy równanie do Elipsy się odnosi, cóż znaczy ta ważność urojona która przybiera rzędna we środku krzywej? Dla wytłomaczenia sobie tego, uważmy iż gdy $b^2 - ac$ jest ujemnem, a ie powinny być jednakowych znaków: a że w teraźniejszem założeniu, E ma być znaku ilości c, wypada że a, c, i E są jednakowych znaków; w tym zaś przypadku równanie założone jest niedorzecznem, jako trzy wapienki którym zadosyć uczynić potrzeba, aby to równanie było niedorzecznem znajdują się dopełnione: porównawszy bowiem równanie (K') Liczb 133.

z równaniem $ay^2 + bxy + cx^2 + E = 0$,

mamy $d = 0$, $f = E$. Więc $d^2 - af$ sprowadzające się do $-aE$, i $b^2 - ac$, są ilościami ujemnemi, bo a i E są jednakowych znaków; z drugiej zaś strony $bd - ae$ sprowadza się do zera. Po ważnościach $b^2 - ac$, $d^2 - af$, i $bd - ae$ łatwo jest poznać że warunki potrzebne Liczb 371 aby równanie było niedorzecznem są dopełnione.

391. Wszelkie krzywe drugiego rzędu mające środek, a różniące się tylko ostatnim wyrazem, są podobne. Dla okazania tego dosyć uważyć iż stosunek istniejący między kwadratami z półosi głównych poprzednicze otrzymany, Liczb 388, nie zależnym jest od E.

Formuły do wykreślania Paraboli za pomocą jej równania.

392. Warunkowe równanie Paraboli $b^2 - ac$ daje $b = 2\sqrt{ac}$; co do znaku taki przyjmiemy jaki b w równaniu mieć będzie: dlaczego przypadek b dodatniego i b ujemnego następnie uważać będziemy. W ogólności wystawmy równanie założone przez

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0.$$

Jeżeli za b ważność jego położymy $2\sqrt{ac}$ pierwszemu przypadkowi odpowiadającą otrzymamy

$$(y\sqrt{a} + x\sqrt{c})^2 + dy + ex + f = 0.$$

Ważności $x = x_{dosp} - y_{wstp}$; $y = x_{wstp} + y_{dosp}$

Liczb 176, albo 291, w to rownanie wstawiwszy, znajdziemy

$$(wstp\sqrt{a} + dosp\sqrt{c})^2 x'^2$$

$$+ 2(wstp\sqrt{a} + dosp\sqrt{c})(dosp\sqrt{a} - wstp\sqrt{c})\, x'y'$$

$$+ (dosp\sqrt{a} - wstp\sqrt{c})^2 y'^2 + \begin{matrix} d\,dosp \\ - e\,wstp \end{matrix} \Big| y' + \begin{matrix} d\,wstp \\ + e\,dosp \end{matrix} \Big| x' + f = 0 \ldots\ldots (3^v)$$

Uczyniwszy $wstp\sqrt{a} + dosp\sqrt{c} = 0$, wyrazy w x'^2 i w $x'y'$ zginą i wyciągnięmy zte-
go rownania $\frac{wstp}{dosp}$ albo $stgp = -\sqrt{\frac{c}{a}} \ldots\ldots (4^v)$:
ponieważ a i c są jednakowych znaków, co wypływa z równania $b^2 = 4ac$,
druga prawa strona równania (4^v) będzie rzeczywistą i ujemną, a zatém
wstp i dosp znaków przeciwnych będą; co koniecznym czyni jeden z dwóch
następujących przypadków; Pierwszy

Pierwszy, wstawa dodajna, dostawa ujemna,

Drugi, wstawa ujemna, dostawa dodajna.

Uczy nas Trygonometria że w pierwszym przypadku kąt powinien być
rozwarłym; w drugim że kąt p trzy kąty proste przewyższać powinien;
nie chcąc uważać kątów większych nad dwa kąty proste, (bo kąt nie
przechodzący dwóch prostych może równo dokładnie wyznaczyć kie-
runek nowej osi, jak kąt pod nią położony,) przyjmiemy pierwszy przy-
padek; a że sieczna do kąta rozwarłego należąca jest ujemna, będziemy
mieli $siep = -\sqrt{1 + stg^2 p} = -\sqrt{1 + \frac{c}{a}} = -\sqrt{\frac{a+c}{a}}$

$$dosp = \frac{1}{sicp} = -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+c}}$$

i $$wstp = stycp \times dosp = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a+c}}$$

Wstawiwszy te ważności wstawy i dostawy p w równanie (V^v) pozbawione wyrazów w x^2 i w y^2, zamienimy to równanie na

$$\left(-\frac{(a+c)^2}{\sqrt{a+c}}\right)y'^2 + \frac{d\sqrt{c} - e\sqrt{a}}{\sqrt{a+c}}x' - \frac{(d\sqrt{a} + e\sqrt{c})}{\sqrt{a+c}}y' + f = 0$$

a że spółczynnik rzędnej y^2 podniesiony do kwadratu daje

$$\frac{(a+c)^2}{a+c} = a+c$$

będzie $$(a+c)y'^2 + \frac{d\sqrt{c} - e\sqrt{a}}{\sqrt{a+c}}x' - \frac{(d\sqrt{a} + e\sqrt{c})}{\sqrt{a+c}}y' + f = 0 \ldots . (V^v)$$

Wystawmy to równanie przez $Ay^2 + Bx + Cy + f = 0$

a dla zmniejszenia liczby wyrazów przypuśćmy $y = y' + \beta$, $x = x' + \alpha$. Wstawiwszy te ważności otrzymamy $Ay'^2 + 2A\beta + C \mid y' + Bx' + A\beta^2 + B\alpha + C\beta + f = 0 \ldots . (W^v)$

Mianowicie $2A\beta + C = 0$ i $A\beta^2 + B\alpha + C\beta + f = 0$, wyciągnięmy z tych równań

$$\alpha = \frac{C^2}{4AB} - \frac{f}{B}, \quad \beta = -\frac{C}{2A},$$

równanie zaś (W^v) sprowadzi się do $Ay'^2 + Bx' = 0$.

Wstawiwszy w te trzy formuły ważności wyrazów A, B, i C będące spółczynnikami w y'^2, w x' i w y' równania (V^v) znajdziemy

$$\alpha = \frac{(d\sqrt{a} + e\sqrt{c})^2}{4(a+c)\sqrt{a+c}(d\sqrt{c} - e\sqrt{a})} - \frac{f\sqrt{a+c}}{d\sqrt{c} - e\sqrt{a}} \ldots . (X^v)$$

$$\beta = \frac{d\sqrt{a} + e\sqrt{c}}{2(a+c)\sqrt{a+c}} \ldots . (Y^v)$$

$$(a+c)y'^2 + \frac{(d\sqrt{c} - e\sqrt{a})}{\sqrt{a+c}}x' = 0$$

albo raczej $$y'^2 + \frac{d\sqrt{c} - e\sqrt{a}}{(a+c)\sqrt{a+c}} x' = 0 \ldots . (Z^V)$$

Trzeba dołączyć do tych formuł równanie (U^V)

393. Gdyby w równaniu założonem b ujemnem było, te formuły niemogłyby służyć: lecz wykonawszy działania poprzedzające w założeniu b ujemnego znajdziemy $$\alpha = \frac{(d\sqrt{a} - e\sqrt{c})^2}{4(a+c)\sqrt{a+c}(d\sqrt{c} + e\sqrt{a}} - \frac{f\sqrt{a+c}}{d\sqrt{c} + e\sqrt{a}} \ldots . (A^{VI})$$

$$\beta = \frac{e\sqrt{c} - d\sqrt{a}}{2(a+c)\sqrt{a+c}} \ldots (B^{VI})$$

$$y'^2 + \frac{d\sqrt{c} + e\sqrt{a}}{(a+c)\sqrt{a+c}} x' = 0 \ldots . (C^{VI})$$

$$styp = \sqrt{\frac{c}{a}} \ldots . (D^{VI})$$

394. Weźmy za przykład równanie

$$y^2 - 2xy + x^2 - 3y = 0.$$

w którem $b^2 = 4ac$, a $bd - 2ae$ nie jest zadnem, które zatem należy do Paraboli. Naprzód uważam znak wyrazu $-xy$, a że jest ujemnym, ta Parabola wykreśli się formułami (A^{VI}), (B^{VI}), (C^{VI}), (D^{VI}).

Pociągnąwszy zatem prostokątne osie AX i AY (Fig 79 i wziąwszy punkt A Fig za początek, poprowadzę nową oś AX', tak aby z osią AX czyniła kąt p, którego styczna przez formułę (D^{VI}) wyrażoną będzie, i sprowadzi się w naszym przypadku do $\sqrt{1} = 1$, a zatem do połowy kąta prostego należeć będzie; znajdę potem za pomocą formuł (A^{VI}), (B^{VI}), (C^{VI}) współrzędne α i β wierzchołka, i równanie krzywej odniesionej do głównych osi; i otrzymam

$$\alpha = \frac{3}{8\sqrt{2}}, \quad \beta = \frac{3}{4\sqrt{2}} \quad i \quad y'^2 - \frac{3}{2\sqrt{2}} x' = 0 .$$

Spółczynnik przy x' da $\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ dla ważności Parametru; więc

$$\alpha : \beta : \text{parametru} = \frac{1}{8} : \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = 1 : 2 : 4.$$

Ujemną odciętą α przez 1 wystawiwszy, wezmę AB z jednej strony, a prostopadłę BD z obudwu: naówczas D będzie nowym początkiem, i wyznaczy wierzchołek krzywej. Poprowadziwszy zatém przez punkt D równoodległę Dy od osi AX', ta prosta Dy będzie nową osią, na którą poniosę od D do F części równozawartej części parametru wystawionej przez 4. Wyznaczywszy zatem ognisko F i wierzchołek D, z łatwością wykreśli się krzywa.

Gdyby Parametr był ujemnym, poniósłbym czwartą część spółczynnika przy x' od D do F', a krzywa w przeciwny kierunek obróconą by została.

395. W założeniu b dodajnego, ponieważ znak styczney danej równaniem (U^v) przeciwny jest znakowi ilości b, co także się zdarza i w założeniu b ujemnego, jak się łatwo przekonać można uważając znak równania (D^{vi}) wypada że gdy b jest dodajnem, styczna kąta p jest ujemną, i kierunek nowej osi rozwarty kąt czyni z osią pierwotną, (zobacz Przypisek Liczb 84) że zaś ten kąt ostrym się staje, gdy b jest ujemnem.

O wyznaczeniu pierwiastków równań trzeciego i czwartego stopnia, za pomocą przecięcia się krzywych drugiego rzędu.

396. Gdy zagadnienie zależy od dwóch równań o dwóch niewiadomych

można uważać te równania za równania dwóch krzywych jednakowe mających spółrzędne w punktach spotkania: a zatém wymugowawszy y ważność ilości x będzie odcięta punktu przecięcia.

Weźmy za przykład następujące zagadnienie.

Znaleść sześcian dwakrotny większy od drugiego.

Naznaczmy przez a bok sześcianu danego, a przez x bok szukanego: będziemy mieli równanie $x^3 = 2a^3$, albo raczej $x^4 = 2a^3 x$.

Przypuśćmy $x^2 = py$, i wstawmy tę ważność, a wypadnie to drugie równanie

$$y^2 = \frac{2a^3}{p^2} x.$$

Dla wykreślenia tych równań poprowadźmy osie pierwotne AX, AY (Fig 30) Fig 30 punkt A będzie wierzchołkiem dwóch Parabol, z których jedna linię AY za oś odciętych mieć będzie, p za parametr; druga AX za oś odciętych, a $\frac{2a^3}{p^2}$ za parametr. Odcięta punktu przecięcia się tych Parabol z sobą, będzie bokiem sześcianu szukanego.

397. W ogólności gdy równanie o jednej niewiadomej x mamy danem uważać je można za wypadek wymugowania y z równań dwóch krzywych mających x i y za spółrzędne: gdy te krzywe są drugiego rzędu, założona nie może czwartego stopnia przechodzić. Ponieważ istnieje mnóstwo równań drugiego stopnia, mogących przez wymugowanie, dać założoną, najprostsze z nich nad inne przenosić należy: w wyborze ich tak postępować

będziemy, jak w przykładzie następującym.

398. Niechaj będzie równanie $x^4 - px^2 - qx - r = 0$;

biorę dowolne równanie $x^2 = ay \ldots (E^{II})$

należące do Paraboli: wyciągnąwszy z niego wartość odciętej x^2, i wstawiwszy ją w założoną, otrzymamy

$$a^2y^2 - pay - qx - r = 0$$

albo raczej $$y^2 - \frac{py}{a} - \frac{qx}{a^2} - \frac{r}{a^2} = 0$$

To równanie także należy do Paraboli.

Równanie (E^{II}) w wykreśleniu swoim żadnych nie stawia trudności, służy bowiem Paraboli MAM', która mając wierzchołek w początku A (Fig 81) ma za osi odciętych AY, za osi rzędnych AX, za parametr a. Fig 81

Wykreślenie krzywej danej równaniem (F^{II}) dopełni się gdy wyprowadzimy aby krzywa od prostszego równania zależała: co wymaga nieco przygotowania: niechaj będzie w ogólności równanie

$$ay^m + by^{m-1} + cy^{m-2} + \ldots y + s = 0 \ldots (G^m)$$

Uczy nas Algebra że jeśli w tem równaniu wstawimy $y - \frac{b}{ma}$ za y, otrzymamy drugie równanie wyżłego stopnia, lecz nie posiadające potęgi $m-1$ niewiadomej (*). Po tej uwadze można zgubić drugi wyraz

(*) Dla okazania tego podzieliwszy przez a to równanie, uczyniś

równania $(\mathcal{F}^{VI})$ przypuszczając $y = y' + \frac{1}{2}\frac{p}{a}$ ... (H^{VI})

a równanie $(\mathcal{F}^{VI})$ sprowadzi się do

$$y'^2 - \frac{p^2}{4a^2} - \frac{qx}{a^2} - \frac{r}{a^2} = 0$$

albo raczej do $y'^2 = \frac{q}{a^2}\left(x + \frac{p^2+4r}{4q}\right)$, albo raczej do $y'^2 = \frac{q}{a^2}x'$ ... $(\mathcal{J}^{VI})$

uczyniwszy $x + \frac{p^2+4r}{4q} = x'$ ... $(\mathcal{F}^{VI})$

Równanie $(\mathcal{J}^{VI})$ wykreśli tę samą krzywę co równanie $(\mathcal{F}^{VI})$, lecz z różnym początkiem.

Ponieważ równanie (A^{VI}) daje $y - y' = \frac{1}{2}\frac{p}{a}$,

widzimy (Fig 81) że wszelka rzędna PM równania $(\mathcal{F}^{VI})$ różni się o $\frac{1}{2}\frac{p}{a}$ od rzędnej QM równania $(\mathcal{J}^{VI})$ tej samej odciętej AP odpowiadającej. A że oś AX odnosi się do równania $(\mathcal{F}^{VI})$, jeżeli zatem w odległości $AA' = \frac{p}{2a}$ od tej osi, poprowadzimy równoodległą A'X', wszelkie rzędne wykreślone równaniem $(\mathcal{F}^{VI})$ o $\frac{p}{2a}$ skrócone będą; podobnie widzimy że ponieważ $x' = x + \frac{p^2+4r}{4q}$, każda więc odcięta x' powinna się różnić od x ilością $\frac{p^2+4r}{4q} = AA'$. Punkt A'' będzie początkiem odciętych x'. Wykreśliwszy Parabolę na osi A''X' za pomocą równa- Fig 81

$y = y' + \alpha$, czém zamienię to równanie na

$$y'^m + ma\left|\begin{matrix} + \frac{b}{a}\end{matrix}\right| y'^{m-1} + \frac{1}{2}m(m-1)a^2 \left|\begin{matrix} + \frac{b}{a}(m-1)\alpha \\ + \frac{c}{a}\end{matrix}\right| y'^{m-2} + \text{etc} \left|\begin{matrix} + \text{etc} \\ + \text{etc}\end{matrix}\right| \quad (*)$$

Ilość dowolną α można wyznaczyć zrównawszy zem spółczynnik ilości y'^{m-1}, co da

$$\alpha = -\frac{b}{ma}, \text{ zatém } y = y' - \frac{b}{ma}$$

równania (I^{VI}) ta krzywa ze względu na początek A uważana, będzie daną równaniem (F^{VI}). Wyrugowawszy zatem y z pomiędzy równań (E^{VI}) i (F^{VI}) odcięte AP', AP" będą ważnościami odciętej x spólnemi równaniom (E^{VI}) i (F^{VI}), a więc pierwiastkami równania $x^7 - px^2 - qx - r = 0$.

399. Gdy krzywe nie przecinają się we czterech punktach, równanie założone urojone pierwiastki mieć musi.

400. Przecięcie się koła i linii prostej posłużyło nam Licz 58... 65, do wykreślenia równań drugiego stopnia: przecięcia się krzywych drugiego rzędu dostatecznemi będą do wykreślenia równań trzeciego i czwartego stopnia. Tak dla wykreślenia $\sqrt[3]{a}$ przypuszczę $x = \sqrt[3]{a}$, więc $x^3 = a$. Ponieważ to równanie tego samego jest kształtu co otrzymane w zagadnieniu podwojenia sześcianu Licz 389, rozwiąże się więc tym samym sposobem, biorąc dla jednego tylko pierwiastku rzeczywistego w x, odcięte przecięcia się dwóch Paraboli.

Główne Zasady
Geometryi Analitycznej
o trzech wymiarach.

O sposobie jakim sposobem położenie punktu w przestrzeni wyznaczyć można.

401. Gdy linie niekoniecznie na jednej płaszczyźnie znajdować się mają, nie zdołamy wyznaczyć ich punktów dotąd używanemi sposobami, ale do więcej ogólnych uciec się będziemy zniewoleni.

Wystawmy sobie trzy osie AX, AY, AZ (Fig 89) tworzące między sobą dowolne kąty, Fig 89
które dla większej dogodności za proste uważać będziemy: odciąwszy na osi AX prostę AP = x, i poprowadziwszy przez punkt P równoodległą PR = y od osi AY, zaś przez punkt R równoodległą RM = z od osi AZ, położenie punktu M wyznaczonem zostanie, gdy wiadome ważności dla x, y i z nadamy. Te linie x, y, z są spółrzędnemi punktu M: nadawszy dla x, y, i z ważności szczególne a, b, c, równania punktu w przestrzeni będą

$$x = a,\ y = b,\ z = c.$$

402. Porządek w jakim się biorą te spółrzędne dowolny jest zupełnie: np: po-
prowadziwszy zawsze równoodległe od osi te spółrzędne można uczynić
(Fig 90) $AP = z$, $PP' = y$, $P'M = x$. Fig 90.
albo (Fig 91) $AP' = y$, $P'P = z$, $PM = x$. Fig 91.
a zarówno się punkt M wyznaczy.

O Płaszczyznach spółrzędnych

403. Przeprowadzam trzy płaszczyzny, pierwszą przez osie x i y, drugą przez
osie x i z, trzecią przez osie z i y; te płaszczyzny będą spółrzędnemi płaszczyz-
nami. Dla rozróżnienia ich od innych nazwiemy pierwszą płaszczyzną xy, dru-
gą płaszczyzną xz, trzecią płaszczyzną zy.

404. Te płaszczyzny rozdzielają przestrzeń na osiem części, z których cztery
nad płaszczyzną xy, cztery pod nią są położone. Punkt wyżej tej płaszczy-
zny xy, albo niżej znajdować się będzie, podług tego jak spółrzędna jego z
ujemną lub dodajną będzie: znaki spółrzędnych x i y wyznaczą potem do
której z czterech części wyższych lub niższych dany punkt należy.

Weźmy naprzykład cztery punkta (Fig 92) M, M', M'', M''' w czterech wyż- Fig
szych częściach położone, i których spółrzędne x, y, z, jednakowe mają wiel-
kości, otrzymamy dla punktu M, $AP = +x$, $PP_1 = +y$, $P_1M = +z$
dla punktu M', $AP' = -x$, $P'P_1 = +y$, $P_1M' = +z$

dla punktu M'', $AP = +x$, $PQ'' = -y$, $Q''M'' = +z$

dla punktu M''', $AP' = -x$ $P'Q''' = -y$ $Q'''M''' = +z$.

O rzutach prostej położonej w przestrzeni i o jej płaszczyznach zrzucających.

405. Jeżeli ze wszystkich punktów prostej MM' (Fig 93) położonej w przestrzeni, spuścimy prostopadłe MQ, $M'Q'$, $M''Q''$, $M'''Q'''$ na jedną z płaszczyzn spółrzędnych np: xy, wszystkie te prostopadłe na jednej płaszczyźnie znajdować się będą. Żadnej to wątpliwości nie podpada, gdy dwie tylko z tych prostopadłych uważamy; ale gdy trzy, MQ, $M'Q'$, $M''Q''$, trzeba dowieść że płaszczyzna prostych MQ, $M'Q'$, ta sama jest co prostych MQ, $M''Q''$: łatwo to przyjdzie, gdyż prosta $M'M''$ będąc przedłużeniem linii MM' leży razem na płaszczyźnie MQ i $M'Q'$; prostopadła MQ takie jest na tych dwóch płaszczyznach, bo jest ich spólnem przecięciem. Dwie zaś płaszczyzny mające dwie proste spólne, jedną tylko składają płaszczyznę. Podobnie dowiedlibyśmy że wszystkie prostopadłe na jednej płaszczyźnie leżą.

406. Płaszczyzna MQ'' obejmująca te wszystkie prostopadłe nosi imię płaszczyzny rzucającej, a spólne jej przecięcie QQ''' z płaszczyzną xy nazywa się rzutem prostej na tę płaszczyznę. Ten rzut QQ''' może bydź jeszcze uważany za prostę utworzoną przez spodki prostopadłych spuszczonych ze wszystkich

punktów prostej $M'M''$ na płaszczyznę xy.

407. Co o mówiemy o płaszczyźnie xy, to i do płaszczyzn yz i zx dasię stosować, przeto wyznaczemy rzuty prostej $M'M''$ na te płaszczyzny, spuszczając proste padłe ze wszystkich jej punktów na każdą z płaszczyzn yz i xz.

408. Ponieważ końce prostopadłych MQ, $M'Q'$, $M''Q''$ znajdują się na prostej $M'M''$ i jej rzucie $Q'Q'''$, więc proste $M'M''$ i $Q'Q'''$ na jednej płaszczyźnie MQ'' są położone, która podług Lic 405 spólna jest tym wszystkim prostopadłym. Płaszczyzna rzucająca posiada zatem własność obejmowania prostej danej w przestrzeni, i jej rzutu. Że zaś ten rzut może bydź na którejkolwiek z płaszczyzn spółrzędnych, istnieją przeto trzy płaszczyzny rzucające, z których każda prostopadła do innej z płaszczyzn spółrzędnych.

409. Ponieważ dana prosta na każdej z płaszczyzn spółrzędnych ma się znajdować, widocznie zatém będzie ich spólném przecięciem: że zaś to spólne przecięcie dokładnie wyznacza się spotkaniem dwóch płaszczyzn rzucających, dosyć więc dla wyznaczenia położenia prostej KL (Fig 94) w przestrzeni, Fig 9
mieć dwie z trzech płaszczyzn rzucających.

O równaniach prostej położonej w przestrzeni.

410. Na prostej KL położonej w przestrzeni (Fig 94) obierzmy dowolnie Fig 9

punkt M, i spółrzędne jego przez x, y, z wystawmy: z tego punktu M spuść-
my prostopadłą MQ na płaszczyznę xz, spodek Q tej prostopadłej będzie punk-
tem rzutu prostej KL na płaszczyznę xz; że zaś punkt Q wyznaczony jest na
płaszczyźnie xz, spółrzędnemi AP, QP, które są takie spółrzędne x i z punk-
tu M, więc te spółrzędne punktu M posiadają własność należenia i do
punktu Q rzutu prostej KL na płaszczyznę xz. Cośmy o punkcie M powie-
dzieli i do wszelkiego innego punktu prostej KL stosować się może; wy-
pada przeto ii spółrzędne x i z związane są między sobą równaniem rzutu
prostej KL na płaszczyznę xz. Ponieważ ten rzut jest linią prostą na pła-
szczyźnie xz położoną, jeżli przeto wystawimy jego równanie przez
$z = ax + \alpha$, spółrzędne x i z którego kolwiek punktu linii prostej zawierzpra-
wdzą to równanie, albo co na jedno wychodzi, gdy jedna z tych spółrzę-
dnych będzie daną, ważność drugiej wyznaczy się tem równaniem.

411. Podobnie dowiedlibyśmy, z punktu M spuszczając prostopadłą MQ'
na płaszczyznę zy, że spółrzędne AP = z, PQ' = y punktu M prostej KL, związ-
zane są między sobą równaniem $z = by + \beta$ służącem rzutowi prostej KL na
płaszczyznę zy.

412. Spuszczając nakoniec z punktu M prostopadłą MQ'' na płaszczyznę
xy, łatwo przyjdzie zapewnić się tym samym sposobem że spółrzędne x i y
którego kolwiek punktu prostej KL związane są między sobą równaniem

rzutu tej prostej na płaszczyznę xy.

413. Dwa z tych równań dostatecznie są do wyznaczenia trzeciego. Jw istocie, ponieważ spółrzędne z, x, y, do jednego punktu prostej KL należą, jeżeli przeto wyrugujemy z z pomiędzy równań $z=ax+\alpha$, $z=by+\beta$, znajdziemy

$$y=\frac{a}{b}x+\frac{\alpha-\beta}{b}.$$

Równanie to będąc pierwszego stopnia, wyraża związek między spółrzędnemi xy, więc do rzutu prostej na płaszczyznę xy należeć powinno (*).

(*) Dla usunięcia wszelkiej w tym względzie wątpliwości, wystawmy przez $y=Ax+B$ równanie rzutu na płaszczyznę xy: łatwo dowieść że to równanie ma toż samość z równaniem $y=\frac{a}{b}x+\frac{\alpha-\beta}{b}$;

Niechaj będą x', y', z' i x'', y'', z'' spółrzędne dwóch punktów linii prostej: ponieważ te spółrzędne powinny obadwa równania sprawdzić, będziemy więc mieli

$$y'=Ax'+B;\ y'=\frac{a}{b}x'+\frac{\alpha-\beta}{b},\quad y''=Ax''+B,\ y''=\frac{a}{b}x''+\frac{\alpha-\beta}{b};$$

po wyrugowaniu rzędnych y' i y'' otrzymamy

$$\left(A-\frac{a}{b}\right)x'+B-\frac{\alpha-\beta}{b}=0,\ \left(A-\frac{a}{b}\right)x''+B-\frac{\alpha-\beta}{b}=0,\ (1);$$

odjąwszy te równania jedno od drugiego mamy

$$\left(A-\frac{a}{b}\right)(x'-x'')=0.$$

Ponieważ spółrzędne x' i x'' z założenia są nierówne, nie można więc temu równaniu zadosyć uczynić, tylko jeżeli

414. Wypada z tego że gdy mamy dwa z równań rzutów, położenie prostej ustalonem jest w przestrzeni. Jakoż jeżli na płaszczyzny spółrzędne, obejmujące te rzuty spuścimy dwie płaszczyzny prostopadłe, te płaszczyzny będą płaszczyznami rzucającemi. Widzieliśmy zaś, Licz 409, że ich przecięcie wyznacza położenie prostej w przestrzeni.

415. Równania rzutów prostej w przestrzeni są nazwane jej równaniami.

Rozwiązanie różnych zagadnień o linii prostej w przestrzeni.

Zagadnienie 1.

416. Znaleść spółrzędne punktu w którym prosta mająca równanie $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ spotyka jedną z płaszczyzn spółrzędnych.

Jeżeli ta płaszczyzna spółrzędna jest płaszczyzną xy, uczyniemy $x = 0$, i otrzymamy $x = \alpha$, $y = \beta$, za spółrzędne tego punktu.

Podobne postępowanie i do innych płaszczyzn da się użyć: lecz w tym przypadku należy mieć równanie i trzeciego rzutu. Dla otrzymania jego

---

$$A - \frac{a}{b} = 0, \text{ to jest } A = \frac{a}{b}.$$

Za ważnie sprowadza jedno z równań (1) do

$$B - \frac{(\alpha - \beta)}{b} = 0, \text{ co daje } B = \frac{\alpha - \beta}{b}$$

wyrugowawszy z dwóch równań prostej, znajdziemy

$$y-\beta=\frac{b}{a}(x-\alpha),$$

uczyniwszy zatém $y=0$, dwa równania posiadające tę zmienną dadzą

$$z=-\frac{\beta}{b},\quad x=\alpha-\frac{a\beta}{b},$$

dla spółrzędnych punktu w którym płaszczyznę xz prosta spotyka.

Nakoniec uczyniwszy $x=0$, podobnie znajdziemy

$$z=-\frac{\alpha}{a},\quad y=\beta-\frac{b\alpha}{a},$$

dla spółrzędnych punktu w którym prosta płaszczyznę xy przecina.

Zagadnienia II.

417. Znaleść równania linii mającej przez dany punkt przechodzić.

Niechaj będą x', y', z' spółrzędne tego punktu. Ponieważ równania danej prostej są $x=az+\alpha\ (a)$, $y=bz+\beta\ (b)$

a spółrzędne x', y', z' powinny sprawdzić te równania, będzie

$$x'=az'+\alpha\ (c),\quad y'=bz'+\beta\ (d).$$

Gdy położymy w równanie (a) ważność stałej α z równania (c) wyciągniętą; a w równanie (b) ważność stałej β z równania (d) wyciągniętą, otrzymamy $x-x'=a(z-z')$, $y-y'=b(z-z')\ldots(e)$.

Zagadnienie III.

418. Znaleść równania prostej mającej przechodzić przez dwa punkty.

Niechaj będą x', y', z', i x'', y'', z'' spółrzędne tych punktów: zniewalając prostę do przechodzenia przez punkt z', x', y' znajdziemy równania (e); te równania spółrzędne x'', y'', z'', za x, y, z, położone sprawdzić powinny; w tym razie równania (e) zamienią się na

$$x''-x' = a(z''-z'), \quad y''-y' = b(z''-z');$$

zkąd wyciągniemy $a = \frac{x''-x'}{z''-z'}$, $b = \frac{y''-y'}{z''-z'}$.

wstawiwszy te wartości w równania (e) otrzymamy dla równań linii mającej przechodzić przez dwa punkta.

$$x-x' = \frac{x''-x'}{z''-z'}(z-z'), \quad y-y' = \frac{y''-y'}{z''-z'}(z-z')$$

Zagadnienie IV

419. Znaleść warunek aby dwie linie proste dane w przestrzeni przecięły się z sobą.

Niechaj będą równania tych prostych

$$x = az+\alpha, \quad y = bz+\beta \ldots (f)$$

$$x = a'z+\alpha, \quad y = b'z+\beta' \ldots (g).$$

Spółrzędne punktu przecięcia powinny bydź te same w obudwu równaniach prostych: wyngorowawszy zatém trzy zmienne x, y, z, z tych czterech równań, otrzymamy naprzód, odjąwszy równania (g) od równań (f)

$$(a-a')z+\alpha-\alpha' = 0 \ldots (h)$$

$$(b-b')z+\beta-\beta'=0 \quad (i).$$

Wyrugowawszy z z równań (h) i (i) otrzymamy

$$(\alpha'-\alpha)(b'-b)-(\beta'-\beta)(a'-a)=0.$$

Taki jest konieczny warunek aby się te proste przecięły.

420. Gdy położemy ważność zmiennej z daną równaniem (h) w pierwsze z równań (f), i ważność zmiennej z daną równaniem (i) w drugie z równań (f), wyznaczemy współrzędne x i y punktu przecięcia. Dołączywszy do nich wyrażenie zmiennej z dane równaniem (h) współrzędne punktu przecięcia będą

$$x=a\frac{(\alpha'-\alpha)}{a-a'}+\alpha=\frac{a\alpha'-a'\alpha}{a-a'}\,;\quad y=b\frac{(\beta'-\beta)}{b-b'}+\beta=\frac{b\beta'-b'\beta}{b-b'}\,;\quad z=\frac{\alpha'-\alpha}{a-a'}\,;$$

421. Gdy $a'=a$, i $b=b'$, te ważności stają się nieskończenie; więc proste spotykające się w odległości nieskończonej są równoodległe.

A tak, żeby dwie proste których równania w ogólności przez równania (f) i (g) mogą bydź wystawione były równoodległe, trzeba żeby

$$a=a', \quad b=b'.$$

Zagadnienie V.

422. Przez dany punkt $x'y'z'$ poprowadzić równoodległą od prostej której równania $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$.

Ta prosta mająca przechodzić przez punkt $x'y'z'$ ma równania kształtu

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z')$$

Dla wyrażenia warunku równoodległości weźmiemy $a = a'$, $b = b'$, i znajdziemy dla równań tej prostej

$$x - x' = a'(z - z'), \quad y - y' = b'(z - z').$$

Zagadnienie VI.

423. Znaleźć odległość dwóch punktów których spółrzędne są x', y', z' i x'', y'', z''

Niechaj będą M i M' te punkta (Fig 95), Fig 95

$$AP = x''; \; P\mathcal{P}_1 = y''; \; \mathcal{P}_1 M = z''; \; AP' = x'; \; P'\mathcal{P}_1' = y'; \; \mathcal{P}_1' M' = z';$$

ich spółrzędne. Pociągnąwszy proste $\mathcal{P}\mathcal{P}_1'$ i MM', jeżeli z punktu M mniej wyniesionego nad płaszczyznę xy spuścimy prostopadłą MN na rzędną $M'\mathcal{P}'$, trójkąt MNM' prostokątny w N da

$$MM'^2 = M'N^2 + MN^2, \text{ albo } MM'^2 = (x' - z'')^2 + \mathcal{P}\mathcal{P}_1''^2;$$

trójkąt $\mathcal{P}\mathcal{P}_1'$ prostokątny w $\mathcal{L}$ da

$$\mathcal{P}\mathcal{P}_1'^2 = \mathcal{P}\mathcal{L}^2 + \mathcal{P}_1'\mathcal{L}^2, \text{ albo } \mathcal{P}\mathcal{P}_1'^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 \ldots (f)$$

a zatém $$MM' = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z')^2}$$

wyrażenie odległości dwóch punktów M, M'.

424. Jeżeli punkt M' połączy się z punktem A (Fig 96), MM' zamieni Fig
się na AM; że zaś spółrzędne punktu A są żadne, mamy więc

$$AM^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \ldots (k).$$

Twierdzenie.

425. Summa kwadratów z dostaw kątów α, β, γ, które jakakolwiek prosta z osiami spółrzędnych czyni, równa jest jedności.

Niechaj zawsze będą x', y', z' i x'', y'', z'' spółrzędne punktów M i M' przez które przechodzi prosta MM' (Fig 95): ponieważ kąt który ta prosta Fig 9
z osią z czyni jest γ, a $M'Q'$ równoodległą jest od tej osi, mamy kąt $M = \gamma$:
a że kąt N jest prosty, mamy

$$M'N = MM' \cos M', \text{ albo } z' - z'' = MM' \cos\gamma.$$

Dla tejże przyczyny dowiedziemy że

$$y' - y'' = MM' \cos\beta, \text{ i że } x' - x'' = MM' \cos\alpha.$$

Wstawiwszy te ważności w równanie (j) otrzymamy

$$MM'^2 = M'N^2 \cos^2\gamma + MN^2 \cos^2\beta + MN^2 \cos^2\alpha.$$

podzieliwszy przez MM'^2 będzie

$$\cos^2\gamma + \cos^2\beta + \cos^2\alpha = 1.$$

Zagadnienie VII.

426. Znaleść dostawę kąta utworzonego przez dwie proste przecinające się w przestrzeni.

Niechaj będą $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$, $x = a'z + \alpha'$, $y = b'z + \beta'$, równania tych prostych. Poprowadźmy przez początek (fig 96) dwie równoodległe AL, AL', od dwóch prostych. Równania linii AL i AL' będą

$$x = az, \quad y = bz, \quad x = a'z, \quad y = b'z.$$

Ponieważ proste AL, AL' pomiędzy sobą ten sam kąt czynią co dane proste, zagadnienie przeto sprowadza się do znalezienia dostawy kąta LAL'. Odetnijmy części AM, AM', równe jedności; poprowadźmy MM'; a w trójkącie AMM', będziemy mieli

$$MM'^2 = AM^2 + AM'^2 - 2AM \times M'A \operatorname{dos} MAM' \quad (*)$$

zkąd $$\operatorname{dos} MAM' = \frac{AM^2 + AM'^2 - MM'^2}{2AM \times AM'} \ldots (l).$$

Spółrzędne punktu M' zawsze przez x', y', z' wyskazujące, a spółrzędne punktu M przez x'', y'', z'', będziemy mieli, Licz 423.

$$MM'^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z - z'')^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + x''^2 + y''^2 + z''^2 - 2(x'x'' + y'y'' + z'z''),$$

(*). Dla okazania tego twierdzenia Trygonometryi, z jednego z końców linii MM' (fig 97) spuśćmy prostopadłą MN na bok przeciwny, a będziemy mieli

$$MN = AM \operatorname{wers} A, \quad AN = AM \operatorname{dos} A;$$

Wstawiwszy tę ważność w równanie

$$MM'^2 = MN^2 + (AM' - AN')^2$$

i sprowadziwszy, otrzymamy ważność linii MM'^2.

a uważając że AM' wyraża odległość punktu x', y', z' od punktu A którego trzy spółrzędne są żadne, przekonamy się że

$$AM'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

podobnie $$AM''^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2.$$

Wstawiwszy te ważności prostych MM'^2, AM'^2, AM''^2 w równanie (l) sprowadzimy to równanie do

$$\cos MAM' = \frac{(x'x'' + y'y'' + z'z'')}{2AM \cdot AM'},$$

a że $AM = AM' = 1$, równanie to zamieni się na

$$\cos MAM' = x'x'' + y'y'' + z'z''.$$

To przysposobiwszy ponieważ punkt x'', y'', z'' wzięty jest na prostej AL, mającej za równanie $x = az$, $y = bz$, będzie $x'' = az''$, $y'' = bz''$. Podobnie ponieważ punkt, x', y', z' wzięty jest na linii AL', spółrzędne x', y', z' sprawdzą te równania, i będzie $x' = az'$, $y' = bz'$; wstawiwszy te cztery ważności spółrzędnych x', y', x'', y'', znajdziemy

$$\cos MAM' = (aa' + bb' + 1)z'z'' \ldots (m).$$

Szukajmy teraz ważności spółrzędnych z' i z'' w funkcyi stałych a i b. Między spółrzędnemi punktu M mamy trzy równania

$$x' = az', \quad y' = bz', \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Gdy wstawiemy w trzecie ważności spółrzędnych x' i y' wyciągnięte z dwóch pierwszych będzie

$z'^2(a^2+b^2+1)=1$, zkąd $z'=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}$

Gdy wstawiemy w trzecie ważności spółrzędnych x i y wyciągnięte z dwóch pierwszych będzie $z''^2(a'^2+b'^2+1)=1$, zkąd $z''=\frac{1}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}}$

Tym samym sposobem znajdziemy

$$z''=\frac{1}{\sqrt{a''^2+b''^2+1}};$$

Wstawiwszy te ważności spółrzędnych z', z'', w równanie (m), otrzymamy nakoniec $\cos.MAM'=\frac{aa'+bb'+1}{\sqrt{a^2+b^2+1}\sqrt{a'^2+b'^2+1}}$ (n).

wyrażenie dostawy kąta utworzonego przez prostą mającą równania $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$, i $x=a'z+\alpha$, $y=b'z+\beta$.

427. Jeżeli kąt MAM' jest prosty, $\cos MAM'=0$, więc $aa'+bb'+1=0$.

Zagadnienie VIII.

428. Znaleźć dostawy kątów które prosta przechodząca przez początek z trzema prostokątnemi osiami czyni.

To zagadnienie szczególnym jest przypadkiem poprzedzającego, to jest gdy jedna z prostych AL, AL' (fig 96) przystaje do której z trzech osi. Przypuśćmy zatém że np: prosta AL' łączy się z osią z: osią będąc spółrzędnych przecięciem płaszczyzn xz i zy sama jest swoim rzutem na jedną z tych płaszczyzn; a że w równaniach $x=a'z$, i $y=b'z$ prostej AL', a' i b' są stycznemi trygonometrycznemi kątów które rzuty prostej na płaszczy-

xz i zy z osią z czynią, a widzieliśmy iż rzuty i linia rucona AL mięszają się z osią odciętych; wypada przeto iż te styczne są zadne: ten wypadek sprowadza równanie (n) do

$$\cos MAL = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}} \quad (o)$$

wyrażenia dostawy kąta który czyni z osią z prosta mająca równania

$$x=az,\ y=bz.$$

Jeżeli prosta AM do osi x przysłaje, w tym razie znajduje się w spólnem przecięciu płaszczyzn xz i xy, łączy się przeto z swojemi rzutami na te płaszczyzny; wówczas ponieważ równanie $x=a'z$, wyrażone pod kształtem $z=\frac{1}{a'}x$, daje ~~x~~ $\frac{1}{a'}$ dla stycznej trygonometrycznej kąta który rzut prostej AM na płaszczyznę xz z osią x czyni, wypada że $\frac{1}{a'}=0$; podobnie przekonamy się że ponieważ równanie rzutu na płaszczyznę xy daje

$$y=\frac{b'}{a'}x, \text{ więc } \frac{b'}{a'}=0.$$

To mając, podzieliwszy równanie (n) przez a' znajdziemy

$$\frac{a+b\frac{b'}{a'}+\frac{1}{a'}}{\sqrt{1+a^2+b^2}\sqrt{1+\frac{b'^2}{a'^2}+\frac{1}{a'^2}}};$$

wyrazy równe zero wykreśliwszy, zamienimy to równanie na

$$\cos MAX' = \frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \quad (p).$$

wyrażenie dostawy kąta który czyni z osią x prosta mająca równania $x=az$, $y=bz$; Nakoniec tym samym sposobem znajdziemy

$$\cos MAY = \frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \quad (9)$$

wyrażenie cosinusa kąta który czyni z osią y prosta mająca równania

$$x = az, \quad y = bz.$$

Drugie rozwiązanie zagadnienia ósmego.

429. Formuły poprzedzające następującym jeszcze sposobem bezpośrednio okazać można.

Niechaj będą x, y, z, (Fig 98) współrzędne AP, PQ, QM, punktu M prostej AM, a $x = az$, $y = bz$ równania tej prostej. Jeżeli przez punkt M i P prostą MP przeprowadzimy, ta prosta znajdując się na płaszczyźnie MQP utworzonej przez współrzędne z i y punktu M będzie na płaszczyźnie prostopadłej do osi x; więc kąt APM będzie prosty, i nazwawszy α kąt MAP, otrzymamy proporcyą następującą

$$1 : \cos\alpha = AM : AP.$$

więc

$$\cos\alpha = \frac{AP}{AM} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

podobnym sposobem znajdziemy

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

położywszy za x, y, z, ich ważności wyciągnięte z równań $x = az$, $y = bz$, i podzielwszy przez z tak liczniki jak mianownik każdego ułamku znajdziemy wyrażenia (o)(p)(q).

Zagadnienie IX

430. Znając dostawy kątów utworzonych przez dwie proste z osiami współrzędnych, znaleść wyrażenie dostawy kąta zawartego między temi prostemi.

Niechaj będą α, β, γ, kąty które pierwsza prosta z osiami x, y, z czyni, zaś α', β', γ' które druga prosta z temiż osiami czyni, a φ kąt przez te dwie proste utworzony. Ponieważ równania prostych są

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta, \quad x = a'z + \alpha', \quad y = b'z + \beta'$$

będzie Liczba 428, $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$, $\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$, $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$

$$\cos\alpha' = \frac{a'}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}}, \quad \cos\beta' = \frac{b'}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}}, \quad \cos\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}}$$

rozmnożywszy porządkiem wyrazy odpowiadające sobie w tych dwóch liniach znajdziemy $aa' = \cos\alpha\cos\alpha'\sqrt{1+a^2+b^2}\sqrt{1+a'^2+b'^2}$

$$bb' = \cos\beta\cos\beta'\sqrt{1+a^2+b^2}\sqrt{1+a'^2+b'^2}$$

$$1 = \gamma\gamma'\sqrt{1+a^2+b^2}\sqrt{1+a'^2+b'^2}$$

Wstawiwszy te ważności w wyrażenie (n) dostawy kąta utworzonego przez dwie proste Liczba 426, zamienimy je na

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'.$$

wyrażenie dostawy kąta utworzonego przez dwie proste dane w sumie dostaw kątów, które te proste z trzema współrzędnemi osiami czynią.

O równaniu płaszczyzny.

431. Przecięcia płaszczyzny albo powierzchni z bierną spółrzędnemi płaszczyznami noszą imię śladów.

432. Uważmy naprzód płaszczyznę przechodzącą przez początek, mając dane jéj ślady AJ, AK na płaszczyznach xz, zy, lub co na jedno wychodzi równania ich mając dane, położenie téj płaszczyzny ustalonem będziemy mieli. Gdy zaś dla x i y jakichkolwiek ważności nadamy, ważność spółrzędnej z wypadnie z nich: wyznaczy się bowiem przecięciem płaszczyzny z tą spółrzędną z: istnieje przeto pewna zależność między x, y, iz, i to jest właśnie co nazywamy równaniem płaszczyzny.

Zagadnienie 1.

433. Znaleść równanie płaszczyzny.

Niechaj będą AB, AC (Fig 100) ślady płaszczyzny danej na płaszczyznach xz, yz; Jeżeli przez punkt M na płaszczyźnie położony, pociągniemy na téj płaszczyźnie równoodległą MD od śladu AB, ta równoodległa spotka drugi ślad AC w punkcie D. Przez ten punkt D poprowadźmy równoodległą ED od osi x: kąty MDE, BAX utworzone przez

linie równoodległe, dowodzą równoodległości płaszczyzn MDE, BAX. Że zaś ta ostatnia płaszczyzna ta sama jest co płaszczyzna ZAX prostopadła do dwóch innych spółrzędnych płaszczyzn yx i zy, płaszczyzna więc DME także prostopadłą będzie do płaszczyzn yx i zy. Wypada z tego, że jeżeli z punktu M spuścimy prostopadłą MQ na płaszczyznę xy, ta prostopadła na płaszczyźnie MDE znajdować się będzie: prze: to proste MQ i DE równoodległe od osi x i z przetną się pod kątem prostym na płaszczyźnie MDE w punkcie G. To mając widoczne

$$MQ = QG + MG;$$

że zaś wszystkie prostopadłe do xy z punktów równoodległej DK. poprowadzone są równe, i leż same rzędne y mają, przeto

$$GK = AD = AA\,sly\,DAA = y\,sly\,DAA,$$

mamy zkądinąd $MG = DG\,sly\,MDE$:

że zaś kąty MDAE, BAX są równe, i równoodległa DG od osi x, zawarta będąc między płaszczyzną yz i rzędną MQ równa jest odcinkowi AP: zamiast $sly\,MDE$ i DG, możemy więc położyć, $sly\,BAX$, i AP = x wyrażenie linii MG, i będzie

$$MG = x\,sly\,BAX$$

gdy położymy w równaniu $MQ = QG + GM$ otrzymane ważności dla QG i MG

znajdziemy MQ albo $z = y\,\mathrm{tg}\,DAH + x\,\mathrm{tg}\,BAH$,

nazwijmy a i b te stałe przeciw kątów BAX i DAH, utworzonych przez ślady z osiami x i y, będziemy mieli

$$z = ax + by$$

równanie płaszczyzny przechodzącej przez początek.

434. Jeżeli płaszczyzna nie przechodzi przez początek, spotka ona z lub jej przedłużenia.

Przypuśćmy zatem że płaszczyzna $C'B'$ (Fig 101) przecina oś z w A', i Fig 1 niechaj będą x, y, z, współrzędne punktu M tej płaszczyzny. Jeżeli przez punkt A przeprowadzimy płaszczyznę CB równoodległą od płaszczyzny $C'B'$, i nazwiemy z rzędną MQ tej drugiej płaszczyzny, QM i KM' różnić się będą o $MM' = AA' = c$; zatem $z = z' + c$: że zaś rzędna z' należy do płaszczyzny BC przechodzącej przez początek, mamy więc

$$z = ax + by,$$

zatem poprzedzające równanie zamieni się na

$$z = ax + by + c,$$

Jeżeli płaszczyzna oś z na przedłużeniu przecina, c odmienia znak.

435. Dla nadania więcej symetryczności poprzedzającemu równaniu, rozmnożymy je przez dowolną ilość C, a wszystkie wyrazy

na pierwszą stronę przeprowadziwszy, otrzymamy

$$lz - lax - lby - lc = 0,$$

Uczyniwszy $-lA = A$, $-lB = B$, $-lc = D$, równanie to zamienimy na

$$Ax + By + lz + D = 0,$$

równanie ogólne płaszczyzny.

Zagadnienie II

436. Znaleźć równanie płaszczyzny prostopadłej do jednej z osi współrzędnych.

Jeżeli ta płaszczyzna prostopadłą jest np: do osi z, wszystkie z będą równe: otrzymamy zatém za równanie tej płaszczyzny

$$z = \text{stałej};$$

dla tejże przyczyny jeżeli płaszczyzna do osi y jest prostopadłą, równanie jej będzie $y = \text{stałej}$;

nakoniec jeżeli płaszczyzna do osi x jest prostopadłą, równanie jej będzie $x = \text{stałej}$;

Uwa W każdém z tych równań, dwie zmienne których nie zawierają dowolne; jeżeli np: mamy $z = a$, i weźmiemy $x = m$, $y = n$, trzy spółrzędne m, n, a, wystarczą do wyznaczenia punktu płaszczyzny.

Zagadnienie III.

437. Znaleść odległość początku od punktu w którym dana płaszczyzna jedną z osi spotyka.

Zastanówmy się nad punktem w którym płaszczyzna oś z przecina. Ten punkt używać będzie własności służącej wszelkim punktom znajdującym się na tej osi; dla wszystkich zaś punktów na tej osi $x=0$, $y=0$; wstawiwszy zatém te ważności w równanie płaszczyzny sprowadzimy je do

$$Cz + D = 0, \text{ skąd } z = -\frac{D}{C}.$$

dla rzędnej punktu przecięcia, to jest dla odległości początku od punktu w którym płaszczyzna oz z spotyka. Cośmy o tej osi powiedzieli i do innych stosować się może.

Zagadnienie IV.

438. Znaleść równania śladu płaszczyzny na jednej z płaszczyzn współrzędnych.

Weźmy napr. płaszczyznę xy za tę płaszczyznę współrzędną: ponieważ ślad jest utworzony przez punkta danej płaszczyzny leżące na płaszczyźnie xy, uczyniwszy zatem $z=0$ w równaniu płaszczyzny $Ax + By + Cz + D = 0$, sprowadzimy je do równania śladu na

płaszczyznie xy, i będzie $Ax + By + D = 0$:

równanie śladu na płaszczyznie xy: uczyniwszy potem $y = 0$, i $z = 0$, znajdziemy $By + Cz + D = 0$:

równanie śladu na płaszczyznie yz;

$Ax + Cz + D = 0$;

równanie śladu na płaszczyznie xz.

439. Znaleść równanie płaszczyzny prostopadłej do jednej z płaszczyzn spółrzędnych.

Przypuśćmy że ta spółrzędna płaszczyzna jest płaszczyzna xy: równanie zatém śladu BC (Fig 102) na płaszczyznie xy może być przez $y = ax + b$ wystawione. Jeżeli potém na płaszczyznie xy weźmiemy punkt G którego spółrzędne x', y' sprawdzają to równanie ten punkt na śladzie znajdować się będzie: wyprowadziwszy z niego rzędną MG = z, rzędna ta przystanie do płaszczyzny; a zatém jakąkolwiek nadamy jéj wartość, zawsze nam wyznaczy punkt należący do płaszczyzny: widzimy więc iż w tym przypadku x i y związane są między sobą równaniem śladu płaszczyzny BC, i że z jest dowolnem. To samo o innych płaszczyznach xz i yz da się powiedzieć. Więc śmiało

Fig 102

możemy twierdzić że równanie płaszczyzny prostopadłej do jednej z osi spół-
rzędnych, sprowadza się do równania śladu na tej płaszczyźnie

Twierdzenie.

440. Gdy linia prostopadła jest do pewnej płaszczyzny, rzut jej na je-
dną z płaszczyzn spółrzędnych, jest prostopadłym do śladu płaszczy-
zny na tej samej płaszczyźnie spółrzędnej.

Dla okazania tego niechaj będzie (Fig 103) MN płaszczyzna spółrzędna, Fig 103
BJ dana płaszczyzna, ED prostopadła do tej płaszczyzny; ED rzut linii
ED na MN. Płaszczyzna rzucająca EDC prostopadłą jest do MN, a że zaciś-
za ED, prostopadłą jest także do płaszczyzny BJ: więc płaszczyzna CDE
razem jest prostopadłą do płaszczyzny MN i BJ, a zatem i do spólnego
ich przecięcia AB będącego śladem danej płaszczyzny na płaszczyźnie
MN, zatem ślad AB także jest prostopadłym do CDE, musi być
przeto prostopadłym i do wszelkiej prostej leżącej na płaszczyźnie
CDE. Będzie więc i do prostej CD, która jest rzutem prostej ED.

Zagadnienie V.

441. Przeprowadzić płaszczyznę przez trzy dane punkta.

Niechaj będą x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z'''; spółrzędne tych punktów; mamy
dla wyznaczenia stałych A, B, C, D równania

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0;$$

$$Ax'' + By'' + Cz'' + D = 0;$$

$$Ax''' + By''' + Cz''' + D = 0;$$

z których wyniguwawszy naskępnie dwie z nieoznaczonych A, B, C, wyprowadzimy wypadki postaci następującej

$$A = A'D, \quad B = B'D, \quad C = C'D;$$

i równanie płaszczyzny zamieni się na

$$Ax + By + Cz + = 0.$$

Zagadnienie VI.

442. Znaleść konieczny warunek, aby linia dana prostopadłą była do pewnej płaszczyzny.

Niech będą $x = az + \alpha(r)$; $y = bz + \beta(s)$ równania prostej;

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

równanie płaszczyzny. Uczyniwszy $y = 0$; otrzymamy Liczbę 438, równanie śladu na płaszczyźnie zx

$$Ax + Cz + D = 0, \text{ albo } z = -\frac{A}{C}x - \frac{D}{C};$$

To równanie powinno służyć prostopadłej do rzutu linii danej na płaszczyznę xz: tego rzutu równanie (r) daje

$$z = \frac{1}{a}x - \frac{\alpha}{a};$$

Aby zaś to równanie służyło prostopadłej do prostej której równanie

$$x = -\frac{A}{C}z - \frac{D}{C},$$

potrzeba Lica 102, żeby współczynnik przy x jednej strony, równy był je-
dności podzielonej przez współczynnik przy x drugiej, wzięty z przeciwnym
znakiem: to jest aby $\frac{A}{C} = a$, czyli $A = aC$. Podobnie znajdziemy poró-
wnawszy równanie (.) z równaniem śladu na płaszczyźnie że
drugim warunkiem jest aby $B = bC$.

Zagadnienie VII.

413. Znaleść konieczny warunek aby dana prosta równoodległą była
od pewnej płaszczyzny.

Niechaj będą $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$, równania prostej,

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

równanie płaszczyzny. Jeżeli przeprowadzimy przez początek dowolną
prostą, i płaszczyznę równoodległą od danej płaszczyzny, równania
tej pierwszej będą $x = az$, $y = bz$,
a płaszczyzny $Ax + By + Cz = 0$.
Ta płaszczyzna i prosta mając punkt spólny, bo przechodzą przez po-
czątek, muszą przystać do siebie dla warunku równoodległości.

spotrzedne zatem prostej x, y, w każdym przypadku równanie płaszczyzny sprawdzić powinny. Gdy przeto wstawimy je w to równanie, będzie

$$Aaz + Bbz + Cz = 0.$$

podzieliwszy zaś przez z, otrzymamy za warunek żądany

$$Aa + Bb + C = 0.$$

Zagadnienie VIII.

444. Znaleźć konieczne warunki, aby dwie płaszczyzny były równoodległe.

Niechaj będą $Ax + By + Cz + D = 0$, $A'x + B'y + C'z + D = 0$, równania tych płaszczyzn; ślady tych płaszczyzn na którejkolwiek z płaszczyzn spółrzędnych, także równoodległe będą od siebie; inaczej bowiem spotkałyby się płaszczyzny. Równania tych śladów ~~xxxyxxx~~ na płaszczyźnie xz, bezpośrednio wyprowadzą się z równań płaszczyzn Licz 438, i są

$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{D}{C}, \quad z = -\frac{A'}{C'}x - \frac{D'}{C'};$$

warunek aby te ślady były równoodległe, będzie zatem

$$\frac{A}{C} = -\frac{A'}{C'}.$$

Uważając dwie inne spółrzędne płaszczyzny, otrzymamy te inne warunki

$$\frac{B}{C} = \frac{B'}{C'}, \quad \frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$$

Zagadnienie IX.

445. Z danego punktu x', y', z' spuściwszy prostopadłą na pewną płaszczyznę, wynaleść część tej prostopadłej zawartą między punktem x', y', z', i płaszczyzną.

Niechaj będą $x - x' = a(z - z')$ (t), $y - y' = b(z - z')$ (u) równania prostej

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

równanie płaszczyzny. Wziąwszy współrzędne z, x, y za te same w tych trzech równaniach, przypuścimy przez to że współrzędne do punktu przecięcia należą. To przypuściwszy równania (t) i (u) dadzą

$$x = a(z - z') + x', \quad y = b(z - z') + y';$$

Rozmnożywszy jedno z tych równań przez A, drugie przez B, będziemy mieli ważności wyrazów Ax i By równania (v), które wstawiwszy w to równanie znajdziemy

$$(Aa + Bb)(z - z') + Cz + Ax' + By' + D = 0;$$

czyli

$$(Aa + Bb + C)(z - z') + Ax' + By' + Cz' + D = 0;$$

zkąd

$$(z - z') = -\frac{(Ax' + By' + Cz' + D)}{Aa + Bb + C}$$

Gdy położymy w to równanie ważności stałych a i b, dane równaniami $A = aC$, $B = bC$, mającemi tenaz miejsce, Liczb 442, gdyż linia prostopadła jest do płaszczyzny, otrzymamy,

$$z-z' = -A\frac{(Ax'+By'+Cz'+D)}{\frac{A^2}{C}+\frac{B^2}{C}+C.} = -\frac{(Ax'+By'+Cz'+D)C}{A^2+B^2+C^2};$$

Jeżeli tę ważność i ważność stałych a i b, wprowadzenia (l) i (u) wstawić my, będziemy mieli

$$x-x' = -\frac{(Ax'+By'+Cz'+D)}{A^2+B^2+C^2}$$

$$y-y' = -\frac{B(Ax'+By'+Cz'+D)}{A^2+B^2+C^2}$$

Za pomocą tych ważności wyrażenie odległości dwóch punktów

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

zamieni się na $\sqrt{\frac{(Ax'+By'+Cz'+D)^2}{A^2+B^2+C^2}} = \frac{Ax'+By'+Cz'+D}{\sqrt{A^2+B+C^2}}$;

i wyrazi odległość punktu przecięcia od punktu x', y', z'.

Zagadnienie X.

446. Znaleźć kąt utworzony przez dwie płaszczyzny.

Spuściwszy dwie prostopadłe na te płaszczyzny, kąt tych prostopadłych ten sam będzie co płaszczyzn. (*). Niechaj będą

(*) Dla dowiedzenia tego niechaj będą płaszczyzny AB i CD (Fig 102) na Fig. które z punktu M spuścimy dwie prostopadłe MP, MQ. Jeżeli przez te prostopadłe przeprowadzimy płaszczyznę MPQ, ta płaszczyzna prostopadłą będzie do każdej z płaszczyzn AB i CD, a zatem spólne prze-

cięcie

$x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$, $x=a'z+\alpha'$, $y=b'z+\beta'$,

równania tych prostych. Aby z nich pierwsza prostopadłą była do płaszczyzny której równanie $Ax+By+Cz+D=0$;

potrzeba żeby $A=ac$, $B=bc$; Aby druga prostopadłą była do płaszczyzny której równanie $A'x+B'y+C'z+D=0$;

trzeba żeby $A=a'C'$, $B=b'C'$. Za pomocą tych równań wyrugowawszy $aa'+bb'$ z wyrażenia (n) dostawy kąta utworzonego przez te proste, Liczb 42b, któ-

ry nazwiemy φ, otrzymamy

$$\cos\varphi=\frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

wyrażenie dostawy kąta utworzonego przez dwie płaszczyzny mające równania $Ax+By+Cz+D=0$, $A'x+B'y+C'z+D'=0$,

. 44. Jeżeli płaszczyzny są prostopadłe, kąt φ staje się prostym, dos φ

---

tych płaszczyzn NL prostopadłem będzie do płaszczyzny MPQ. Nawzajem ska-

żdy OP, OQ do OD prostopadłemi będą, i kąt PQR nachylenie tych płaszczyzn mierzyć będzie: zaś $\angle MPR=PQR$, bo suma czterech kątów wczworoboku, ró-

wna jest czterem kątom prostym: a że kąty P i Q są proste, odjąwszy je od tej

sumy pozostanie $PQR+RMQ=2$ kątom prostym; więc $PQR=\angle MPR$, to

jest, że kąt mierzący nachylenie płaszczyzn, równy jest kątowi utwo-

rzonemu przez prostopadłe do tych płaszczyzn.

giniè i będzie $AA' + BB' + CC' = 0$;

448. Nakoniec jeżeli płaszczyzna której równanie $A'x + B'y + C'z + D = 0$, wystawia płaszczyznę xy, to równanie sprawdzi się gdy $z = 0$; Gdy płaszczyzna przystaje do płaszczyzny xy, porównawszy równanie $z=0$, z równaniem

$$A'x + B'y + C'z + D = 0,$$

widzimy że $A' = 0$, $B' = 0$, $C' = 1$, $D' = 0$;

wstawiwszy trzy pierwsze ważności w wyrażeniu dostawy φ, i nazwawszy to γ czém φ w tém nowém założeniu będzie otrzymany

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

wyrażenie dostawy kąta który czyni płaszczyzna xy z płaszczyzną mającą równanie

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

nazwawszy β i α ~~który~~ kąty które płaszczyzna z płaszczyznami xz i yz czyni, podobnie znajdziemy

$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

449. Niechaj będą α', β', γ' kąty które druga płaszczyzna z płaszczyznami współrzędnemi czyni. Jeżeli w wyrażeniu $\cos\varphi$, Liczb 446, te same przekształcenia poczyniemy, co pod Liczb 430, znajdziemy

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma',$$

wyrażenie dostawy kąta dwóch płaszczyzn w funkcyi dostaw ~~kąt~~

tych płaszczyzn z płaszczyznami współrzędnemi.

Zagadnienie XI.

450. Znaleść kąt przez pewną prostą i płaszczyznę utworzony.

Niechaj będą $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ } równania prostej

$Ax + By + Cz + D = 0$ } równanie płaszczyzny

Wystawmy tę prostą przez P_1 (Fig 105): rzut linii PP_1 na płaszczyznę MN fig jest PR, a kąt QPR nachylenie prostej do płaszczyzny mierzyć będzie.

Niechaj są $x = a'z + \alpha$, $y = b'z + \beta$

równania prostej PR. Ponieważ ta linia prostopadła jest do płaszczyzny

Licz 442, przeto $A = aC$, $B = bC$;

położywszy ważności stałych a i b temi równaniami dane w wyrażenie (a) dostawy kąta RQP, który te proste czynią pomiędzy sobą, znajdziemy

$$\frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

za wyrażenie dostawy kąta RQP, albo wstawy RPP_1 utworzonego przez prostą i płaszczyznę.

451. Jeżeli prosta PP_1 staje się równoodległą od płaszczyzny, wstawa kąta RPP_1 jest zadna, i poprzedzające wyrażenie sprowadza się do $Aa + Bb + C = 0$.

Zagadnienie XII.

452. Znaleść równanie przecięcia się płaszczyzn.

Niech zaś będą $Ax + By + Cz + D = 0$, $A'x + B'y + C'z + D' = 0$,

równania tych płaszczyzn: spółrzędne wszystkich punktów spólnego przecięcia też same będą w każdém równaniu; można zatém wymagać następnie jedną ze zmiennych, y naprzykład, potém x, a otrzymamy równania które się dadzą wystawić przez

$$x = Mz + N, \quad y = M'z + N'.$$

Te równania należą do linii prostej, będącej spólném przecięciem się płaszczyzn.

Zagadnienie XIII.

453. Znaleść najkrótszą odległość dwóch prostych położonych w przestrzeni.

Uważajmy jedną z tych prostych za oś z: przez którykolwiek punkt M tej osi Az (fig 106) poprowadźmy dowolną prostę MN do prostej BC. fig 10

Gdyby MN nie przecinała BC pod kątem $\frac{\pi}{2}$ prostym, z punktu M spuśćmy prostopadłą MP, taby krótszą od MN była, co jest przeciwném założeniu. Linia zatém najkrótsza będzie prostopadłą do BC; podobnie do: dowiedlibyśmy że i do AZ powinna bydź prostopadłą.

To przygotowawszy wystawmy przez MN (fig 107) tę najkrótszą całe: fig 1

głość

i przez punkt N' poprowadzimy równoodległą N'N'' od AZ: MN z założenia będąc prostopadłą do prostych CB i AZ powinna być także prostopadłą i do równoodległej N'N'' od tej ostatniej, jakoteż i do płaszczyzny GNN' utworzonej przez proste GB, N'N'. Ta płaszczyzna GNN' zawierająca równoodległą od AZ, prostopadłą jest także do płaszczyzny xy, a jej ślad jest rzutem prostej GB, ten ślad bowiem jest spodkiem wszystkich prostopadłych spuszczonych z różnych punktów linii GB. I początku A spuściwszy prostopadłą CA na ślad ED, ta prosta CA znajdując się na płaszczyźnie xy, także prostopadłą będzie do płaszczyzny DEBG, a tak mamy dwie prostopadłe AC, MN do płaszczyzny DEBG spuszczone z dwóch różnych punktów równoodległej AM od tej płaszczyzny: więc te prostopadłe są równe. Niechaj będzie $y = Ax + B$ równanie rzutu DE: kąt AFH jest kątem którego styczna jest A: w trójkątach prostokątnych CAH, AAH, kąt ACH jest dopełnieniem kąta F i ACA; więc ACA = F. zatem AC = AH dla F. Dla wyznaczenia dla F mamy $\operatorname{tg} F = A$, więc

$$\text{Sie } F = \sqrt{1 + A^2}, \text{ a dla } F = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2}}$$

Za pomocą tej ostatniej ważności wyrażenie prostej AC zamienimy na

$$\frac{AH}{\sqrt{1 + A^2}} = \frac{B}{\sqrt{1 + A^2}}$$

wyrażenie najkrótszej odległości prostych AZ i BC.

O przecięciach Ostrokręgu.

454. Starożytni krzywym drugiego rzędu inne przecięć ostrokręgowych (sekcyi konicznych) nadali; otrzymujemy je bowiem przecinając ostrokrąg płaszczyzną.

Weźmy za początek (Fig 108) środek A podstawy ostrokręgu, i skierujmy: Fig 108.
my oś z podług wysokości tego ostrokręgu: nazwijmy a promień AC podstawy ostrokręgu, zaś b wysokość. Jeżeli przez punkt M boku ZC poprowadzimy równoodległą MQ od osi AZ, to równoodległa MQ będzie rzędną z punktu M: dwie inne współrzędne będą AP = x, PQ = y: dla podobieństwa trójkątów ZAC, MQC, otrzymamy

$$\frac{AZ}{AC} = \frac{MQ}{QC} = \frac{MQ}{AC - AQ} \; ; \text{ czyli } \frac{b}{a} = \frac{z}{a - \sqrt{x^2+y^2}}$$

przeto

$$z = \frac{b}{a}\left(a - \sqrt{x^2+y^2}\right)$$

równanie ostrokręgu którego środek podstawy znajduje się w początku, a wysokość podług osi z jest skierowana. Przetnijmy ostrograg płaszczyzną; dla większej łatwości przypuśćmy że ślad tej płaszczyzny na xy, równo: odległy jest od osi y: ponieważ równanie płaszczyzny, w ogólności jest

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

równanie śladu na xy będzie

$$Ax + By + D = 0,$$

że zaś ten ślad ma być równoodległym od osi Ay, potrzeba zatém żeby x było stałem, Liczb 87, co wymaga aźeby B było zadnem, a zatém równanie płaszczyzny zamieni się w tém założeniu na

$$Ax + Cz + D = 0,$$

równanie płaszczyzny której ślad równoodległy jest od osi y. Z tego równania i równania osi stożkowego wyrugowawszy z będzie

$$\frac{b}{a}\left(a - \sqrt{x^2+y^2}\right) = -\left(\frac{A}{C}x + \frac{D}{C}\right) \cdots (w).$$

równanie przecięcia stożkowego przez płaszczyznę

Przeniośmy początek w punkt O (Fig 109) w którym przedłużenie osi x Fig 109 ślad KJ spotyka, i nazwijmy x' odcięte PO, będzie $x = x' - AO$. Dla wyznaczenia AO czynię $z = 0$ w równaniu $Ax + Cz + D = 0$ płaszczyzny KL, i znajduję dla odcięte tej punktu O, $x = -\frac{D}{A}$. Ważność bezwzględna odcięte AO będzie zatém $\frac{D}{A}$; położywszy $x' - \frac{D}{A}$ w równanie (w) zamieńmy to równanie na

$$\frac{b}{a}\left(a\sqrt{\left(x-\frac{D}{A}\right)^2 + y^2}\right) = -\frac{A}{C}x'.$$

Przez spodek Q rzędnej $z = MQ$ pociągnijmy równoodległą Q, N od rzędnej, x' OP, będziemy mieli $NQ = OP$; a trójkąt prostokątny MNQ da

$$MN \operatorname{dos} MNO = NQ = x'.$$

Ponieważ kąt MNQ nachylenie dwóch płaszczyzn mierzący jest stały, naznaczmy go więc przez φ, nazwijmy MN, x, a będziemy mieli:

$$\frac{b}{a}\left(a - \sqrt{\left(x\cos\varphi - \frac{D}{A}\right)^2 + y^2}\right) = \frac{A}{C}x\cos\varphi \ldots (x).$$

współrzędne punktu M staną się $P_1 = L_1N = y$, i $NM = x$, a więc na płaszczyźnie kL, znajdować się będą.

Dla poznania krzywej którą daje równanie (x) podzielimy to równanie przez czynnik za nawiasami leżący, przeniesiemy pierwiastek na jedną stronę, a podniesiemy do kwadratu otrzymamy

$$\left(x\cos\varphi - \frac{D}{A}\right)^2 + y^2 = a^2 + \frac{2a^2A}{bC}x\cos\varphi + \frac{a^2A^2}{b^2C^2}x^2\cos^2\varphi,$$

wyrazy przez jednakową potęgę odciętej x rozmnożone w nawiasach zebrawszy, i nazwawszy M wszystkie stałe wyrazy, otrzymamy

$$y^2 + \left(1 - \frac{a^2A^2}{b^2C^2}\right)x^2\cos^2\varphi - 2\left(\frac{D}{A} + \frac{a^2A}{b^2C}\right)x\cos\varphi + M = 0 \ldots (y)$$

to równanie przedstawia się stale może: albowiem wystawia ligat który z płaszczyzną xy tworzy płaszczyzna mająca równanie $Ax + Cz + D = 0$; jeżeli zatem w pierwszej formule str. 448 uczynimy $B = 0$ znajdziemy

$$\cos\varphi = \frac{C}{\sqrt{A^2 + C^2}}, \quad i \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \sqrt{\frac{1 - \cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}} = \frac{A}{C}.$$

Z drugiej strony nazwawszy ψ kąt ZVA który bok stożkowy z płaszczyzną xy czyni, mamy $\frac{\operatorname{tg} ZVA}{1} = \frac{ZA}{VA} = \frac{b}{a}$;

Wstawiwszy te ważności ilorazów $\frac{A}{C}$ i $\frac{b}{a}$ w równanie (y) zamienimy je na

$$y^2 + \left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{\operatorname{tg}^2\psi}\right)x^2\cos^2\varphi - 2\left(\frac{D}{A} + a\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\psi}\right)x\cos\varphi + M \ldots (z).$$

Porównawszy to równanie z ogólnem równaniem (A') krzywych drugiego rzędu, przekonamy się że pomienia wyrazu w xy brakuje, aby krzywa

Ellipsą, Parabolą lub Hyperbolą była, koniecznym warunkiem będzie, aby $\left(\frac{\operatorname{sty}^2\varphi}{\operatorname{sty}^2\psi}\right)$ dosf była ujemną, zadną lub dodajną.

Te warunki sprowadzają się do otrzymania w pierwszym przypadku $\frac{\operatorname{sty}\varphi}{\operatorname{sty}\psi}$ mniejszej od jedności, w drugim $\frac{\operatorname{sty}\varphi}{\operatorname{sty}\psi}$ równej jedności, a w trzecim $\frac{\operatorname{sty}\varphi}{\operatorname{sty}\psi}$ większej od jedności: krzywa przeto będzie

Ellipsą, jeżeli $\operatorname{sty}\varphi < \operatorname{sty}\psi$, albo $\varphi < \psi$;

Hyperbolą, jeżeli $\operatorname{sty}\varphi > \operatorname{sty}\psi$, albo $\varphi > \psi$;

Parabolą, jeżeli $\operatorname{sty}\varphi = \operatorname{sty}\psi$, albo $\varphi = \psi$.

455. Podług tych warunków łatwo jest widzieć, że jeżli przez jaki punkt boku ZO ostrokręgu nieograniczonego (Fig. 109) przeprowadzimy płaszczyznę i mamy $\varphi = \psi$, to jest $DOA = ZOA$, co jest przypadkiem Paraboli, płaszczyzna równoodległą będzie od boku ZO, oddalać się zaś od niego będzie, jeżeli warunek Hyperboli jest dopełniony, gdy tymczasem w przypadku Ellipsy płaszczyzna przecinająca spotka bok ZO ostrokręgu nieograniczonego.

456. Jeżeli płaszczyzna RR równoodległą jest od płaszczyzny xy, mamy $\varphi = 0$; ważności $\operatorname{sty}\varphi = 0$, $\operatorname{dosf} = 1$, wstawione w równanie (z) zamienia je na

$$y^2 + x^2 - 2\frac{D}{A}x + M = 0,$$

co nam pokazuje że w tym przypadku przecięcie ostrokręgu jest kołem.

O przemianie spółrzędnych w przestrzeni.

457. Mając punkta krzywej odniesionej do osi spółrzędnych, AX, AY, AZ, (Fig 110) załóżmy sobie odnosić je do trzech innych stałych osi AX', AY', AZ', Fig 110

Obierzmy punkt M na krzywej: i niechaj będą AP = x, PQ = y, QM = z, dawne spółrzędne odniesione do osi AX, AY, AZ: a AP' = x', P'Q' = y', Q'M = z', nowe spółrzędne odniesione do osi AX', AY', AZ': przez punkta, P', Q', M, przeprowadźmy płaszczyzny równoodległe od płaszczyzny xy, czém spółrzędna z, na trzy części zawarte między temi płaszczyznami podzieloną zostanie: wówczas część pierwsza równa będzie rzutowi odcinka x' na oś z, część druga rzutowi rzędnej y' na oś z, a trzecia rzutowi spółrzędnej z' na oś z. Nazwawszy zatém z, z', z'' kąty które nowe spółrzędne x', y', z' z osią z czynią otrzymamy

$$z = x' \cos z + y' \cos z' + z' \cos z'';$$

w ogólności tylko, te wyrazy z dodającym znakiem piszemy, mogą bydź bowiem i z ujemnym, gdy dostawy należą do kątów wymagających odmiany znaków.

Nazwawszy X, X', X'' kąty które nowe spółrzędne z osią AX czynią, a Y, Y', Y'' które z osią AY czynią, sposobem podobnym poprzedzającemu, otrzymamy dwa pierwsze z trzech równań następujących, które przyłączymy do otrzymanego

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos X' + y'\cos X' + z'\cos X''; \\ y &= x'\cos Y' + y'\cos Y' + z'\cos Y'; \\ z &= x'\cos Z' + y'\cos Z' + z'\cos Z''; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (a').$$

458. Gdybyśmy inny początek miéli, a spółrzędne jego naznaczywszy a, b, c, otrzymalibyśmy widocznie

$$x = x'\cos X' + y'\cos X' + z'\cos X'' + a;$$

$$y = x'\cos Y' + y'\cos Y' + z'\cos Y'' + b;$$

$$z = x'\cos Z' + y'\cos Z' + z'\cos Z'' + c;$$

ponieważ dawne osie AX, AY, AZ są prostokątne i z nową spółrzędną x' czynią kąty X, Y, Z, z nową spółrzędną y' kąty X', Y', Z', z nową spółrzędną z', X'', Y', Z'', będzie podług Liczb 425

$$\left.\begin{aligned} \cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z &= 1, \\ \cos^2 X' + \cos^2 Y' + \cos^2 Z' &= 1, \\ \cos^2 X'' + \cos^2 Y'' + \cos^2 Z'' &= 1, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (b')$$

459. Pozostają nam jeszcze do uważania kąty, które nowe spółrzędne między sobą czynią.

Niechaj będzie V kąt osi x' i y'; W kąt osi y' i z', W kąt osi x' i z'. Ponieważ x' i y' są dwie prostè czyniące kąty X, Y, Z i X', Y', Z' z dawnemi osiami, a kąt tych prostych wystawiony jest przez V, będzie podług Liczb 429

$$\cos V = \cos X \cos X' + \cos Y \cos Y' + \cos Z \cos Z'.$$

Ponieważ spółrzędna z' z dawnemi osiami kąty X'', Y'', Z'' czyni, możemy zatém wyznaczyć kąty U i W, które ta spółrzędna z' z spółrzędnemi x' i y' czyni w funkcyi kątów utworzonych przez te proste z dawnemi osiami, tak że będziemy mieli trzy następujące równania dla wyznaczenia V, U, i W

$$\left.\begin{aligned} \cos V &= \cos X \cos X' + \cos Y \cos Y' + \cos Z \cos Z' \\ \cos U &= \cos X \cos X' + \cos Y \cos Y'' + \cos Z \cos Z'' \\ \cos W &= \cos X' \cos X'' + \cos Y \cos Y'' + \cos Z \cos Z''. \end{aligned}\right\} \ldots (c').$$

460. Jeżeli nowe spółrzędne x', y', z' także są prostokątne, kąty V, U, i W będą proste, przeto $\cos V = 0$, $\cos U = 0$, $\cos W = 0$, co poprzedzające równania sprowadzi do

$$\left.\begin{aligned} \cos X \cos X' + \cos Y \cos Y' + \cos Z \cos Z' &= 0. \\ \cos X \cos X'' + \cos Y \cos Y'' + \cos Z \cos Z'' &= 0, \\ \cos X' \cos X'' + \cos Y' \cos Y'' + \cos Z' \cos Z'' &= 0 \end{aligned}\right\} (d').$$

a tak przypuszczając że nowe spółrzędne z tegoż samego początku wychodzą, mamy dziewięć równań (a'), (b'), (d') do przejścia z jednego układu spółrzędnych prostokątnych w przestrzeni, do innego układu spółrzędnych prostokątnych.

461. Jeżeli dwie nowe osie na przykład AX' i AY' (Fig 110) pozostają na płaszczyźnie xy dawnych osi, zaś AZ' przystaje do AZ, kąt z' tych osi AZ i AZ' Fig.

będzie zadnym, a kąty X'' i Y'' osi AZ z osiami AX i AY będą proste. Wypadnie przeto

$$\cos Z'' = 1, \quad \cos X'' = 0, \quad \cos Y'' = 0.$$

Nowe osie AX' i AY' jedynie zniewolone do znajdowania się na płaszczyźnie xy, dowolny kąt czynić mogą między sobą: lecz oś AZ' przysłając do AZ proste kąty z AX i AY czynić muszą: otrzymamy zatem $\cos U = 0$, $\cos V = 0$, a dwa ostatnie z równań (c') zamienią się na $\cos Z = 0$, $\cos Z' = 0$; ważności te sprowadzają równania (b') do

$$\cos^2 X + \cos^2 Y = 1, \quad \cos^2 X' + \cos^2 Y' = 1,$$

będzie więc $\cos Y = \pm \cos X$, $\cos Y' = \pm \cos X'$;

i równania (a') zamienią się na

$$x = x' \cos X + y' \cos X', \quad y = x' \cos X' + y' \cos X',$$

formuły otrzymane podług Liczb 289.

462. Do przemian spółrzędnych są jeszcze inne ważne formuły, które zaraz okażemy. Chcąc ze spółrzędnych prostokątnych x, y, z przejść do nowego układu spółrzędnych prostokątnych x''', y''', z''' odniesionych do tegoż samego początku, i zakładając sobie znaleźć konieczne warunki, aby wyznaczyć położenie nowych osi Ax''', Ay''', Az''' (Fig 111) ponieważ te nowe osie są prostokątne, widocznie zatem gdy osie Ax''', Ay''' dane będą z położenia, nowa oś Az''' wyznaczona zostanie warunkiem prostopadło- Fig

do dwóch innych: a tak wszystko się sprowadza do wyznaczenia osi Ax''', Ay'''.

Płaszczyzna $x'''y'''$ którą te osie Ax''', Ay''' tworzą wyznaczoną będzie jeżeli mamy danem kąt $\varphi\psi$ który ślad tej płaszczyzny z osią x czyni, i kąt θ mierzący nachylenie płaszczyzn xy, $x'''y'''$. Pomieważ spółrzędne $x'''y'''$ mają się znajdować pod kątem prostym na płaszczyźnie $x'''y'''$, aby je wyznaczyć dosyć mieć danem kąt który oś Ax''' ze śladem czyni.

Położenie zatem nowych spółrzędnych tylko od następujących trzech rzeczy zawisło. 1. od kąta ψ który ślad płaszczyzny $x'''y'''$ z osią x czyni,

2. od kąta θ który płaszczyzna xy z płaszczyzną $x'''y'''$ czyni

3. od kąta φ która oś nowa Ax''' ze śladem czyni.

Dla wyznaczenia nowych spółrzędnych x''', y''', z''' w funkcyi dawnych x, y, z, odmierzmy naprzód osie Ax, Ay (fig 112) na dwie inne prostokątne fig 1
także znajdujące się na płaszczyźnie xy a wziąwszy ślad AE który płaszczyzna $x'''y'''$ na płaszczyźnie xy czyni za jedną z tych osi która przez A x' naznaczemy, druga Ay' będzie prostopadłą do tej: że zaś znamy kąt ψ który ślad AE lub raczej oś Ax' z dawną osią x tworzy, będziemy więc mieli dla formuł M''' Lice 291

$$x = x'\cos\psi - y'\sin\psi, \quad y = x'\sin\psi + y'\cos\psi \ldots (e').$$

a że płaszczyzna $x'y'$ ta sama jest co płaszczyzna xy, będzie jeszcze $z = z'$

$$z = z' \ldots (f')$$

Ponieważ oś Ay' prostopadłą jest do śladu EA, jeżeli zatém do tego samego śladu w punkcie A leci za płaszczyzną xy drugą prostopadłą Ay" spuścimy takim sposobem ażeby Ay" czyniło z Ay' kąt y'Ay"=θ, ta prosta Ay" na płaszczyźnie x"y" leżyć będzie, kąt bowiem który płaszczyzna x"y" z płaszczyzną xy czyni, powinien bydź mierzony dwiema prostopadłemi do spólnego przecięcia kąt θ między sobą tworzącemi.

Przemieńmy na płaszczyźnie na płaszczyźnie y'Ay", osie Ay' i Az' Az na dwie inne Ay" i Az"; ponieważ znamy kąt θ który osie Ay' i Ay" między sobą tworzą, będzie podług formuł Liczi 291

$$y' = y''\cos\theta - z''\sin\theta,\quad z' = y''\sin\theta + z''\cos\theta \ldots\ (g')$$

a że spólne przecięcie AE prostopadłem jest do płaszczyzny y'Ay", wcielili się zatém w trzecią oś Ax" i będzie

$$x' = x'' \ldots (h').$$

Widzieliśmy że prosta Ay" na płaszczyźnie x"y" leży, a że ślad AE także znajduje się na tej płaszczyźnie i skierowany jest podług drugiej osi Ax", spółrzędne przeto y" i x" na płaszczyźnie x"y" położone będą. Z łatwością z tych spółrzędnych x" i y" do spółrzędnych x" i y" przejdziemy, znamy bowiem kąt φ który nowa oś Ax" z osią Ax" albo AE czyni, i będziemy mieli z przyczyny formuł Liczi 291.

$$x'' = x'''\cos\varphi - y'''\operatorname{wst}\varphi\,,\quad y'' = x'''\operatorname{wst}\varphi + y'''\cos\varphi \ldots (i).$$

Ponieważ oś trzecia Az''' ma być prostopadłą do dwóch innych Ax''', Ay''', a oś Az'' tej samej własności używa, bo jest prostopadłą do płaszczyzny spółrzędnych x'', y'' która jak widzieliśmy ta sama jest co płaszczyzna $x'''y'''$, będzie jeszcze

$$z'' = z''' \ldots (j).$$

W formuły (e') i (f') ustawiwszy ważności spółrzędnych x', y', z' dane równaniami (g') i (h') położywszy w te wypadkie ważności spółrzędnych x'', y'', z'' danemi równaniami (i') i (j'), i połączywszy wyrazy rozmnożone przez każdą ze zmiennych x''', z''', y''' znajdziemy

$$x = x'''(\cos\varphi\cos\psi - \operatorname{wst}\varphi\cos\vartheta\operatorname{wst}\psi) - y'''(\cos\varphi\cos\vartheta\operatorname{wst}\psi + \operatorname{wst}\varphi\cos\psi) + z'''\operatorname{wst}\vartheta\operatorname{wst}\psi,$$

$$y = x'''(\cos\varphi\operatorname{wst}\psi - \operatorname{wst}\varphi\cos\vartheta\cos\psi) + y'''(\cos\varphi\cos\vartheta\cos\psi + \operatorname{wst}\varphi\operatorname{wst}\psi)x - z'''\operatorname{wst}\vartheta\operatorname{wst}\psi$$

$$z = x'''\operatorname{wst}\varphi\operatorname{wst}\vartheta + y'''\cos\varphi\operatorname{wst}\vartheta + z''\cos\vartheta.$$

463. Znaki tych formuł mogą się zmieniać podług xxx. sxxx. nachyleń jakie nadamy kątom ψ, ϑ, i φ. Gdyby naprzykład osie Ax i Ay' padały jak na (Fig 113) za osiami Ax, Ay' należałoby w formułach poprzedzających zmie- Fig 113
nić znak $\operatorname{wst}\vartheta$ i $\operatorname{wst}\psi$. Do tego samego wypadku doszlibyśmy zamiast równań (e') i (g') używając innych równań wyciągniętych z formuł Licz 292, otrzymamy tym sposobem

$$x = x'''(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\cos\theta\sin\psi) + y'''(\cos\varphi\cos\theta\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi) + z'''\sin\theta\sin\psi;$$

$$y = x'''(\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi) + y'''(\cos\varphi\cos\theta\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi) + z'''\sin\theta\cos\psi;$$

$$z = -x'''\sin\varphi\sin\theta - y'''\cos\varphi\sin\theta + z'''\cos\theta.$$

464. Nakoniec można przestrzeni jeszcze zrobić te formuły, przypuściwszy $\varphi = 0$, to jest wziąwszy za oś nową x''' ślad płaszczyzny $x'''y'''$ na płaszczyźnie xy, i uczyniwszy $\sin\varphi = 0$, a $\cos\varphi = 1$, w tym razie te ogólne formuły zamienią się na

$$x = x'''\cos\psi + y'''\cos\theta\sin\psi + z'''\sin\theta\sin\psi$$

$$y = x'''\sin\psi + y'''\cos\theta\cos\psi + z'''\sin\theta\cos\psi,$$

$$z = -y'''\sin\theta + z'''\cos\theta.$$

Teorya

Powierzchni drugiego rzędu.

Rozbiorznienie równania ogólnego.

465. Równanie ogólne drugiego stopnia z trzema niewiadomemi jest

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 + Dzy + Ezx + Fxy + Gz + Hy + Kx + L = 0 \ldots (k')$$

w to równanie wstawiwszy ważności (a') Lia 457.

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha + y'\cos\alpha' + z'\cos\alpha'' \\ y &= x'\cos\beta + y'\cos\beta' + z'\cos\beta'' \\ z &= x'\cos\gamma + y'\cos\gamma' + z'\cos\gamma'' \end{aligned}\right\} \ldots (l')$$

znajdziemy równanie tej samej postaci co poprzedzające, i które wystawić można przez

$$A'z'^2 + B'y'^2 + C'x'^2 + D'z'y' + E'z'x' + F'x'y' + G'z' + H'y' + K'x' + L' = 0 \ldots (m')$$

współczynniki tego równania są funkcyami kątów $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'; \alpha'', \beta'', \gamma''$, więc między temi kątami tylko jest sześć zależności wystawionych przez równania (b') i (c'), a te kąty są w liczbie dziewięciu, pozostają przeto trzy jeszcze warunki do ich wyznaczenia; można więc zrównać zem trzy współczynniki równania (m'). Rozpatrzywszy w tym sposobie współczynnikami

D', E', F' wyrazów zy', zx', i xy', jeżeli zdołamy dowieść że trzy równania wanonkowe $D=0$, $E=0$, $F=0$, prawdziwe ważności dla tych kątów dają, wniesiemy że można tego przerobienia użyć.

Spółczynniki D', E', F', dadzą się obrzymać, niepotrzebując poprzednio wynajdować równania, któreśmy przez (m') naznaczyli.

Uważmy iż w równanie (k') ustawiwszy trynomy (l') będące ważnościami spółrzędnych x, y, z, wyrazy Gz, Hy, Kx, L, równania (k') nie dadzą wyrazów z iloczynami nowych zmiennych w równaniu (m'). Wstawiwszy w inne wyrazy ważności spółrzędnych z, x, y, dane równaniami (l') i uważając że gdy podniesiemy do potęgi trinom będący ważnością spółrzędnej z, opuszcza się wszystkie wyrazy, a wezmą się tylko podwójne iloczyny z dwóch po dwa wyrazy tego trinomu, i że się podobnie rzecz będzie miała z wyrazami wx^2 i y^2, znajdziemy

$$
\left.\begin{array}{l}
+2A\,dos\,Z\,dos\,Z' \\
+2B\,dos\,Y\,dos\,Y' \\
+2C\,dos\,X\,dos\,X' \\
+D\,dos\,Z\,dos\,Y' \\
+D\,dos\,Y\,dos\,Z' \\
+E\,dos\,Z\,dos\,X' \\
+E\,dos\,X\,dos\,Z' \\
+F\,dos\,Y\,dos\,X' \\
+F\,dos\,X\,dos\,Y'.
\end{array}\right\} x'y' \qquad
\left.\begin{array}{l}
+2A\,dos\,Z\,dos\,Z'' \\
+2B\,dos\,Y\,dos\,Y'' \\
+2C\,dos\,X\,dos\,X'' \\
+D\,dos\,Z\,dos\,Y'' \\
+D\,dos\,Y\,dos\,Z'' \\
+E\,dos\,Z\,dos\,X'' \\
+E\,dos\,X\,dos\,Z'' \\
+F\,dos\,Y\,dos\,X'' \\
+F\,dos\,X\,dos\,Y''
\end{array}\right\} x'z' \qquad
\left.\begin{array}{l}
+2A\,dos\,Z'\,dos\,Z'' \\
+2B\,dos\,Y'\,dos\,Y'' \\
+2C\,dos\,X'\,dos\,X'' \\
+D\,dos\,Z\,dos\,Y'' \\
+D\,dos\,Y'\,dos\,Z'' \\
+E\,dos\,Z'\,dos\,X'' \\
+E\,dos\,X'\,dos\,Z'' \\
+F\,dos\,Y'\,dos\,X'' \\
+F\,dos\,X'\,dos\,Y''
\end{array}\right\} y'z'.
$$

Każdą kolumnę zrównawszy zero, otrzymamy równanie trzy równania wa:
runkowe: w pierwszém równaniu dostawy znaczone umieściwszy zewnątrz

znajdziemy $\left.\begin{matrix} 2A\,dosZ \\ +D\,dosY \\ +E\,dosX \end{matrix}\right\} dosZ + \left.\begin{matrix} 2B\,dosY \\ +D\,dosZ \\ +F\,dosX \end{matrix}\right\} dosY + \left.\begin{matrix} 2L\,dosX \\ +E\,dosZ \\ +F\,dosY \end{matrix}\right\} dosX = 0 \ldots (\pi')$

podobnie z drugiem postępując znajdziemy

$$\left.\begin{matrix} 2A\,dosZ \\ +D\,dosY \\ +E\,dosX \end{matrix}\right\} dosZ'' + \left.\begin{matrix} 2B\,dosY \\ +D\,dosZ \\ +F\,dosX \end{matrix}\right\} dosY'' + \left.\begin{matrix} 2L\,dosX \\ +E\,dosZ \\ +F\,dosY \end{matrix}\right\} dosX'' = 0 \ldots\ldots (\sigma').$$

Wysławszy równania (π') i (σ') przez

$$\left.\begin{matrix} M\,dosZ' + N\,dosY' + P\,dosX' = 0 \\ M\,dosZ'' + N\,dosY'' + P\,dosX'' = 0 \end{matrix}\right\} \ldots\ldots (P')$$

Wyngewawszy N z tych równań, rozmnożywszy pierwsze przez $dosY''$, dru-
gie przez $dosY'$, odjąwszy drugi wypadek od pierwszego, otrzymamy

$$M(dosZ''dosY' - dosZ'dosY'') + P(dosX''dosY' - dosX'dosY'') = 0 \ldots\ldots (q')$$

Wyngewawszy potém P z tych samych równań, odjąwszy iloczyn pierwsze-
go przez $dosX''$, od iloczynu drugiego przez $dosX'$, będzie

$$M(dosZ''dosX' - dosX''dosZ') + N(dosY''dosX' - dosX''dosY') = 0 \ldots\ldots (r')$$

Przypuściwszy nowe spółrzędne prostokątnemi, będą liczby $\alpha\beta\gamma$, między

ilościami Z, Y, X zależność następujące

$$\cos X \cos X' + \cos Y \cos Y' + \cos Z \cos Z' = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} \cos X \cos X'' + \cos Y \cos Y'' + \cos Z \cos Z'' &= 0 \\ \cos X \cos X'' + \cos Y \cos Y'' + \cos Z \cos Z'' &= 0, \end{aligned}\right\}$$

A że dwa pierwsze z tych równań tego samego są kształtu co równania (p') możemy zatém następnie wyrzucić $\cos Y$ i $\cos X$, podobnie jak w równaniach (p') wyrzuciliśmy N i P, a znajdziemy

$$\cos Z(\cos Z'' \cos Y' - \cos Z' \cos Y'') + \cos X(\cos X'' \cos Y' - \cos X' \cos Y'') = 0 \ldots (s')$$

$$\cos Z(\cos Z'' \cos X' - \cos Z' \cos X'') + \cos Y(\cos X' \cos Y'' - \cos X'' \cos Y') = 0 \ldots (t')$$

Zrobiwszy uwagę że równania (s') i (t') zawierają między nawiasami wyrazy znajdujące się także między nawiasami w równaniach (q') i (r') możemy uczynić

$$\cos Z'' \cos Y' - \cos Z' \cos Y'' = Q$$

$$\cos X'' \cos Y' - \cos X' \cos Y'' = R$$

$$\cos Z'' \cos X' - \cos Z' \cos X'' = S.$$

Równania $(q')(r')(s')$ i (t') zamienią się na

$$MQ + PR = 0, \quad MS - NR = 0 \ldots (u')$$

$$Q \cos Z + R \cos X = 0, \quad S \cos Z - R \cos Y = 0 \ldots (v')$$

Ponieważ dostawy znaczone wszystkie zawarte są w funkcyach Q R, i S.

można przeto wyrugować te funkcye z czterech równań (u') i (v'). W tym zamiarze równania (u') dadzą

$$\zeta = -\frac{PR}{M}, \quad S = \frac{NR}{M},$$

wstawiwszy te ważności w równania (v'), zniósłszy spólny czynnik R, i mianowniki, otrzymamy

$$P\cos\zeta = M\cos X, \quad N\cos\zeta = M\cos Y.$$

a położywszy za M, N, i P funkcye dosław bez znaków, które te litery wystawiają, i które są spółczynnikami równania (o'), trzeba te równania zamienią się na

$$(2C\cos X + E\cos Z + F\cos Y)\cos\zeta = (2A\cos\zeta + D\cos Y + E\cos X)\cos X \ldots\ldots (x')$$

$$(2B\cos Y + D\cos\zeta + F\cos X)\cos\zeta = (2A\cos\zeta + D\cos Y + E\cos X)\ldots\ldots (y')$$

Za pomocą tych równań i tego pola

$$\cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2\zeta = 1 \ldots\ldots (z')$$

wyznaczemy ważność $\cos X$, $\cos Y$, $\cos\zeta$. Podzieliwszy te równania (x') i (y') przez $\cos\zeta$ możemy je wyrazić pod kształtami następującemi

$$2C\frac{\cos X}{\cos\zeta} + E + F\frac{\cos Y}{\cos\zeta} = \left(2A + D\frac{\cos Y}{\cos\zeta} + E\frac{\cos X}{\cos\zeta}\right)\frac{\cos X}{\cos\zeta} \ldots (a'')$$

$$2B\frac{\cos Y}{\cos\zeta} + D + F\frac{\cos X}{\cos\zeta} = \left(2A + D\frac{\cos Y}{\cos\zeta} + E\frac{\cos X}{\cos\zeta}\right)\frac{\cos Y}{\cos\zeta} \ldots\ldots (b'')$$

Uczyniwszy

$$\frac{\cos X}{\cos\zeta} = m, \quad \frac{\cos Y}{\cos\zeta} = n \ldots (c'')$$

Równania (a'') i (b'') zamienią się na

$$2(A-C)m + E(m^2-1) + Dmn - Fn = 0 \ldots (d'')$$

$$2(A-B)n + D(n^2-1) - Emn - Fm = 0 \ldots (e'')$$

Gdy ważność ilości m wyciągniętą z równania (e'') wstawiemy w równanie (d'') przekonamy się że n wyznacza się równaniem trzeciego stopnia, że zatém jeden przynajmniej pierwiastek ma rzeczywisty. Tę rzeczywistą ważność ilości (n) położywszy w równanie (e'') gdzie w pierwszym tylko stopniu wchodzi, uczyniemy m rzeczywistém. Za pomocą równań (e'') wyrugowawszy $\cos X$ i $\cos Y$ z równania (i') będzie

$$\cos Z = \sqrt{\frac{1}{m^2+n^2+1}}$$

ta rzeczywista ważność położona w równanie (i') pokazuje że $\cos X$ i $\cos Y$ także są rzeczywiste. Ponieważ równania (l') symetryczne są, widzimy zatém że podobnie dowiedlibyśmy rzeczywistości wyrażeń $\cos X'$, $\cos Y'$, $\cos Z'$, $\cos X''$, $\cos Y''$, $\cos Z''$.

466. Wypada z tego że zawsze zgubić można wyrazy obejmujące prostokąty ze spółrzędnych, czy to w równaniu ogólném, czy to w równaniu pozbawionem wyrazów Gz, Hy, Kx, bo widzieliśmy że spółczynniki prostokątów ze spółrzędnych niezależne są od tych wyrazów.

Równanie $Az^2 + By^2 + Cx^2 + Gz + Hy + Kx + L = 0 \ldots (f'')$

ma zatém tę samą ogólność co równanie zawierające wszystkie przypadki,

Jeżeli w to równanie wstawiemy ważności następujące $x = x' + \alpha$, $y = y' + \beta$, $z = z' + \gamma$ początek położenie swoje odmieni, i otrzymamy, ostatni wyraz przez Pozostawiwszy

$$Az'^2 + By'^2 + Cx'^2 + 2Ay' \left| \begin{matrix} z' \\ + \end{matrix} \right. + 2B\beta \left| \begin{matrix} y' \\ + \end{matrix} \right. + 2C\alpha \left| \begin{matrix} x' \\ + \end{matrix} \right. + P = 0 \ldots . (g'')$$

Wyrazy z pierwszemi potęgami zmiennych możemy zgubić, zrównawszy ze zera ich współczynniki i otrzymamy

$$\gamma = -\frac{E}{2A}, \quad \beta = -\frac{H}{2B}, \quad \alpha = -\frac{K}{2C}$$

Te ważności zawsze istnieć mogą dopóki wyrazy A, B, C, nie są żadne, równanie ogólne może się przeto wyrazić sprowadzić do postaci

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 + L = 0$$

Uw. Gdy współczynnik jednego z wyrazów z kwadratami zmiennych jest żadnym, nie możemy zgubić wyrazu mającego tę zmienną w pierwszej potędze: jeżeli naprzykład współczynnik A jest żadnym, współczynnik w z' nie może zginąć, bo ważność $2Ay' + E$ tego współczynnika sprowadziwszy się do E nie może bydź zrównaną zeru, dla wyznaczenia γ, które jest współrzędną nowego początku w kierunku osi z; w tym więc przypadku tylko wyrazy w x i y możemy zrównać zeru, co równanie (g'') sprowadzi do kształtu:

$By^2 + Cx^2 + Gz = 0$

468. Gdybyśmy zamiast $A=0$, uczynili $B=0$, albo $C=0$, przyszlibyśmy do równania tej samej postaci co poprzedzające, lecz w którém osie spółrzędnych wzajemnie zmieniłyby się; a że położenie tych osi obojętném jest dla nas, tylko przeto równanie (i") uważać będziemy.

469. Nakoniec gdy dwa spółczynniki kwadratów ze zmiennych są żadne, i mamy np: $B=0$, $C=0$, nie można Licz 467 zgubić wyrazów mających x i y w pierwszych potęgach; ale inaczej się rzecz ma z wyrazem Gz podług tego cośmy pod Licz 467 powiedzieli, i wówczas równanie (g") może się sprowadzić do kształtu następującego

$$Az^2 + Hy + Kx = 0 \ldots (j")$$

470. Jeżeli zamiast $B=0$, $C=0$, mamy $A=0$, $B=0$, albo $A=0$, $C=0$, odmieniemy tylko porządek osi, jakieśmy to już pod Licz 468 uczynili.

471. Nakoniec przypuściwszy trzy spółczynniki A, B, C żadne zarazem wpadlibyśmy na równanie $Gz + Hy + Kx = 0$ należące do płaszczyzny.

472. Wypada przeto ze powierzchnie drugiego rzędu na trzy rodzaje podzielić można w następujących równaniach zawarte

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 + P = 0,$$

$By^2 + Cx^2 + Gz = 0$

$Az^2 + Hy + Kx = 0;$

nie umieszczamy pomiędzy niemi równania płaszczyzny, bo jest tylko pierwszego stopnia.

O płaszczyznach średnicowych i powierzchniach drugiego rzędu mających środek.

473. Widzieliśmy że powierzchnie drugiego rzędu pierwszego rodzaju mają za ogólne równanie $Az^2 + By^2 + Cx^2 + P = 0 \ldots (k'')$.

Rozwiązawszy to równanie ze względu na z przekonamy się że z ma zawsze dwie ważności znaków przeciwnych, że zatem płaszczyzna xy dzieli powierzchnie na dwie zupełnie symetryczne części: ponieważ to co o z mówiemy i do innych zmiennych da się stosować, każda więc ze współrzędnych płaszczyzn dzieli powierzchnię na dwie części symetryczne. Wogólności wszelka płaszczyzna dzieląca powierzchnię na dwie części symetryczne nosi imię płaszczyzny średnicowej.

474. Ponieważ przecięcie dwóch płaszczyzn średnicowych jest linią prostą dzielącą powierzchnię na dwie części symetryczne, punkt zatem

połowy tej prostej, jest punktem który nazywają środkiem powierzchni: środek powierzchni wyznacza się także spólnem przecięciem się trzech płaszczyzn.

475. Powierzchnia dana równaniem (K") ma środek: bo widzieliśmy że trzy płaszczyzny spółrzędne są jej płaszczyznami średnicowemi. Że zaś początek spółrzędnych jest punktem trzem płaszczyznom, jest przeto środkiem tej powierzchni.

Rozdzielenie powierzchni drugiego rzędu pierwszego rodzaju na trzy gatunki.

476. Jeżeli w równaniu (K") umieścimy wyraz P po tej stronie po której dodajnym będzie, a resztę wyrazów na drugą stronę przeniesiemy, nazwawszy L, M, N to czém się staną w tém założeniu C, B, A, równanie (K") przybierze postać następującą

$$P = Lx^2 + My^2 + Nz^2 \ldots\ldots (l").$$

Że zaś pierwsza strona jest dodajną, zatém trzy współczynniki L, M, N nie mogą bydź wszystkie ujemne, w tym bowiem razie druga strona byłaby ujemną, i równanie zamieniłoby się na niedorzeczne. Kombinacyę znaków przy współczynnikach L, M, N tylko te trzy przypadki dać mogą.

1. Trzy współczynniki dodajne,

2. Jeden tylko z tych spółczynników dodajny,

3. Dwa z tych spółczynników dodajne.

Równanie powierzchni drugiego rzędu pierwszego rodzaju, da się podzielić przeto na te trzy gatunki

$$\left.\begin{aligned} Lx^2+My^2+Nz^2&=P\\ Lx^2+My^2-Nz^2&=P\\ Lx^2-My^2-Nz^2&=P \end{aligned}\right\}\ldots\ldots(m'')$$

477. Gdybyśmy jednemu z wyrazów drugiego równania, i dwom z trzeciego ujęmy znak dawali, wybor tych wyrazów był dowolny, bo wszelka różnica jakazwybor tych wyrazów powstać może, nie wpływa na położenie osi spółrzędnych. Gdybyśmy np: zamiast drugiego równania wzięli to

$$Lx^2-My^2+Nz^2=P,$$

widzimy że tylko wszystko cobyśmy w drugiém równaniu (m'') o osi z powiedzieli, stosowałoby się do osi y w tém ostatniém.

O Ellipsoidzie.

478. Równanie $Lx^2+My^2+Nz^2=P\ldots\ldots(n'')$

zawiera pewien rodzaj powierzchni któremu Ellipsoidy imię nadano

Dla poznania natury tej powierzchni, przetnijmy ją płaszczyzną równoodległą od xy; równanie tej płaszczyzny będzie Liz 436

$$z = \gamma;$$

z pomiędzy tego równania i ogólnego wyniegowawszy z, otrzymamy dla równania przecięcia się dwóch powierzchni

$$Lx^2 + My^2 + N\gamma^2 = P$$

albo raczej $Lx^2 + My^2 = P - N\gamma^2$.

Widzimy że to równanie do Elipsy należeć będzie, jeżeli nadamy dla γ ważność tak małą, aby $P - N\gamma$ dodajnem było; zaś γ powiększa się ponieważ oddalania się płaszczyzny płaszczyzny przecinającej od płaszczyzny xy zawsze od niej równoodległe. Gdy przeto ciągle posuwać ją będziemy, przyjmie nakoniec takie położenie iż $N\gamma^2$ przewyższy P, a wtenczas nie będzie przecięcia, równanie bowiem sprowadzi się do

$$Lx^2 + My^2 = \text{ilości ujemnej}$$

niedorzecznego równania, bo L i M są dodajnemi. Wszystkie Elipsy mają swoje środki na osi z, bo, każdej środek jest w punkcie, w którym, xiy żadne są razem.

419. Uczyniwszy potém $x = \alpha$, i $y = \beta$ w równaniu (ñ) otrzymamy równania

przeciąć powierzchnię przez płaszczyzny równodległe od xyz i xz, i dowiedziemy jak w poprzedzającym razie że te przecięcia są Elipsami.

480. Dla znalezienia śladów Elipsoidy na każdej z płaszczyzn spółrzędnych trzeba w równaniu (n") uczynić następnie

$$z=0,\quad y=0,\quad x=0,$$

co daje $$Lx^2+My^2=P \ldots (o")$$

równanie śladu na płaszczyźnie xy,

$$My^2+Nz^2=P \ldots (p")$$

równanie śladu na płaszczyźnie yz

$$Lx^2+Nz^2=P \ldots (q")$$

równanie śladu na płaszczyźnie xz.

481. Nazywamy te ślady głównemi przecięciami powierzchni.

482. Równania (o")(p") i (q") pokazują że te ślady są Elipsami. Dla wyznaczenia głównych osi Elipsy będącej śladem Elipsoidy na płaszczyźnie xy zrobiemy następnie $x=0$, i $y=0$, w równaniu (o"), a wystawiwszy przez AB i AC (Fig 114.) to czém stanąc w tém założeniu x. i y, znajdziemy

$$AP=\sqrt{\frac{P}{L}},\quad AC=\sqrt{\frac{P}{M}},$$

za pomocą tych równań z łatwością wykreślić zdołamy Elipsę, będącą

śladem powierzchni na płaszczyźnie xy. Podobnie wykreślemy Elipsy będące śladami powierzchni na płaszczyznach xz i zy: bo równania (p'') i (q'')

dają $AB = \sqrt{\frac{P}{L}}$; $AD = \sqrt{\frac{P}{M}}$; i $AC = \sqrt{\frac{P}{M}}$, $AD = \sqrt{\frac{P}{N}}$;

dla głównych osi tych Elips.

483. Jeżli uważać będziemy tylko część powierzchni zawartą w kącie bryłowym, w którym spółrzędne są dodajne, ślady na płaszczyznach xy, xz i yz wystawione będą przez łuki elipsyczne BEC, BFD, CGD.

484. Wszystkie przecięcia powierzchni z płaszczyznami równoodległemi od płaszczyzn spółrzędnych łatwo się teraz wyznaczyć dadzą. Naprzykład, jeżeli daną jest odcięta AP, a szukamy przecięcia uczynionego płaszczyzną równoodległą od płaszczyzny yz, i spotykającego oś x w punkcie P, poprowadźmy przez ten punkt P równoodległe PC' i PD' od osi AY i AZ, a wtenczas PC' i PD' będą półosiami Elipsy tworzącej to przecięcie, czwarta część tej Elipsy wystawiona jest przez C'GD'.

485. Ponieważ ślady Elipsoidy na jednej z płaszczyzn spółrzędnych zawierają wszystkie punkta powierzchni znajdujące się na tej płaszczyźnie, wypada przeto, że jeżli jedna z dwóch osi położonych na tej powierzchni ma spotkać powierzchnię, spotkanie to w punktach spółnych śladowi i osi nastąpi. Proste 2AB, 2AC, 2AD, są więc częściami głównych osi

objętych powierzchnią; i dla tego nazywamy je głównemi osiami Elli-
psoidy.

486. Dla wyznaczenia ważności tych głównych osi, dosyć dwie ze spół-
rzędnych następnie uczynić zadnemi w równaniu (n'') a nazwawszy a, b, c,
to czém będą w tém założeniu x, y, z, znajdziemy

$$a=\sqrt{\frac{P}{L}},\quad b=\sqrt{\frac{P}{M}};\quad c=\sqrt{\frac{P}{N}}$$

podniosłszy te ważności do potęgi drugiej mam,

$$L=\frac{P}{a^2},\quad M=\frac{P}{b^2},\quad N=\frac{P}{c^2},$$

wstawiwszy te ważności w równanie (n'') Ellipsoidy, sprowadziwszy do je-
dnego mianownika, i zniosłszy spółczynnik P, otrzymamy

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2+a^2b^2z^2=a^2b^2c^2\ldots.(r'')$$

równanie Ellipsoidy odniesionej do głównych osi.

487. Poszukajmy równania przecięcia Ellipsoidy z płaszczyzną przechodzącą
przez oś z. Ponieważ płaszczyzna prostopadła jest do płaszczyzny xy, jéj równa-
nie sprowadzi się Liczb 439 do równania śladu AC (Fig 115) na płaszczyźnie xy. Fig 115.
Jeżeli więc nazwiemy φ kąt XAC równanie tego śladu będzie Liczb 80, i 81

$$y=x\operatorname{tg}\varphi;$$

wynigowawszy y z pomiędzy tego równania i równania (r") Ellipsoidy znajdziemy dla przecięcia

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2 \operatorname{tg}^2\varphi\, x^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2 \ldots (s")$$

Widzimy (Fig 116) że każdy punkt M przecięcia wyznaczony jest spółrzędnemi AP=x, i PM=z, lecz używając tego układu spółrzędnych, tracimy na tém, że odcięta x nie znajduje się na płaszczyźnie przecięcia; odmienimy oś AX na inną oś AC, biorąc nową odciętą QA=r, będziemy ztąd mieli między temi spółrzędnemi zależność

$$AP = AQ \cos\varphi, \text{ albo } x = r\cos\varphi,$$

uważając że $\operatorname{tg}\varphi \cdot \cos\varphi = \operatorname{ust}\varphi$

będzie $$(b^2c^2\cos^2\varphi + a^2c^2 \operatorname{ust}^2\varphi)\, x^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2$$

488. Gdy a=b, to równanie sprowadza się do

$$c^2r^2 + a^2z^2 = a^2c^2 \ldots (t")$$

będąc zaś niezależném od kąta φ pokazuje że gdy a=b, przecięcie jest zawsze to samo; że przeto powierzchnia powstać może z obrotu koło osi z, Ellipsy mającej równanie.

$$c^2r^2 + a^2z^2 = a^2c^2 \ldots (u")$$

489. W ogólności wszelka powierzchnia, powstała z obrotu łuku pewnej

linii krzywej około osi stałej, nosi imię powierzchni obrotowej. Uczyniwszy zatém $a=b$, otrzymamy dla równania Ellipsoidy obrotowej

$$c^2(x^2+y^2)+a^2z^2=a^2c^2 \ldots (v'')$$

490. Jedną z głównych cech powierzchni obrotowych jest to, że otrzymujemy koło dla wszelkich przecięć uczynionych płaszczyznami prostopadłemi do osi z obrotu; i tak z wyniągowawszy z równania (v'') i równania $z=\gamma$ do płaszczyzny równoodległej od płaszczyzny xy należącego, znajdziemy iż przecięcie równoodległe od płaszczyzny xy, jest kołem mającem równanie

$$x^2+y^2=\frac{a^2(c^2-\gamma^2)}{c^2}.$$

491. Ellipsoida nosi imię Ellipsoidy rozciągniętej, gdy obrot około większej osi wykonanym został, spłaszczonej zaś gdy obrot około małej osi był wykonanym.

492. Nakoniec jeżeli trzy osie są równe, równanie (v'') Ellipsoidy sprowadzi się do

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

Naówczas równanie (t') przechodzącego przecięcia przechodzącego przez oś z, Licz 488, będzie

$$r^2+z^2=a^2;$$

a że należy do koła którego promieniem jest a, widzimy zatém że powierzchnia powstać może z obrotu połowy okręgu około swojej średnicy, że zatém

jest kulą.

493. Można bezpośrednio znaleść Elipsoidę powierzchnię Elipsoidy o: brotowej następującym sposobem. Niechaj będą (Fig 117) x, y, z, spółrzędne Fig 117
AP, PR, RM, punktu M dowolnie obranego na Elipsoidzie obrotowej. Przez punkt M i oś z obrotu przeprowadzimy płaszczyznę przecinającą Elipso: idę podług DME. Jeżeli krzywę DME na płaszczyźnie przecinającej poto: żoną odnieśiemy do osi zAE i zAD, i spółrzędne AR i RM przez r i z wyra: wiemy, ponieważ ta krzywa DME jest Elipsą, będzie przeto, Lic 207, między temi spółrzędnemi r i z równanie następujące

$$AD^2.r^2 + AE^2.z^2 = AD^2.AE^2;$$

położywszy za r^2 jego ważność x^2+y^2, wyciągniętą z własności trójkąta pro: stokątnego ARP znajdującego się na płaszczyźnie xy, będzie

$$AD^2(x^2+y^2) + AE^2.z^2 = AD^2.AE^2:$$

że zaś Elipsoida jest obrotową mamy

$$AE = AB;$$

wstawiwszy tę ważność w równanie poprzedzające, i nazwawszy, AB, a, AD, c, otrzymamy dla równania Elipsoidy obrotowej

$$c^2(x^2+y^2) + a^2z^2 = a^2c^2.$$

494. W ogólności można otrzymać równanie Elipsoidy, szukając jaka

jest powierzchnia, która do prostokątnych osi AX, AY, AZ (Fig 118) odniesiona da- Fig 11

je dla przecięć uczynionych płaszczyznami spółrzędnemi, przecięcia elliptyczne, których główne osie są osiami spółrzędnemi, a dla wszystkich przecięć prostopadłych do jednej z tych osi spółrzędnych, przecięcia elliptyczne których główne osie, prostopadłemi są do dwóch innych osi spółrzędnych.

Fig 11

Równania przecięć uczynionych płaszczyznami xy i yz mogą bydź wysłowione przez $a^2z^2 + c^2x^2 = a^2c^2 \ldots (w'')$

$b^2z^2 + c^2y^2 = b^2c^2 \ldots (x'')$

Pierwsze z tych równań należy do Elipsy mającej łuk DEB (Fig 118) drugie do Fig 11

Elipsy mającej łuk DGC. Uważmy na powierzchni punkt M, którego odległość od płaszczyzny xy równa jest AV. Przez punkt V przeprowadziwszy płaszczyznę równoodległą od xy, przecięcie EGJ tą płaszczyzną uczynione założenia Elipsą będzie: pół osie OE i GO będą ważnościami jakie przybiorą x i y w równaniach (w'') i (x''), gdy uczynimy z = AV, więc

$$OE^2 = \frac{a^2}{c^2}(c^2 - z^2), \quad OG^2 = \frac{b^2}{c^2}(c^2 - z^2);$$

jakiekolwiek będą spółrzędne x i y przypadkowi z = AV odpowiadające, widzimy że spuściwszy prostopadłe ze wszystkich punktów Elipsy GEJ na płaszczyznę xy, rzędna z = AV musi bydź jedną z tych prostopadłych.

Spadki tych wszystkich prostopadłych utworzą na płaszczyźnie xy elli:
psę HQJ, zupełnie podobną ellipsie GMEF, przeto będzie

$$AJ = OE, \quad AK = OG;$$

Ponieważ rzędna MQ punktu uważanego, stoi w punkcie Q należącym do Ellipsy HQJ, dwie inne spółrzędne $AP = x$, i $PQ = y$ będą zatém dwo:
ma spółrzędnemi tej Ellipsy: z natury zaś Ellipsy Licz 207,

$$AJ^2.y^2 + AK^2.x^2 = AJ^2.AK^2$$

czyli przez $AJ^2.AK^2$ podzieliwszy

$$\frac{y^2}{AK^2} + \frac{x^2}{AJ^2} = 1.$$

Wstawiwszy ważności spółrzędnych: AK^2, AJ^2, które są te same co linii OE^2 i OG^2, i zniosłszy mianowniki otrzymamy

$$a^2b^2z^2 + a^2c^2y^2 + b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2,$$

495. Gdy jeden ze spółczynników L, M, N, równania (n") jest żadnym, i mamy np. $N = 0$, to równanie sprowadzi się do równania Ellipsy

$$Lx^2 + My^2 = P \ldots (y").$$

Wszelki punkt powierzchni będzie zatém podobny oparciu swej rzędnej z w jednym z punktów Ellipsy położonej na płaszczyźnie xy, której

spółrzędne są x i y. Byle ten warunek był dopełnionym, z może być dowolne; a zatém ze wszystkich punktów tej Elipsy wyniósłszy spółrzędne z przechodzące przechodzące przez wszystkie stopnie wielkości, te spółrzędne zawsze do powierzchni należeć będą; powierzchnia będzie przeto walcem.

496. Gdy M=e, podstawa tego walca jest kołem, bo naówczas równanie (y") staje się $x^2+y^2=\frac{P}{M}$.....

497. Nakoniec jeżeli mamy L=0, i N=0, równanie (z") sprowadza się do

$$My^2=P, \text{ i daje } y=\pm\sqrt{\frac{P}{M}}.$$

Że zaś widzieliśmy iż równanie y= stałej należy do płaszczyzny prostopadłej do osi y, która zatém równoodległą jest od płaszczyzny xz; więc równanie $y=\pm\sqrt{\frac{P}{M}}$;

należy do dwóch płaszczyzn prostopadłych do osi y, z których jedna przechodzi tę oś samą, druga zaś jej przedłużenie w odległościach od początku wyrażonych przez $\sqrt{\frac{P}{M}}$.

O Hyperboloidzie jednopłachtowej.

498. Gatunek drugi powierzchni drugiego rzędu pierwszego rodzaju zawarty jest w równaniu $Lx^2+My^2-Nz^2=P$..... (a").

Przeciąwszy tę powierzchnię płaszczyznami równoodległemi od trzech płaszczyzn spółrzędnych będzie

$$Lx^2 - Nz^2 = P - M\beta^2 \ldots\ldots (a''')$$

przecięcie równoodległe od płaszczyzny xz

$$My^2 - Nz^2 = P - L\alpha^2 \ldots\ldots (b''')$$

przecięcie równoodległe od płaszczyzny yz

$$Lx^2 + My^2 = P + Nz^2 \ldots\ldots (c''')$$

przecięcie równoodległe od płaszczyzny xy.

Równania (a''') i (b''') należą do Hyperbol, które gdy $\beta = 0$, i $\alpha = 0$, stają się głównemi przecięciami utworzonemi przez płaszczyzny xz, i yz.

499. Równania tych płaszczyzn są przeto

$$Lx^2 - Nz^2 = P \ldots\ldots (d''');$$

$$My^2 - Nz^2 = P \ldots\ldots (e''');$$

równanie (a''') daje $z^2 = \frac{L}{N}\left(x^2 - \frac{P}{L}\right)$.

uczyniwszy $x = 0$, znajdziemy z urojone; uczyniwszy $z = 0$, znajdziemy

$$x = \pm\sqrt{\frac{P}{L}},$$

dla odciętej należącej do najmniejszej rzędnej. Wszelka większa ważność dla x wzięta, czy to ujemnie, czy dodajnie, prawdziwej rzędnej odpowiadać

będzie: więc przecięcie uczynione płaszczyzną xz ma kształt nadany jej (Fig 119): podobnie przekonamy się że i w przecięciu uczynionem płaszczyzną yz, oś z nie spotyka powierzchni.

500. Równanie (c''') przecięcia równoodległego od płaszczyzny xy należy do Elipsy, której półosie główne otrzymamy, uczyniwszy naprzód $x=0$ i $y=0$, są przeto $\frac{P+Nz^2}{L}$, $\frac{P+Nz^2}{M}$;

Najmniejszą ważność tym półosiom nadamy uczyniwszy $z=0$; w tym razie płaszczyzna przecinająca przystanie do płaszczyzny xy: lecz posuwając płaszczyznę równoodległe od siebie czy to wyżej czy niżej płaszczyzny xy, ważność ilości z^2 ciągle powiększać się będzie: a zatem Elipsa ta oznacza przecięcie tem większą będzie, im bardziej płaszczyzna przecinająca oddala się od płaszczyzny xy.

501. Dla otrzymania punktów w których osie spółrzędne przez krzywą przecięte bydź mogą, uczyńmy z kolei w równaniu (c''') $x=0$, $y=0$, $z=0$ i znajdźmy:

dla $z=0$, $y=0$, znajdziemy $x=\pm\sqrt{\frac{P}{L}}$,

$z=0$, $x=0$, ——— $y=\pm\sqrt{\frac{P}{M}}$

$x=0$, $y=0$, ——— $z=\pm\sqrt{\frac{P}{N}}\sqrt{-1}$.

sama więc tylko oś z nie będzie przecięta przez krzywą, co się zupełnie z tem

zgadza, czémy Liczb 499 powiedzieli.

Uczyniwszy $\sqrt{\frac{P}{L}} = a$, $\sqrt{\frac{P}{M}} = b$, $\sqrt{\frac{P}{N}} = c$

i wyrugowawszy za pomocą tych wyrażeń L, M, N z równania (z'') powierzchni, postępując podobnie jak pod Liczb 486, znajdziemy

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2 \ldots\ldots (5''')$$

równanie Hyperboli jednopłaszczyznowej.

502. Dla otrzymania przecięcia tej powierzchni zrobionego płaszczyzną przechodzącą przez oś z i mającą równanie $y = x \operatorname{tg} \varphi$ należy wyrugować y z tego i poprzedzającego równania: skąd otrzymamy

$$(b^2c^2 + a^2c^2 \operatorname{tg}^2\varphi)x^2 - a^2b^2x^2 = a^2b^2c^2.$$

położywszy za x ważność $r \cos \varphi$ Liczb 488, zamienimy to równanie na

$$(b^2c^2 \cos^2\varphi + a^2c^2 \sin^2\varphi)x^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2$$

równanie Hyperboli które gdy $a = b$, sprowadzi się do

$$c^2r^2 - a^2z^2 = a^2c^2 \ldots\ldots (9'')$$

W tym przypadku wszystkie przecięcia przez oś przechodzące nie zależą od kąta φ są równe, i Hyperboloida jest powierzchnią obrotową.

503. Hyperbola której część wystawiona jest MAM (Fig 120) będąc miejscem równania $c^2r^2 - a^2z^2 = a^2c^2$ ma oś swoją z podług tej skierowaną. Jeżeli nadamy

obrot części MAM' około tej osi, krzywa MAM' zakreśli Hyperboloidę obrotową: wszystkie przeto linie takie jak mm, m'm', m''m'' zakreślą koła będące tylko przecięciami powierzchni obrotowej. Podług tego co poprzedza, uczyniwszy a=b w równaniu (f^m) otrzymamy dla Hyperboloidy obrotowej jednopłaszczowej,

$$c^2(x^2+y^2) - a^2z^2 = a^2c^2.$$

304. To równanie można jeszcze bezpośrednio znaleść, jak pod Licz 293. Wogólności wszelka powierzchnia obrotowa otrzyma się podobnym sposobem: w tym albowiem rodzaju powierzchni znawszy r i z spółrzędne AB i AM (Fig 116) tworzącej, i rozwiązawszy równanie tej tworzącej $\mathfrak{M}$, możemy otrzymać dla z pewną funkcyę z ilości r, którą przez fr oznaczymy, taką że będzie

$$z = fr;$$

wstawiwszy w to równanie ważność $\sqrt{x^2+y^2}$ ilości r, znajdziemy

$$z = f(x^2+y^2)$$

na ogólne równanie powierzchni obrotowych.

To co poprzedza uczy nas, że gdy równanie tworzącej mamy, należy tylko r^2 na x^2+y^2 odmienić, aby otrzymać równanie powierzchni: i tak w przypadku Hyperboloidy obrotowej jednopłaszczowej, ponieważ tworząca jest Hyperbolą w której oś z obrotu nie spotyka powierzchni, będzie takim równaniem

tej tworzącej $c^2r^2 - a^2z^2 = a^2c^2$

czyli raczej $z = \pm \frac{c}{a}\sqrt{r^2 - a^2}$;

za r^2 położymy jego ważność x^2+y^2, a otrzymamy równanie Hyperboloidy obrotowej jednopłaszczkowej.

505. Bezpośrednio można znaleść równanie Hyperboloidy za pomocą następujących własności. 1. Jedna z trzech osi spółrzędnych nie spotyka powierzchni. 2. Wszystkie przecięcia prostopadłe do tej osi Ellipsami. 3. Tych Ellips środki na tej osi są położone, a główne ich osie równoodległe skierowane są od dwóch innych osi spółrzędnych. 4. Dwa główne przecięcia przechodzące przez nie spotykającą powierzchni są Hyperbolami, których oś główna urojona ta jest, która obudwom jest spólna, i których środki znajdują się w początku.

Weźmy oś z (Fig 119) za oś nie spotykającą powierzchni. Podług czwartego warunku Hyperbole EBE', DCD' dane przez przecięcia płaszczyzn xy i yz, powinny mieć równania postaci następujących, Fig 119

$$c^2x^2 - a^2z^2 = a^2c^2, \quad c^2y^2 - b^2z^2 = b^2c^2 \ldots\ldots (k''').$$

Uważając punkt M na powierzchni, którego spółrzędna z niechaj wynosi będzie przez QM = z, i przeprowadziwszy przez punkt O płaszczyznę równoodległą od płaszczyzny xy, przecięcie powierzchni przez tę płaszczyznę

będzie Elipsą MENJ: kwadraty z pół osi tej Elipsy będą ważnościami
Licz 194. jakie przybiorą x^2 i y^2, w równaniach (h''') odpowiadających tej sa-
mej rzędnej $AO = z$; będzie przeto

$$OE^2 = \frac{a^2}{c^2}(c^2 + z^2), \quad OJ^2 = \frac{b^2}{c^2}(c^2 + z^2).$$

Ponieważ spółrzędne x i y mają należeć do Elipsy w której OE i OJ są pół-
osiami, otrzymamy więc Licz 207, pomiędzy temi ilościami równanie

$$OE^2 . y^2 + OJ^2 . x^2 = OE^2 . OJ^2$$

czyli $$\frac{y^2}{OJ^2} + \frac{x^2}{OE^2} = 1.$$

położywszy w to równanie ważności osi OE^2 i OJ^2, i zniósłszy mianowniki
znajdziemy $$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2.$$

306. Gdy jeden ze spółczynników przy zmiennych jest zerem w równa-
niu (z''), i mamy np: N = 0, to równanie sprowadzi się do

$$Lx^2 + My^2 = P.$$

Łatwo dowieść że w tym przypadku powierzchnia jest walcem, (*) którego
podstawa jest Elipsą mającą równanie $Lx^2 + My^2 = P$

(*) Powierzchnia walcowa jest powierzchnią krzywą, utworzoną posuwaniem
się pewnej prostej ciągle równoodległej od danej prostej.

Jeżeli przeciwnie M albo L jedna jest zadnem, równanie (z'') wyraża: ta powierzchnia walcowa Hyperbolę ma za podstawę.

308. Gdy współczynnik P jest zadnym, równanie (z'') sprowadza się do

$$Lx^2 + My^2 - Nz^2 = 0 \ldots\ldots (i''')$$

Okaż zaraz iż powierzchnia dana tem równaniem używa tej własności iż wszelka prosta przez początek do jednego z jej punktów poprowadzona, w całej swojej rozciągłości przystaje do tej powierzchni, która zatem do rodzaju powierzchni ostrokręgowych należy. (*).

Równania prostej przechodzącej przez początek są

$$y = bz, \quad x = az,$$

przypuśćmy że nachylenie tej prostej wyznaczone jest warunkiem ażeby punkt x, y, z, był jej spólny z powierzchnią: te zatem spółrzędne takowania linii prostej, jak równaniu powierzchni zadosyć uczynić powinny, tak że będzie $x = az$, $y = bz$, $Lx^2 + My^2 - Nz^2 = 0$.

Wstawmy w trzecie równanie ważności spółrzędnych x i y dane pierwszem

---

(*). Powierzchnia ostrokręgowa, jest powierzchnią utworzoną poruszaniem się pewnej prostej, zawsze przez jeden punkt przechodzącej.

a potém podzielmy je przez z'', otrzymamy

$$La^2 + Mb^2 - N = 0;$$

zkąd wyciągniemy $b = \pm\sqrt{\frac{N - La^2}{M}}$.

Położywszy tę ważność w jedno z równań prostej, znajdziemy dla niej

$$x = az, \quad y = \pm\sqrt{\frac{N - La^2}{M}} \cdot z$$

Ponieważ te ważności spółrzędnych x i y, do którego kolwiek punktu tej prostej należą, wstawiwszy je zatém w równanie (i'''), jeżeli je sprawdzą, możemy twierdzić że wszelki punkt x, y, z, tej prostej położonéj jest na powierzchni, której (i''') jest równaniem, co ma miejsce, bo wykonawszy powyższe wstawienie przyjdziemy do tego równania.

308. Przeciąwszy tę powierzchnię ostrokręgową płaszczyzną równoodległą od płaszczyzny xy, ponieważ równanie tej płaszczyzny równoodległej jest

$$z = \gamma,$$

należy zatém wyrugować z z pomiędzy tego równania, i równania powierzchni ostrokręgowej, aby otrzymać równanie przecięcia, które przeto będzie

$$Lx^2 + My^2 = N\gamma^2:$$

można poznać w tém równaniu Ellipsę niezależącą od znaku ilości γ; a zatém przecięcia uczynione w odległościach równych wyżej i niżej płaszczyzny xy

Ellipsami równoważącemi; a że te Ellipsy idą w stosunku wzrastającym od zera do nieskończoności w miarę oddalania się płaszczyzny przecinającej od płaszczyzny xy; widzimy zatém że ta powierzchnia asymptotyczna składa się z dwóch asymptot przeciwległych sobie wierzchołkami.

309. Ta powierzchnia asymptotyczna jest prawiestyczną do powierzchni; to jest nie może jej dosięgnąć, aż w przypuszczeniu z nieskończonego.

Dla okazania tej własności, uczyńmy $z=\gamma$, w równaniach (i'') i (i''') a znajdziemy dla równań przecięć Elliptycznych przez tę samą płaszczyznę

$$Lx^2 + My^2 = P + N\gamma^2;\quad Lx^2 + My^2 = N\gamma^2 \ldots\ldots (j''')$$

że zaś gdy jaki punkt spólny jest dwom Ellipsom (*) potrzeba żeby

---

(*) Zrównawszy następnie z i y rzem, wyznaczemy główne osie tych Ellips, a potém ich powierzchnie za pomocą formuły πab: znajdziemy że różnica tych powierzchni równa jest $\pi \frac{P}{\sqrt{MN}}$, a zatém niezależna jest od γ; ponieważ równania tych Ellips powiększają się w miarę oddalania się od płaszczyzny przecinającej od płaszczyzny xy; aby zatém ich różnica była zawsze jednakowa, trzeba żeby te krzywe przybliżały się do siebie.

spółrzędne x i y tego punktu sprawdzały obadwa równania, iaby ich pierwsze stro-
ny były równe, co czyni konieczną równość drugich; zkąd wyciągniemy

$$P + Ny^2 = Ny^2$$

czyli $$\frac{P}{Ny^2} + 1 = 1,$$

równanie, które nie przestaje bydź uskutecznieniem, ażgdy y jest nieskończonem.

510. Nakoniec gdy w równaniu (i''') $M = L$, natenczas powierzchnia ostro-
krzęgowa prawiestyczna, jest podwójnym ostrokręgiem o podstawie koła.

O Hyperboloidzie dwupłachtowej.

511. Równanie $$Nz^2 - My^2 - Lx^2 = P \ldots (k''')$$

należy do trzeciego gatunku powierzchni drugiego rzędu ~~trzeciego~~ do pierwszego ro-
dzaju. Liczb 476. Uczyniwszy następnie $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$, znajdziemy dla równań
przecięć równoodległych od płaszczyzn spółrzędnych

$$Nz^2 - My^2 = P + Lx^2 \ldots (l''')$$

przecięcia równoodległego od płaszczyzny yz

$$Nz^2 - Lx^2 = P + M\beta^2 \ldots (m''')$$

przecięcia równoodległego od płaszczyzny xz,

$$My^2 + Lx^2 = P - Ny^2 \ldots (n'')$$

przecięcia równoodległego od płaszczyzny xy: równania (l‴) i (m‴) należą do Hyperbol; równanie (n‴) jest Elipsy przestającej istnieć, gdy $Ny^2 - P$ ujemną jest ilością: w tym przypadku mamy

$$Ny^2 < P, \text{ czyli } y^2 < \frac{P}{N}, \text{ a zatem } y < \sqrt{\frac{P}{N}};$$

lecz skoro weźmiemy y większém od $\sqrt{\frac{P}{N}}$, drugi wyraz równania (n‴) powiększając się, sprawi takie powiększanie się osi tej Elipsy: a że y tylko jako kwadrat w równaniu (n‴) wchodzi, uczyniwszy je zatém ujemném, ze strony z ujemnych otrzymamy drugą powierzchnię zupełnie podobną pierwszej. Wypada przeto że w odległościach $\sqrt{\frac{P}{N}}$ czy to wyżej, czy niżej płaszczyzny xy przeprowadziwszy dwie płaszczyzny równoodległe, płaszczyzna powierzchnia między temi płaszczyznami nie będzie zawartą: ale że poprowadziwszy płaszczyzny bardzo zbliżone, w miarę odsuwania się ich od płaszczyzny xy, czy to w kierunku z dodatnych, czy to ujemnych, otrzymamy szereg krzywych elliptycznych nieznacznie powiększających się od zera do nieskończoności.

512. Ponieważ płaszczyzna xy nie spotyka powierzchni (*) więc

---

(*) To się widocznie pokazuje, uważając równanie $My^2 + Lx^2 = P$, należące

jej nie spotkają takie i osie x i y leżące na tej płaszczyźnie. Lecz inaczej się rzecz ma względem osi z. Jakoż zrównawszy z kolei zero dwie ze zmiennych równania $(k''')_1$ i uczyniwszy $z=0$, $y=0$, znajdziemy $x=\pm\sqrt{\frac{P}{L}}\sqrt{-1}$

$z=0, x=0$ ——— $y=\pm\sqrt{\frac{P}{M}}\sqrt{-1}$

$x=0, y=0$ ——— $z=\pm\sqrt{\frac{P}{N}}$;

to ostatnie równanie samo tylko jest prawdziwe. Uczyniwszy zatém $\sqrt{\frac{P}{N}}=c$ c będzie tylko prawdziwą osią powierzchni: lecz dla zgodności przypuścimy $\sqrt{\frac{P}{L}}=a$, $\sqrt{\frac{P}{M}}=b$, co i bydź może, bo te wyrażenia są stałemi równania powierzchni, które przez inne stałe zastąpimy. Wstawiwszy ważności spółczynników L, M, N wyciągnięte z tych równań, znajdziemy

$$a^2b^2z^2 \mp a^2c^2y^2 - b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2 \ldots (o''')$$

równanie Hyperboloidy dwupłachtowej.

513. Okazaliśmy jak pod Licz 502, iż przecięcie powierzchni płaszczyzną przechodzącą przez oś z jest Hyperbolą, i za pomocą równania tego przecięcia

---

do przecięcia powierzchni płaszczyzną xy, które dają ważności urojone dla osi głównych.

znaleźlibyśmy jak pod Liczb 502 i 503 iż koniecznym warunkiem, aby ta powierzchnia obrotową była, jest równość współczynników a i b.

514. Trzecią i bezpośrednio ten warunek znaleść można podług tego co inny powiedzieli Liczb 504, że w tym przypadku z powinno być funkcyą sumy x^2+y^2, co być nie może tylko jeżeli współczynniki w x^2 i y^2 są równe: wtym razie równanie (o''') sprowadzi się do

$$a^2z^2 - c^2(x^2+y^2) = a^2c^2.$$

równania Hyperboloidy obrotowej dwupłachtowej.

515. To równanie otrzyma się takie, jak pod Liczb 504, położywszy x^2+y^2 za r^2 w równaniu przecięcia przechodzącego przez oś z, które jest kształtu

$$a^2z^2 - c^2r^2 = a^2c^2.$$

516. Znajdziemy jeszcze równanie Hyperboloidy dwupłachtowej, zadanie Liczb 505 tak wyraziwszy: oś niedotykająca powierzchni w Hyperboloidzie jednopłachtowej, sama ją tylko spotyka w Hyperboloidzie dwupłachtowej; przeto równania (h''') Liczb 505 zmienią kształt dawny, i będą

$$a^2z^2 - c^2x^2 = a^2c^2,\ b^2z^2 - c^2y^2 = b^2c^2 \ldots\ldots (p'''):$$

bo gdy z założenia oś z nie spotyka powierzchni, potrzeba żebyśmy uwyraziwszy $x=0$, $y=0$, w równaniach (p''') prawdziwe ważności dla z znaleźli.

Hyperbola dana pierwszém z równań (p''') wystawiona jest przez EFE'F' (fig 121) a Hyperbola dana drugiem z równań (p''') tymże sposobem względem osi z jest położona. Za pomocą równań (p''') wykonamy rezultę działania, jak pod Licz 505.

517. Gdy w równaniu (k''') mamy M=0, L=0, równanie powierzchni sprowadzi się do równania powierzchni walcowej o podstawie Hyperbolicznej; o czém przekonać się można podobnie jak pod Licz 493. Gdy jeden tylko spółczynnik N jest żadnym, nie ma powierzchni, bo równanie staje się niedorzecznem.

O Powierzchniach drugiego rzędu drugiego rodzaju.

518. Drugi rodzaj powierzchni drugiego rzędu zamyka się w równaniu Licz 472

$$By^2 + Cx^2 + Gz = 0.$$

Umieściwszy Gz po tej stronie po której dodajnem będzie, otrzymamy

$$Gz = -By^2 - Cx^2.$$

Ponieważ pierwsza strona jest dodajną, i druga dodajną bydź musi; co tylko w tych przypadkach może mieć miejsce

Gdy 1. Wyrazy drugiej strony obadwa są dodajne;

2. Jeden z tych wyrazów jest dodajny, drugi ujemny.

Wystawiwszy zatem przez N_z ilość dodatnią G_z, a przez L i M wartości bezwzględne współczynników x i y, jedynie te trzy kombinacje w znakach mieć można

$$N_z = Lx^2 + My^2,$$

$$N_z = Lx^2 - My^2,$$

$$N_z = My^2 - Lx^2;$$

ponieważ dwa ostatnie równania jednakowego są kształtu, wszystko co o jednem z tych równań powiemy, i do drugiego się zastosuje, odmieniwszy oś x na oś y, i odwrotnie; a zatem nad jednem tylko z tych równań zastanawiać się będziemy.

O Paraboloidzie Eliptycznej.

520. Pierwsze z równań $Lx^2 + My^2 = N_z$ .... $(9''')$

należy do powierzchni której nadano imię Paraboloidy eliptycznej. Położywszy następnie za x, y, z; α, β, γ; w równaniu $(9''')$ znajdziemy

$$My^2 = N_z - L\alpha^2$$

przecięcie równoodległe od płaszczyzny yz;

$$Lx^2 = N_z - M\beta^2$$

przecięcie równoodległe od płaszczyzny xz

$$Lx^2 + My^2 = N_\gamma$$

przecięcie równoodległe od płaszczyzny xy. Widzimy zatém że przecięcia uczynione płaszczyznami równoodległemi od płaszczyzn yz i zx są Parabolami, a przecięcie uczynione płaszczyzną równoodległą od płaszczyzny xy jest Elipsą. Ta płaszczyzna xy nie spotyka powierzchni, bo gdy $z=0$, równanie sprowadza się do

$$Lx + My^2 = 0,$$

niedorzecznego równania; gdy bowiem L i M są dodajne, to równanie pokazuje że Summa ilości dodajnych jest żadną.

521. Gdy z nie jest żadnem, jak przypuściliśmy Lecz 619 że Nz jest dodajnem, pominąwszy znaki przy ilościach N i z, widzimy, że aby ten warunek był dopełnionym, trzeba koniecznie aby N i z jednakowych były znaków; dlaczego powierzchnia z jednej tylko strony płaszczyzny xy rozciągać się może.

Gdy powiększać będziemy x od zera do nieskończoności, płaszczyzna przecinająca oddalając się od płaszczyzny xy da szereg przecięć elliptycznych coraz się powiększających.

522. Ellipsy te będą miały na osiach swoje środki: bo równanie

$$Lx^2 + My^2 = Nz$$

zawierające je wszystkie, odnosi się do początku będącego środkiem powierzchni; a że ten początek znajduje się w punkcie w którym x i y są żadne,

będzie zatem na osi z.

523. Wszystkie przecięcia przechodzące przez oś z są Parabolami; bo wyniegowawszy z z równania powierzchni i równania $y = \text{stf.} x$, należącego do płaszczyzny ACB (Fig 115) - przechodzącej przez oś z i postępując jak pod Licz 487 i 488, przekonamy się że konieczny warunek aby powierzchnia obrotowa była sprowadza się do $L = M$: widzimy zatém iż ten warunek właśnie będzie powinien będzie dopełnionym w tym przypadku, Licz 504, bowiem z funkcyą niemy $x^2 + y^2$. Odmieniwszy zatém L na M w równaniu $(9''')$ znajdziemy $x^2 + y^2 = \frac{N}{M} z$, czyli $x^2 + y^2 = pz$

równanie Paraboloidy elliptycznej obrotowej.

524. Można i bezpośrednio otrzymać to równanie, następujące zapadnienie rozwiązując.

Znaleść jaka jest powierzchnia obrotowa, która przecięta płaszczyzną przechodzącą przez oś z, daje zawsze za przecięcie Parabolę, której oś główna jest osią z.

Wystawiwszy przez $r^2 = pz$ równanie przecięcia uczynionego płaszczyzną przechodzącą przez oś z, dosyć Licz 504, odmienić w tém równaniu r^2 na $x^2 + y^2$ aby otrzymać równanie powierzchni żądanej.

525. Możemy także znaleść równanie Paraboloidy elliptycznej za pomocą własności następujących. 1. Dwie z płaszczyzn spółrzędnych dają za przecięcia Parabolę mającą tęż samą osią główną. 2. Wszystkie przecięcia prostopadłe do tej osi są Elipsami. Ponieważ przecięcia uczynione dwoma płaszczyznami spół. rzędnemi tylko podług jednej prostej będącej jedną z osi spółrzędnych przecinać się mogą, ta oś np: z będzie przeto główną osią dwóch Parabol, których zatem równania wystawiemy przez

$$y^2 = pz, \quad y^2 = nz.$$

Jeżeli w pierwszem z tych równań weźmiemy $AD = z$ (Fig 122) będzie Fig 122.
$CD^2 = pz$: dla tejże przyczyny $Cf^2 = nz$. Że zaś spółrzędne x i y powinny zadosyć uczynić Elipsie, której półosie główne są CD i Cf, będzie Lice 208.

$$CD^2 . y^2 + Cf^2 . x^2 = CD^2 . Cf^2$$

czyli $$pzy^2 + nzx^2 = pnz^2$$

podzieliwszy przez pnz

$$\frac{1}{n} . y^2 + \frac{1}{p} . x^2 = z.$$

rozmnożywszy przez ilość dowolną N, i uczyniwszy

$$\frac{N}{n} = M, \quad \frac{N}{p} = L$$

otrzymamy w końcu $My^2 + Lx^2 = Nz$.

O Paraboloidzie Hyperbolicznej.

526. Równanie $Nz = Lx^2 - My^2$

należy do powierzchni krzywej, której nadano imię Paraboloidy Hyperbolicznej.

527. Przeciąwszy tę powierzchnię płaszczyznami równoodległemi od płaszczyzn spółrzędnych, znajdziemy dla przecięć uczynionych temi płaszczyznami

$$Lx^2 = Nz + M\beta^2 \ldots (r''')$$

przecięcia równoodległego od płaszczyzny xz,

$$My^2 = -Nz + L\alpha^2 \ldots (s''')$$

przecięcia równoodległego od płaszczyzny yz

$$Lx^2 - My^2 = N\gamma \ldots (t''')$$

przecięcia równoodległego od płaszczyzny xy. Równania (r''') i (s''') należą do Parabol, a równanie (t''') do Hyperboli.

528. Uczyniwszy $\beta = 0$ i $\alpha = 0$, znajdziemy że ślady na płaszczyznach xz i yz, mają równania $Lx^2 = Nz \ldots (u''')$

przecięcia uczynionego płaszczyzną xz,

$$My^2 = Nz \ldots (v''')$$

przecięcia uczynionego płaszczyzną yz. Pierwsze z tych równań należy do

Paraboli, mającej odcięte swoje na osi z, a drugie do Paraboli mającej odcięte na przedłużeniu osi z. Te parabole na płaszczyznach xz i zy prostopadłych do siebie są położone.

W równaniu (u''') wystawiwszy przez AD (fig 123) ważność spółrzędnej fig 12. z, otrzymamy

albo $$OE^2 = \frac{N}{L} . AD;$$

W odległości AD przeprowadziwszy płaszczyznę równoodległą od płaszczyzny xy, przecięcie uczynione tą płaszczyzną będzie miało za równanie

$$Lx^2 - My^2 = N . AD.$$

prawdziwa oś tej Hyperboli będzie ważnością odciętej x odpowiadającą y=a; że zaś w tym przypadku mamy $x^2 = \frac{N}{L} . AD$, co jest właśnie ważnością którąśmy dla OE^2 znaleźli, zatém wierzchołki tej Hyperboli będą w punktach E i E', to jest na Paraboli EAE' danej równaniem (u'''). Cośmy o punkcie E powiedzieli, może się stosować do wszystkich innych punktów Paraboli, wnieśiemy przeto że w części z dodatnych, powierzchnia składa się z szeregu Hyperbol równoodległych od płaszczyzny xy, i mających wierzchołki we dwóch punktach Paraboli EAE'.

529. W miarę jak płaszczyzna przecinająca przybliża się do płaszczyzny xy, zawsze od niej równoodległe, oś prawdziwa EE' Hyperboli R.S.R'S zmniejsza się ciągle aż do punktu w którym płaszczyzna przecinająca łączy się z płaszczyzną xy: w tym razie równanie powierzchni zamieni się na

$$My^2 = Lx^2, \text{ i da } y = \pm\sqrt{\frac{L}{M}}.$$

co pokazuje że to przecięcie sprowadza się do układu dwóch linii prostych.

530. Jeżeli płaszczyzna przecinająca pod płaszczyzny xy przechodzi, jedno miejsce znak, i równanie przecięcia równoodległego od płaszczyzny xy, będzie

$$Lx^2 - My^2 = Ny$$

albo raczej $$My^2 - Lx^2 = Ny \ldots\ldots (w''')$$

531. Porównawszy to ostatnie równanie z równaniem (t''') widzimy że oś prawdziwa EE' Hyperboli R.S.R'S nad płaszczyzną xy położonej równoodległa jest od osi x, gdy tymczasem oś prawdziwa Hyperboli V.V'S pod płaszczyzną xy położonej równoodległa jest od osi y; jeżeli więc płaszczyzny przecinające w równych odległościach od płaszczyzny xy są poprowadzone, jedna wyżej druga niżej tej płaszczyzny, równania (t''') i (w''') tylko znakiem ilości y różnić się będą, a Hyperbole R.S.R'S, V.V'S tej własności używać, iż położeni prawdziwej w jednej równa będzie stałej

mnożącej $\sqrt{-1}$ w wyrażeniu półosi urojonej w drugiej.

532. Można okazać podobnie jak pod Liczbą 529, że wszelkie Hyperbole położone pod płaszczyzną xy równoodległe od tej płaszczyzny, mają swoje wierzchołki α na Paraboli danej równaniem (v''').

533. Gdy przez oś z przeprowadzimy Φ płaszczyznę, równanie tej płaszczyzny będzie. $y = x \operatorname{tg} \varphi$,

wyrugowawszy y z pomiędzy tego równania i powierzchni, otrzymamy dla równania przecięcia uczynionego tą płaszczyzną

$$(L - M \operatorname{tg}^2 \varphi) x^2 = N z,$$

uczyniwszy zaś $x = r \cos \varphi$, zamienimy je na

$$(L \cos^2 \varphi - M \operatorname{sen}^2 \varphi) r^2 = N z \ldots . (x''')$$

równanie Paraboli MAM (Fig 124) mającej wierzchołek swój w początku A, w którym jest r żadnemi tą Parabola rozciągając się nieskończenie mu. Fig 12
si spotkać płaszczyznę przeprowadzoną przez punkt O równoodległą od płaszczyzny xy: że zaś wszelki punkt tej Paraboli należy do powierzchni, a Hyperbola RSR' obejmuje wszystkie punkta znajdujące się na płaszczyźnie równoodległej od płaszczyzny xy, i przeprowadzonej

przez punkt D; wypada przeto iż Parabola przez dwa punkta Hyperboli RSR'S' przechodzić powinna. Dla wyznaczenia tych punktów, użyjmy z=AO w równaniu (x''') a znajdziemy

$$r = \sqrt{\frac{N.AO}{Ldos^2\varphi - Mwsi^2\varphi}} = AC$$

$$r = -\sqrt{\frac{N.AO}{Ldos^2\varphi - Mwsi^2\varphi}} = AC'$$

z równości tych ważności AC i AC', wnieśiemy, że punkta M i M' Paraboli symetrycznie na Hyperboli są ułożone; to jest że łuk EM = E'M'; można zatem wystawić sobie Paraboloidę Hyperboliczną jako utworzoną z nieskończonej liczby Parabol mających wierzchołki swoje w A, a przecinających symetrycznie ramiona Hyperboli RSR'S, VSUS'.

534. Łatwo jest znaleść równanie Paraboloidy Hyperbolicznej mając równania Parabol utworzonych przez główne przecięcia.

Przypuściwszy iż oś spólna tym Parabolom jest osią z Licz 528, równania tych Parabol będą

$$x^2 = pz,\ y^2 = -nz \ldots\ldots (y'');$$

przez jakikolwiek punkt K (Fig 125) wzięty na powierzchni przeprowadziemy płaszczyznę równoodległą od płaszczyzny xy: spółrzędne tego punktu będą Fig 125

$$z = AO,\ x = OJ,\ y = JK.$$

Ponieważ spółrzędne x i y do punktu RSR'S należeć powinny, wyznaczę

więc osie tej Hyperboli, wystawiwszy z przez AC. Równania (y''') dają

$$OE^2 = pz, \quad CG = -nz;$$

i stałe Hyperboli RSR'S będą Liczb 531 $\sqrt{pz}$ i $\sqrt{nz}$. Hyperbola RSR'S będzie za-

tem miała za równanie $nzx^2 - pzy^2 = pnz^2$;

podzieliwszy przez pnz, rozmnożywszy przez ilość dowolną N, i wystawiwszy

przez L i M to czém się stanią współczynniki w x^2 i y^2, otrzymamy

$$Lx^2 - My^2 = Nz,$$

Ponieważ to równanie ma miejsce między trzema spółrzędnemi któ-

regokolwiek punktu wziętego na Paraboloidzie Hyperbolicznéj, należy za-

tém do powierzchni:

535. Widzieliśmy, Liczb 277, że prawiestyczne Hyperboli tworzą z prawdzi-

wą osią kąty, których styczne trygonometryczne znaków przeciwnych

są równe stosunkowi małej osi do wielkiéj osi Hyperboli. Równanie

(w''') Hyperboli RSR'S (Fig 124) daje dla tych stycznych trygonometry- Fig 124

cznych $\frac{L}{M}$ i $\frac{L}{M'}$. Ponieważ te wyrażenia są niezależne od z, więc prawdzi-

stycznych NL, N'H' (Fig 125) przecięcia tem samem kąt między sobą czynić Fig 125

będą co ΔAH. Przeto płaszczyzny AL', AH' zawierające wszystkie prawie: styczne przecięć będą prawiestycznemi do powierzchni.

O Powierzchniach drugiego rzędu trzeciego rodzaju.

536. Powierzchnie drugiego rzędu trzeciego rodzaju mają za równanie Licz 472 $Az^2 + Hy + Kx = o$

zostawiwszy Az^2 dodajnem po jednej stronie, otrzymamy

$$-Hy^2 - Kx = Az^2$$

Dwa wyrazy pierwszej strony albo są obadwa dodajne, albo znaków przeciwnych. Przypomniawszy sobie uwagę Licz 477, tylko te dwa równania rozstrząsać będziemy

$$My - Nx = Az^2 \ldots\ldots (z''')$$

$$My + Nx = Az^2 \ldots\ldots (a^{iv})$$

537. Jeżeli w równaniu (z''') uczyniemy $z=o$, będzie

$$My = Nx \ldots\ldots (b^{iv})$$

równanie przecięcia głównego płaszczyzną xy. To równanie należy do linii prostej AL (Fig 128) przechodzącej przez początek. Fig 128

Uczyniwszy zaś w $z=y$ w równaniu (z''') otrzymamy

$$y = \frac{Nx}{M} + \frac{Ay^2}{M}$$

równanie przecięcia utworonego płaszczyzną równoodległą od płaszczyzny xy. Kąt $\angle A'X'$ (Fig 126) który to przecięcie $A'L'$ z równoodległą odosi x czyni Fig 126 ma tę samą styczną trygonometryczną co kąt $\angle AX$. Więc wszystkie przecięcia takie jak $A'L'$ utworone płaszczyznami równoodległemi od xy są równoodległe, i powierzchnia powstać może z poruszania się prostej równoodległe od siebie, i jest powierzchnią walcową.

538. Przecięcie uczynione płaszczyzną $ZA'Y'$ (Fig 127) równoodległą od płaszczyzny Fig 127 yz, jest Parabolą mającą równanie

$$z^2 = \frac{My}{A} - \frac{Nx}{A};$$

Jeżeli uczyniemy $$y = y' + \frac{Nx}{M} \quad \ldots\ldots (c'')$$

równanie tego przecięcia zamieni się na

$$z^2 - \frac{My'}{A} = 0;$$

wierzchołek zatem Paraboli będzie w punkcie w którym $y' = 0$. Wtym przypadku równanie (c'') sprowadzi się do $y = \frac{Nx}{M}$. Tę ważności spółrzędnej y, jużeśmy dawniej znaleźli, uczyniwszy $x = \alpha$ w równaniu (b'') prostej AL: przeto wierzchołek tej Paraboli na prostej AL jest położonym. Łośmy o płaszczyźnie $ZA'Y$ powiedzieli, to może się stosować do wszelkiej płaszczyzny równoodległej, a zatém.

Fig 126

wszelkie przecięcia uczynione płaszczyznami równoodległemi od płaszczyzny yz są Parabolami na prostej AL wierzchołki swoje mającemi.

539. Zastanowiwszy się nad tém, że te wszystkie Parabole jeden parametr mają, możemy sobie wystawić tę powierzchnię jako utworzoną przez Parabolę MDN poruszającą się równoodległe od płaszczyzny yz, takim sposobem że jej wierzchołek zawsze się na prostej AL zostawać, a oś na płaszczyźnie xy.

540. Za pomocą poznanej teraz własności tej powierzchni, możemy znaleść jej równanie: bo niechaj będzie $y' = ax$, równanie prostej AL,

$z^2 = py''$ równanie Paraboli MDN;

ponieważ x, y, z, wystawiają spółrzędne AA', A'Q, Q'M punktu M, mamy

$$MQ^2 = p.DQ, \quad DQ = AQ - AD,$$

czyli $$z^2 = p.DQ, \quad DQ = y - ax.$$

Wymgowawszy DQ znajdziemy $z^2 = py - apx$.

541. Nakoniec łatwo jest poznać że równanie (a'') należy do powierzchni tej samej natury, co znaleziona dopiero, uczyniwszy bowiem $x' = -x$, to jest wziąwszy oś x na przedłużeniu osi x, otrzymamy równanie tej samej postaci co poprzedzające.

O płaszczyznach stycznych do powierzchni drugiego rzędu.

542. Widzieliśmy że równanie ogólne powierzchni drugiego rzędu, zawsze bydź może pozbawionem wyrazów zawierających prostokąty ze spółrzędnych, nie tracąc przez to swojej ogólności: możemy je zatém wyrazić pod kształtem następującym. $Az^2 + By^2 + Cx^2 + Dz + Ey + Fx + G = 0 \ldots\ldots (d^{iv})$

Przez punkt O wzięty na powierzchni (Fig 128), przeprowadźmy płaszczyznę OJ, której równanie w ogólności będzie Fig 128

$$Lx + My + Nz + P = 0.$$

Idzie teraz o wyznaczenie spółczynników tego równania warunkami koniecznemi, aby płaszczyzna była styczną do powierzchni w punkcie O.

Przeprowadźmy przez ten punkt O dwie płaszczyzny OQX', OQY' równodległe jedna od płaszczyzny xz, druga od płaszczyzny yz. Te płaszczyzny przetną powierzchnię podług łuków ORX', OSY', a płaszczyznę OHK podług prostych OH i OK: widocznie zaś jeżeli płaszczyzna ma bydź styczną do powierzchni, proste OH, OK muszą bydź stycznemi do łuków ORX', OSY'; bo gdyby to nie nastąpiło, płaszczyzna OHK przecięłaby powierzchnię. To mając, widocznie

widocznie spółrzędne punktu O, wystawione przez α, β, γ sprawdzą równanie (d^{IV}) powierzchni, i równanie płaszczyzny będzie więc

$$A(z^2-\gamma^2)+B(y^2-\beta^2)+C(x^2-\alpha^2)+D(z-\gamma)+E(y-\beta)+F(x-\alpha)=0 \ldots\ldots (e^{IV})$$

$$\frac{L}{N}(x-\alpha)+\frac{M}{N}(y-\beta)+(z-\gamma) \ldots\ldots (f^{IV})$$

Ponieważ płaszczyzny OQY' i OQX' mają równania $x=\alpha$, $y=\beta$; przecięcia zatém OY', ORX' otrzymają się wstawiwszy następnie wartości spółrzędnych x i y w równanie (e^{IV}) i będzie $A(z^2-\gamma^2)+B(y^2-\beta^2)+D(z-\gamma)+E(y-\beta)=0 \ldots\ldots (g^{IV})$

$$A(z^2-\gamma^2)+C(x^2-\alpha^2)+D(z-\gamma)+F(x-\alpha)=0 \ldots\ldots (h^{IV})$$

Podobnie wstawiwszy następnie $x=\alpha$, i $y=\beta$ w równanie (f^{IV}) płaszczyzny OJK, otrzymamy równania prostych OK i Ott,

$$\frac{M}{N}(y-\beta)+z-\gamma=0 \ldots\ldots (i^{IV})$$

$$\frac{L}{N}(x-\alpha)+z-\gamma=0 \ldots\ldots (j^{IV})$$

Wyznaczmy teraz spółczynniki $\frac{M}{N}$ i $\frac{L}{N}$ warunkami aby proste OK, Ott stycznemi były do krzywych ORX', OY'.

Ponieważ równanie (i^{IV}) należy do prostej OK przechodzącej przez punkt α, β, γ, leżący na obwodzie krzywej OY', zmuszoliwszy zatém tę prostę do przejścia przez inny punkt krzywej, ta prosta będzie jej sieczną. Jeżeli przypuśćmy

polem że dwa te punkta przystały, styczne zamienią się w tym razie natyczne. Nazaczywszy przez $\alpha+\alpha', \beta+\beta', \gamma+\gamma'$ spółrzędne punktu spólnego krzywej OZ' i prostej Ok, te spółrzędne sprawdzą równania (i'') i (j''), i będzie

$$A(2\gamma\gamma'+\gamma'^2)+B(2\beta\beta'+\beta'^2)+D\gamma+E\beta'=0;\quad \frac{M}{N}\beta'+\gamma=0.$$

Wyrugowawszy γ' z pomiędzy tych równań i ułożywszy podług β', znajdziemy

$$\left[\left(\frac{AM^2}{N^2}+B\right)\beta'-2A\gamma\frac{M}{N}+2B\beta-D\frac{M}{N}+E\right]\beta'=0$$

Zniosłszy czynnik β', drugi czynnik wyznaczy dla β' Liczbę 252, różnicę spółrzędnych punktów zetknięcia się w kierunku γ: a że te punkta łączą się z sobą, gdy prosta styczną się staje, mamy w tym razie $\beta'=0$, co sprowadzi pierwszy czynnik do

$$-2A\gamma\frac{M}{N}+2\beta B-D\frac{M}{N}+E=0,$$

z kąd wyciągniemy

$$\frac{M}{N}=\frac{2B\beta+E}{2A\gamma+D}.$$

Postępując podobnie z równaniami (h'') i (j'') znajdziemy dla ważności drugiego spółczynnika

$$\frac{L}{N}=\frac{2L\alpha+J}{2A\gamma+D}$$

Ta ważność ilorazu $\frac{L}{N}$ da się także wyprowadzić z ważności ilorazu $\frac{M}{N}$, bo równania (h'') i (j'') tego samego są kształtu co równania (g'') i (i''). Gdy w równanie (f'') wstawimy ważności dla $\frac{L}{N}$ i $\frac{M}{N}$ znalezione, otrzymamy dla równania płaszczyzny stycznej w punkcie α,β,γ,

$$\frac{(2L\alpha+J)}{2A\gamma+D}(x-\alpha)+\frac{(2B\beta+E)}{2A\gamma+D}(y-\beta)+(z-\gamma)=0..$$

albo zniósłszy mianowniki

$$(2C\alpha + F)(x-\alpha) + (2\beta B + E)(y-\beta) + (2Ay + D)(z-\gamma) = 0 \ldots\ldots (k'')$$

343. Równania normalnej w punkcie α, β, γ, łatwo się dadzą wyprowadzić z równania płaszczyzny stycznej. Równania prostej są

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \ldots\ldots (l'')$$

aby zaś ta prosta mogła bydź prostopadłą do płaszczyzny, której (k'') jest równaniem potrzeba żeby pomiędzy współczynnikami zmiennych następujące były zależności, Liczn 442 $2C\alpha + F = a(2Ay + D)$, $2B\beta + E = b(2Ay + D) \ldots\ldots (m'')$

ponieważ normalna przez punkt α, β, γ ma przechodzić, równania (l'') zamieniają się zatém na $(x-\alpha = a(z-\gamma),\ y-\beta = b(z-\gamma))$.

Gdy położemy w te równania ważności współczynników a i b wyciągnięte z równań (m'') otrzymamy

$$x-\alpha = \frac{2C\alpha + F}{2Ay + D}(z-\gamma), \quad y-\beta = \frac{2\beta B + E}{2Ay + D}(z-\gamma):$$

Je są równania normalnej w punkcie α, β, γ danym na powierzchni drugiego rzędu.

Tablica 1ma

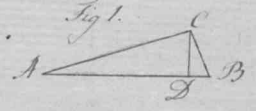
Fig 1.


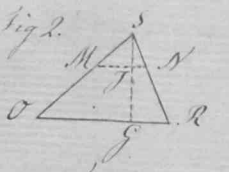
Fig 2.


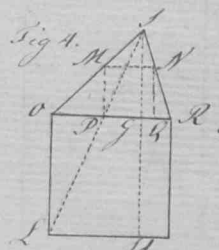
Fig 4.


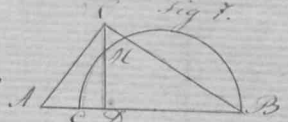
Fig 7.


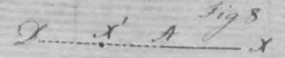
Fig 8


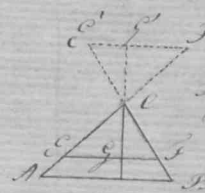
Fig 6.


Fig 5

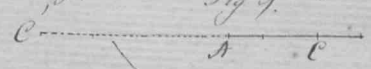
Fig 9.


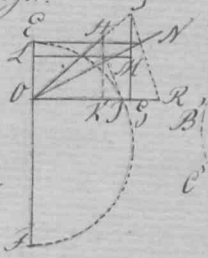
Fig 11.


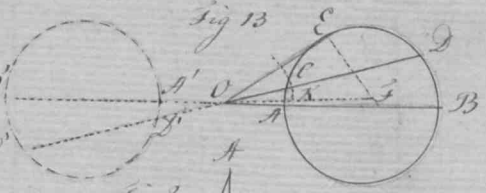
Fig 13


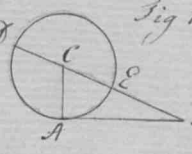
Fig 10.


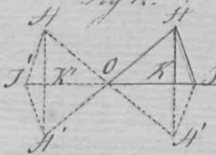
Fig 12.


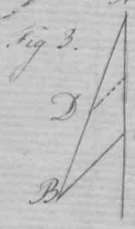
Fig 3.


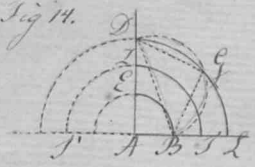
Fig 14.


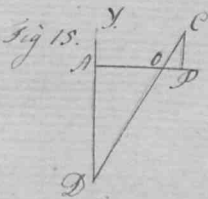
Fig 15.


Fig 16

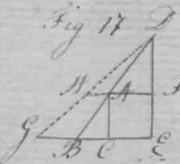
Fig 17


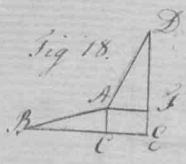
Fig 18.


Fig 19.

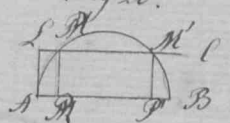
Fig 20.


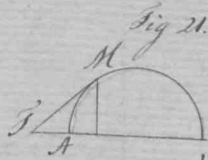
Fig 21.


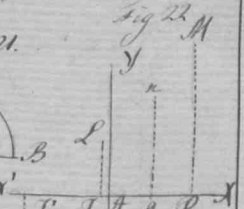
Fig 22.


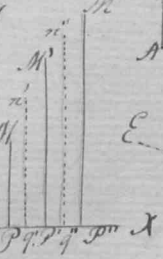
Fig 23


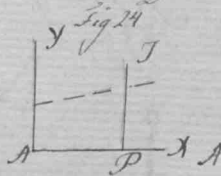
Fig 24


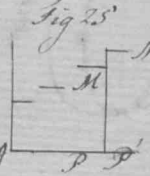
Fig 25


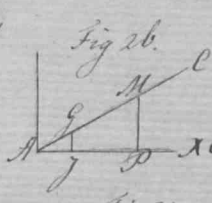
Fig 26.


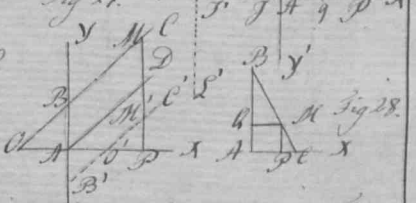
Fig 27.


Fig 28.

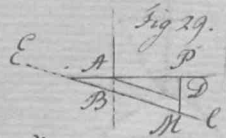
Fig 29.


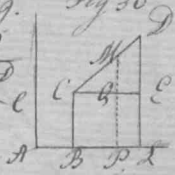
Fig 30


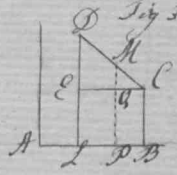
Fig 31.


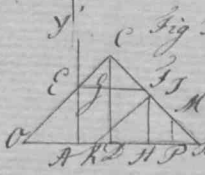
Fig 32.


Fig 33.

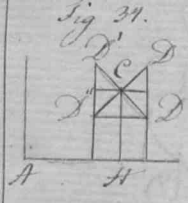
Fig 34.


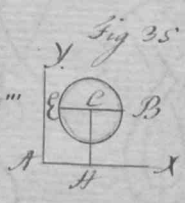
Fig 35.


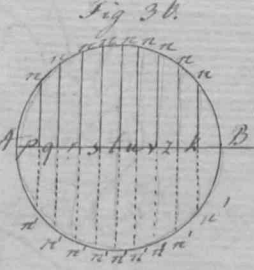
Fig 36.


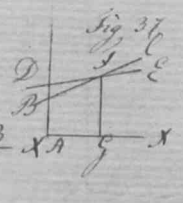
Fig 37.


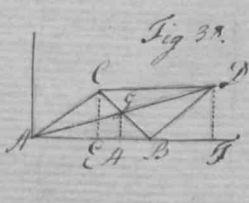
Fig 38.


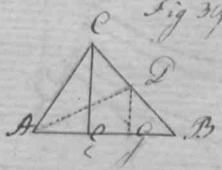
Fig 39.


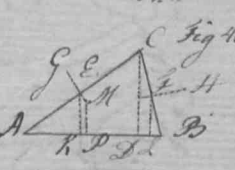
Fig 40.


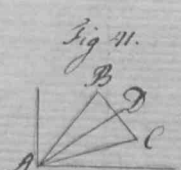
Fig 41.


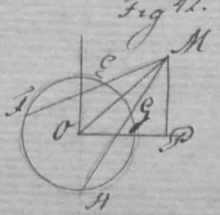
Fig 42.


Fig 42.

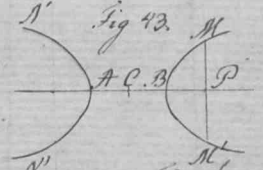


Fig 44.

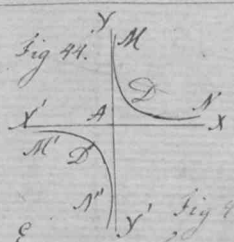


Fig 45.

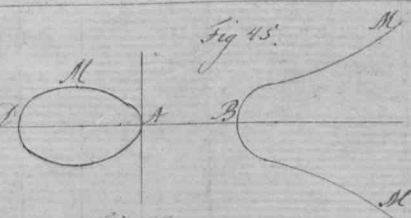


Fig 46.

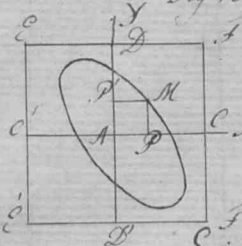


Fig 47

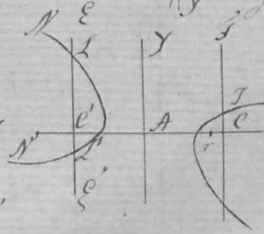


Fig 48.

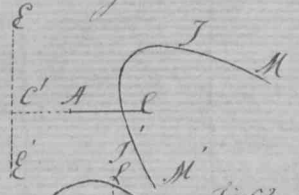


Fig 49.

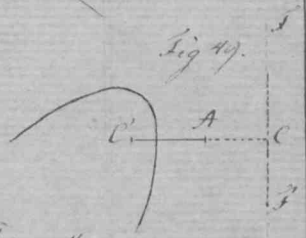


Fig 50

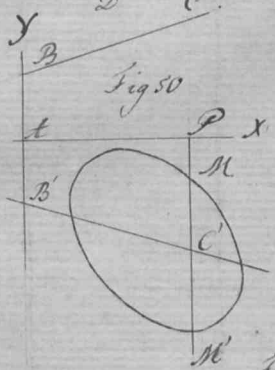


Fig 51.

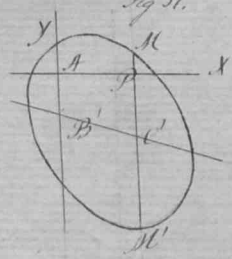


Fig 52.

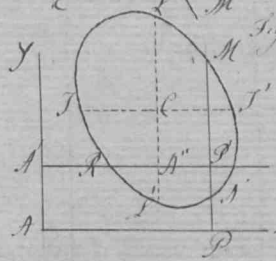


Fig 53

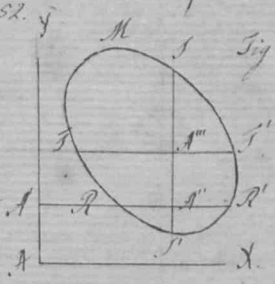


Fig 54.

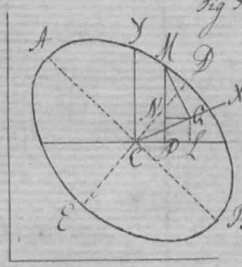


Fig 55.

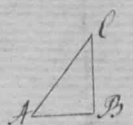


Fig 56.

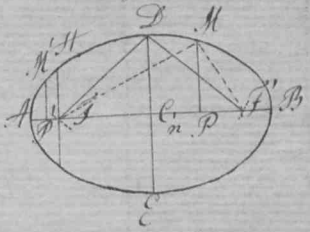


Fig 57.

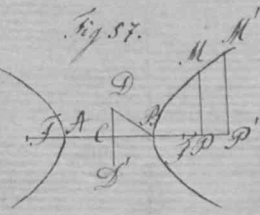


Fig 58

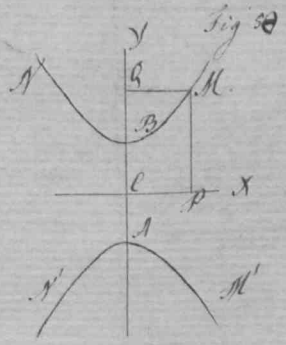


Fig 59.

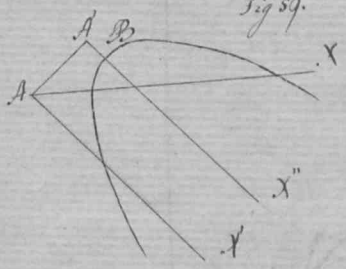


Fig 60.

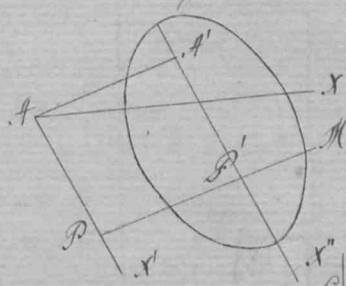


Fig 61

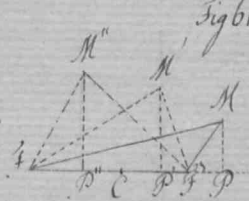


Fig 62.

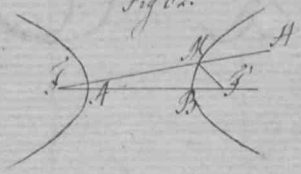


Fig 63.

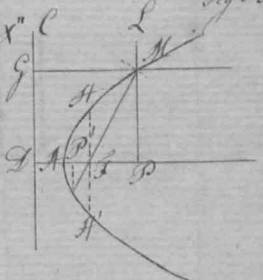


Fig 64.

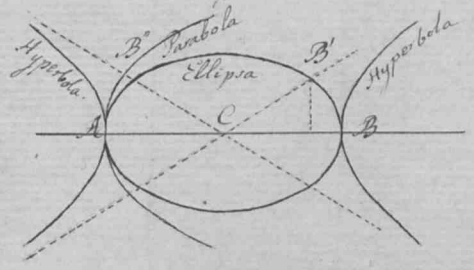


Fig 65.

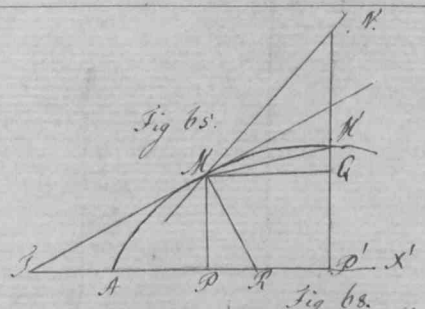


Fig 66.

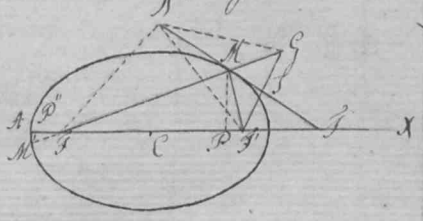


Fig 67.

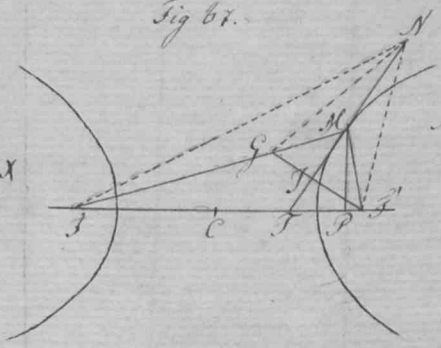


Fig 68.

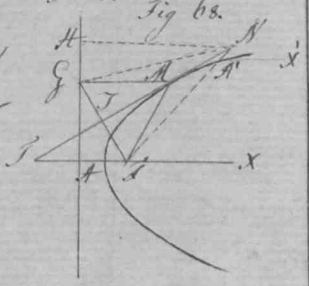


Fig 69.

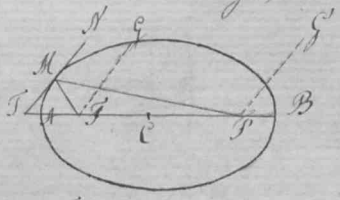


Fig 70.

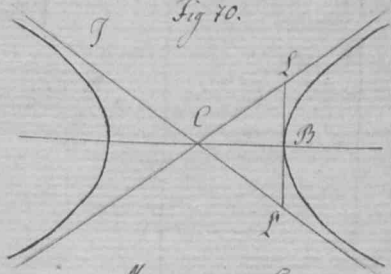


Fig 71.

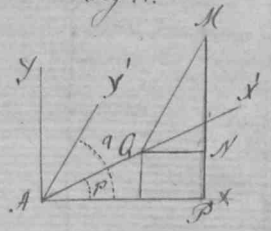


Fig 71.*

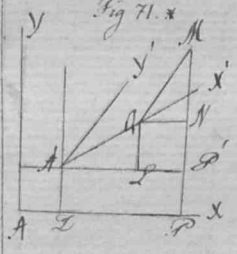


Fig 72

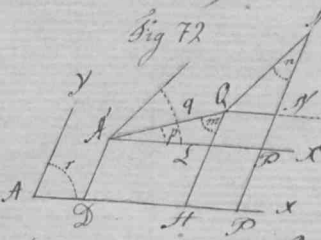


Fig 73

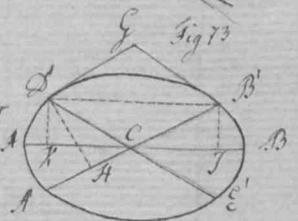


Fig 74.

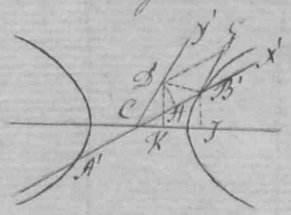


Fig 76.

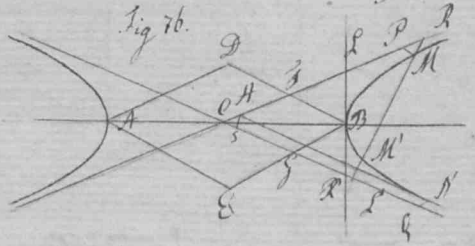


Fig 75.

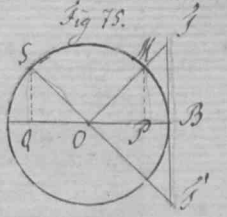


Fig 77.

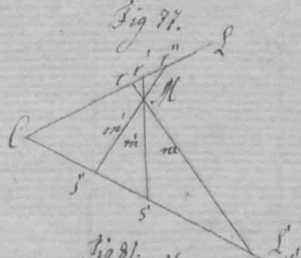


Fig 78.

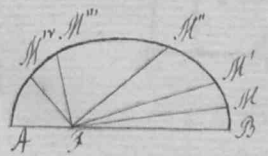


Fig 79.

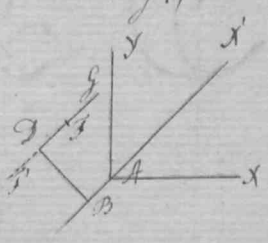


Fig 80.

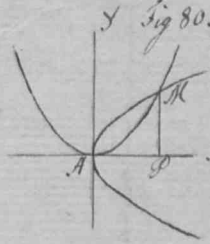


Fig 81.

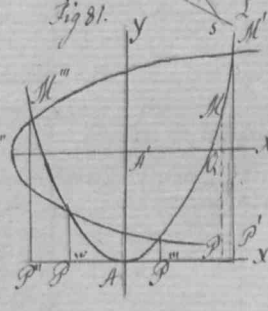


Fig 82.

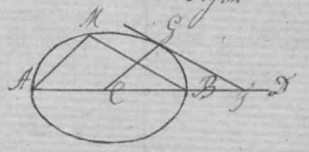


Fig 83.

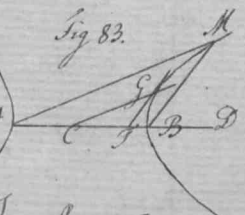


Fig 84.

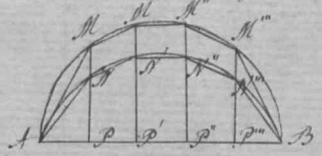


Fig 85.

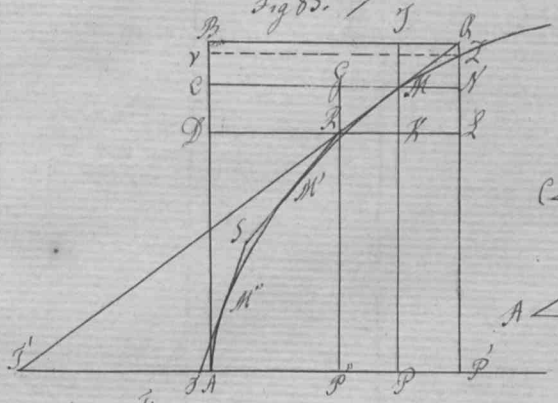


Fig 86.

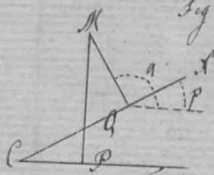


Fig 87.

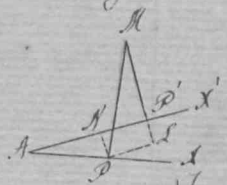


Fig 88.

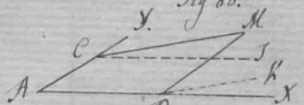


Fig 89.

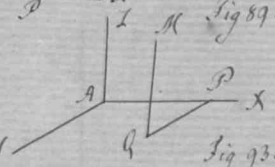


Fig 90.

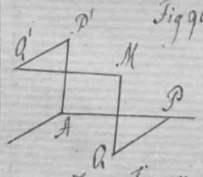


Fig 91.

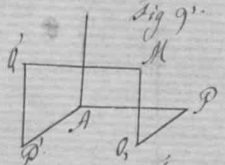


Fig 92.

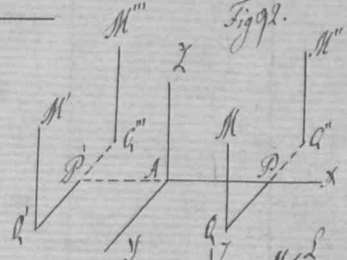


Fig 93.

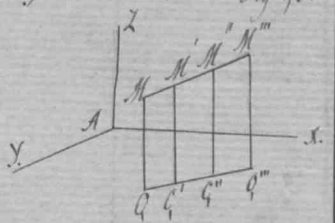


Fig 94.

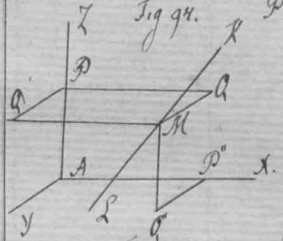


Fig 95.

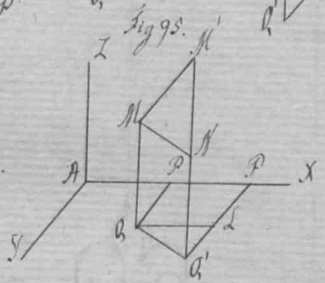


Fig 96.

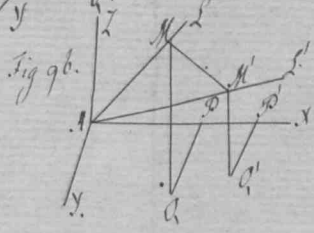


Fig 97.

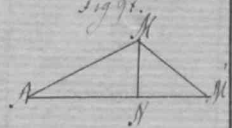


Fig 98.

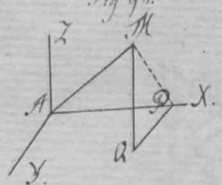


Fig 99.

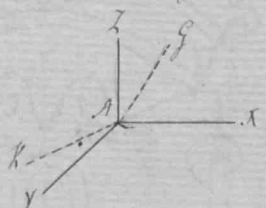


Fig 100.

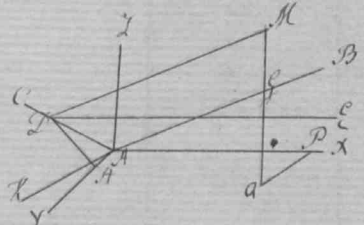


Fig 101.

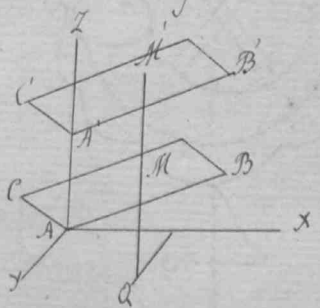


Fig 102.

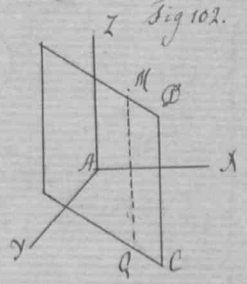


Fig 103.

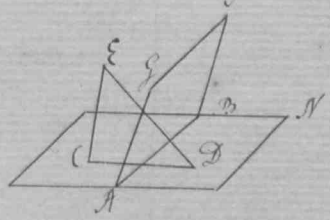


Fig 104.

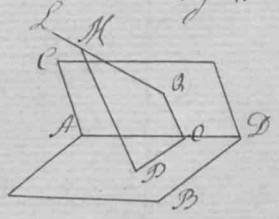


Fig 105.

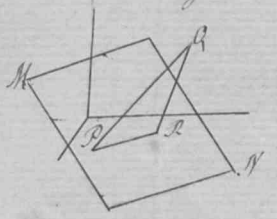


Fig 106.

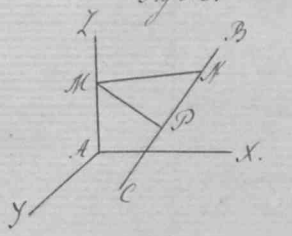


Fig 107.

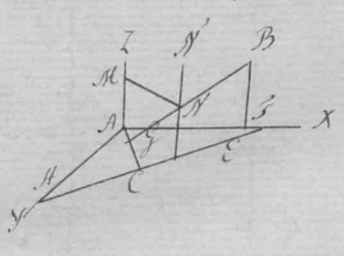


Fig 108.

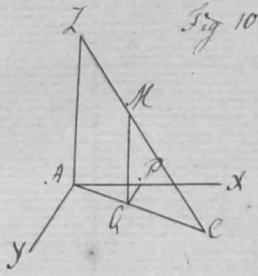


Fig 109.

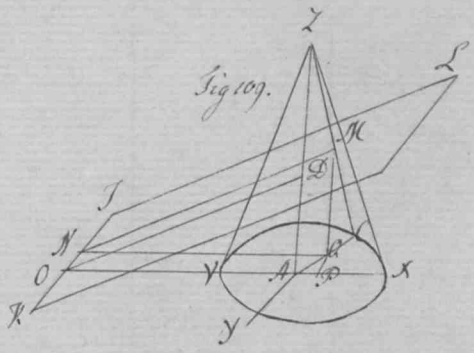


Fig 110.

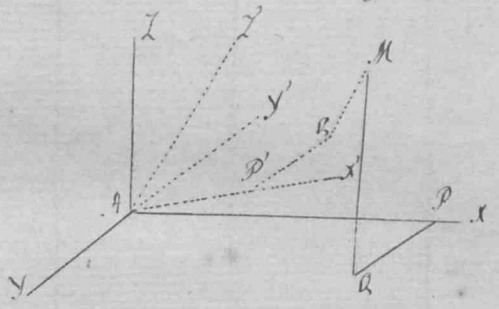


Fig 111.

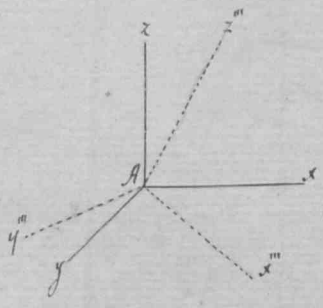


Fig 112.

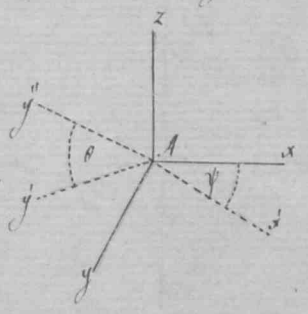


Fig 113.

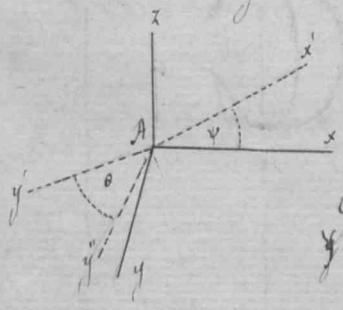


Fig 114.

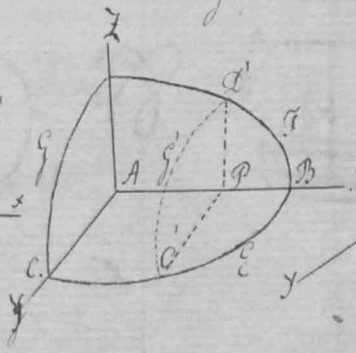


Fig 115.

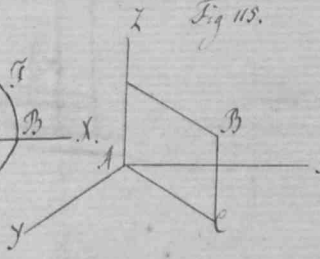


Fig 116.

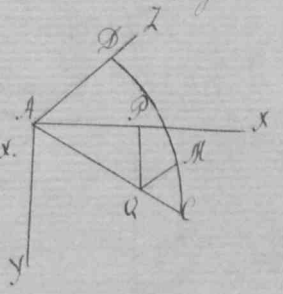


Fig 117.

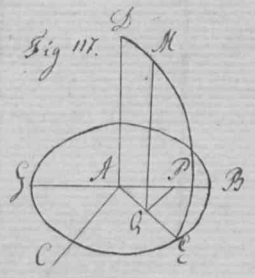


Fig 118.

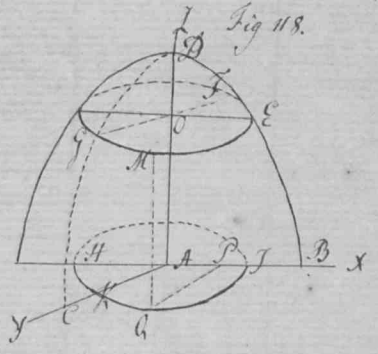


Fig 119.

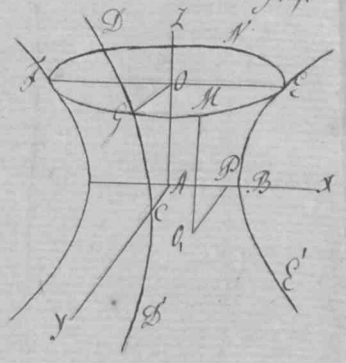


Fig 120.

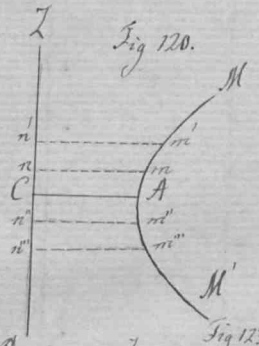


Fig 121.

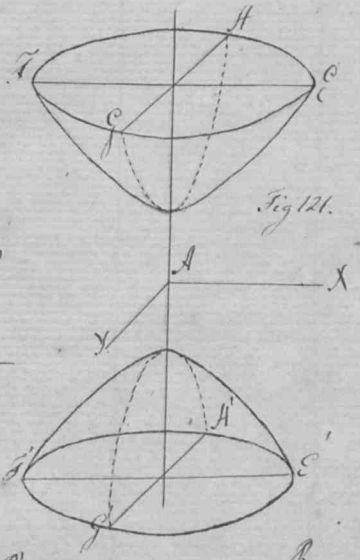


Fig 122.

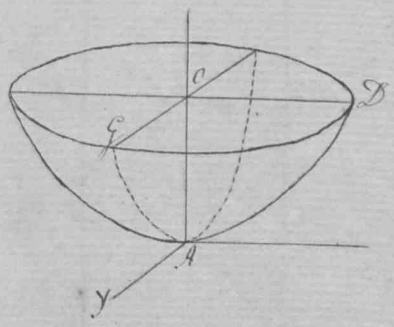


Fig 123.

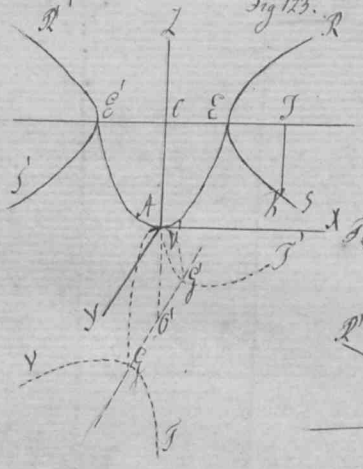


Fig 124.

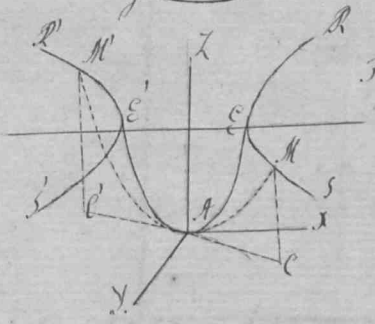


Fig 125.

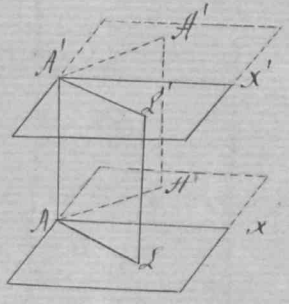


Fig 126.

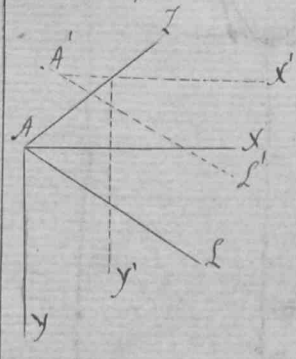


Fig 127.

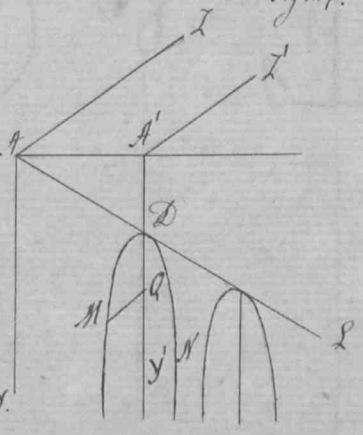
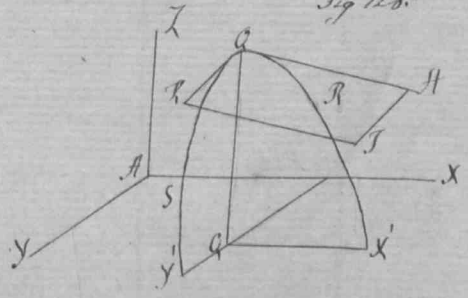


Fig 128.



Skanowanie i opracowanie graficzne na CD-ROM :

ul. Krzemowa 1
62-002 Suchy Las
www.digital-center.pl
biuro@digital-center.pl
tel./fax (0-61) 665 82 72
tel./fax (0-61) 665 82 82

Wszelkie prawa producenta i właściciela zastrzeżone.
Kopiowanie, wypożyczenie, oraz publiczne odtwarzanie w całości lub we fragmentach zabronione.

All rights reserved. Unauthorized copying, reproduction, lending, public performance and broadcasting of the whole or fragments prohibited.