

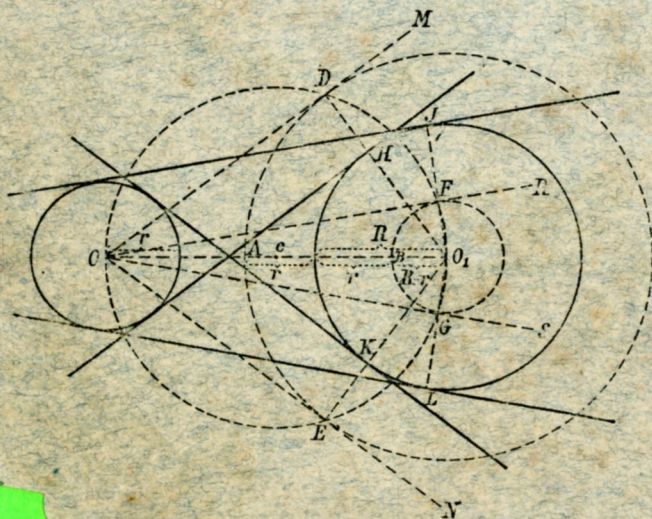
832
Т-во „ДЗВІН“

Видавництво „УКРАЇНСЬКА ШКОЛА“

у редакцією С. Русової, Ю. Сірого, Я. Чепаги і С. Черкасенка

84723
ОЛЕКСАНДЕР КОВАЛЕНКО

ПРАКТИЧНА
ГЕОМЕТРІЯ
ЧАСТИНА II.



ВІДЕНЬ 1919

Видавництво книжок шкільних.

ЛНБ України ім.В.Стефаника



00443229 (O)

Друковано 25.000 примірників.

Німецько-австрійська державна печатня.

Т-во „ДЗВН“

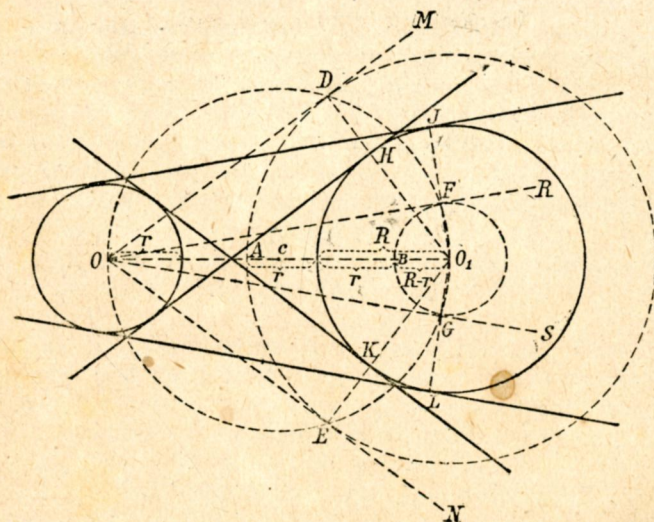
Видавництво „УКРАЇНСЬКА ШКОЛА“

під редакцією С. Русової, Ю. Сірого, Я. Чепіги і С. Черкасенка

1 м
(нак. до ф)

ОЛЕКСАНДЕР КОВАЛЕНКО

ПРАКТИЧНА
ГЕОМЕТРІЯ
ЧАСТИНА II.



ВІДЕНЬ 1919

Видавництво книжок шкільних.

815

11

882.032

2

Друковано 25.000 примірників.

2022001

Від автора.

Більш-менш закінчений курс геометрії повинен мати на меті подвійне завдання: поперше — збагатити знання учеників відомостями з геометрії, подруге — допомогти їм в засвоєнні чисто логічних методів міркування. Відповідно тому ми мусимо в тому курсі відрізнити два боки: один, яким він дотикається до наук природничих і другий, яким він входить в цікл наук математичних.

У всіх ще на пам'яті ті часи, коли це подвійне завдання мав виконати єдиний курс геометрії, який ще й тепер визначають дуже загальним епітетом „систематичний“, а який було-б влучніше назвати теоретичним. О скільки той курс осягав ту мету, тут немає потреби говорити.

Пізніше в програм де-яких шкіл було введено курс так званий наочний (наглядний), який в справі навчання геометрії можна вважати лише де-яким корективом до того, чим грішила і ще не перестас грішити постановка того навчання по школах. Справді, ніби боячись порвати більш-менш радикально з старою традицією, ми відводили цьому курсові занадто скромне місце. Пристосовуючи його виключно до молодшого віку дитини, то-б то до того періоду навчання, коли вона ще не має ні такого загального розвинення, ні таких відомостей з арифметики, ні навіть таких фізичних здібностей, що вистачали-б для як-найширшого використання того курсу, ми тим самим позбавляємо його того значіння, яке він міг би і, на мою думку, мусів би мати в справі не тільки навчання, але також і виховання. Центр ваги цілого навчання геометрії ще й до теперішнього часу лежить в тому теоретичному курсі, який без шкоди для справи можна в великій мірі розгрузити і тим самим скоротити на користь курсу, що я назвав би *практичним*.

Обидва ці курси повинні бути *систематичними*, і цьому нітрохи не суперечить добрий звичай не поділяти наочного курсу на планіметрію та стереометрію, бо це і в сфері теоретичного курсу такий поділ не є конечним, і в західно-європейській спеціальній літературі ми вже маємо дуже цікаву з цього погляду спробу — підручник по геометрії Мерая, який цілком залишив такий традиційний поділ.

Елементарні відомости з геометрії дитині можна і слід давати уже з самого раннього віку в залежності від її індивідуальности, але те можна робити поза всяким курсом, а може навіть без спеціальних класних годин, — це можна робити підчас годин малювання, майстрування, навіть підчас де-яких забавок. Систематичне це навчання

геометрії слід починати приблизно з десятирічного віку дитини, поділивши цілий курс на ті два відділи — *практичний та теоретичний*, про які говорено було вище.

Перший повинен припадати на той період, коли підліток виявляє найбільше природного нахилу до практичної діяльності, то-б то на період приблизно від 10 до 14, 15 року: коли відомости з геометрії можуть бути і стимулом для виявлення того нахилу і необхідною допомогою в самій діяльності. З цього курсу ученики зможуть засвоїти більшу частину того матеріалу, який звичайно вкладають в цілий курс геометрії. Задля розвинення в учеників здібности до чисто логічного методу, що ніяк не можна нехтувати, вистачатиме в цей період викладів арифметики та початків алгебри.

Вже по цьому курсу слідує другий — теоретичний, який таким чином припадає на той період, коли підлітки виявляють уже більше нахилу і здібности до теоретичних міркувань і якого викладання буде дуже улегшене попереднім курсом. Нема ніякої потреби в цьому курсі ворухити знов увесь матеріал, як того вимагають ще й теперішні програми. Для того, щоб дати ученикам спромогу засвоїти чисто логічні методи міркування, досить тієї частини матеріалу, яка доповнює та поглиблює добути з попереднього курсу відомости. Натомість можна віддати більше уваги вправам не тільки на розв'язання задач але також і на доводи геометричних теорем. Таким чином ці два розділи курсу геометрії, один одному допомагаючи, та один одного доповнюючи, утворять той єдиний систематичний курс геометрії, який, смію думати, відповідатиме тому подвійному завданню багато більше, ніж традиційний курс.

При такому розподіленні матеріалу на теоретичний курс цілком вистачить одного, останнього, року в висших початкових школах та ще одного, двох років в середній школі, де його можна доповнити другим концентром. Тоді буде можливо в середній школі дати ще відомости, поза тим курсом, з аналітичної та з дескриптивної геометрії з тим або другим відділом тієї школи.

Випускаючи мій практичний курс геометрії в трьох частинах, я далекий від думки, що в цих трьох книжках мені пощастило вмістити все, що належить до такого курсу; навпаки, сам бачу, що той спіх, з яким довелося їх готувати до друку, не дав мені поглибити де-які відділи так само, як не дав мені підібрати відповідне число задач. Надіюсь, що це можна буде виправити, як що з'явиться потреба, в другому виданні цього курсу.

Тим часом хочу зайнятися ще зложенням задачника до цього курсу, а також першим концентром теоретичного курсу.

Відень, у Травні 1919 року.

О. Коваленко.

Вступ.

1. Плоскі та неплоскі геометричні фігури.

Коли ми прикладемо руб лінійки до дошки столу і коли тільки та дошка рівненька, то-б то уявляє площу, ми побачимо, що руб лінійки прилягає до дошки щільно, то-б то всіма своїми точками. Так само, коли ми покладемо на дошку столу рівненький круглий залізний обруч, то його край теж щільно притулиться до дошки. Руб лінійки уявляє з себе просту лінію, а край обруча — коло, — отже можна сказати, що просту лінію та коло можна умістити на площі. Ті лінії, які можна умістити всіми їх точками на площі, звуться *плоскими лініями*. Отже, всяка проста лінія є плоска. Зпоміж кривих ліній одні — плоскі, як от наприклад коло, а другі неплоскі, як от наприклад крива лінія, по якій роблять нарізку на гвинтові.

Кілька плоских ліній разом можуть уявляти з себе або таку геометричну фігуру, яку можна всю умістити на площі, то-б то *плоску геометричну фігуру*, або таку, яка вся на площі не вміщається, то-б то *неплоску геометричну фігуру*. Дві прості лінії, що перетинаються або сходяться в одній точці, творять собою плоску фігуру; три або більше простих ліній, що перетинаються, або сходяться в одній точці, можуть творити або плоску фігуру, коли вони всі лежать на одній площі, або неплоску, коли одна або кілька з тих простих не лежать на тій площі, на якій лежать всі інші. Дві рівнобіжні прості творять завжди плоску фігуру, а три або більше рівнобіжних простих можуть творити або плоску фігуру в тім випадку, коли вони

усі лежать на одній площі, або неплоску в тім випадку, коли одна або кілька з них не лежать на тій самій площі, на якій лежать всі інші. Три прості, що подвоє перетинаються (в трьох точках) так само як і три прості, з яких дві проміж себе рівнобіжні, а третя їх перетинає, чинять завжди плоску фігуру, а чотирі й більше простих, що перетинаються (як і тоді, коли вони рівнобіжні) можуть творити і плоску й неплоску фігуру.

Задачі.

Знайти у хаті:

1. Дві прості, що виходять з однієї точки, або сходяться в одній точці. (Руби стін, руби дошки, столу і т. д.)
2. Три прості, що виходять з однієї точки і творять неплоску фігуру. (Три руби в хаті.)
3. Дві рівнобіжні лінії. В якій площі вони обидві лежать?
4. Три рівнобіжні, що творять плоску фігуру, та три (або й більше), що творять неплоску фігуру.
5. Три прості, що перетинаються не в одній точці і творять плоску фігуру.
6. Чотирі простих, які, перетинаючись більше ніж в одній точці, творять плоску фігуру.
7. Чотирі (або й більше) простих, які, перетинаючись більше ніж в одній точці, творять неплоску фігуру.
8. Відшукати у хаті приклади взагалі плоских і неплоских фігур.

2. Два відділи геометрії.

Плоскі геометричні фігури можна виображати в їх натуральному вигляді, рисуючи їх на площі, а з неплоскими фігурами того зробити не можна: на площі можна робити тільки такі малюнки, які нам нагадують ті неплоскі фігури, як от наприклад ті малюнки різних геометричних тіл, які можна бачити у першій частині цієї книжки і які тільки допомагають нам уявити ті тіла. Щоб виобразити неплоску фігуру в її справжньому вигляді, можна зробити її модель; прикладом таких моделей або взірців можуть служити ті моделі всяких геометричних тіл, про які говорилось в першій частині і діаграми яких там подано.

При вивченню всяких геометричних форм геометрію звичайно поділяють на два відділи: в одному з них, який зветься *геометрією на площі* або *планіметрією* досліджують тільки плоскі геометричні фігури, а в другому, який зветься *геометрією в простороні* або *стереометрією*, — також і неплоскі геометричні фігури, як от, наприклад, геометричні тіла.

В першій частині цієї книжки ми такого поділу не робили і розглядали разом як плоскі так і неплоскі фігури. Також і в цій другій частині ми не будемо додержуватись такого поділу, одначе читач знайде тут уже цілі розділи, присвячені або тільки планіметрії або тільки стереометрії.

I.

Точки та лінії на площі.

1. Точки на простій.

Нехай ми маємо на площі просту лінію MN (Рис. 1.), а на ній дві точки a і b . Той відтинок простої, який точка a повинна пробігти, щоб прийти, не зходячи з простої MN в точку b , або навпаки, то-б то відтинок ab або ba , ми звемо перемежком між

цими двома точками. Як бачимо на рисунку (Рис. 1.), дві точки мають тільки один перемежок,

як що його брати тільки на простій лінії; три точки c , d і e на простій PR (Рис. 1.) мають таких перемежків два (cd та de); чотири точки c , d , e та f на тій таки простій (Рис. 1.) мають три перемежки (cd , de та ef). Взагалі: Кілька точок, які лежать на одній простій лінії, мають на тій простій перемежків на один менше ніж самих точок.

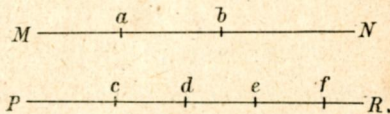


Рис. 1.

2. Точки на обводі замкненої фігури.

Нехай тепер ми маємо коло (Рис. 2.), а на ньому дві точки a і b . За перемежок між цими двома точками по колові можна вважати як дугу aMb так і дугу aNb ; значить *дві* точки

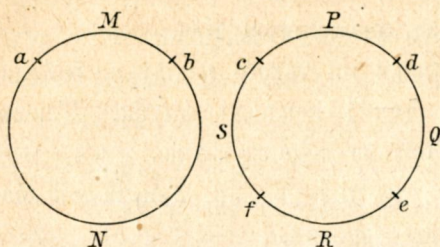


Рис. 2.

на колі мають і *два* перемежки на тому колі. Три точки c , d та e на колі (Рис. 2.) мають також і *три* перемежки на тому колі, а саме такі: дуга cPd , дуга dQe та дуга $eRSc$. Чотири

точки c , d , e та f (Рис. 2.) мають чотири перемежки: дуги: cPd , dQe , eRf та fSc . Значить: *точки, що лежать на колі, мають на тому колі стільки перемежків, скільки самих точок.*

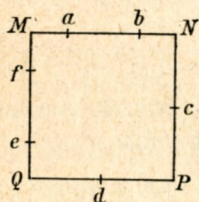


Рис. 3.

Так само буде з точками, які лежать на обводі якоїсь замкненої фігури, коли ті перемежки між ними брати по обводові тієї фігури. Так наприклад *шість* точок a , b , c , d , e та f , що лежать на обводі квадрата $MNPQ$ (Рис. 3.), мають і *шість* перемежків на тому обводі, а саме такі: ab , bNc , cPd , dQe , ef та fMa .

Отже взагалі: *Кілька точок, що лежать на обводі якої-небудь замкненої фігури, мають на тому обводі стільки перемежків, скільки самих точок.*

Задачі на обрахунок.

1. На межі між двома левадами вкопано 11 кілків на 3 сажени один від другого так, що два крайніх кілки стояли з двох кінців тієї межі. Яка завдовжки межа? (Відповідь: 30 саженив.)

2. Від однієї станції до другої треба поставити телеграфні стовби на віддаленні 20 сажнів один від другого. Скільки треба тих стовбів, коли від однієї станції, де має стояти перший стовб, до другої станції, де має стояти останній стовб, 5 верст? (Відповідь: 126 стовбів.)

3. Скільки треба кілків для того, щоб поставити огорожу круг левади прямокутної форми, яка має поле в 800 квадр. сажнів, а довшину в 40 сажнів, коли ставити ті кілки на 2 саж. один від другого? (Відповідь: 60 кілків.)

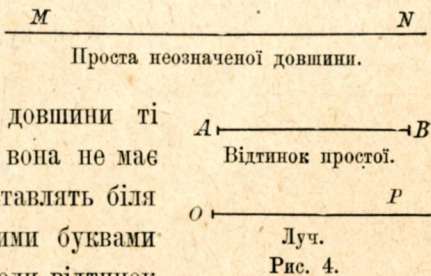
4. Для того, щоб поставити огорожу круг двора, що має форму квадрата, поставлено 40 стовбів на 2 сажени один від другого. Скільки квадратних сажнів має поле того двору? (Відповідь: 400 квадратних сажнів.)

5. Скільки треба цвяхів для того, щоб прибити залізний лист прямокутної форми 1 метр 25 сантиметрів завдовжки та 50 сантиметрів завширшки, коли обивати ті цвяхи на 5 сантиметрів один від одного (міряючи по краям того листа)? (Відповідь: 70 цвяхів.)

3. Лучі.

Коли кінці простої лінії не означено точками ні з одного ні з другого боку, то таку лінію звать простою лінією *неозначеної довшини* або прямо простою лінією; коли кінці її означено точками з обох боків, то її звать *відтинком простої*, а коли означено точкою тільки один її кінець, то таку просту звать *лучем*; точку, з якої виходить луч, звать його початком. На рисункові 4-^{му} показано ці три випадки (Рис. 4.). Для того, щоб можна було у кожному

з цих випадків назвати просту лінію, ставлять дві букви (літери): у простої неозначеної довшини ті букви ставлять де попало, бо вона не має кінців; у відтинка простої їх ставлять біля його двох кінців, називаючи тими буквами кожен з двох його кінців; як коли відтинок зазначають однією буквою, ставлячи її біля того відтинка; у луча однією з тих букв назначують його початок, а другу ставлять десь на лучі. Таким чином на нашому рисункові (Рис. 4.) MN є проста неозначеної довшини, AB — відтинок простої, а OP — луч, якого початком є точка O .



Два лучі OA та OB , що виходять з однієї точки O (Рис. 5.), творять, як ми знаємо, кут AOB . Цей кут ми можемо брати за перемежок між цими двома лучами на площі, коли ми перебігаємо частину площі, обмежену цими двома лучами (поле кута),

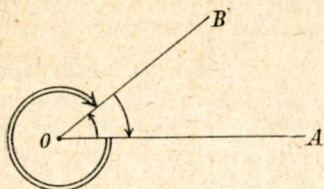


Рис. 5.

від луча OA до луча OB в напрямку протилежному поступу стрілки на годиннику, або від луча OB до луча OA в напрямку поступу тієї стрілки, як показано на рисунку (Рис. 5.) дугами. Та ми можемо також перебігати частину площі навколо точки O

від луча OA до луча OB з напрямку поступу стрілки годинника, як те показано на рисунку (Рис. 5.) подвійною дугою, або від луча OB до луча OA в напрямку протилежному поступу тієї стрілки (на рисунку не зазначено), тоді сей пробіг круг точки O від луча OA до луча OB (або навпаки) ми вважаємо за другий перемежок між тими лучами. Цей другий

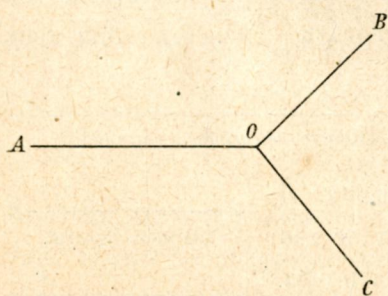


Рис. 6.

перемежок можна теж брати за кут, який творять ці два лучі: такий кут між двома лучами ми зватимемо *випуклим*, щоб одрізнати його від першого кута (кут AOB на рис. 5.), який ми зватимемо *внутрим*. Таким чином ми бачимо, що між двома лучами, які виходять з однієї точки, є

два перемежки, відповідно тим двом кутам, вгнутому та випуклому, які творять ті два лучі.

Три лучі, OA , OB та OC (Рис. 6.), що виходять з однієї точки, творять і три кути; відповідно тому між тими трьома лучами є також три перемежки. Взагалі: кілька лучів, які виходять з однієї точки, творять стільки кутів, скільки

є самих лучів, між ними є стільки перемешків, скільки й самих лучів.

Коли ми візьмемо чотирі косинці та покладемо їх на плоску дошку столу так, щоб вони всі зіткнулися вершками своїх прямих кутів, як то показано тут на рисункові (Рис. 7.), то їх прямки

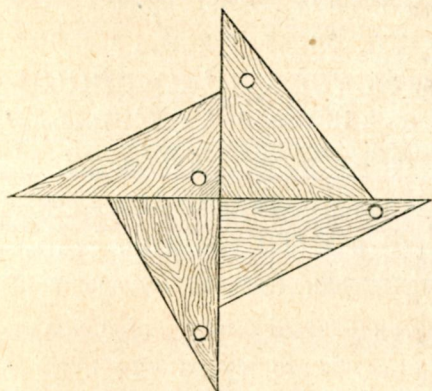


Рис. 7.

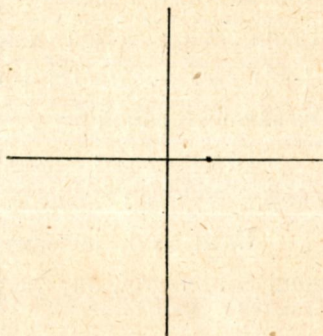


Рис. 8.

(катети) притуляться щільно один до одного, і ті чотирі косинці таким чином покривють цілком поле навкруги тієї точки. Значить, поле навкруги якої-небудь точки на площі містить в собі як-раз чотирі прямих кути, на які його можна розбити двома простими прямими, що перетинаються в тій точці перпендикулярно (простопадно) одна до одної, як то показано на рисункові 8-му (Рис. 8.).

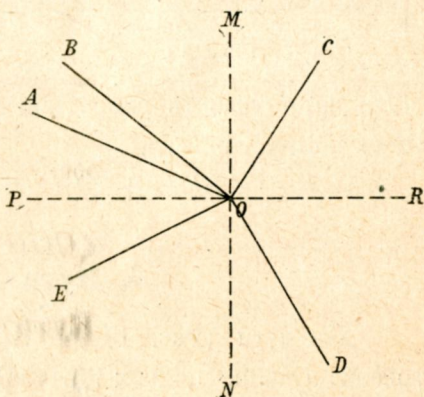


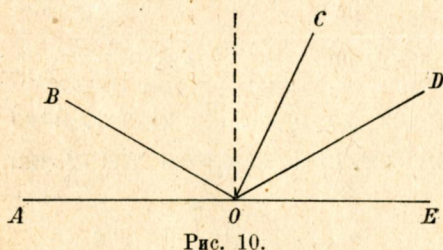
Рис. 9.

Нехай маємо тепер кілька лучів, які виходять з однієї точки, а саме лучі: OA , OB , OC , OD та OE (Рис. 9.); ці п'ять лучів творять п'ять кутів, а саме кути: $\angle AOB$, $\angle BOC$,

$\angle COD$, $\angle DOE$ та $\angle EOA$; усі ці кути так само покривають цілком поле навкруги точки O , значить всі вони разом складають якраз чотирі прямих кути; коли обміряти кожен з тих кутів кутоміром (див. I. частину, вид. 1-е, стор. 69.) і сполучити числа градусів або ступенів (і частин градусів) в одно число, то дістанемо число градусів, яке складають чотирі прямих кути, то-б то 360° , позаяк прямий кут, як ми знаємо, має 90° . Таким чином можна написати (Рис. 9.): $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE + \angle EOA = 360^\circ = 4d$, де буквою d визначено прямий кут, як то звичайно роблять в геометрії.

Отже, *сумма кутів, що їх творять лучі, виходячи з однієї точки, є рівна чотирьом прямим або 360 градусам.*

Коли лучі, виходячи з однієї точки, лежать на площі по один бік простої, яку творять два випростані в одну лінію крайні



лучі, то *сумма тих кутів є рівна двом прямим кутам або 180° .* Такий випадок показано тут на рисункові 10-му (Рис. 10.), де всі лучі і всі кути, які ті лучі творять, лежать по один бік простої

AE , що її творять випростані в одну лінію лучі OA та OE . Отже можна написати:

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE = 180^\circ = 2d.$$

4. Кути сумежні.

Два кути (Рис. 11.) $\angle AOB$ та $\angle BOC$, котрі утворені трьома лучами, з яких два крайні випростані в одну лінію, звуться кутами *сумежними*. З попереднього видно, що *сумма сумежних кутів рівна двом прямим кутам, або 180° .* Це ще можна висловити й инакше, а саме: *сумежні кути доповнюють*

один одного до двох прямих кутів або до 180° . Наприклад: Коли один з сусідніх кутів має в собі $\frac{2}{3} d$ ($\frac{2}{3}$ прямого кута), то другий повинен мати $1\frac{1}{3} d$, бо як-раз стільки треба, щоб доповнити $\frac{2}{3} d$ до $2 d$. Або коли один з сусідніх кутів має 60° (60 градусів), то другий повинен мати 120° , бо коли додати ці 120° до 60° , то й дістанемо як-раз 180° .

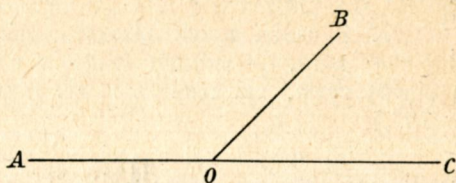


Рис. 11.

5. Кути вершкові.

Чотири лучі, котрі подвоє випростані в одну лінію, творять чотири кути (Рис. 12.); ці кути подвоє через один звуться *вершкові* або *обернені* кути; так $\angle BOC$ та $\angle AOD$ одна пара вершкових кутів, а $\angle AOB$ та $\angle COD$ — друга пара. Легко бачати, що кожна з тих двох пар уявляє кути між собою рівні, то б то: $\angle AOB = \angle COD$, а $\angle BOC = \angle AOD$. В цьому можна впевнитись так: уявім собі, що ми повертаємо кут BOC (Рис. 12.) навколо точки O , нехай, в напрямку поступу стрілки годинника, аж поки луч OC не ляже на луч OA ; для того доведеться його обернути як-раз на півкола.

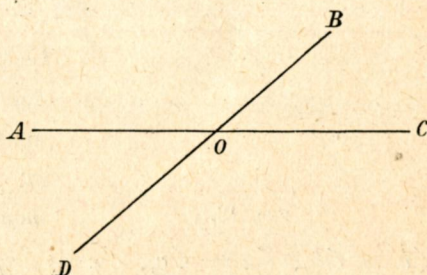


Рис. 12.

Очевидячки, що луч OB , як друге рамено кута BOC , за той час обернеться теж на пів кола і значить ляже як-раз на луч OD , і таким чином кут BOC цілком покриє кут AOD , значить вони й суть рівні між собою. Так само ми могли би впевнитись в тому, що $\angle AOB = \angle COD$. Отже: *вершкові кути рівні між собою*.

Задачі на обрахунок.

6. Нарисуйте за допомогою кутоміра кут в 60° . Скільки градусів матиме кут суміжний з ним? (Відповідь: 120° .)

7. З однієї точки виходять три лучі так, що творять всього 3 рівних кути, — скільки градусів в кожному з них? А в кожному з рівних кутів, які творять п'ять таких лучів? (Відповідь: 1) 120° ; 2) 72° .)

8. Чи можуть дві прости, з котрих одна стрічає другу в якійсь точці, утворити два кути: в 130° і в 80° ? (Відповідь: Ні.)

9. Чи можуть три лучі, виходячи з однієї точки, утворити три кути: в 120° , 140° та 150° ? (Відповідь: Ні.)

10. Скільки градусів має кожен з двох суміжних кутів, коли один з них втричі більше ніж другий? Коли один з них на 50° більше ніж другий? (Відповідь: 1) 135° та 45° ; 2) 65° та 115° .)

6. Кути біля точок перетину двох рівнобіжних простих, перетятих третьою.

Проста лінія MN (Рис. 13.) з двома рівнобіжними простими AB і CD може дати тільки дві точки перетину. Біля

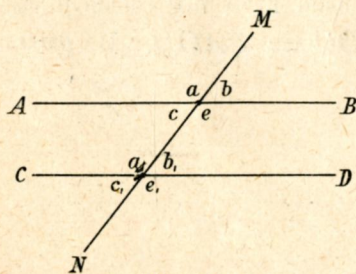


Рис. 13.

кожної з тих точок ми маємо групу чотирьох кутів; біля простої AB : $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$ та $\angle e$; біля простої CD : $\angle a_1$, $\angle b_1$, $\angle c_1$ та $\angle e_1$. Позаяк прости AB та CD рівнобіжні, то проста MN є однаково нахилена як до однієї так і до другої. Тому можна завважити, що: $\angle a = \angle a_1$,

$\angle b = \angle b_1$, $\angle c = \angle c_1$, $\angle e = \angle e_1$. (Ці кути по двом звуться *відповідними* або *кутами нахилу*.) Подібно до того і $\angle e = \angle a_1$, а $\angle c = \angle b_1$ (кути *внутрішні різносторонні*). Також: $\angle a = \angle e_1$, а $\angle b = \angle c_1$ (кути *околичні різносторонні*). Крім того: $\angle b$ та $\angle e_1$, $\angle a$ та $\angle c_1$ доповнюють один одного до двох прямих (або до 180°), то-б то $\angle b + \angle e_1 = 2d$ і $\angle a + \angle c_1 = 2d$ (кути *околичні односторонні*). Те ж саме можна завважити і про кути:

$\angle c$ та $\angle a$, і $\angle e$ та $\angle b$, то-б то: $\angle c + \angle a = 2 d$
і $\angle e + \angle b = 2 d$ (кути *внутрішні односторонні*).

Коли ми проведемо дві (або й кілька) протистих так, що вони будуть однаково нахилені до якоїсь иншої простої, то-б то так, що вони творитимуть дві групи таких кутів, як ті, про які ми зараз говорили, то ті дві (або кілька) протистих будуть рівнобіжні. (Пригадайте той спосіб проводити рівнобіжні протисті за допомогою лінійки та косинця, про який говорилось у I. частині, вид. 1-^е, на сторінці 76-ⁱⁱⁱ.)

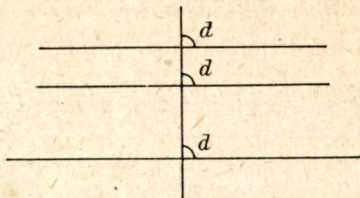


Рис. 14.

Тому кілька протистих, котрі суть простопадні (перпендикулярні) до якоїсь иншої, будуть рівнобіжні проміж себе; і навпаки: проста, що є простопадною до однієї з кількох рівнобіжних протистих, буде простопадною і до всіх других (Рис. 14.).

7. Кути з взаємно рівнобіжними або з взаємно простопадними раменами.

На рисункові 15-^м маємо кут ABC і кути DEF та GEF , котрих рамена суть рівнобіжні раменам першого кута (Рис. 15.).

Коли продовжимо (переривчастою лінією) рамено EG ліворуч, а рамено BC до гори так, щоб вони стрілись, то матимемо кут m , який на підставі того, що було сказано, в попередньому параграфі, буде рівний як з кутом ABC , так і з кутом DEF

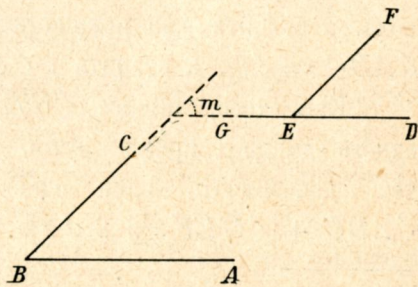


Рис. 15.

(бо BC і EF — рівнобіжні), а тому: $\angle ABC = \angle DEF$. Крім того $\angle GEF$ та $\angle m$ доповнюють один одного до двох

прямих кутів (або до 180°), значить і $\angle GEF$ та $\angle ABC$ доповнюють один одного до двох прямих, то-б то: $\angle ABC + \angle GEF = 2 d$.

Значить: *Кути з взаємно рівнобіжними раменами або рівні один одному, коли вони одноіменні (то-б то обидва гострі або обидва тупі), або доповнюють один одного до двох прямих кутів, коли вони різноіменні (то-б то один гострий, а другий тупий).*

Нехай тепер маємо $\angle ABC$ і два кути: $\angle DEF$ та $\angle GEF$ (Рис. 16.), котрих рамена суть простопадні до рамен кута ABC ($EF \perp BC$ і $GD \perp AB^*$). Коли проведемо з точки B (переривчастими лініями) дві прості: одну рівнобіжно до EF , а другу до ED , то $\angle m$, який

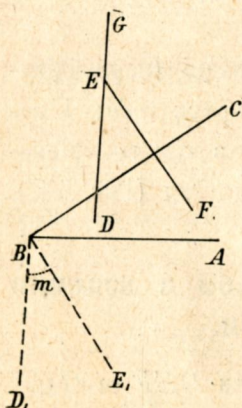


Рис. 16.

утворять ті дві лінії, буде рівний $\angle DEF$, бо їх рамена взаємно рівнобіжні. Крім того рамена цього $\angle m$ будуть так само простопадні до рамен $\angle ABC$ ($BE \perp BC$ і $BD \perp AB$). Уявім тепер, що ми обернули кут m круг точки B так, щоб рамено BE обернулось на чверть кола праворуч; тоді воно покриє рамено BC (бо-ж ці рамена творять прямий кут) і рамено BD , тоді обернеться теж на чверть

кола, а значить воно покриє рамено BA , а з того виходить, що $\angle ABC = \angle m$, а значить і $\angle ABC = \angle DEF$.

Крім того, позаяк $\angle GEF$ і $\angle DEF$ доповнюють один одного до двох прямих кутів, то значить кути GEF і ABC теж доповнюють один одного до двох прямих, то-б то $\angle ABC + \angle GEF = 2 d = 180^\circ$.

*) Замість слова „простопадно“ або „перпендикулярно“ вживають звичайно оттакий знак: $\perp$, так само як замість слова „рівнобіжно“ або „паралельно“ — оттакий: $\parallel$. Отже $EF \perp BC$ треба читати так: „ EF простопадна до BC “, а $ED \parallel BD$, — так: „ ED рівнобіжна з BD “.

Значить: *Кути з взаємно простопадними (перпендикулярними) раменами або рівні один одному, коли вони одноіменні, або доповнюють один одного до двох прямих кутів, коли вони різноіменні.*

Задачі.

Чому у рівнобіжника (паралелограма) протилежні кути подвоє рівні, а кути біля кожного з боків подвоє доповнюють один одного до $2d$?

Чи можна нарисувати кути, з яких один має 60° , а другий 45° , так, щоб їх рамена були взаємно рівнобіжні або простопадні? А два кути, з яких один має 60° , а другий 120° ?

Проведіть у рівнобіжника дві його діагоналі і покажіть які з тих кутів, що їх творять боки та діагоналі, або самі діагоналі, суть рівні один одному?

Коли можна нарисувати два рівнобіжники так, щоб довші боки одного були рівнобіжні з довшими боками другого, а коротші — з коротшими? А два прямокутники, або квадрати?

Коли можна нарисувати два трикутники так, щоб три боки одного були рівнобіжні або простопадні з трьома боками другого? А так, щоб два боки одного були рівнобіжні або простопадні з двома боками другого?

II.

Замкнені простолінійні фігури.

8. Кути трикутника.

Маємо тут якийсь трикутник ABC (Рис. 17.). Три вгнутих кути, утворені боками трикутника, то-б то: $\angle CAB$, $\angle ABC$ та $\angle ACB$ суть осередні або *внутрішні кути* трикутника; кут, який утворюється продовженням котрогось з боків та сусіднім з ним боком, як, наприклад, кут BCD , зветься зовнішнім або *околинним кутом*. Кожний з внутрішніх кутів часто називають не трьома буквами, а однією, а саме тією, яка стоїть біля його вершка; отже три внутрішніх кути нашого трику-

кутника (Рис. 17.), які ми назвали попереду трьома буквами, можна назвати ще й так: $\angle A$, $\angle B$ та $\angle C$.

Тепер ми розглянемо уважно внутрішні кути нашого трикутника ABC (Рис. 17.). Для того зробимо так: через точку B

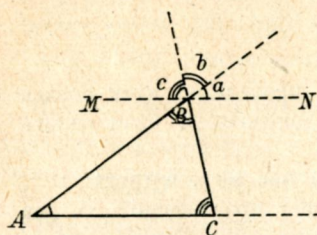


Рис. 17.

проводимо (переривчастою лінією) просту MN рівнобіжно з боком AC , потім продовжимо за точку B боки AB та CB (теж переривчастими лініями); ці продовження боків разом з простою MN утворять з одного боку цієї простої три кути:

$\angle a$, $\angle b$ та $\angle c$. Коли ми пригадаємо те, що було сказано в параграфах 4-му, 5-му та 6-му, то легко зміркуємо, що:

1. $\angle a + \angle b + \angle c = 180^\circ = 2d$ (Чому?)
2. $\angle a = \angle A$, $\angle b = \angle B$ і $\angle c = \angle C$ (Чому?)

А з того виходить, що

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ або $\angle A + \angle B + \angle C = 2d$ (двом прямим кутам).

Отже виходить, що три внутрішніх кути нашого трикутника ABC разом складають 180° або два прямих кути. Позаяк такі самі міркування можна прикласти до всякого трикутника, то виходить, що три внутрішні кути всякого трикутника, складені в одну сумму, дають 180° або два прямих кути або коротше: *сумма трьох внутрішніх кутів всякого трикутника є рівна 180° або двом прямим кутам ($2d$).*

Задачі на обрахунок та на будування.

Перечитайте те, що сказано про трикутники в I. частині, а також те, що сказано про обмір та будування кутів.

11. Нарисуйте на папері який-небудь трикутник MNP (Рис. 18., ліворуч); проведіть з точки N просту лінію (переривчасту) Na перпендикулярно до бока MP і поділіть просту в точці O по полам; через ту точку O проведіть просту bc , рівнобісну з боком MP , а з точок b і c

дві прості bd та ce перпендикулярні до бока MP . Тепер викрайте ножицями або ножом ваш трикутник та перегніть його по трьох лініях: bc , bd та ce . Тоді всі три його кути зійдуться своїми вершинами в точці a , і трикутник складеться в прямокутник (Рис. 18., праворуч). Разом з тим ви побачите, що ті кути щільно зіткнулися своїми раменами, так що цілком покрити собою поле в середині трикутника круг точки a . З'ясуйте, чому то мусить так бути у всякого трикутника.

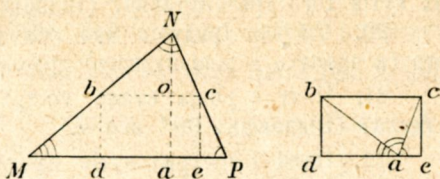


Рис. 18.

12. Скільки градусів має третій кут у трикутників:

з одним кутом в 60° , а другим в 30° ? (Відповідь: 90°),

з одним кутом в 90° , а другим в 40° ? (Відповідь: 50°),

з одним кутом в 100° , а другим в 50° ? (Відповідь: 30°).

13. Як відомо, у рівнораменного трикутника кути, що лежать проти рівних боків, або кути при основі, суть рівні. Скільки градусів має кожен з тих кутів, коли третій кут того трикутника 1) має 90° ? 2) має 120° ? 3) має 70° ? 4) має 30° ? (Відповідь: 1) 45° ; 2) 30° ; 3) 55° ; 4) 75° .)

14. Скільки градусів має у рівнораменного трикутника третій кут, коли кожен з його двох кутів при основі 1) має 45° ? 2) має 35° ? 3) має 50° ? 4) має 65° ? (Відповідь: 1) 90° ; 2) 110° ; 3) 80° ; 4) 50°).

15. У рівнобічного або правильного трикутника, як відомо, усі три кути суть рівні між собою, — скільки градусів має у такого трикутника кожний з його кутів? (Відповідь: 60° , або $\frac{2}{3}d$.)

16. Нарисуйте який-небудь трикутник; продовжіть один з його боків, так щоб те його продовження разом з сусіднім з ним боком утворили один з околичних кутів трикутника; зміряйте кутоміром той околичний кут і запишіть його число градусів; так само зміряйте кожен з двох внутрішніх кутів, не сумежних з тим околичним, та, склавши ті два числа градусів в одну сумму, порівняйте її з числом градусів околичного кута, — чи не будуть вони рівні (як що не вважити на деяку неточність такого обмірювання кутів)? Як що так, то з'ясуйте, чи то так трапилось випадково, чи так мусить бути завжди? Скільки всього околичних кутів можна утворити у трикутника?

17. Один з околичних кутів трикутника є рівний 120° , а один з внутрішніх, з ним не сумежних є рівний 45° . Які суть два другі внутрішні кути трикутника? (Відповідь: 60° та 75° .)

18. Околичний кут рівнораменного трикутника, сумежний з одним з кутів при основі, є рівний 130° . Скільки градусів має кожен з внутрішніх кутів того трикутника? (Відповідь: 50° , 50° і 80° .)

19. Околишній кут рівнораменного трикутника, суміжний з кутом при вершкві, є рівний 140° . Скільки градусів має кожен з внутрішніх кутів того трикутника? (Відповідь: 40° , 70° і 70° .)

20. Скільки градусів має кожен з околишніх кутів у рівнобічного (а значить і рівнокутного) трикутника? (Відповідь: 120° .)

21. Чому є рівна сума гострих кутів у прямокутного трикутника? (Відповідь: 90° або d .)

22. Один з гострих кутів прямокутного трикутника має 60° . Скільки градусів має другий? (Відповідь: 30° .)

23. Чи може трикутник мати два прямих внутрішніх кутів? А два тупих? (1) і 2): Ні. Чому?)

24. Коли у трикутника два з шести околишніх кутів можуть бути гострі? А прями?

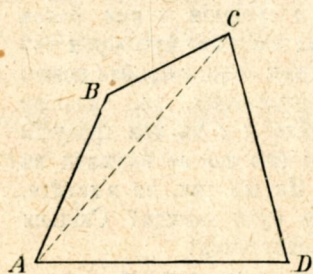
25. Чи може бути у трикутника гострих околишніх кутів більше двох? А прямих? А тупих?

26. Чи може бути один з внутрішніх кутів трикутника випуклим? А один з околишніх?

27. Збудуйте оттакі трикутники: 1) прямокутний з прямими (катетами) в 3 сантимет. та в 4 сантимет.; 2) рівнораменний з основою в 7 сантиметрів та з кутами при основі в 60° ; 3) різнобокий з двома боками: в 5 сантимет. та в 8 сантимет. і з кутом між тими боками в 45° .

9. Кути чотирикутника.

Рисунок 19-ий уявляє якийсь чотирикутник $ABCD$; в ньому маємо чотири внутрішні кути, а саме: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ та $\angle D$.



Р.с. 19.

З вершка якого-небудь з цих кутів, наприклад, кута A , можна провести тільки одну діагональ або косину, а саме діагональ AC (Рис. 19.). Цією діагоналлю наш чотирикутник розбивається на два трикутники: $\triangle ABC^*)$ та $\triangle ACD$. Ми уже знаємо, що сума внутрішніх кутів кожного з цих трикутників (як і всякого) є рівна двом прямим кутам; а позаяк сума чотирьох внутрішніх кутів нашого чотирикутника скла-

*) Знак: $\triangle$ вживають замість слова „трикутник“.

дається з тих двох сумм, то вона, значить, є рівна чотирьом прямим кутам ($2d \times 2 = 4d$).

Візьмемо тепер чотирикутник такої форми, як на рисунку 20^{му}. Він відрізняється від попереднього тим, що один з його внутрішніх кутів, а саме $\angle C$, є випуклий. Сам такий чотирикутник зветься невипуклим, бо два його боки BC та CD ніби вгнуто в середину. Коли проведемо діагональ AC (Рис. 20), то побачим, що відносно внутрішніх його кутів ми можемо прикласти ті самі міркування, що й попередю. А значить і у нього сума внутрішніх кутів є рівна чотирьом прямим кутам.

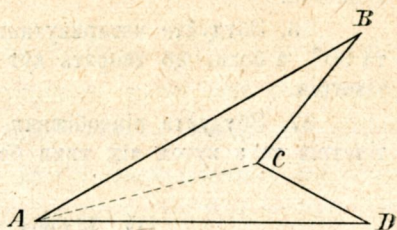


Рис. 20.

Отже можемо сказати, що *сума чотирьох внутрішніх кутів всякого чотирикутника є рівна чотирьом прямим кутам або 360° .*

Задачі на обрахунок та на будування.

Перечитайте те, що сказано про чотирикутники в I. частині, а також про обмір та будування кутів кутоміром.

28. Один з тупих кутів рівнобіжника (паралелограма) має 140° . Скільки градусів має кожен з двох його гострих кутів? (Відпов.: 40° .)

29. Один з кутів рівнобіжника вдвічі більше ніж другий. Скільки градусів в кожному з внутрішніх кутів того рівнобіжника? (Відповідь: 120° та 60° .)

30. Кожен з гострих кутів рівнораменного трапеза має 60° . Скільки градусів має кожний з його тупих кутів? (Відповідь: по 120° .)

31. Яке найбільше число тупих внутрішніх кутів може мати чотирикутник? А випуклих?

32. Збудуйте чотирикутники, котрі мали б такі кути: 1) 1 прямий, 1 тупий та 2 гострих; 2) 1 прямий, 2 тупих та 1 гострий; 3) 2 прямих, 1 тупий та 1 гострий; 4) 4 прямих; 5) 1 тупий та 3 гострих; 6) 2 гострих та 2 тупих; 7) 1 гострий та 3 тупих.

33. Чи можна збудувати такий чотирикутник, який мав би 3 прямих кута, а четвертий гострий або тупий?



34. Збудуйте трапез, який мав би кути: 120° , 120° , 60° та 60° . Збудуйте такий чотирикутник з тими самими кутами, який не був би трапезом. Який він буде?

35. Збудуйте трапез, який мав би кути: 90° , 90° , 130° та 50° . Збудуйте такий чотирикутник з тими самими кутами, який не був би трапезом.

36. Збудуйте чотирикутник, у якого три кути мали б: 45° , 150° та 90° , а боки, що творять кут в 150° , мали б 3 сантиметри та 5 сантиметрів.

37. Збудуйте рівнобіжник з боками в 5 сантиметрів та в 8 сантиметрів та з кутом між тими боками в 60° .

10. Кути многокутника.

Тепер ми звернемось до внутрішніх кутів якого б не було многокутника. На рисункові 21-^{му} маємо ми многокутник $ABCDEF$. Проведімо з вершка якого-небудь кута, наприклад $\angle A$ (Рис. 21.) всі діагоналі, які тільки можна провести з вершка одного кута

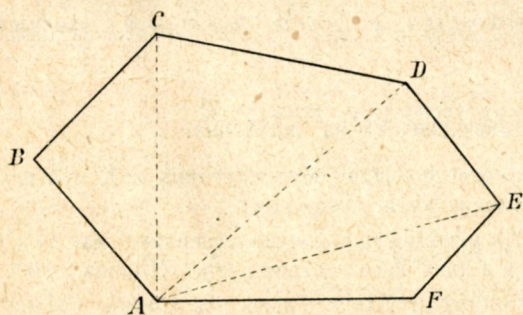


Рис. 21.

многокутника. Тими діагоналями многокутник розібьється на кілька трикутників; розмір-куймо, скільки повинно їх бути. Кожен з боків многокутника разом з діагоналями творить один трикутник крім двох

крайних його боків AB та AF (Рис. 21.), які не входять в число боків окремих трикутників. Значить всіх трикутників буде на 2 менше ніж самих боків. Наприклад: у чотирикутника боків (і кутів) — 4, значить таких трикутників буде: $4 - 2$, то б то 2; у п'ятикутника боків (і кутів) — 5, значить таких трикутників буде: $5 - 2$, то б то 3; у шестикутника (Рис. 21.) боків (і кутів) — 6, значить таких трикутників буде: $6 - 2$, то б то 4 і так далі.

Взагалі: многокутник, що має n боків (а значить і n кутів), розбивається всіма діагоналями, які можна провести з вершка котрого-небудь з кутів до вершків інших, на число трьохкутників рівне числу усіх боків без двох, то б то на $(n - 2)$ трьохкутників.

Тепер, позаяк сума всіх внутрішніх кутів многокутника (Рис. 21.) складається з сум внутрішніх кутів всіх отих трьохкутників, то, значить, щоб знайти, чому є рівна та сума, треба два прямих кути (або 180°) помножити на число боків многокутника без двох. Отже та сума $= 2 d \times (n - 2)$, або сума внутрішніх кутів многокутника $= 180^\circ \times (n - 2)$.

Наприклад: Сума внутрішніх кутів
 трьохкутника $= 2 d \times (3 - 2) = 2 d \times 1 = 2 d = 180^\circ$
 (Див. парагр. 8., стор. 14.);
 чотирикутника $= 2 d \times (4 - 2) = 2 d \times 2 = 4 d = 360^\circ$
 (Див. парагр. 9., стор. 17.);
 п'ятикутника $= 2 d \times (5 - 2) = 2 d \times 3 = 6 d = 540^\circ$;
 шестикутника $= 2 d \times (6 - 2) = 2 d \times 4 = 8 d = 720^\circ$
 і так далі.

Ми знаємо, що у правильних многокутників усі внутрішні кути суть рівні між собою (Див. І. ч., вид. 1^е, стор. 78 і далі); тому, знаючи, як знайти сумму всіх внутрішніх його кутів, ми легко зможемо знайти, чому є рівний кожен з тих кутів: для того треба тільки те, чому є рівна та сума, поділити на число всіх кутів. Таким чином кожен з внутрішніх кутів правильного многокутника з n боками є рівний: $\frac{2 d \times (n - 2)}{n}$, або є рівний: $\frac{180^\circ \times (n - 2)}{n}$.

Наприклад: Кожен з внутрішніх кутів

у правильного трьохкутника є рівний:

$$\frac{180^\circ \times (3 - 2)}{3} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ, \text{ або: } \frac{2 d \times (3 - 2)}{3} = \frac{2 d}{3} = \frac{2}{3} d$$

у правильного чотирикутника є рівний:

$$\frac{180^\circ \times (4-2)}{4} = \frac{180^\circ \times 2}{4} = 90^\circ, \text{ або: } \frac{2d \times (4-2)}{4} = \frac{4d}{4} = d$$

у правильного п'ятикутника є рівний:

$$\frac{180^\circ \times (5-2)}{5} = \frac{180^\circ \times 3}{5} = 108^\circ, \text{ або: } \frac{2d \times (5-2)}{5} = \frac{2d \times 3}{5} = \frac{6d}{5} = 1\frac{1}{5}d$$

у правильного шестикутника є рівний:

$$\frac{180^\circ \times (6-2)}{6} = \frac{180^\circ \times 4}{6} = 120^\circ, \text{ або: } \frac{2d \times (6-2)}{6} = \frac{2d \times 4}{6} = \frac{8d}{6} = 1\frac{1}{3}d$$

у правильного десятикутника є рівний:

$$\frac{180^\circ \times (10-2)}{10} = \frac{180^\circ \times 8}{10} = 144^\circ, \text{ або: } \frac{2d \times (10-2)}{10} = \frac{2d \times 8}{10} = \frac{16d}{10} = 1\frac{3}{5}d$$

і так далі.

Задачі на обрахунок та на будування.

Перечитайте те, що сказано про правильні багатокутники в I. частині.

38. Скільки градусів має кожен з внутрішніх кутів у таких правильних багатокутників: у 12-тикутника? у 8-микутника? у 15-тикутника? у 16-тикутника? у 24-кутника? у 20-тикутника?

39. 4 кути п'ятикутника мають: 60° , 100° , 130° та 140° . Скільки градусів має його п'ятий кут? (Відповідь: 110° .)

40. 4 кути шестикутника мають: 100° , 130° , 150° та 160° . Скільки градусів має кожен з двох інших, коли один з них в два рази більший ніж другий? (Відповідь: 120° та 60° .) А коли один з них на 40° більше ніж другий? (Відповідь: 110° та 70° .)

41. Який кут творять два лучі, що виходять з центра правильного шестикутника, коли один з них іде до вершка одного з кутів шестикутника, а другий до середини бока, що є раменем того самого кута? (Відповідь: кут в 30° .)

42. Скільки всього діагоналів можна провести у п'ятикутника? Розв'язання задачі (Рис. 22.).

Спочатку порадуймо, скільки можна провести всього діагоналів з вершка одного кута п'ятикутника $ABCDE$ (Рис. 22.), наприклад, кута A . Ті діагоналі можна провести до вершків всіх кутів крім трьох, а саме: самого кута A та двох з ним сусідніх, то б то кута B та кута E . Значить всього тих діагоналів буде на три менше ніж самих кутів, то б то 2, позаяк $5 - 3 = 2$. Коли б ми проводили олівцем такі діагоналі з вершка кожного кута до вершків всіх інших, та нам

довелося б провести олівцем стільки раз, скільки дістанемо, коли число діагоналів з вершка одного кута, то б то 2, намножимо на число всіх кутів, то б то на 5. Але легко зміркувати, що в такому разі по кожній діагоналі ми проведемо олівцем двічі. Наприклад: по діагоналі AC (Рис. 22.) ми проведемо олівцем, коли будемо її вести від вершка кута A до вершка кута C , а також і тоді, коли будемо її вести від вершка кута C до вершка кута A . Значить, щоб дістати число всіх діагоналів, треба буде поділити на 2 число, яке добудемо, намноживши число діагоналів з вершка одного кута (2) на число всіх кутів (5). Отже число всіх діагоналів п'ятикутника

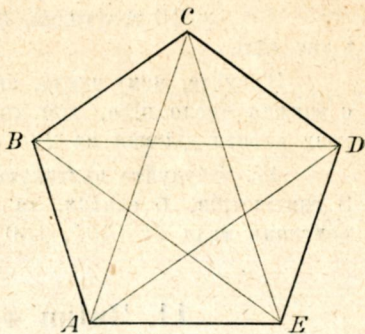


Рис. 22.

буде $\frac{(5 - 3) \times 5}{2} = 5$. Подібними міркуваннями можна знайти число всіх діагоналів у всякого многокутника.

43. Скільки всього діагоналів можна провести з вершка одного кута у таких многокутників: у шестикутника? у десятикутника? у восьмикутника? у чотирикутника?

44. Доповніть наведену нижче таблицю чисел всіх діагоналів, які можна провести з вершка одного кута многокутника, поставивши на порожніх місцях те, що треба.

Число всіх діагоналів, які можна провести з вершка одного кута

- у 4-кутника, буде: $4 - 3 = 1$,
- у 5-тикутника, буде: $5 - 3 = 2$,
- у 6-тикутника, буде:
- у 7-микутника, буде:
- у 8-микутника, буде:
- у 9-тикутника, буде:
- у 10-тикутника, буде:

і так далі.

45. Скільки всього діагоналів можна провести у таких многокутників: у чотирикутника? у шестикутника? у восьмикутника?

46. Доповніть наведену нижче таблицю чисел всіх діагоналів многокутника, поставивши на порожніх місцях те, що треба.

Число всіх діагоналів, які можна провести

- у 4-кутника, буде: $\frac{(4 - 3) \times 4}{2} = 2$,
- у 5-тикутника, буде: $\frac{(5 - 3) \times 5}{2} = 5$,
- у 6-тикутника, буде:

у 7-микутника, буде:
у 8-микутника, буде:
у 9-тикутника, буде:
у 10-тикутника, буде:

і так далі.

З'ясуйте, чому число, яке дістаємо в результаті такого обрахунку є завжди число ціле, хоч при тому обрахункові нам і доводиться що разу робити ділення на 2?

47. Збудуйте п'ятикутник, у котрого три боки підряд мали 6: 8 сантиметрів, 6 сантим. та 4 сантим., а 4 кути, які мають ті боки раменами мали 6: 140° , 130° , 100° та 80° .

11. Зміна форми многокутника.

Візьміть дві дерев'янні планочки (досточки) з обпиляними або обструганими по простій лінії краями, одну в 31 сантиметр, а другу в 21 сантиметр; в кожній з них провертіть на пів сантиметра від обох кінців дві дірочки; складіть ті дві планочки кінцями так, щоб дірочка приходилася проти дірочки та проткніть в ті дірочки цвяшок або кругленько обстругану спичку; тоді ви зможете обертати одну планочку кругом другої в один або в другий бік. Тепер візьміть ще третю планочку в 16 сантиметрів так само з двома дірочками на пів сантиметра від кожного з її кінців, та, розхиливши дві перші планочки, покладіть на них ту третю так, щоб обидві її дірочки прийшлися проти дірочок двох перших, та знов таки проткніть через обидві парі тих дірочок цвяшки або спички. У вас таким чином вийде трикутник (Рис. 23.).

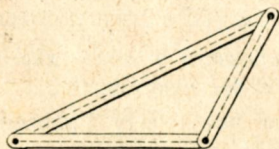


Рис. 23.

Коли ви поспробуєте тепер обернути котрусь з планочок кругом другої, то б то поспробуєте змінити форму цього трикутника, то ви побачите, що ви не змо-

жете того зробити, — хіба, що зламаєте котрусь з спичок. Отже з цього ми бачимо, що *трикутник не може змінити своєї форми, коли довжина трьох його боків остається не змінною.*

Тепер візьміть чотири планочки з дірочками, — для того додайте до тих трьох, що ви брали для трикутника, ще четверту, хоч в 16 сантиметрів теж; сполучіть їх кінці між собою, подібно до того, як ви робили вже з трьома, так, щоб вони утворили чотирикутник (Рис. 24.). Коли ми тепер спробуємо повертати якийсь один бік коло другого, то побачимо, що ми легко можемо те зробити, та що при тому і інші боки обертаються один біля другого і чотирикутник змінює свою форму. Одна з таких змінених форм чотири-

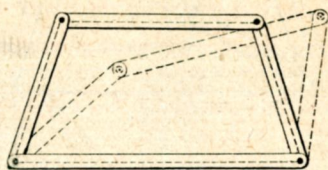


Рис. 24.

кутника показана переривчастими лініями на рисункові 24-^ю. Значить чотирикутник вже може змінити свою форму і тоді, коли довжина кожного з його боків остається незмінною; притому змінюються тільки його кути: одні збільшуються, а другі зменшуються, так що сума їх все остається рівною $4d$ або 360° . Так само можуть міняти свою форму і інші многокутники. Значить зі всіх замкнених простолінійних фігур тільки трикутник не може змінити своєї форми, коли його боки не міняють своєї довжини. Тому з трьох відтинків простої означеної довжини можна збудувати трикутник тільки однієї якоїсь форми, а, наприклад, з чотирьох відтинків означеної довжини можна збудувати безліч чотирикутників різної форми.

Зауважте ще, що коли чотирикутник, зроблений з отих планочок, змінює свою форму так, що довжина кожного з його боків не змінюється, то крім його кутів, які змінюються, міняють також свою довжину його діагоналі, бо два з його протилежних один одному кутів при тій зміні форми чотирикутника зближуються своїми вершками, а два другі віддаляються, як то можна бачити на рисункові 24-^ю. Так само буває і з діагоналями інших многокутників: одні з них при зміні форми многокутника скорочуються, а другі збільшуються.

Додамо тепер до нашого чотирикутника з планочок діагональ (косину), зроблену з п'ятої планочки, настромленої дірочками на два з тих цвяшків або спичок, якими зіткнуті боки

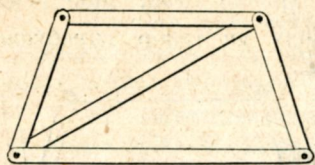


Рис. 25.

того чотирикутника (Рис. 25.). Коли ми спробуємо тепер змінити форму чотирикутника, то побачимо, що ми того зробити не можемо. Чому то так? А тому, що тією косиною ми розбили наш чотирикутник на два трикутники (Рис. 25.), які, як ми уже знаємо, не можуть змінити своєї форми. Значить для чотирикутника досить однієї діагоналі, щоб зробити його незмінним по формі.

Так само і зі всяким іншим многокутником: щоб зробити його незмінним по формі, треба розбити його діагоналями на трьохкутники. Найменше число трьохкутників, на які розбивається ціле поле многокутника, буде тоді, коли ми розіб'ємо його на трьохкутники діагоналями, проведеними з вершка одного якогось кута до вершків всіх інших. Як ми знаємо, число всіх таких діагоналів є рівне числу всіх боків многокутника без трьох — (див. стор. 20, задачу ч. 42), — значить, *найменше число діагоналів, які треба провести, щоб зробити многокутник незмінним по формі, є рівне числу боків многокутника без трьох.* Так, у чотирикутника число таких діагоналів буде: $4 - 3 = 1$, і ми вже це знаємо з наведеного вище прикладу. У п'ятикутника те число буде: $5 - 3 = 2$; у шестикутника: $6 - 3 = 3$, і так далі.

Ця властивість трьохкутників та многокутників має велике значіння в будівничому ділі. Коли частина якоїсь будівлі, як от наприклад мосту, або даху будинка, має форму многокутника, то таку частину завжди роблять з косинами, щоб вона не зміняла своєї форми (не деформувалася, як кажуть) під тягарем якоїсь ваги. Наведемо тут кілька прикладів.

1. На малюнку 26-му показано двоє воріт та фіртку, зроблені з дерев'яних брусів; ворота мають форму п'ятикутника, а фіртка — прямокутника; у перших ми бачимо дві косини,

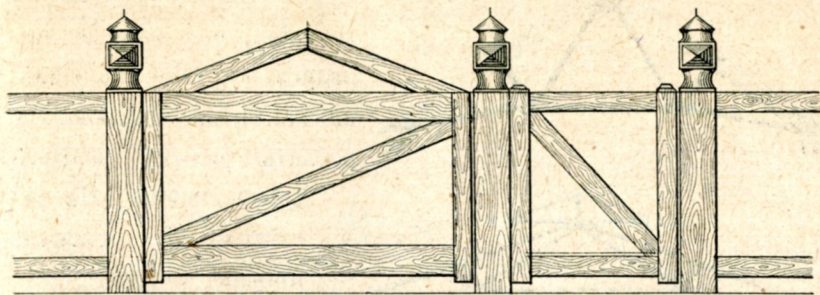


Рис. 26.

а у другої одну (Рис. 26.); ці косини не дають воротам та фіртці перекошуватись від власної їх ваги.

Не трудно зміркувати, що коли б якась сила (сила ваги, наприклад) перекошувала фіртку у правий бік, то вона косину здавлювала б і, коли та косина не була б досить грубою, то вона б зігнулася; а коли б та сила перекошувала фіртку в лівий бік, то вона косину розтягала б. Часом роблять у чотирикутника дві косини; тоді в який би бік якась сила не перекошувала той чотирикутник, одну з його косин вона буде розтягувати, а другу здавлювати, і обидві ті косини не дадуть тому чотирикутникові перекошитись, — одна опіраючись здавлюванню, а друга — розтягуванню. Так роблять часто, лаштуючи при будіванню яких-небудь великих будівель рештування з дерев'яних колод та з дощок.

2. По великих залізничних станціях над платформами роблять великі дахи (півітки). Покрівля таких дахів кладеться на таких залізних многокутниках (ферми), які спіраються своїми кінцями на чавунні колони. Ті многокутники звичайно мають кілька косин; одні з тих косин, удержуючи той многокутник від пере-

кошення під тягарем покрівлі, а зімою то ще й снігу, який на ній лежить, здавлюються силою того тягара, а другі навпаки

розтягаються тією силою.

Перші завжди робляться товщими, щоб вони не згиналися, а другі — тоншими;

інколи ті, що здавлюються, роблять замість залізних

дерев'яними. На рисункові 27-му показано приклад ферми.

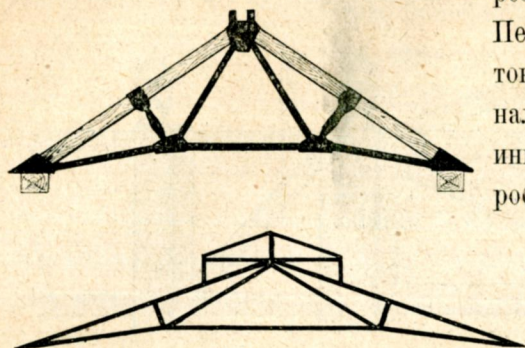


Рис. 27.

також один з прикладів будівель, які мають серед своїх частин многокутники з косинами. На малюнкові 28-му подано залізничний міст через Дніпро біля Кічкасу.

3. Великі залізні мости уявляють з себе



Мал. 28. Залізний міст.

Задачі.

Яке найменше число діагоналів треба зробити у зазначених нижче многокутників для того, щоб вони не могли змінити своєї форми:

1) у шостикутника? 2) у семикутника? 3) у восьмикутника? 4) у девятикутника? 5) у десятикутника?

Чотирикутник зроблено з чотирьох досточок з дірочками на кінцях так, що кожна пара досточок скріплена одним цвяхком. Чи можна буде змінити форму такого чотирикутника, коли зробити в ньому дві косини з туго натягнених мотузків?

III.

Коло.

Перечитайте те, що сказано про коло в I. частині.

Ми вже знаємо (дивись част. I., вид. 1^о, стор. 101.), що для того, щоб обрахувати довжину кола, треба його поперечник помножити на $3\frac{1}{7}$ або на $\frac{22}{7}$. Цей множитель остається одним і тим самим числом для всякого кола. Значить можна сказати, що *довжина всякого кола більша довжини його поперечника в одне і те саме число раз*. Це число в геометрії заведено назначати грецькою літерою π (пі); воно є рівне трьом з дробом, який точно не можна визначити ніякими долями одиниці. Для при-ближних обрахунків і то досить близьких до точних — можна прийняти, що $\pi = 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$, як ми й робили в наших обрахунках.

Таким чином тепер ми можемо зазначити, що:

$$\text{довжина кола} = R \times 2 \times \pi = 2 \times \pi \times R \text{ (або: } 2\pi R),$$

де R — радіус кола;

$$\text{поле круга} = R \times R \times \pi = \pi \times R \times R = \pi \times R^2 \text{ (або: } \pi R^2),$$

де R — радіус круга;

$$\text{бічна поверхня круглого циліндра} = 2 \times \pi \times R \times h \text{ (або: } 2\pi Rh),$$

де R — радіус його основи, а h — його вишина;

$$\text{об'єм круглого циліндра} = \pi \times R \times R \times h = \pi \times R^2 \times h \text{ (або: } \pi R^2 h),$$

де R — радіус його основи, а h — його вишина;

бічна поверхня круглого конуса $= (R \times 2 \times \pi \times l) : 2 =$
 $= \frac{2 \times \pi \times R \times l}{2} = \pi \times R \times l$ (або: πRl), де R — радіус
 його основи, а l — його коса висина;

об'єм круглого конуса $= (R \times R \times \pi \times h) : 3 = \frac{\pi \times R^2 \times h}{3}$
 (або: $\frac{\pi R^2 h}{3}$), де R — радіус його основи, а h — його висина.

12. Дуги кола.

На рисункові 29-му маємо коло з центром в точці O , а на тому колі — дві точки A і B . Як ми знаємо (див. парагр. 2), на колі є два перемежки між тими двома точками.

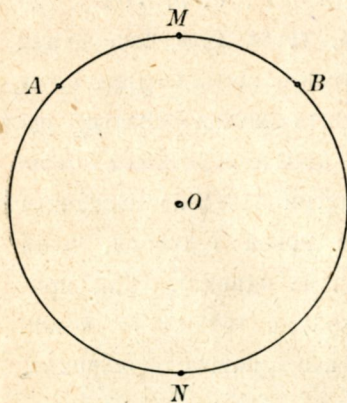


Рис. 29.

Ті два перемежки суть дві дуги: дуга AMB та дуга ANB (Рис. 29.). Значить дві точки на колі служать двома кінцями для двох дуг, котрі доповнюють одна другу до цілого кола. Частіше з тих двох дуг мають на увазі котрусь одну, звичайно меншу, в такому разі її означають не трьома буквами а тими двома, які стоять на її кінцях. Наприклад коли ми напишемо: дуга AB , то значить, що ми маємо на увазі дугу AMB (Рис. 29.).

Зауважимо тут доречі, що замість слова „дуга“ звичайно пишуть оттакий знак: $\cup$. Отже замість того, щоб писати: дуга AB , пишуть так: $\cup AB$.

Щоб обміряти довжину якої-небудь дуги, ми мусіли б її для того якось випростати. Так наприклад коли б та дуга була частиною обводу колеса, то ми могли б прикласти до тієї частини від одного її кінця до другого мотузок, а потім, розтягнувши той мотузок та таким чином випроставши його, помі-

ряти його якоюсь міркою. Або коли у нас є якась гнучка мірка, то просто обміряти ту частину колеса тією міркою, обвивши нею ту частину колеса. Та на практиці не завжди можна так зробити. Через те довжину дуги кола доводиться частіше не обміряти, а обраховувати. Ми уже знаємо, що для того, щоб обрахувати довжину цілого кола, треба число яких-небудь мір в його поперечникові помножити на $3\frac{1}{7}$ (див. I. част., вид. 1^е, стор. 101.); через те, коли ми знаємо, яку саме частину цілого кола уявляє з себе дуга, то ми легко можемо обрахувати її довжину, взявши таку частину числа, що визначає в яких-небудь мірах довжину цілого кола, яку частину того кола уявляє з себе та дуга. Подивимось тепер, яким чином можемо ми кожного разу відшукати, яку саме частину цілого кола уявляє з себе та або інша дуга.

Коли ми проведемо дві прості лінії перпендикулярні одна до одної так, щоб вони перетиналися в точці *O* (Рис. 30.), потім з точки *O* опишемо два кола, то ті відтинки тих двох прямих, які лежать в середині тих кол, будуть їх поперечниками. Кожен з тих поперечників поділяє своє коло пополам, а обидва поділяють його на чотирі рівні частини. Отже менше коло поділяється на чотирі рівні частини в точках: *A*, *C*, *B* та *D*, а більше — в точках: *E*, *G*, *F* та *H*.

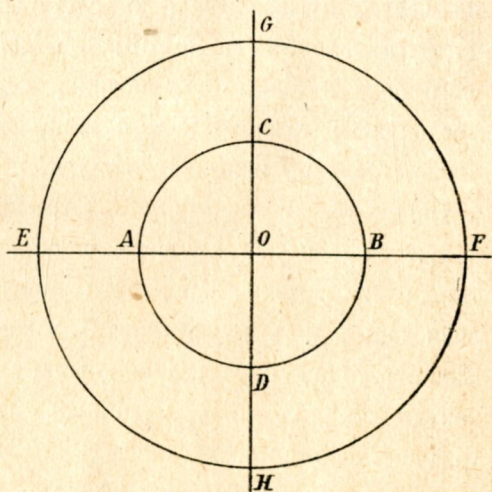


Рис. 30.

Скільки б кол ми не описували з тієї точки *O*, кожна з тих частин всякого кола, що лежать між раменами тих чотирьох

прямих кутів, уявлятиме з себе четверту частину кола. Ми вже знаємо, що прямий кут має в собі 90° градусів, тому і дугу в чверть кола ми можемо брати за дугу в 90° . Зазначимо тут, що кожен з градусів кута є сам кут, що уявляє з себе одну дев'яťдесяту (або дев'яносту) частину прямого кута, а кожен з градусів дуги є сама дуга, що уявляє з себе одну дев'яťдесяту частину дуги в чверть кола; тому перші градуси звуть часом *градусами кутовими*, а другі — *градусами дуговими*. Та частіше говорять і в тім і в другім випадку просто „градуси“, бо кожного разу буває само собою зрозуміло, про які саме градуси — чи про кутові чи про дугові — іде мова.

Отже дуга в чверть кола має 90° , значить дуга в півкола має 180° ($90^\circ \times 2 = 180^\circ$), дуга в три чверти кола має 270° ($90^\circ \times 3 = 270^\circ$), а ціле коло має 360° ($90^\circ \times 4 = 360^\circ$). Так наприклад на нашому рисунку (Рис. 30.) дуги двох кол AC та EG мають в собі по 90° , дуги ACB та EGF мають по 180° , дуги $ACBD$ та $EGFH$ мають по 270° , а одно й друге коло мають по 360° . Довжина кожного градуса більшого кола є більша ніж довжина кожного градуса меншого, але число їх в кожному колі є одне і те саме: 360° . Значить, число градусів якої-небудь дуги показує нам не довжину її, а тільки те, яку частину цілого кола та дуга собою уявляє, а вже знаючи це, ми можемо обрахувати і довжину її, коли тільки ми можемо обрахувати довжину самого кола, то б то, коли нам відома довжина його поперечника або радіуса (луча). Значить, щоб обрахувати довжину якоїсь дуги кола в яких-небудь лінійних мірах, треба спочатку дізнатися, скільки в ній градусів, або як кажуть *обміряти дугу в градусах*.

Подивимось тепер, як можна обміряти дугу кола в градусах. Нехай ми маємо дугу AB на колі з центром в точці O (Рис. 31.). Сполучимо точки A і B з центром кола простими лініями AO та BO , які будуть радіусами кола; ці два радіуси утворять

кут з вершком у центрі кола. Такі кути в колі, що мають своїм вершком центр кола, а своїми раменами радіуси, звуться *центральними кутами*. Всякому центральному куту відповідає дуга кола, яка має свої кінці в кінцях радіусів, що суть раменами того кута, і навпаки: всякій дузі кола відповідає центральний кут, якого раменами суть радіуси, проведені до кінців тієї дуги. Отже нашій дузі AB відповідає центральний кут AOB (Рис. 31.). Коли ми проведемо ще лінію OC , яка чинить з OA прямий кут, то легко зміркуємо, що дуга AB є такою самою частиною чверти кола (то б то дуги AC), якою частиною прямого кута (то б то кута AOC) є кут AOB . Наприклад, коли кут AOB є третя частина прямого кута, то дуга AB є третя частина чверти кола. А з цього виходить, що позаяк і прямий кут і чверть кола мають по 90° , то дуга AB має стільки градусів дугових, скільки градусів кутових має в собі центральний кут AOB . Наприклад, коли кут AOB має 30° (кутових), то і дуга AB має 30° (дугових).

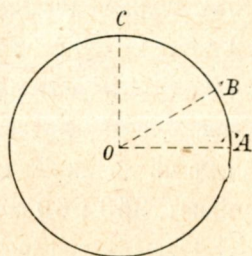


Рис. 31.

Такі самі міркування ми можемо прикласти до всякої дуги кола, а тому можна сказати, що *всяка дуга кола має в собі стільки градусів (дугових), скільки градусів (кутових) має в собі відповідний їй центральний кут*. З того виходить, що для того, щоб обміряти яку-небудь дугу кола в градусах, треба:

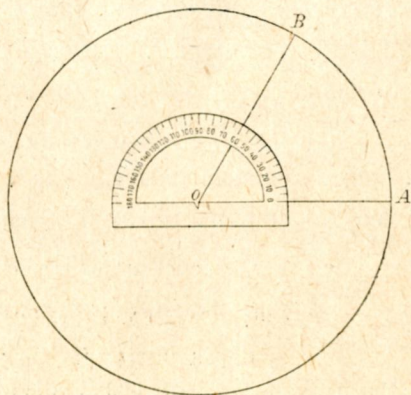


Рис. 32.

обміряти кутоміром (транспортіром) відповідний тій дузі центральний кут, як то показано на рисункові 32-му, де кутомір

показує для центрального кута AOB 60° , а тому і дуга AB , якій той кут відповідає, має теж 60° .

Тепер розміркуймо, як обрахувати довжину дуги AB (Рис. 32.), знаючи, що вона має в собі 60° . Коли радіус кола має наприклад 3 сантиметри, а значить поперечник — 3 сант. $\times 2 = 6$ сант., то довжина цілого кола буде: 6 сант. $\times 3\frac{1}{2} = 6$ сант. $\times \frac{22}{7} = \frac{132}{7}$ сант. $= 18\frac{6}{7}$ сантиметра (див. I. част., вид. 1^а, стор. 101.). Довжина дуги AB буде в стільки раз менше довжини цілого кола, в скільки раз 60° , які має в собі та дуга, менше 360° , які має в собі коло; значить, щоб обрахувати довжину дуги, треба довжину кола поділити на те саме число, на яке треба поділити 360° , щоб дістати 60° ; а це число знайдемо, коли поділимо 360° на 60° , — воно буде рівне: $360 : 60 = \frac{360}{60} = 6$. Коли тепер довжину кола, то б то $18\frac{6}{7}$ сантиметра поділимо на 6, то й матимемо довжину дуги AB . Отже та довжина є рівна:

$$18\frac{6}{7} \text{ сант.} : 6 = \frac{132}{7} \text{ сант.} : 6 = \frac{132}{7 \cdot 6} \text{ сант.} = \frac{22}{7} \text{ сант.} = 3\frac{1}{7} \text{ сант.}$$

Коли всі дії, які нам довелося зробити для обрахунку довжини тієї дуги, написати в одному рядкові, або, як кажуть, укласти в одну *формулу*, то треба буде написати так:

$$\text{довжина дуги } AB = [(3 \text{ сант.} \times 2) \times \frac{22}{7}] : \frac{360}{60} = 3\frac{1}{7} \text{ сант.}$$

Подібно до цього можна розв'язати і обернену задачу, то б то: знайти, скільки градусів має в собі дуга, коли ми знаємо в яких-небудь лінійних мірах її довжину та довжину в тих самих мірах її радіуса (то б то радіуса того кола, якого частиною є та дуга).

Нехай, наприклад, довжина дуги буде $3\frac{2}{3}$ сант., то б то $\frac{11}{3}$ сантиметра, а радіус її — 3 сантиметри. Та дуга матиме число градусів в стільки раз менше 360° , в скільки раз її довжина в сантиметрах буде менше довжини цілого кола; значить 360° нам треба поділити на число, яке дістанемо, коли поділимо довжину кола на довжину дуги.

$$\text{Довжина кола} = (3 \text{ сант.} \times 2) \times \frac{22}{7} = \frac{6.22}{7} \text{ сант.} = \frac{132}{7} \text{ сант.};$$

число, на яке треба поділити 360° , буде:

$$\frac{132}{7} : \frac{11}{3} = \frac{132.3}{7.11} = \frac{12.3}{7} = \frac{36}{7}.$$

$$\text{Число градусів дуги} = 360^\circ : \frac{36}{7} = \frac{360.7}{36} = 70^\circ.$$

Або, коли сполучимо всі дії в одну формулу, матимемо:

$$\text{число градусів дуги} = 360^\circ : [(3 \times 2 \times \frac{22}{7}) : 3\frac{2}{3}] = 70^\circ.$$

Коли треба буває обмірювати дуги або кути в градусах точно, то доводиться вживати частини градуса. Тоді вживають ще шістдесятну частину градуса, яка зветься *минutoю* та шістдесятну часть минути, яка зветься *секундою*. Замість слова „минута“ вживають оттакий знак: ', а замість слова „секунда“ оттакий: ". Пишуть наприклад так: дуга або кут в $45^\circ 60' 30''$, що вимовляється так: дуга або кут в 45 градусів шістдесят минут 30 секунд. Останнє число, то б то число секунд, може бути і з дробом.

Задачі на обрахунок.

48. Обрахувати довжини оттаких дуг: 1) дуги в 30° з радіусом в 7 сантиметрів (Відповідь: $3\frac{2}{3}$ сант.); 2) дуги в 45° з радіусом в 21 сантиметрів (Відповідь: $16\frac{1}{2}$ сант.); 3) дуги в 35° з радіусом в 9 метрів (Відповідь: $5\frac{1}{2}$ метрів).

49. Назначте число градусів дуги буквою n , а число якихсь мір в її радіусі — буквою R і складіть формулу, по якій треба обраховувати довжину тієї дуги.

50. Скільки градусів мають в собі оттакі дуги: 1) дуга з радіусом в 45 сант. в 22 сант. довжини? (Відповідь: 28°); 2) дуга з радіусом в 10 метрів в 11 метрів довжини? (Відповідь: 63° .)

51. Назначте довжину в якихсь мірах дуги буквою S , а довжину радіуса її (в таких самих мірах) — буквою R і складіть формулу, по якій треба обраховувати число градусів тієї дуги.

13. Проста лінія і коло на площі.

Коли проста лінія та коло лежать в одній площі і при тому так, що проста стрічає на своїй путі коло, то вона може

перетяти те коло не більше як в двох точках. Так, наприклад, проста MN (Рис. 33) перетинає коло, якого центр є в точці O , в точках A та B , а проста PR — в точках C та D . Ні та ні

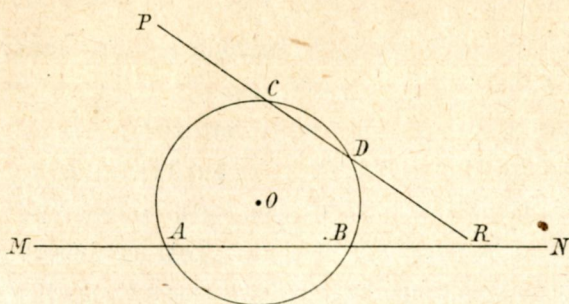


Рис. 33.

друга проста, як би ми далеко їх не продовжували чи в один чи в другий бік, не можуть більше стрітнутись з колом, а тому і не можуть мати інших точок перетину, крім тих, які

ми уже зазначили. Кожна з тих двох прямих MN та PR (Рис. 33.) зветься *січною* лінією кола. Та частина січної, яка лежить в середині кола, зветься *внутрішньою* її частиною. Наприклад: AB є внутрішня частина січної MN (Рис. 33.), а CD — січної PR . Кожна з тих внутрішніх частин є тятивою (хордою) тих двох дуг, на які січна розсікає коло (звичайно тятіву відносять до меншої з тих двох дуг).

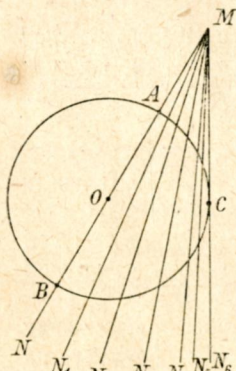


Рис. 34.

На рисункові 33-му ми бачимо, що внутрішня частина є більшою у тієї з двох січних, яка ближче проходить до центра. Внутрішня частина у січної буде найдовшою тоді, коли вона проходить через центр кола і коли, значить, та внутрішня частина є рівна поперечникові кола.

Візьмімо січну MN кола з центром в точці O (Рис. 34.), яка виходить з точки M (або проходить через ту точку) і проходить через центр кола. В такому положенні ця січна має найдовшу внутрішню частину, рівну поперечникові кола, і її точки перетину з колом A і B

лежать на найбільшому віддаленню одна від одної. Будемо повертати цю січну біля точки M так, щоб вона увесь час віддалялася від центра кола, займаючи послідовно положення MN_1 , MN_2 , MN_3 і так далі (Рис. 34.). Тоді, як то видно на рисунку, її точки перетину з колом усе зближатимуться. На останку ми дійдемо до такого положення цієї січної, коли ті дві точки зліпнуться в одну точку C , — це буде крайнє положення MN_6 нашої січної, бо коли ми повертатимемо в той таки бік ту січну ще й далі, то вона вже не матиме ні жадної спільної точки з колом, а значить, перестане бути січною кола. В тому крайньому положенню, то б то коли вона вже має не дві спільних точки з колом, а одну, січна зветься *дотичною* лінією кола, бо вона вже не розікає коло, а дотикається його в одній точці, яка зветься *точкою дотику*. Таким чином на рисунку 34-му лінія MN_6 є дотичною кола, а точка C — її точка дотику до кола.

14. Тятиви або хорди.

Проста лінія, що сполучує дві точки A і B на колі (Рис. 35.), як ми вже знаємо, зветься *тятивою* або *хордою*. Вона зветься так тому, що, мов тятиву, ніби *стягує* два кінці дуги ACB або дуги ADB , і її можна б було однаково вважати як за тятиву однієї з тих дуг, так і другої. Та ми вважатимемо завжди, як то ведеться в геометрії, всяку хорду за хорду меншої з двох дуг, кінці яких вона стягує. Отже на нашому рисунку хорда AB (Рис. 35.) *стягує* дугу ACB (або просто дугу AB), а дуга AB *натягує* тятиву AB або *стягується* тятивою AB .

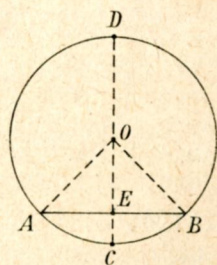


Рис. 35.

Нехай точка C (Рис. 35) є середина дуги AB (так що дуга $CB =$ дузі CA). Проведемо з центра кола O радіус в точку C

і продовжимо його в другий бік до точки D ; тоді CD буде поперечником або діаметром кола. Прове́дімо ще радіуси OA та OB . Коли б тепер, перегнувши наш рисунок (Рис. 35.) по лінії DC , ми покрили б ліву половину круга правою, то дуга CB покрила б собою дугу CA , а значить, точка B упала б в точку A ; а позаяк точка E осталась би на своєму місці, то, значить, частина EB тятиви покрила б як-раз частину EA її, а також радіус OB покрив би собою радіус OA . З цього ми можемо зробити такі висновки: Коли радіус OC (Рис. 35.) проведено до середини дуги, то б то так, що дуга $CB =$ дузі CA , то:

1. $EB = EA$, то б то той радіус поділяє також пополам і тятиву, яка стягує дугу

2. $\angle BEO = \angle AEO$, а позаяк ці два кути, як сумежні, разом складають два прямих кути (див. парагр. 4.), то значить кожен з них є прямий, а тому той радіус є простопадний (перпендікулярний) до тятиви

3. $\angle BOC = \angle AOC$, то б то той радіус поділяє центральний кут відповідний дузі та її тятіві пополам.

Отже: Радіус, проведений до середини дуги: 1). поділяє тятиву тієї дуги пополам і є простопадний до тієї тятиви; 2). поділяє центральний кут, відповідний тій дузі (або тятіві) пополам.

А з цього виникають ще й такі твердження:

Радіус, що поділяє тятиву пополам: 1). є до неї простопадний; 2). поділяє також пополам дугу, яка стягується тією тятивою; 3). поділяє пополам центральний кут, відповідний тій тятіві (або дузі).

Радіус, простопадний до тятиви: 1). поділяє ту тятиву, а також і дугу, що стягується нею, пополам; 2). поділяє пополам центральний кут, відповідний тій тятіві.

Радіус, який поділяє центральний кут пополам: 1). поділяє також пополам і тятиву, відповідну тому центральному куту,

і є простопадний до неї; 2). поділяє пополам дугу, відповідну тому центральному куту.

Проста лінія, що проходить через середини дуги і тятиви, що стягує ту дугу: 1). є простопадна до тієї тятиви і проходить через центр тієї дуги (то б то через центр кола); 2). поділяє центральний кут, відповідний тій дузі, пополам.

Простопад, поставлений в середині тятиви: 1). проходить через середину дуги, що стягується тією тятивою, а також через центр тієї дуги (або через центр кола, то б то є радіусом); 2). поділяє центральний кут, відповідний тій тятиві пополам.

Задачі на будування та інші.

52. Дугу кола поділити: 1) пополам; 2) на чотири рівні частини.

53. Центральний кут поділити: 1) пополам; 2) на чотири рівних частини.

54. Знайти центр кола, коли в ньому не назначено того центра.

(Наяк: Проведіть в тому колі дві які-небудь, тільки нерівнобіжні, тятиви і поставте з середини кожної простопад. Де ті два простопади перетнуться, там і буде центр кола. Так само знаходять центр і дуги кола.)

55. Знайти центр дуги кола.

Проведіть в колі дві тятиви однакової довжини. Доведіть, що рівним (однаковим завдовжки) тятивам в колі відповідають і рівні проміж собою дуги, взявши на увагу, що два трикутники, утворені тими тятивами та радіусами, проведеними до їх кінців, пристайні один одному (чому?) і через те ті їх кути, що суть центральними в колі, рівні проміж собою, то б то мають однакове число градусів.

Доведіть, що рівним дугам кола відповідають і рівні тятиви.

Котра з двох дуг кола, які стягуються нерівними (неоднакової довжини) тятивами, має в собі більше число градусів, а через те й довша?

Котра з двох тятив, які стягують нерівні дуги, довша?

Поділіть коло на 4 рівні частини і точки поділення сполучіть по черзі простими. Яка фігура у вас вийде? Зробіть так само, поділивши коло на 6, на 8, на 12 рівних частин. Які фігури вийдуть тоді?

15. Дотична кола.

Візьмімо знов січну MN кола з центром в O (Рис. 36.). Прове́дімо з центра кола O просту OD простопадно до січної MN . Найкоротший промір між якою-небудь точкою і простою є простопад, проведений з тієї точки до простої; звичайно віддаленне простої від точки і міряють по такому простопадові, і тому саме його й беруть завжди за віддаленне чи за промір простої від точки або точки від простої. Отже простопад OD (Рис. 36.) є віддаленне січної MN від центра кола. Цей простопад, як ми уже знаємо (див. попередній параграф), поділяє в точці D тятину AB нашої січної пополам. Будемо знов обертати нашу січну біля точки M у правий бік, аж поки вона не дійде до

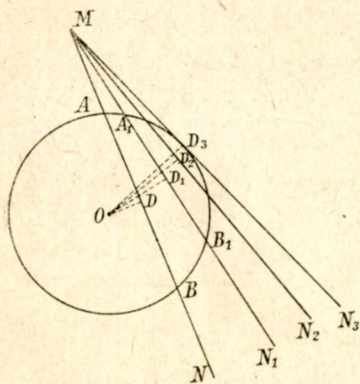


Рис. 36.

свого крайнього положення, коли вона вже обернеться в дотичну кола. При такому обертанні біля точки M січна MN займатиме послідовно положення: MN_1 , MN_2 і так далі аж до положення MN_3 , коли вона вже буде не січною кола, а його дотичною і коли її кінці, то б то точки A та B , A_1 та B_1 і так далі, зійдуться в одну точку D_3 , точку дотику. Коли ми будемо про-

водити простопади з центра кола до тих її нових положень, які вона послідовно займатиме при своєму обертанні біля точки M і які назначено на нашому рисункові лініями MN_1 , MN_2 та MN_3 (Рис. 36.), то, як ми знаємо, кінці тих простопадів, то б то точки D_1 та D_2 попадатимуть в середину тятини січної, а значить, коли січна обернеться вже в дотичну, і коли кінці тятини зіллються в одну точку D_3 , кінець простопаду з центра на дотичну попаде теж в ту саму точку, а сам про-

стопад стане радіусом кола. З цього ми можемо зробити такі висновки:

1. Радіус, проведений простопадно до дотичної кола, попадає своїм кінцем в її точку дотику.

Або взагалі:

Проста, проведена з центра кола простопадно до дотичної того кола, проходить через точку дотику.

2. Радіус, проведений до точки дотику дотичної лінії є простопадний до неї; і навідворот: дотична лінія є простопадна до радіуса, проведеного до її точки дотику.

Або взагалі:

Проста лінія, проведена з центра кола через точку дотику дотичної того кола, є простопадна до неї; і навідворот: дотична кола є простопадна до простої лінії, проведеної з центра кола через точку дотику.

3. Проста лінія, проведена через кінцеву точку радіуса простопадно до нього, є дотична кола в тій точці.

Подивимось тепер, як на підставі того, що ми зараз зазначили, можна розв'язати таку задачу на будівництво: через дану точку A на колі провести дотичну того кола.

Проводимо з центра кола O (Рис. 37.) радіус до точки A і продовжимо його за коло. На тій простій лінії відкладаємо по обидва боки точки A два яких-небудь рівних проміж себе відтинки AB та AC , потім робимо ті самі будівництва, які потрібні для того, щоб поділити відтинок BC пополам (див. частину I., вид. 1-е, стор. 70.). Лінія MN , яка поділяє відтинок BC пополам, повинна пройти через точку A , що є серединою того відтинка і, як ми знаємо, є простопадна

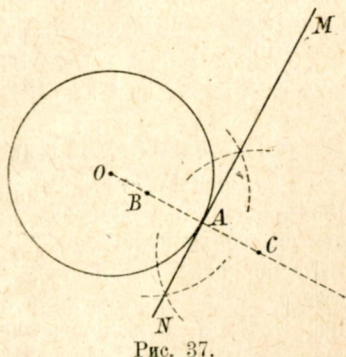


Рис. 37.

до лінії BC , а значить і до радіуса OA , тому та проста MN і є дотичною кола в точці A . Можна було б провести ту просту MN простопадно до радіуса OA також за допомогою косинця.

Задачі.

В двох кінцях поперечника кола проведено дві дотичні того кола. Як будуть положені на площі ті дві дотичні одна відносно другої?

В колі проведено два радіуси простопадно один до одного, а на кінцях тих радіусів проведено дві дотичних кола. Який кут утворять ті дотичні, коли їх продовжити до їх перетину?

В колі проведено тятиву, через середину її проведено радіус, а в кінці того радіуса — дотичну кола. Як буде положена та дотична відносно тятиви?

Два радіуси в колі творять кут в 60° ; в кінцях тих радіусів проведено дві дотичні. Який кут утворять вони, коли їх продовжити до перетину?

Три радіуси в колі творять три рівних кути по 120° кожний: в кінці кожного з трьох радіусів проведено по дотичній кола. Яку фігуру утворять ті дотичні, коли їх продовжити до взаємного перетину?

В колі проведено два діаметри (поперечники) простопадно один до одного, а в кожному кінці кожного з тих двох діаметрів проведено по дотичній кола. Яку фігуру утворять ті дотичні, коли продовжити їх до взаємного перетину?

В колі проведено 6 радіусів так, що 6 кутів між ними суть рівні проміж собою. В кінці кожного з радіусів проведено по дотичній. Яку фігуру утворять ті дотичні, коли продовжити їх до взаємного перетину?

Задачі на будуваннє.

56. З точки A , що лежить поза колом, провести дотичну того кола.

Розв'язаннє (Рис. 38.). Маємо коло з центром в O і точку A . Щоб провести з точки A дотичну кола, нам треба знати, де саме лежить на колі точка її дотику. Нехай тією точкою буде точка B ; тоді $\angle ABO$ повинен бути прямий, а значить трикутник ABO — прямокутний. Коли ми зможемо знайти довжину прямки AB того трикутника, тоді ми зможемо знайти і точку дотику B , бо для того досить буде одміряти ту довжину від точки A . Для того, щоб знайти ту довжину, зробимо так: проведемо який-небудь радіус OC , а в кінці C того радіуса проведемо просту простопадно до радіуса OC , яка, як ми знаємо, буде дотичною кола в точці C . Тепер зробимо з точки O

радіусом рівним OA засічку на тій дотичній; та засічка перетне її в точці D . Отже трикутник OCD буде такий самий, як і трикутник ABO , а значить, прямка DC буде така сама завдовжки, як і прямка AB ; таким чином ми тепер маємо довжину прямки AB ; візьмімо ту довжину циркулем і обміряймо її від точки A до кола; для того треба зробити засічку радіусом тієї довжини з точки A ; вона перетне коло в точці B , яка й буде точкою дотику тієї дотичної, яку нам треба збудувати. Зостається тільки її про-

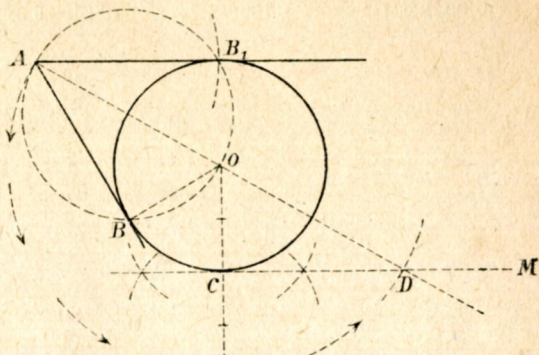


Рис. 38.

вести з точки A до точки B (і далі, як що нам треба), і задача розв'язана. Таку саму засічку можна ще зробити і по другий бік точки A на колі, — вона дасть нам точку B_1 , а коли сполучимо ту точку з точкою A , то матимемо ще й другу дотичну кола, проведену з точки A . Значить дотичних з однієї точки до кола може бути дві. Нетрудно зрозуміти, що довжиною (від точки A до точки дотику) ті дві дотичні будуть однакові, як і те, що проста, яка йде від точки A до центра кола, поділяє кут між тими двома дотичними пополам (Рис. 38.). (Завважимо ще тут, що коли поділити лінію AO в точці E пополам і з тієї точки, як з центра, описати коло радіусом рівним половині AO , то те коло неодмінно пройде через точки дотику, то б то через точки B і B_1 . Значить ті точки можна відшукати ще й таким способом.)

57. Провести дотичну двох кол.

Розв'язаннє. Отже маємо два кола з центрами в O і в O_1 та з радіусами r і R (Рис. 39.). Треба, значить, провести просту лінію так, щоб вона була дотичною обох кол. Звичайно, її можна провести на око, просто приклавши лінійку так, щоб її край дотикався обох кол. Та коли ми хочемо зробити те точно, то треба робити так:

1) Описуємо з центра більшого кола, то б то з точки O , два кола, — одно радіусом, рівним сумі радіусів наших кол, то б то рівним $(R+r)$, а друге радіусом, рівним їх різниці, то б то рівним $(R-r)$. Для того на простій, що сполучає центри кол, від тієї точки, в якій її перетинає більше коло, відкладаємо довжину радіуса меншого кола ліворуч і праворуч, до точок A та B і з точки O , описуємо кола радіусами OA та OB , — це і будуть ті два кола.

2) З центра меншого кола проводимо дотичну OM більшого кола та дотичну OR меншого кола. Для того, поділивши в точці C лінію OO_1 (лінію центрів) пополам, описуємо з точки C коло на OO_1 , як на по-

16. Спряження простої з кривою.

Різницю між простою лінією і кривою можна собі з'ясувати ще так: Уявімо собі, що якесь тіло переміщається по простій лінії від одного її кінця до другого; тоді те тіло має один і той самий напрямок того переміщення увесь час, поки воно переміщається по тій простій. Навпаки, коли якесь тіло переміщається по кривій лінії, то воно кожного менту міняє свій напрямок увесь час, поки воно переміщається по тій кривій. Так, наприклад, коли якесь тіло переміщається по колу від точки A (Рис. 41.) згідно з рухом стрілки годинника, то в тім місці, де поставлено точку A , напрямок його переміщення буде з ліва у право, а уже в точці B , яка лежить на протилежному кінці діаметра AB (діаметрально протилежна точці A), той напрямок буде з права в ліво. Так само напрямок його переміщення в точці C буде з гори на низ, а в діаметрально протилежній точці, то б то в точці D , той напрямок буде з низу до гори. Як би в якій-небудь точці, наприклад точці C (Рис. 41.) те

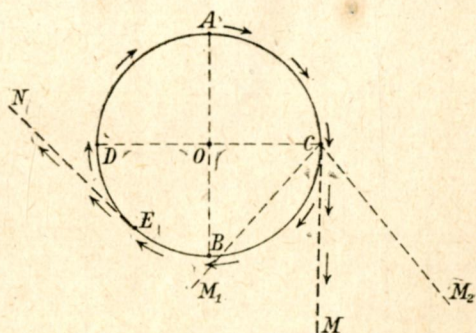


Рис. 41.

тіло перестало міняти напрямок свого переміщення і стало б переміщатися, увесь час зберігаючи той напрямок, який воно мало в тій точці C , то воно стало б переміщатися уже не по колу, а по простій лінії CM , яка є дотичною кола в тій точці C . Так само було б, коли б тіло перестало змінити свій напрямок у точці E , — тоді воно почало б переміщатися по дотичній кола в точці E , то б то по простій EN . Значить, дотична кола в кожній його точці і показує нам, який саме напрямок має в тій точці тіло, що

переміщається по тому колу. Таким чином дотична кола в якій-небудь його точці є та проста, на яку тіло, що переміщається по колу, може перейти в тій точці не міняючи того напрямку, який воно мало в ній. Наприклад, щоб перейти в точці C (Рис. 41.) на лінію CM_1 або CM_2 , тіло раптово мусить змінити свій напрямок, а переходячи в тій самій точці на лінію CM , яка є дотичною кола в точці C , воно того напрямку не змінює. Разом з тим, ми бачимо, що CM є та проста, яка зтикається з горішньою частиною кола без перелому, а прості CM_1 і CM_2 зтикаються з нею з переломом в точці C .

Теж саме можна сказати взагалі про криві та прості лінії; з якою б не було кривою лінією без перелому стикається в якій-небудь точці тієї кривої тільки та проста лінія, яка є дотичною тієї кривої в тій точці. Криву лінію та просту, що стикаються своїми кінцями без перелому, звуть *спряженими лініями*. Отже

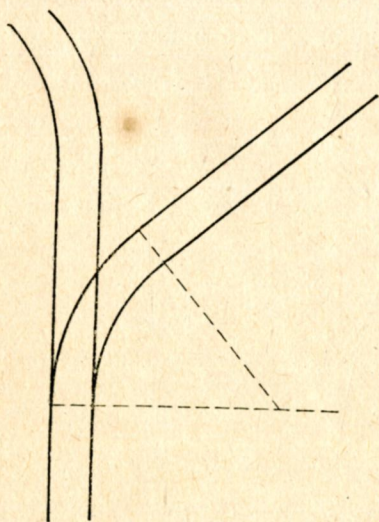


Рис. 42.

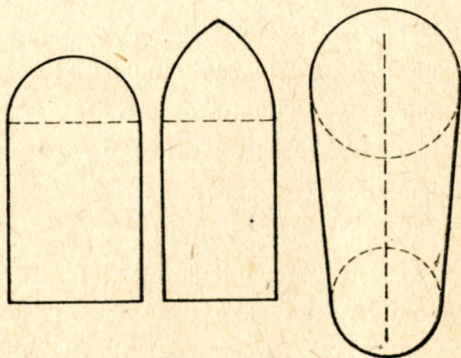


Рис. 43.

на рисункові 41-му частина кола, що іде до гори від точки C та проста CM суть спряжені лінії.

Спряження ліній доводиться часто робити на практиці, наприклад при укладанні рисунків та плянів всяких будівель. По спряженим лініям прокладають залізничу колію в тих місцях, де вона завертає, або де розходяться дві колії. На рисунку 42-му показано приклад такого місця колії, а на рисунку 43-му інші приклади спряження ліній.

17. Кола на площі.

Криві лінії, як і прості, ми вважаємо за рівнобіжні тоді, коли вони тягнуться увесь час на однаковому віддаленні одна від одної. Так наприклад колія залізниці уявляє з себе дві рівнобіжні лінії не тільки там, де вона йде просто, а також і там, де вона завертає по кривій лінії. Два або кілька кол рівнобіжні тоді, коли вони мають спільний центр, то б то, коли центри тих кол лежать усі в одній точці. Такі кола звуть *концентричними* колами або *рівнобіжними* (Рис. 44.).

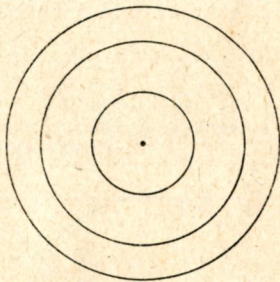


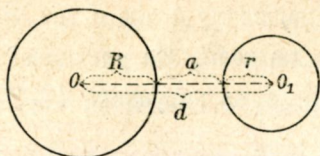
Рис. 44.

Коли центри двох кол не лежать в одній точці, то б то коли кола не концентричні, то вони можуть лежати на площі або одно наоколо другого, або одно в середині другого; при тому вони можуть або не мати ніякої спільної точки або мати одну спільну точку, значить, дотикатися одно другого в тій точці, або, нарешті, мати дві спільних точки, то б то перетинати в тих двох точках одно друге. На рисунку 45-му показано усі ті випадки.

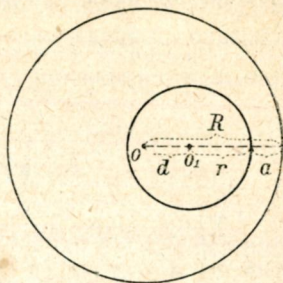
Задачі на будування та інші.

Розгляньте уважно рисунок 45-ий і визначте, яке є відношення між радіусами обох кол (або між суммою та різницею тих радіусів) і віддаленням центрів їх в кожному окремому випадку.

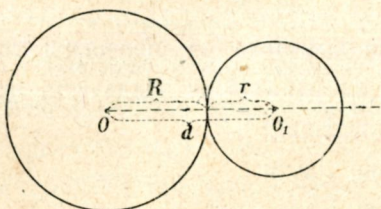
Коли провести дотичну одного з двох дотичних кол в точці дотику тих кол, то чим буде та проста лінія для другого кола?



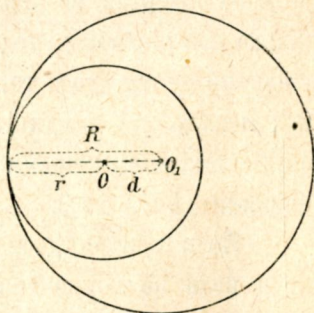
Кола, що лежать одно навколо другого і не мають ніякої спільної точки.



Кола, що лежать одно в середині другого і не мають ніякої спільної точки.



Кола, що лежать одно навколо другого і мають одну спільну точку, то б то дотикаються.



Кола, у яких частини піль кругів покриваються і які мають дві спільні точки, то б то перетинаються.

Кола, що лежать одно в середині другого і мають одну спільну точку, то б то дотикаються.

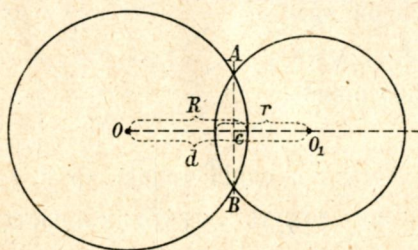


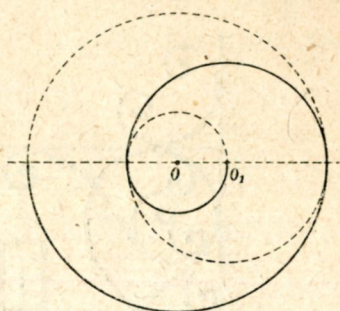
Рис. 45.

Як проходить проста лінія, що сполучає дві точки перетину двох кол, відносно простої, що сполучає центри тих кол? Що можна сказати про віддалення кожної з двох точок перетину двох кол від простої, що сполучає центри?

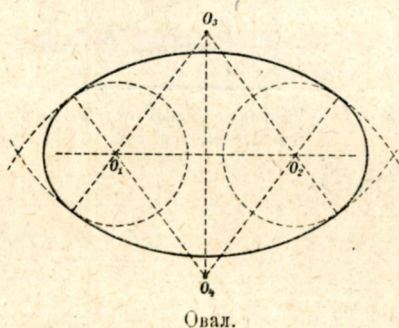
58. Нарисуйте 3 кола, які дотикались би в одній точці.

59. Нарисуйте 4 таких кола.

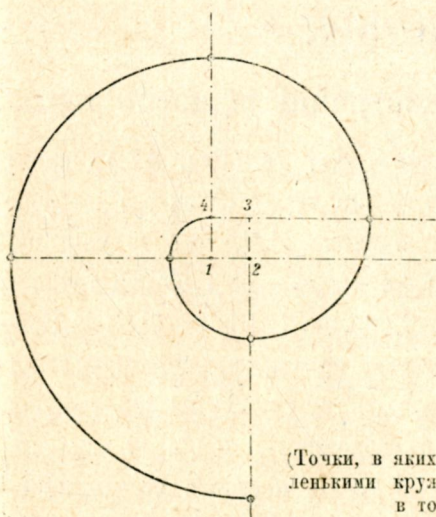
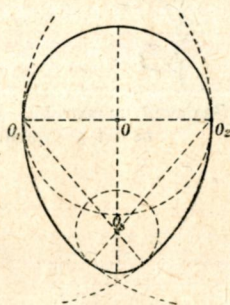
Подібно до того, як ми спрягали просту лінію і дугу кола, можна спрягати між собою і дуги кола, — для того треба, щоб точка, в якій вони спрягаються, була точкою дотику кол, яких частинами суть ті дуги. На рисунку 46-му показано кілька прикладів спряжених дуг кола.



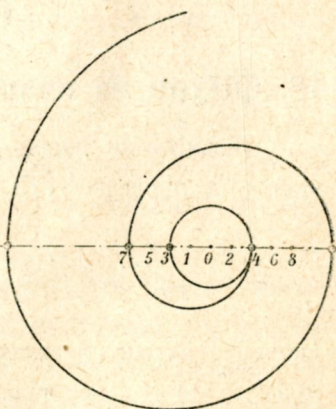
Спіраль.



Овал.



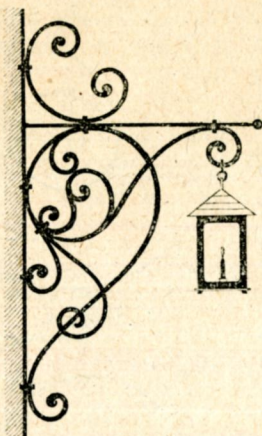
Спіраль.



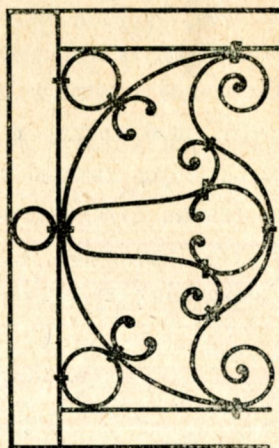
Спіраль.

(Точки, в яких стикаються частини кола, назначено маленькими кружечками; циркуль треба ставити по черзі в точки: 1, 2, 3, 4, 5 і так далі.)

Рис. 46.



Залізний кронштейн, зкомпонований з спіралів.



Частина залізної огорожі, на якій теж бачимо спіралі та частини кол.

Рис. 46.

IV.

Сімметрія.

18. Фігури на площі сімметричні відносно точки.

Візьміть на площі дві точки: A і B (Рис. 47.); сполучивши їх простою AB , назначить ще точку O як-раз по середині відтинка AB , то б то так, щоб віддалення точок A і B від точки O було однакове ($OA = OB$). Тепер

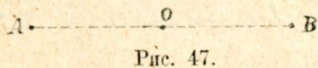


Рис. 47.

викрайте смужку з паперу остільки прозорого, щоб кріз нього просвічував наш рисунок і покладіть ту смужку на той рисунок. Тоді на тій смужці можна буде назначити ті точки, в яких просвічуватимуть кріз папер точки A та B ; поставте на тіх місцях букви a та b (Рис. 48., I.). Встроміть в точку O булавку і обертайте смужку круг булавки, то б то круг точки O так, як по-

казано стрілками, то б то від правої руки до лівої. Коли ви обернете її на півкола або на 180° , то смужка ляже так, що той її кінець, який був праворуч, буде ліворуч і навпаки (Рис. 48., II.). Разом з тим ви помітите, що точка a , то б то та, яка була поставлена на смужці проти точки A , покриве тепер точку B , а точка b точку A . Коли ви повернете смужку ще на півкола або ще на 180° , то вона займе то положення, в якому вона була спочатку, і точки a та b знов покриватимуть точки A та B (Рис. 48., III.). Якби, замість тієї смужки, ми могли обертати круг точки O саму просту лінію AB разом з точками A та B , то після обороту на півкола сама точка A попала б на те місце, де була точка B , а точка B — на те місце, де була точка A (Рис. 48.); а після обороту ще на півкола обидві точки знов опинились би на своїх первісних місцях. Значить за повний оборот, то б то на ціле коло, ті дві точки двічі міняються своїми місцями, так що за другим разом, то б то в кінці того повного обороту, впадають на свої попередні місця. Нетрудно зміркувати, що так буде тільки з такими двома точками, які, поперше лежать на одній простій з точкою O , а подруге однаково віддалені від тієї точки. Про такі дві точок кажуть, що вони лежать на площі *сімметрично* відносно третьої точки (точки O на рис. 47.), котру в таких разі звуть *центром сімметрії* тих двох точок. Коротше такі дві точки звуть *сімметричними* відносно третьої точки, то б то центра їх сімметрії.

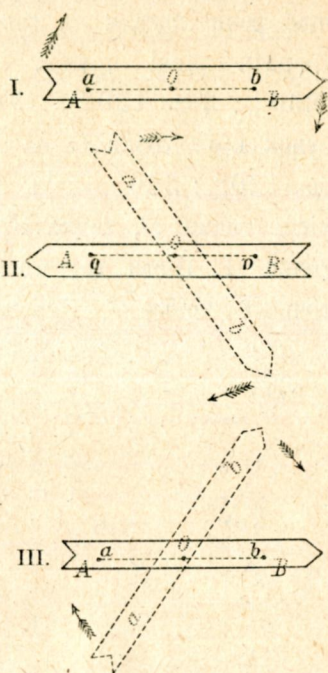
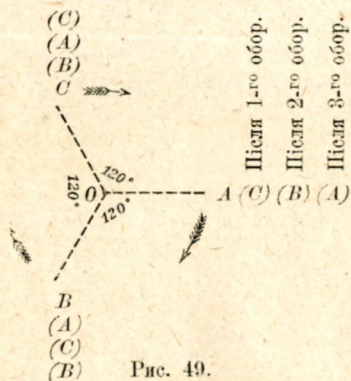
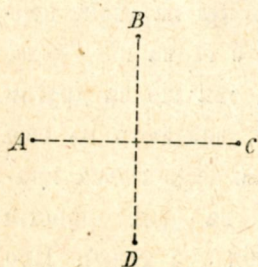


Рис. 48.

Візьмімо тепер три точки: A , B та C (Рис. 49.) однаково віддалені від точки O ($OA = OB = OC$) притім так, щоб вони лежали на трьох лучах, проведених з точки O , які утворюють рівні проміж себе кути, то б то кожен в 120° ($360^\circ : 3 = 120^\circ$). Уявімо тепер, що ми обернули наш рисунок круг точки O на 120° (то б то на третю частину кола, бо $120^\circ : 360^\circ = \frac{1}{3}$); після такого обороту точка A займе місце точки B , точка B — місце точки C , а точка C — місце точки A . Після другого обороту на 120° точка A займе місце точки C , точка B — місце точки A , а точка C — місце точки B .



Після третього обороту усі три точки займуть знов ті місця, які вони займали спочатку. На нашому рисункові порядок, в якому точки займатимуть місця одна одної за тими трьома оборотами, назначено буквами в скобках (Рис. 49.). Таким чином за повний оборот рисунка круг точки O ті три точки *тричі* мінятимуться місцями і під кінець того повного обо-



роту (на 360°) опиняться в своїх первісних місцях. Такі три точки звуть теж симетричними відносно точки O , центра їх симетрії, а такого роду симетрію звуть *трихрисловою симетрією*, щоб відрізнити її від симетрії тих двох точок, про які говорилось поперед (Рис. 48.), котру звуть *двохрисловою*.

Чотири точки A , B , C та D , однаково віддалені від точки O та які лежать на чотирьох лучах, що утворюють 4 рівних кути по 90° кожний (Рис. 50.), уявляють приклад *чотириразової* симетрії відносно точки O , центра тієї симетрії. Якесь ще

більше число точок можуть дати приклад взагалі *многоразової симетрії* точок відносно центра симетрії.

З усього попереднього можемо зробити такі висновки:

1. Точки на площі можуть бути симетричні відносно якоїсь точки тільки тоді, коли вони однаково віддалені від тієї точки. Крім того: дві точки повинні для того лежати на одній простій лінії з центром симетрії; кілька точок, коли число їх непарне, мусять лежати так, щоб усі кути, утворені лучами, проведеними з центра симетрії до

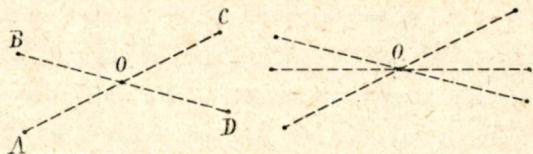


Рис. 51.

тих точок, були рівні проміж себе; коли число точок парне, то вони мусять лежати

так, щоб кожна пара точок, що лежать по обидва боки центра, була на одній простій лінії з тим центром.

2. Точки можуть мати найбільше стількиразову симетрію, скільки їх самих. Коли число їх є парне, то їх симетрія може мати і менше число раз.

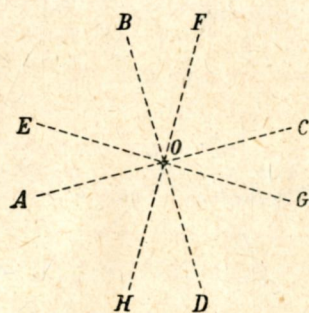


Рис. 52.

На рисункові 51-^{му} показано 4 та 6 точок, які мають по двоє двохразову симетрію, а на рисункові 52-^{му} 8 точок, які мають по 4 чотириразову симетрію.

Нехай тепер ми маємо два відрізки простої AB і CD (Рис. 53.), яких кінці суть двохразово симетричні відносно точки O : точка A симетрична з точкою C , а B — з D . Яку б точку ми не взяли на відрітку AB , вона буде мати собі симетричну на відрітку CD , і навпаки. Наприклад, взявши на AB точку E і, провівши просту EOF , ми знайдемо на CD точку F , симетричну з точ-

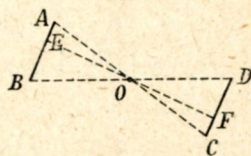
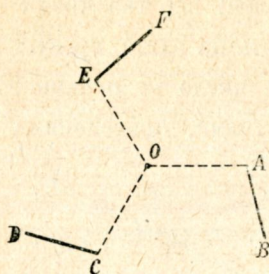
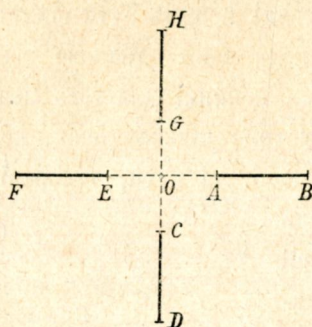


Рис. 53.

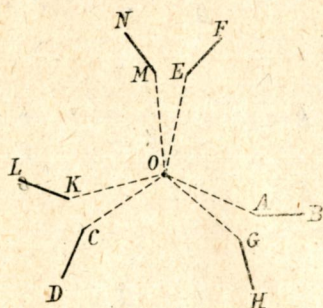
кою E . Отже, коли кінці одного відтинка двохразово симметричні відносно точки двом кінцям другого відтинка, то такі два відтинки двохразово симметричні відносно тієї точки, центра



Трьохразова симетрія відтинків.



Чотириразова симетрія 4 відтинків.



Трьохразова симетрія 6 відтинків.
Рис. 54.

їх симетрії. Три відтинки можуть бути трьохразово симметричні відносно точки (Рис. 54.), чотири — чотириразово або по двоє двохразово симметричні (Рис. 54.), і взагалі, багато відтинків можуть бути много-

разово симметричні відносно центра симетрії.

Вернімось до двох відтинків двохразово симметричних відносно точки (Рис. 53.). Коли б ми обернули наш рисунок круг точки O від правої руки до лівої на шівкола або на 180° , то кінець C відтинка CD заняв би місце кінця A відтинка AB , а кінець D того відтинка — місце кінця B другого; в той самий час кінці A та B відтинка AB заняли б місця кінців C та D відтинка CD , і таким чином увесь відтинок CD заняв би місце відтинка AB , а відтинок AB заняв би місце відтинка CD . Після обороту ще на шівкола обидва відтинки знов помінялись би своїми місцями і, значить, заняли б знов свої первісні місця. Таким чином за повний оборот ті два відтинки *двічі* міняються своїми місцями, тому вони й суть двохразово симметричні відносно точки O . Петрудно зрозуміти, що коли ми так само

обертатимемо три сімметричні відтинки (Рис. 54.), то вони тричі мінятимуться своїми місцями за повний оборот круг точки O і під кінець того обороту кожен з них займе знов своє первісне місце. Отже ці три відтинки трьохразово сімметричні, і так далі. Зрозуміло також, що сімметричними можуть бути тільки пристайні або рівні проміж собою відтинки.

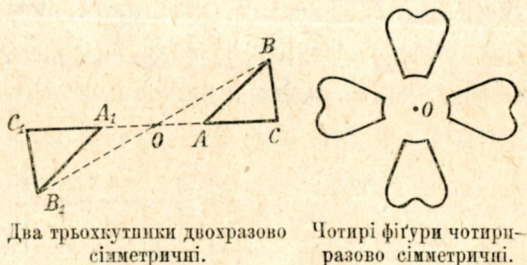
Сімметричними відносно точки можуть бути також і цілі фігури. Для того всі точки кожної з тих фігур повинні бути відповідно сімметричними з точками усіх інших фігур. На рисункові 55-му показано приклади сімметричних фігур, які мають двохразову та чотириразову сімметрію відносно центрів сімметрії.

Само собою зрозуміло, що такі фігури повинні бути пристайними проміж собою, бо при повному обороті тих фігур круг точки O (Рис. 55.) вони повинні послідовно займати місця одна одної,

і при тому обвід кожної з них повинен цілком покривати те місце, яке займав обвід другої.

Такі геометричні фігури, яких окремі частини суть сімметричні відносно точки, що лежить в середині самої фігури, звуться фігурами сімметричними відносно центра. Прикладом такої сімметрії може бути рівнобіжник $ABCD$, який двохразово сімметричний відносно точки O перетину його діагоналів (Рис. 56.). Справді,

$\triangle ABD$ і $\triangle CDB$ сімметричні відносно точки O ; або $\triangle ABC$ і $\triangle CDA$ теж сімметричні відносно тієї точки; тому, коли б обернути рівнобіжник круг точки O на півкола,



Два трикутники двохразово сімметричні.

Чотири фігури чотириразово сімметричні.

Рис. 55.

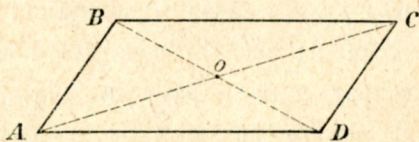


Рис. 56.

то $\triangle ABD$ заняв би місце $\triangle$ -ка CDB , і навпаки, а сам рівнобіжник заняв би те саме місце площі, яке він займав і до обороту. За поворотом ще на півкола, ті трикутники займуть свої первісні місця, як і сам рівнобіжник. Завважмо тут, що при обороті на ціле коло рівнобіжник двічі виходив з того місця на площі, яке він займав спочатку і двічі повертався на те саме місце. Так буває завжди, коли фігура двохразово симетрична відносно центра.

Фігури можуть бути також симетричні відносно центра трихразово, чотириразово і взагалі многократно. Рівнобіжний трикутник ABC , квадрат $DEFG$, та правильний шестикутник $HKLMNP$ (Рис. 57.) уявляють приклади фігур симетричних трихразово, чотириразово та шестиразово відносно центра симетрії, яким у кожній з цих трьох фігур є центр кожної з них.

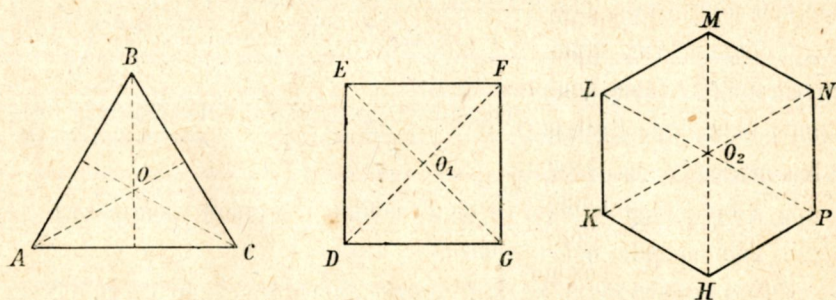


Рис. 57.

Легко зрозуміти, що при обороті на повне коло кожної з цих фігур круг центра трикутник покидає те місце, яке він займав на площі спочатку, і знов його займатиме три рази, квадрат чотири рази, а правильний шестикутник шість раз. Ви можете впевнитися в цьому так: візьміть лист паперу, припишіть його до столу чотирма кнопками, нарисуйте на ньому ці три фігури та, відшукавши у кожній з них її центр (див. про правильні многокутники частину I., вид. 1-^о, стор. 78.), віткніть злегка в ті центри по кнопці. Потім викрайте кожну з фігур

ню обводу і обертайте круг кнопки (то б то круг центра) на повне коло. Ви помітите, що трьохкутник займатиме знов виріз в папері (то б то те місце, яке він займав на ньому до обороту) кожного разу, як ви його обернете на третю частину кола, то б то на 120° ; чотирикутник — кожного разу, як ви його обернете на чверть кола, то б то на 90° , а шостикутник — кожного разу, як ви його обернете на шосту частину кола, то б то на 60° . Так само ви можете зробити і з рівнобіжником (Рис. 56.).

Таким чином ми бачимо, між иншим, що всякий правильний многокутник є фігура сімметрична відносно свого центра; та сімметрія є стількиразовою, скільки той многокутник має боків або кутів.

Коло є фігура абсолютно сімметрична відносно свого центра, бо на який би малий кут ми не обернули його круг центр, він займатиме те саме місце на площі, що і до обороту.

Задачі на будування та инші.

Скількиразову сімметрію і відносно якої точки мають оттакі фігури: Правильний трьохкутник? Правильний чотирикутник (квадрат?) Правильний п'ятикутник? Прямокутник? Рівнобіжник (паралелограм?) Ромб?

Де лежить центр сімметрії відтинка простої лінії?

Де лежить центр сімметрії фігури, що її творять два відтинки простої, які в точці перетину поділяють одна одну пополам?

60. Нарисуйте два кути сімметричні відносно: 1) якої-небудь точки; 2) відносно точки, в якій ті кути сходяться своїми вершками.

61. Нарисуйте три кути сімметричні відносно точки, в якій вони сходяться своїми вершками.

62. Нарисуйте чотири такі самі кути.

63. Нарисуйте чотири прямих кути сімметричні відносно якої-небудь точки.

64. Нарисуйте два трьохкутники сімметричні відносно: 1) якої-небудь точки; 2) відносно точки, в якій вони сходяться своїми вершками.

65. Нарисуйте чотири таких трьохкутники.

66. Нарисуйте такі фігури сімметрично відносно даної точки O : 1) правильний трьохкутник; 2) квадрат; 3) рівнобіжник; 4) ромб.

Чи можна знайти точку, відносно якої нижче названі фігури мали б чотириразову сімметрію: 1) рівнобіжник? 2) ромб? 3) прямокутник? 4) квадрат? 5) правильний трикутник? 6) правильний шестикутник?

19. Сімметрія відносно простої лінії або осі сімметрії.

Візьміть листок паперу прямокутної або квадратної форми, проведіть на ньому просту лінію MN (Рис. 58.), яка поділяла б його приблизно пополам та, перегнувши його по тій лінії, складіть його вдвоє; потім простреміть його в яком-небудь місці булавкою. Коли ви після того розгорнете той листок, то по-

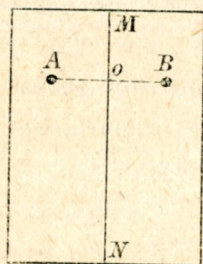


Рис. 58.

бачите на ньому дві дірочки по обидва боки проведеної вами лінії; ті дірочки можна взяти за дві точки; ми їх назначуємо на нашому рисунку буквами A і B (Рис. 58.). Коли ви сполучите дві дірочки або, як ми тепер про них казатимемо, дві точки простою лінією AB , яка перетне лінію MN в точці O , то ви за-вважте, що лінія AB повинна бути просто-надною до лінії MN , бо всі чотири кути, що їх творять ті дві лінії, рівні проміж себе, тому кожен з них є прямий; крім того ті точки A і B повинні бути однако-віддалені від лінії MN ($OA = OB$).

Уявіть собі тепер, що ви пронизали той листок в кількох місцях по лінії MN рівненьким дротом або прутком, та, поставивши той пруток одним кінцем на стіл сторч, обертаєте круг нього, немов круг осі, той листок паперу від правої руки до лівої. Коли б ми обернули його круг тієї осі MN (Рис. 58.) на пів повного оборота, то б то на пів кола, то права поло-вина листка заняла б місце лівої, а ліва — місце правої; разом з тим точка B заняла б місце точки A , а точка A — місце точки B . Коли б ми далі обернули листок в той самий

бік ще на пів кола, то точки A і B , ще раз помінявшись місцями, знов заняли б ті місця, які вони займали до того, як ми почали обертати листок. Значить виходить, що за повний оборот листка, то б то за оборот його на ціле коло ті дві точки двічі займали місця одна одної, так що за другим разом опинились на своїх первісних місцях. Так само було б, як би ми могли як-небудь обертати самі такі дві точки, як A і B , круг тієї осі MN без листка паперу. Наприклад, як би за ті точки ми взяли два загострених кінці спички, настромленої серединою на пруток. Одже, коли дві точки лежать в простороні так відносно простої лінії, що при повному їх обороті круг тієї лінії, як круг осі, вони двічі міняються одночасно своїми місцями, то такі дві точки звуться *сiмметричними відносно осі*; сама вісь зветься *осею сiмметрії* тих точок. Позаяк дві сiмметричні відносно осі точки двічі міняються своїми місцями за повний їх оборот круг осі, то кажуть, що такі дві точки мають *двохразову сiмметрію* відносно осі, або просто — *двохразово сiмметричні* відносно осі. З того, що було сказано, ясно, що для того, щоб дві точки були *двохразово сiмметричні* відносно осі треба, щоб вони лежали на простій лінії, яка перетинає ту вісь перпендикулярно, та щоб вони були однаково віддалені від тієї осі (Рис. 58.). Зрозуміло також, що дві окремих групи точок можуть теж бути *двохразово сiмметричні* відносно осі, коли кожна точка однієї групи має собі сiмметричну в другій групі і навпаки. Наприклад точки A , B та C *двохразово сiмметричні* відносно осі MN з точками A_1 , B_1 та C_1 (Рис. 59.).

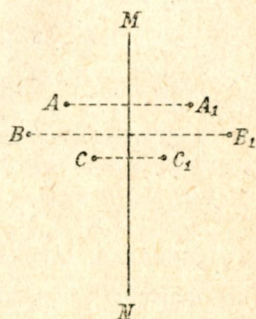


Рис. 59.

Три або чотири точки *трьохразово* або *чотириразово сiмметричні* відносно осі тоді, коли вони лежать в простороні круг тієї осі так, що при повному їх обороті вони три рази або

чотири рази займають місця одна одної, так, що під кінець повного обороту приходять на свої первісні місця. На рисунку 60-му показано три точки трьохразово симметричні та чотири точки симметричні чотириразово відносно осі. Позаяк ці точки уже не лежать всі в площі нашого малюнка, то б то в площі цього листка паперу, то їхні віддалення від своєї осі, які суть однакові, не можна на цьому малюнку показати в їх натуральному вигляді, як те ми могли робити попередю, а доводиться показувати їх так, як вони виглядали б, коли б ми на них дивились з боку. Те саме можна сказати і про кути, утворені лучами, які проведено від кожної точки перпендикулярно до осі: ті кути суть рівні проміж собою (у трьох точок вони по 120° , а у чотирьох по 90°), а малювати їх доводиться не однако-вими, а такими, якими вони здаються, коли дивитись на них збоку (Рис. 60.). Таким способом ви-

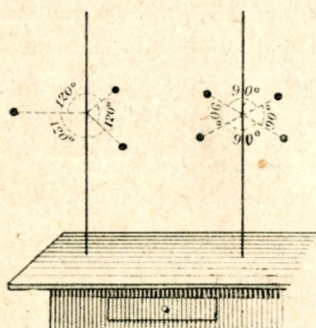


Рис. 60. (Перспективний.)

ображення ми уже користувались не раз в першій частині нашої геометрії, наприклад там, де ми виображали на ма-люнках всякі геометричні тіла. Цей спосіб виображення всяких форм на площі (на папері, на полотні, на дошці) звуть *перспективним* способом виображення. Отже на всяких малюнках ми бачимо виображеними всякі речі, як от улиці

з будинками, людей, обстанову в кімнатах, в перспективному виображенні, або, як коротше ще кажуть, в перспективі.

Поки ми будемо говорити про симетрію відносно осі, нам часто треба буде давати малюнки в перспективі, через те, що тільки при двохразовій симетрії окремі групи точок можуть лежати (а можуть і не лежати) разом з своєю осею симетрії в площі нашого рисунка; при симетрії трьохразовій і взагалі многоразовій окремі групи точок не можуть уже лежати усі разом

з осею сімметрії в площі рисунка. Кожного разу, як ми подаватимемо перспективний рисунок, ми зазначатимемо те під тим рисунком в скобках.

Сімметричними відносно осі двохразово, трьохразово і взагалі многоразово можуть бути не тільки окремі точки та окремі групи точок, але також і окремі геометричні фігури, як наприклад, всякі плоскі і неплоскі, замкнені і незамкнені фігури, всякі тіла: для того ті фігури поперше: мусять бути пристайними, то б то такими, що їх можна наложити одна на одну або вложити одна в одну так, щоб вони одна одну цілком покривали; подруге: вони повинні бути так розміщені в простороні круг їхньої осі сімметрії, щоб при повному обороті всіх їх разом круг тієї осі вони мінялися місцями одна з одною два рази, три рази або взагалі кілька раз.

На рисункові 61-^{му} показано двохразово сімметричні відносно осі такі фігури: два відтинки простої, чотири відтинки простої, що перетинаються подвоє, два трикутники, два півкола,

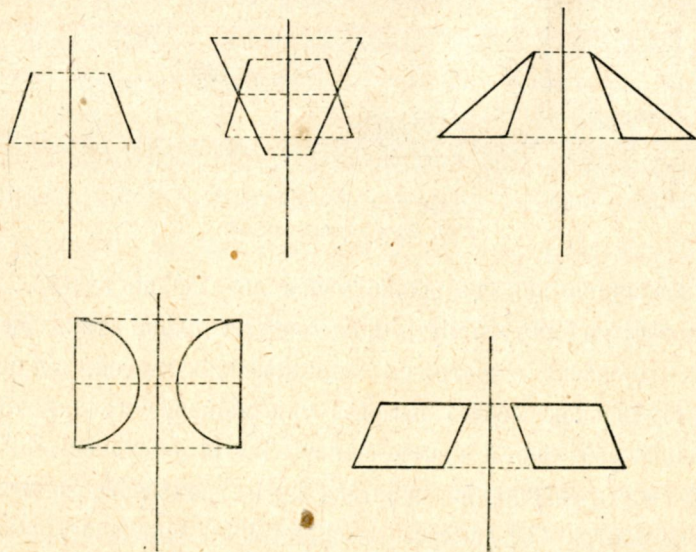


Рис. 61.

та два рівнобіжники. Як бачимо на цьому рисунку, всі прості лінії (на рисунку переривчасті), які сполучають відповідно-сінметричні точки сінметричних фігур, сунть простопадні до осі сінметрії; самі відповідно-сінметричні точки тих фігур однаково віддалені від осі сінметрії (Рис. 61.).

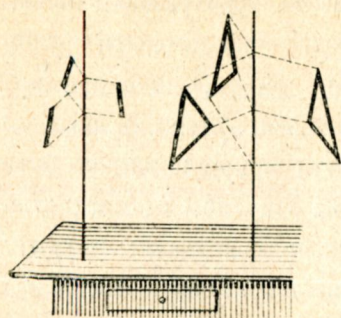


Рис. 62. (Перспективний.)

На рисунку 62-му показано фігури, трьохразово сінметричні відносно осі, а на рисунку 63-му — дві двохразово сінметричні трьох-стінні призми, та три трьохразово сінметричні бруси.

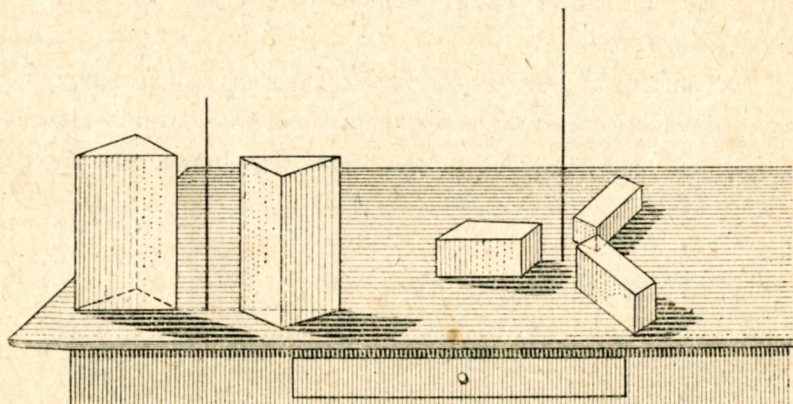


Рис. 63. (Перспективний.)

Зазначимо ще, що кілька точок або кілька плоских геометричних фігур можуть бути положені на площі так, що вони будуть одночасно сінметричні відносно кількох осей, а також — відносно кількох осей і разом з тим відносно точки, то б то мати крім осей ще й центр сінметрії. На рисунку 64-му показано шість відтинків простої, які трьохразово сінметричні відносно центра O і двохразово сінметричні відносно трьох осей: MN , PQ та RS (Рис. 64.). Замість цих шести відтинків

можна легко уявити собі шість яких-небудь пристайних проміж себе плоских геометричних фігур, які, будучи розміщені на площі так само, як ці шість відтинків, матимуть той самий центр симетрії і ті самі три осі.

Після того, що було сказано відносно симетрії фігур, можна зміркувати, що симетрія плоских фігур відносно точки на площі є ніщо інше, як симетрія тих фігур відносно осі, що проходить через ту точку перпендикулярно до площі, в якій лежать ті фігури разом з тією точкою. Через те, що таким чином та вісь не лежить в тій площі, ми й не могли її назначити на ній, а самі ті фігури брали за симетричні відносно центра, який є точкою перетину тієї осі з площею рисунка. Ту вісь легко можна уявити собі наочно, поставивши в центр симетрії наприклад олівець перпендикулярно (сторч) до площі одного з рисунків попереднього параграфа (Рис. від 47. до 57.). Наприклад шість відтинків простої на попередньому рисунку (Рис. 64.) можна брати за симетричні не відносно трьох осей та однієї точки, а за симетричні відносно чотирьох осей, а саме: трьох, які лежать в площі рисунка (MN , PQ та RS) і четвертої, яка вже не лежить в тій площі, а проходить перпендикулярно до неї через точку O , і яку можна наочно собі уявити, поставивши сторч в точку O , наприклад олівець.

Таким чином симетрія на площі відносно центра є доти тільки симетрією відносно точки, доки ми не покидаємо якоїсь однієї площі, в даному разі площі нашого рисунка; коли ж ми, покидаючи ту площу, переходимо до розгляду тих симетричних фігур взагалі в простороні, то та симетрія обертається вже

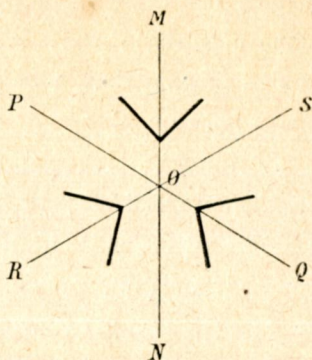


Рис. 64.

в симетрію відносно осі. Але й в простороні існує також симетрія відносно точки, яка вже не є симетрією відносно якої-небудь осі і через те є симетрією зовсім иншого роду. Таку симетрію треба звати *симетрією в простороні відносно точки*, щоб одріжнати її від *симетрії на площі відносно точки*, яка в простороні є, як ми вже сказали, симетрією відносно осі.

Приклад симетрії в простороні відносно точки подано тут на рисункові 65-^{му}. На цьому рисункові (Рис. 65., I.) ми маємо дві піраміди, які так поставлені відносно точки O , що кожна пара відповідних точок обох пірамід, як от точки: A та A_1 , B та B_1 , C та C_1 , лежать на одній простій лінії з точкою O

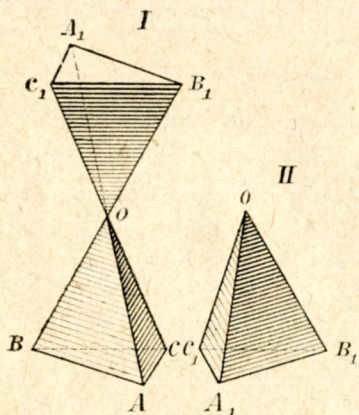


Рис. 65. (Перспективний.)

і однаково від неї віддалені. Очевидно, що так поставленими відносно точки можуть бути тільки такі піраміди, як і взагалі тільки такі фігури, які можуть бути симетричними. Завважимо, що ці дві піраміди, симетричні відносно точки O , не пристайні проміж собою, бо хоч вони й мають по двоє пристайні стіни, рубли і двохстінні кути, та вони у одній пірамиді розміщені в оберненому порядку ніж у другій.

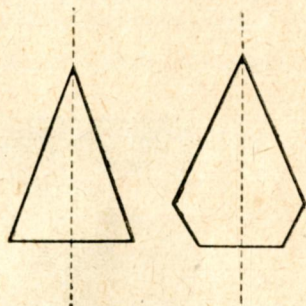
Щоб нам було те ясно, на рисункові (Рис. 65., II.) біля піраміди $OABC$ намальовано піраміду $OA_1B_1C_1$, поставленою поруч. Як видно на цьому рисункові, коли поставити обидві піраміди так, щоб дві відповідних (пристайних) їх стінки OBC та OB_1C_1 були повернуті назад, то б то від нас, то у однієї стінка OAC буде повернута праворуч, а у другої відповідна стінка OA_1C_1 — ліворуч; так само є й з рубами і з двохстінними кутами. Отже такі дві піраміди ніяк не можна вложити одна в одну так, щоб вони при тому цілком покривали одна одну, — значить вони не-

пристайні проміж собою. Взагалі треба сказати, що геометричні фігури, симетричні в простороні відносно точки, переважно непристайні.

На цьому ми й покінчимо з такого роду симетрією та перейдемо до фігур, які самі в собі симетричні відносно осей симетрії.

20. Геометричні фігури самі в собі симетричні відносно осей.

Геометричні фігури можуть самі складатися з таких частин, котрі суть симетричні одна з одною відносно осей. Такі фігури будуть самі в собі симетричні відносно осей. Плоскі геометричні фігури можуть бути одночасно симетричні на площі відносно центра і відносно осей. На рисункові 66-^{му} показано плоскі фігури, симетричні (самі в собі) тільки відносно осей; ми маємо тут (Рис. 66.) рівно-раменний трикутник та п'ятикутник



двохразово симетричні відносно осі, яка показана переривчастою лінією. На рисункові 67-^{му} маємо: ромб, прямокутник, правильний трикутник, та правильний шестикутник, — усі вони симетричні як відносно

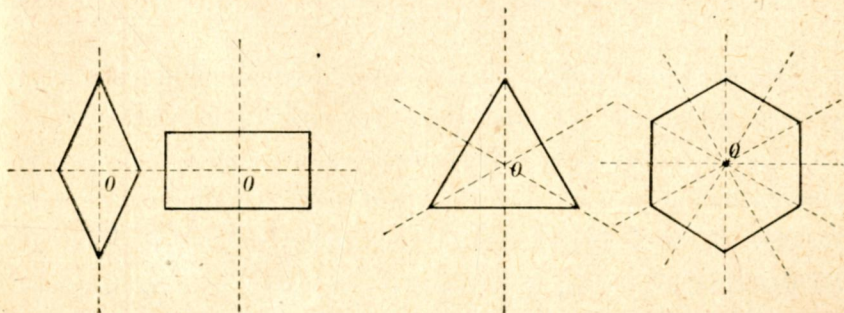


Рис. 67. Плоскі фігури симетричні відносно осей і відносно центра.

осей, що показані переривчастими лініями, так і відносно центра симетрії, яким є точка перетину осей. Між иншим по цьому рисункові (Рис. 67.) легко зміркувати, що всякий правильний багатокутник має стільки осей симетрії, скільки він має боків або кутів; коли правильний багатокутник має парне число боків, то половина тих осей проходять через вершки протилежних кутів, а половина — через середини його боків; коли такий багатокутник має непарне число боків, то кожна вісь проходить через вершок кута, та через середину протилежного бока. Центр симетрії всякого правильного багатокутника лежить в його центрі, там таки лежить і точка перетину всіх осей. У кола кожен поперечник є його осею симетрії.

На рисункові 68-^{му} показані форми сніжинок, які можуть служити прикладом симетричних фігур у природі.

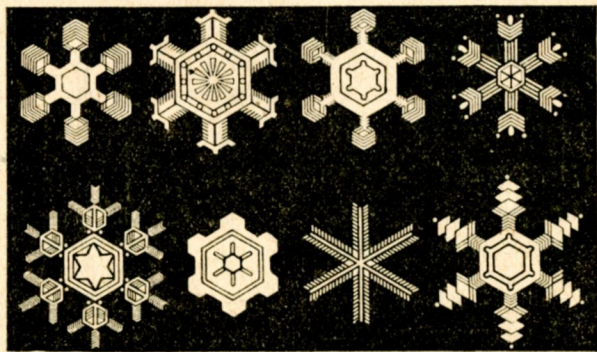


Рис. 68.

На рисункові 69-^{му} показано тіла, симетричні в простороні відносно однієї або кількох осей. Тут маємо: правильну піраміду, чотириразово симетричну відносно осі; брус, двохразово симетричний відносно кожної з трьох осей, що проходять перпендикулярно до двох протилежних боків через точки перетину їх діагоналів; самі ті осі перетинаються в одній точці, однаково віддаленій від кожної з двох протилежних стін. На тому ж ри-

сункові (Рис. 69.) маємо правильний шостистінник, шостиразово симетричний відносно осі, що проходить через центри його основ перпендикулярно до них. Крім того він ще двохраново симетричний відносно шости осей, з котрих кожна перпендикулярно перетинає

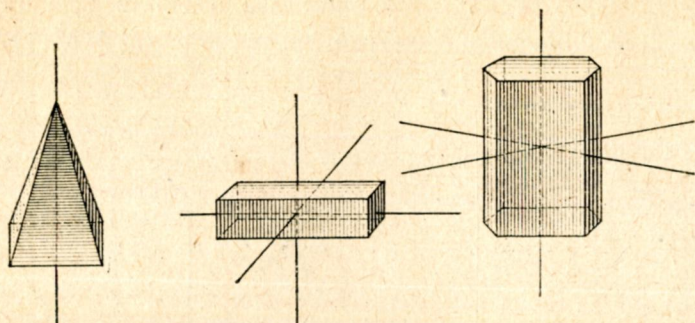


Рис. 69. (Перспективний.) Тіла симетричні відносно осей.

першу вісь в точці, однаково віддаленій від обох основ; три з тих осей проходять через протилежні руби, а три — через середини протилежних стін. (На рисункові показано тільки дві з цих шости осей).

21. Симетрія в простороні відносно площі.

Дві точки A і B (Рис. 70., I.), які лежать в простороні відносно якої-небудь площі MN так, що проста лінія, яка їх сполучає, є перпендикулярною до площі, і які крім того однаково віддалені від тієї площі, суть дві точки, симетричні в простороні відносно тієї площі MN (Рис. 70., I.).

Два відтинки простої AB і A_1B_1 (Рис. 70., II.), у яких відповідні кінці

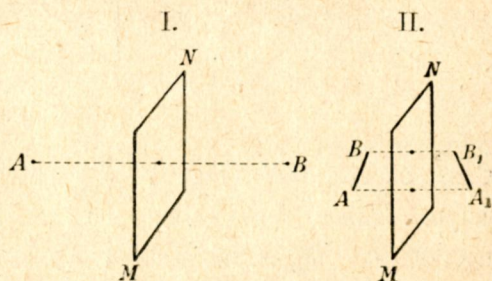


Рис. 70. (Перспективний.)

сімметричні відносно площі MN , самі єуть сімметричні відносно тієї площі. Взагалі дві геометричні фігури сімметричні відносно площі, коли усі їх точки відповідно сімметричні відносно тієї площі.

На рисункові 71-му показано: два квадрати, два бруси та дві трьохстінні піраміди сімметричні відносно площі MN (Рис. 71.).

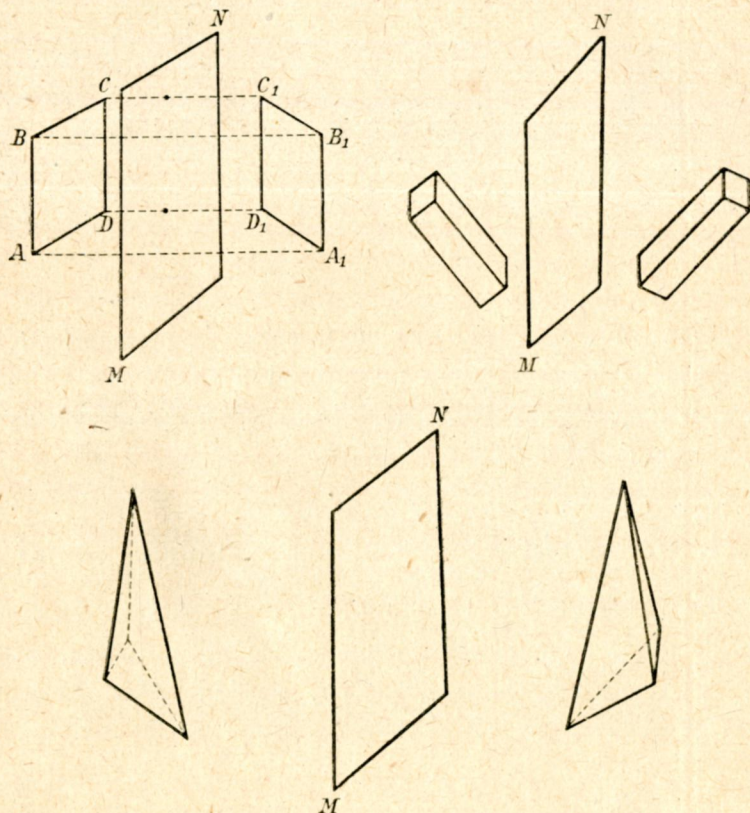


Рис. 71. (Перспективний.)

Сама площа MN (Рис. 71.) зветься *площею сімметрії* тих фігур. Такого рода сімметрію ми можемо бачити дуже легко, поставивши перед люстром (дзеркалом) яке-небудь тіло: само тіло та його відбиток в люстрі єуть дві сімметричні відносно

площі фігури. Площею їх сімметрії буде площа люстра. Прикладом такого роду сімметрії в природі можуть служити наші руки та ноги: ми це легко зрозуміємо, поставивши наші дві руки поруч і повернувши їх долонями одна до одної, а пальцями в один бік; площу їх сімметрії можна собі уявити між долонями однакою віддалену від обох рук. Можна ще також покласти для цього руки долонями на стіл, повернувши їх пальцями або одну до одної або обидві від себе; тоді площу їх сімметрії можна уявити між ними простопадно до площі стола.

З усього сказаного можна догадатись, що з фігур сімметричних відносно площі тільки плоскі фігури мусять бути при тому пристайними, щож до фігур неплоских, як наприклад тіла, то вони при тому взагалі не пристайні. Наприклад рукавички з лівої та з правої руки можна поставити сімметрично відносно площі, а вони між собою не пристайні, бо їх не можна вложити одна в одну так, щоб вони цілком покривалися, — хіба що вивернути одну з них, але тоді вони стануть або обидві на ліву, або обидві на праву руку і вже не будуть сімметричні відносно площі. Теж саме можна сказати про два черевики, з лівої та з правої ноги (як що вони не цілком однакові, як то буває пінколи).

Кілька геометричних фігур можуть бути одночасно сімметричні відносно кількох площ, які при тому протягуються в просторі так, що перетинаються проміж собою по одній простій лінії. Кілька фігур можуть бути також сімметричні одночасно відносно площ і відносно осей.

22. Геометричні фігури, самі в собі сімметричні відносно площ.

Коли геометрична фігура складається з таких окремих частей, які суть сімметричні відносно площ, то така фігура є сама

в собі симетрична відносно тих площ. Прикладом таких геометричних фігур можуть служити правильні піраміди та призми, а також і деякі інші тіла. На рисункові 72-му показано чотиристоронню піраміду з основою, форму якої показано з боку в настоящому її вигляді; площа її симетрії проходить по лініям, які показано переривчасто; на тому таки рисункові (Рис. 72.) маємо

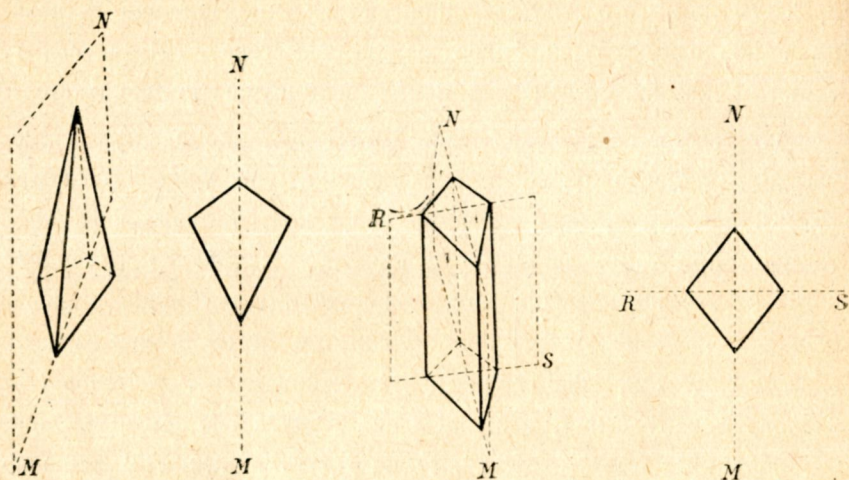


Рис. 72. (Перспективний.)

ще чотиристоронню призму з основами в формі ромба. Така призма має дві площі симетрії, що проходять через протилежні рубли. Площею симетрії буде також ще й та, яку можна провести перпендикулярно до рубів так, щоб вони поділяли ту призму на дві рівні частини. З боку на тому рисункові (Рис. 72.) показано основу призми в натуральному вигляді, а також і ті лінії (переривчасто), по яким ті дві площі симетрії перетинають основи.

Легко зміркувати, що кожна з правильних пірамід та призм має стільки площ симетрії, скільки у неї стін або рубів. Ті площі проходять так, що перетинають їх основи по осям їх симетрії (див. рис. 67.), а самі перетинаються по осі тих тіл.

Крім цих площ правильні призми мають ще одну площу сімметрії, а саме ту, яка перпендикулярна їх осі та поділяє ту вісь пополам.

Правильні такі піраміди та призми можуть служити також прикладом таких геометричних тіл, які одночасно сімметричні і відносно осей і відносно площ, які значить мають сімметрію двох родів.

Задачі.

Якого роду і скількиразову сімметрію мають оттакі тіла: Брус? Куб? Правильні трьохстінні призма та піраміда? Правильні шестистінні призма та піраміда?

Які речі з тих, що ви бачите навколо себе, суть сімметричні в собі, а як саме вони сімметричні?

Якого роду і скількиразову сімметрію мають оттакі квітки:
1) квітки редьки? 2) квітка мальви (рожі)? 3) квітка яблуні або вишні?
4) квітка гороху? 5) квітка красолі?

Якого роду сімметрію має голова людини?

Чи має якого-небудь роду сімметрію будинок школи, до якої ви ходите та будинок, в якому ви живете? Які окремі частини тих будинків сімметричні самі в собі та як саме вони сімметричні?

V.

Тіла оборотові.

23. Циліндр та конус як тіла оборотові.

Звернімось ще раз до круглих циліндра та конуса, які ми розглядали в 1-^{ій} частині (дивись ч. I., вид. 1-^е, стор. 96. та далі). Легко зрозуміти, що кожне з цих тіл є абсолютно сімметричне відносно своєї осі. Справді, на яку б частину кола ми не обернули кожне з цих тіл круг його осі, воно не перестане займати ту саму частину простороні, яку воно займало передтим. Відповідно тому кожне з цих тіл є сімметричне відносно всякої площі, яка

проходить через його вісь. Крім круглих циліндра та конуса можна бачити часто також тіла і іншої геометричної форми, яка теж має таку саму відзнаку, то б то абсолютно симетрична відносно осі. Прикладом таких тіл можуть бути: звичайний горщик або

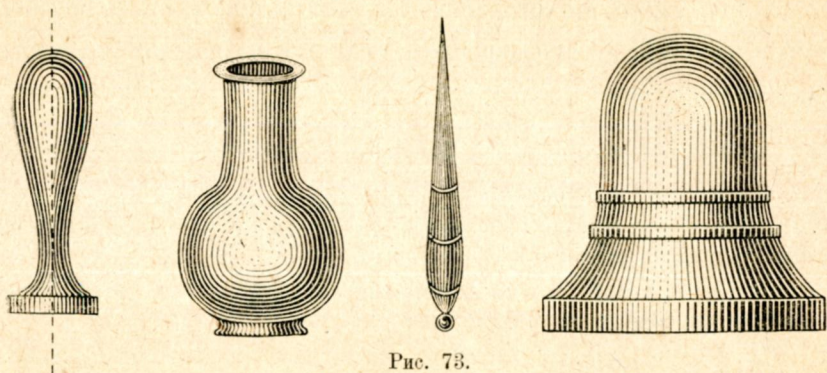


Рис. 73.

гличик, коли не брати на увагу у них вушко; вази для квіток, та багато інших. На малюнку 73-му показано кілька прикладів таких тіл.

Тіла, що мають форму абсолютно симетричну відносно осі, звуться в геометрії *тілами оборотними*. Щоб зрозуміти, чому саме вони так звуться, зробимо собі оттаке нескладне приладдя.

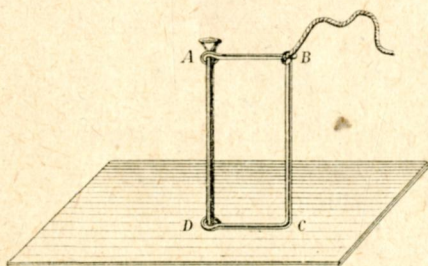


Рис. 74.

Візьмімо шматок тоненького та рівенького дроту та зігнімо його так, щоб у нас з того вийшли три боки прямокутника $ABCD$ (Рис. 74.). На кінцях A та D двох коротших боків зробимо дві петельки, а крізь них простроїмо цвяшок (гвіздочок); поставивши той цвяшок

простопадно (нормально) до дерев'яної досточки, заб'ємо його в ту досточку так, щоб голівка його не давала дротикові пересуватися по ній, але щоб дротик на петельках міг обертатися

круг цвяшка; біля кута B прив'язімо до дротика ниточку. Тепер обкладімо це приладдя мокрою глиною та, взявши ниточку за кінець, станемо обертати дротик круг цвяшка; коли, обернувши його кілька раз, ми відкинемо геть відкраяну дротиком глину, то побачимо, що та глина, яка залишилася, має форму круглого циліндра. Справді частина BC дротика, обертаючись круг цвяшка, обкрає глину по бічній поверхні круглого циліндра, а частини AB та DC обкрають її згори та знизу по колам. Позаяк дротик разом з цвяшком складають прямокутник $ABCD$ (Рис. 74.), то можна сказати, що *круглий циліндр є таке геометричне тіло, яке можна утворити, обернувши на ціле коло прямокутник круг одного з його боків так, щоб ті три його боки, що обертаються, залишали по собі слід.*

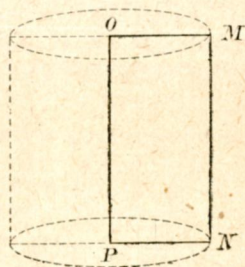


Рис. 75.

На рисунку 75-му показано переривчастими лініями (в перспективі) слід вершків прямокутника $OMNP$ (Рис. 75.), який обернувся на ціле коло; два його боки OM та PN утворили два кола, а бік MN — циліндричну поверхню обкраяну згори та знизу тими колами; значить в цілому утворився круглий циліндр; бік прямокутника OP , круг якого обернувся той прямокутник, є вісь циліндра.

Тепер не трудно зрозуміти, що коли обернути на ціле коло прямокутний трикутник ABC (Рис. 76.) круг однієї з його прямих (катета), наприклад круг прямої AB , то слід протипрямої (гіпотенузи) BC утворить поверхню круглого конуса, а слід другої прямої AC утворить круг, а в цілому матимемо круглий конус; пряма AB є його вісь.

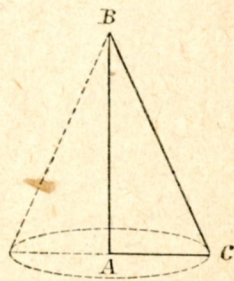


Рис. 76.

Отже після всього, що було сказано, легко зрозуміти, чому круглі циліндр та конус звуться тілами оборотовими. Так само і ті тіла, які показано на малюнку 73-му, як і всякі інші тіла абсолютно симетричні відносно осі, суть теж тіла оборотові. На рисунку 77-му показано ті фігури, від обертання яких походять тіла, показані на малюнку 73-му.

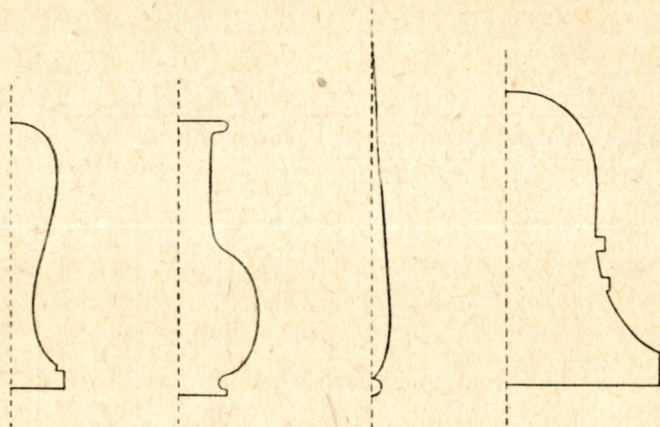


Рис. 77.

Вісь, біля якої ті фігури обертаються, і є вісь симетрії тих тіл, що таким чином утворюються.

Завважимо тут, що той циліндр з глини, про який у нас була мова (див. стор. 71.), можна було зробити, обертаючи не дротик круг цвяшка, а саму глину разом з досточкою та цвяшком, а самий дротик залишаючи на одному місці. Так звичайно роблять, коли виробляють з якого-небудь матеріалу якусь річ, що повинна мати форму тіла оборотового. Так наприклад роблять гончарі, коли виробляють на гончарному станку глечики, горщики, миски та інше; так роблять, коли виточують на токарному станку з дерева або з заліза різні речі, як от ніжки до столів або до стільців, вали до машин та таке інше.

Тепер перейдімо до розгляду де-яких геометричних тіл оборотових.

24. Стятий конус.

Коли прямокутний трикутник ABC (Рис. 78.) обернути на ціле коло круг його прямої AB , то, як ми уже знаємо, його протипряма BC та друга пряма AC утворять круглий конус BCC_1 . Проведімо тепер від якої-небудь

точки D на прямій AB нашого трикутника просту DE (Рис. 78.) рівнобіжно з прямою AC , значить простопадно до прямої AB . Цією простою ми відкраємо від трикутника трапез $ADEC$, який буде теж прямокутний, бо його горішня основа DE та нижня AC простопадні до бока AD . Уявімо тепер собі, що проста DE теж обернулася разом з трикутником ABC круг його прямої AB . В такім разі

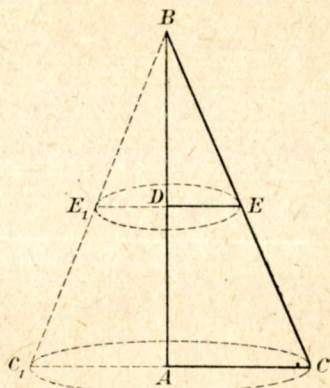


Рис. 78.

слід цієї простої утворить круг EE_1 , якого площа буде рівнобіжною з площею нижнього круга CC_1 . Цей круг EE_1 ніби відтинає від конуса BCC_1 його верхню частину BEE_1 . Коли б

уявити собі, що ми відкинули цю відтатку частину, то лишилось би від конуса тіло ECC_1E_1 , яке утворилося обертотом прямокутного трапеза $DECA$ круг його бока AD . Таке тіло оборотове зветься: *стятий круглий конус*. Таке назвище походить від того, що його можна утворити, зігнувши у круглого

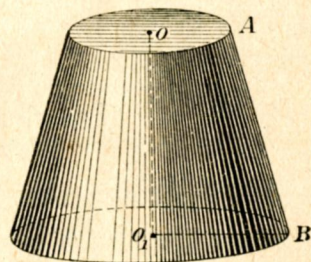


Рис. 79.

конуса верхню його частину площею рівнобіжною з його основою. На рисункові 79-му показано модель цього геометричного тіла. Лінія OO_1 (Рис. 79.), що сполучає центри верхньої та нижньої основи і є простопадною до них обох, є вишина стятого конуса, а лінія AB — його коса вишина.

Діаграма стятого конуса. Щоб зробити діаграму моделі стятого конуса, возьмімо шматок картону квадратної форми в 42 сантиметрів завдовжки та завширшки. Відступивши на 1 сантиметр від горішнього краю картону проведемо просту AB (Рис. 80.). З середини цієї простої, то б то з точки O опишемо два концентричні півкола, одне радіусом в 4, а друге радіусом в 20 сантиметрів; з точки O_1 , що лежить на 2 сантиметри нижче точки O , опишемо коло радіусом в 2 сантиметри, а з точки O_2 , що лежить на 30 сантиметрів нижче тієї самої

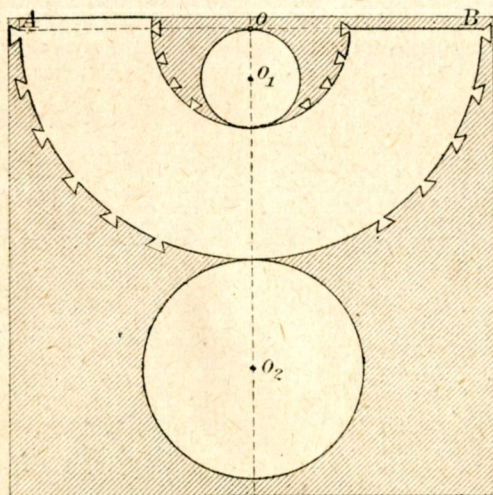


Рис. 80. Діаграма стятого конуса.
(В зменшеному вигляді.)

точки — коло радіусом в 10 сантиметрів. Пасмо, що лежить між двома концентричними півколами, уявляє з себе бічну поверхню стятого конуса, а два кола його горішню та спідню основи. Позаяк довжина кола горішньої основи мусить точно відповідати довжині горішньої лінії бічної поверхні, яка у нас є півколо, то радіус горішньої основи треба

брати у двічі менше ніж радіус того півкола; теж саме треба сказати і про нижню основу та про нижній край бічної поверхні. Коли б ту поверхню ми обмежили не півколами, а, наприклад, чвертьколами, то радіуси тих основ треба б було брати в четверо меншими ніж радіуси горішньої та нижньої дуг, що обмежують згори та знизу бічну поверхню.

Поверхня стятого конуса. Тепер розміркуймо, як можна обміряти та обрахувати поле бічної поверхні стятого конуса.

Для того ту частину діаграмми, яка уявляє з себе ту поверхню, поділимо лініями, що йдуть в напрямку радіусів півкол (Рис. 81.), на кілька рівних частин, наприклад на 8. Коли обрахуємо поле однієї з цих частин

та візьмемо його вісім раз, то й дістанемо поле цілої бічної поверхні. Завважмо, що кожну з тих частин, наприклад частину $ACFE$ (Рис. 81.), можемо вважати бли-

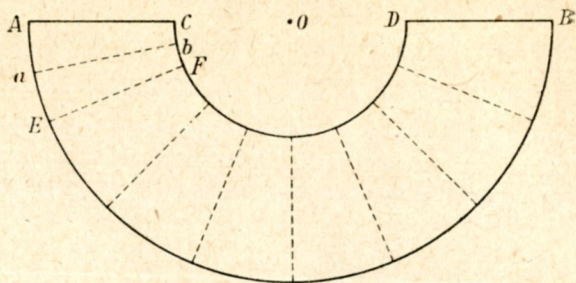


Рис. 81.

зькою по формі до трапеза; коли провести по середині цієї частини лінію ab в напрямку радіуса обох півкол, то цю лінію можна взяти за вишину того трапеза; за верхню та нижню основи трапеза можна взяти дуги CF та AE . Тоді поле частини $ACFE$ дістанемо, помноживши півсумму верхньої та нижньої основ на вишину; це можемо написати так: $\frac{AE + CF}{2} \times ab$ (див. ч. I., вид. 1-^а, стор. 48.). Помноживши на 8 число, яке таким чином дістанемо, ми й матимем поле бічної поверхні стятого конуса. Та замість того можемо помножити на вісім зарані сумму дуг AE та CF ; а для того можна помножити раніш, ніж їх сполучати в сумму, кожну окремо. Але від помноження AE на вісім матимемо цілий обвід більшого півкола, а від помноження CF — обвід меншого, або, що є те ж саме, обводи нижньої та горішньої основи нашого конуса.

З усього сказаного виходить, що: для обрахунку поля бічної поверхні стятого конуса треба число лінійних мір в півсуммі обводів його горішньої та нижньої основи помножити на число таких самих лінійних мір в його косій вишині, бо лінія ab є не що інше, як коса вишина стятого конуса.

Коли назвемо довщину кола нижньої основи конуса в якихсь лінійних мірах літерою C , число таких самих мір в довщині кола горішньої основи літерою c , число мір в його косій вишині літерою l , а число відповідних квадратних мір в полі бічної поверхні стятого конуса літерою S , то можемо написати:

$$S = \frac{C+c}{2} \times l.$$

Коли назвати радіус нижньої основи стятого конуса R , а радіус горішньої його основи — r , то $C = 2 \times \pi \times R$ і $c = 2 \times \pi \times r$. А тому:

$$S = \frac{2 \times \pi \times R + 2 \times \pi \times r}{2} \times l = \left(\frac{2 \times \pi \times R}{2} + \frac{2 \times \pi \times r}{2} \right) \times l = (\pi \times R + \pi \times r) \times l = (R + r) \times \pi \times l \text{ (або: } \pi l (R + r)).$$

Обрахуємо для прикладу бічну поверхню стятого конуса, про діаграму якого у нас була мова (див. стор. 74.). Отже: радіус горішньої основи має 2 сантиметри, значить її поперечник (діаметр) має 4 сантиметри, а довщина її кола має: $4 \text{ сант.} \times 3\frac{1}{7} = 4 \text{ сант.} \times \frac{22}{7} = \frac{88}{7} \text{ сант.} = 12\frac{4}{7} \text{ сантиметра}$. Радіус нижньої основи — 10 сантиметр., її поперечник — 20 сант., а довщина її кола — $20 \text{ сант.} \times 3\frac{1}{7} = 20 \text{ сант.} \times \frac{22}{7} = \frac{440}{7} \text{ сант.} = 62\frac{6}{7} \text{ сант.}$ Сума кол нижньої та горішньої основ буде: $(12\frac{4}{7} \text{ сант.} + 62\frac{6}{7} \text{ сант.}) : 2 = 75\frac{2}{7} \text{ сант.} : 2 = \frac{528}{7} \text{ сант.} : 2 = \frac{528}{7} \text{ сант.} = 37\frac{5}{7} \text{ сант.}$ Тепер тільки треба помножити це число на число сантиметрів в косій вишині стятого конуса, яка у нас має 16 сантиметрів. Значить, бічна поверхня нашого стятого конуса має: $37\frac{5}{7} \times 16 = \frac{264}{7} \times 16 = 603\frac{3}{7} \text{ квадр. сант.}$ Коли б нам треба було обрахувати повну поверхню стятого конуса, то до цього числа треба б було додати числа квадратних сантиметрів в його горішній та нижній основах.

Объем стятого конуса. Щоб відшукати спосіб обрахунку об'єму стятого конуса, вернімось до рисунка 78^{го}. Там ми побачимо, що об'єм стятого конуса $ECC'E$, одержимо, коли від

об'єма повного конуса BCC_1 , віднімемо об'єм тієї його частини, яку круг E_1E від нього відтинає і яка сама є ніщо інше, як теж повний конус. Позаяк ми вже знаємо, як обрахувати об'єм повного конуса (див. I. част., вид. 1-^е, стор. 115.), то легко можемо обрахувати і об'єм стятого. Для того нам треба тільки обміряти радіуси нижньої та горішньої його основи, а також знайти ту точку, яка є вершком того повного конуса, частину якого наш стятий з себе уявляє. Знайшовши ту точку, легко можемо виміряти вишину того повного конуса, як і вишину стятої його частини, що потрібні нам для обрахунку. Той вершок повного конуса можемо знайти так: в двох місцях бічної поверхні стятого конуса прикладаємо до неї рубом лінійки так, щоб вони щільно до тієї поверхні притупилися (Рис. 82.). Точка A , в якій руби двох лінійок перетнуться і буде вершок повного конуса.

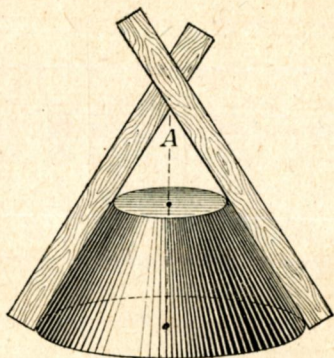


Рис. 82.

25. Куля.

Уявімо собі, що півколо (Рис. 83.) обернулося на один повний оборот круг свого поперечника AB ; в такому разі кожна точка того півкола — коли б вона лишала за собою в просторі слід — описала б ціле коло, як то показано на рисунку (Рис. 83.) відносно точок C та D (в перспективі) переривчастими лініями; само ж півколо своїм слідом утворить замкнену криву поверхню такої самої форми, яку має поверхня м'яча або поверхня тих пухирів, що їх роблять діти з мильної води. Така крива поверхня зветься: *сферична поверхня* або просто *сфера*. Само тіло, обмежене такою поверхнею, зветься: *куля*. Зробити

діаграму кулі з картону ми не можемо тому, що поверхню її вже не можна розплатати, як то можна було зробити з поверхнею кожного з тих тіл, які ми досі розглядали, в тім числі й з кривими поверхнями циліндра та конуса. Різниця між тими двома поверхнями і сферичною поверхнею полягає в тім, що в тих двох можна було в кожному місці знайти такий напрямок, в яким проста лінія (руб лінійки) може бути щільно притулена до поверхні, а у сферичної поверхні вже нема такого напрямку, і як би ми просту лінію не притуляли до неї,

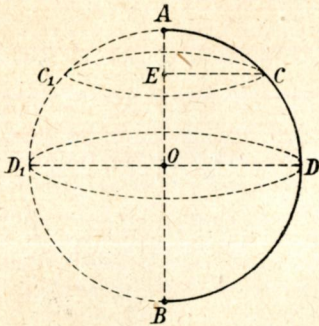


Рис. 83. (Перспективний.)

вона буде торкатися до поверхні тільки однією своєю точкою. Тому зробити модель кулі з картону не можливо, — її можна тільки виточити з якогось матеріалу, наприклад з дерева, з каменя або чогось иншого. На малюнку 84-му показано кулю (в перспективі).

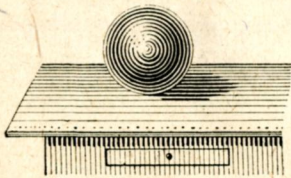


Рис. 84. (Перспективний.)

Звернімось ще раз до рисунка 83-го. Легко зрозуміти, що коли півколо обертається круг поперечника AB (Рис. 83.), як круг осі, то кожна точка того півкола остається увесь час однакою віддаленою від центра півкола O , а саме, — на довжину його луча (радіуса); тому виходить, що кожна точка поверхні кулі віддалена від тієї самої точки так само однакою, на довжину луча півкола; тому та точка O зветься *центром* сферичної поверхні і кулі, а проста лінія, що сполучає якусь точку поверхні кулі з центром, — *радіусом* або *лучем* сфери і кулі; два лучі, випростані в одну просту лінію, творять *поперечник* або *діаметр* сфери і кулі; або ще можна сказати: поперечник або діаметр сфери і кулі є проста лінія, що сполучає дві точки сфери і проходить через центр її. Очевидячки, що і луч і по-

перечник кулі такі самі завдовжки, як і луч та поперечник того півкола, яке своїм оборотом утворило сферичну поверхню. Значить на рисункові 83-^{му} OA та OD суть лучі сфери та кулі, а AB та D,D поперечники. Отже можна сказати, що сферична поверхня або сфера є така крива поверхня, у якої кожна її точка однаково віддалена від однієї точки, що є її центром; куля є тіло обмежене сферичною поверхнею.

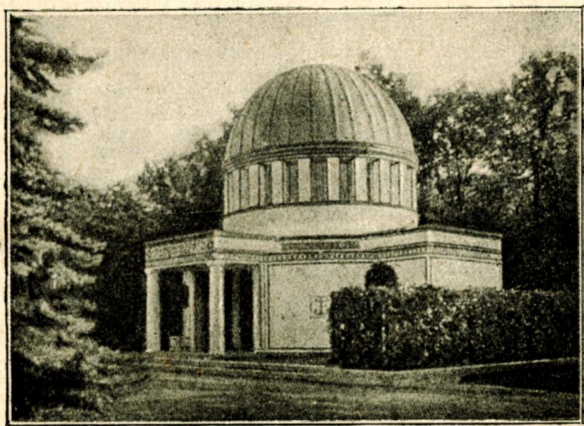
Легко зрозуміти, що куля є абсолютно симетрична відносно всякого її поперечника, яких можна в неї проводити без числа. Крім того всяка частина кулі має собі симетричну відносно центра її, а площа, яка проходить через центр кулі (наприклад площа коуга D,D на рисунку 83-^{му}), поділяє її на дві однакові і симетричні відносно тієї площі частини (півкулі); таких площ може бути, як і поперечників, без числа, тому можна сказати, що *куля є взагалі абсолютно симетричне тіло*.

Коли півколо обертається круг свого поперечника, як круг осі (Рис. 83.), то, як ми уже сказали, кожна точка того півкола, крім двох крайніх точок A та B , які остаються на місці, описує коло. Радіус того кола найдемо, коли опустимо з тієї точки простопад на вісь обертання. Наприклад радіус кола, яке описує точка C (Рис. 83.) є EC ($\perp AB$), а радіус кола, яке описує точка D , є OD ($\perp AB$). Як бачимо, ті радіуси неоднакові завдовжки, — найдовший той, що відповідає точці D , яка поділяє півколо на дві рівні частини, то б то чвертькола; він є рівний радіусу самого півкола. Відповідно тому і ті кола, які описують різні точки півкола, неоднакові завбільшки: найбільше буде те, яке описує точка D ; його звуть: *велике* або *голівне коло сфери*, всі ж інші кола, — малі.

Коли відтяти частину кулі так, щоб переріз був плоский, то той переріз буде уявляти з себе круг, в якому б напрямку і в яким би місці ми не відтинали. Коли площа перерізу не проходить через центр кулі, то той круг буде малий круг, а його

обвід, що йде по поверхні кулі, буде мале коло (наприклад круг C, C на рис. 83.); коли ж кулю перетнути площею так, щоб вона проходила через центр, то круг перерізу, як і його коло, будуть великі або голівні (наприклад круг D, D на рис. 83.). Голівний або великий круг поділяє кулю на дві півкулі.

Ми досить часто можемо бачити форми, які уявляють з себе коли не цілу кулю, то якусь її частину; часом бані на церквах, або на де-яких великих будинках мають форму півкулі. На малюнку 85-му показано будинок Педагогічного Музею у Києві, в якому відбувалися засідання Української Центральної Ради 1917-го та 1918-го років. По середині будинку бачимо баню,



Мал. 85. Будинок Педагогічного Музею у Києві.

яка уявляє з себе частину кулі. В природі теж часто можна бачити форми близькі до кулі, як от наприклад де-які ягоди, або насіння. Сама наша земля, як і інші планети, має форму дуже близьку до кулі, тому часом і звуть її земною кулею.

Земля, як знов таки і інші небесні тіла, увесь час обертається неначе круг осі, яка проходить через її центр, то б то по одному з її діаметрів, який так і звуть *земною віссю*. Обидва кінці цієї осі звуть *бігунами* або *полюсами*, — один з них є

північний, а другий *південний*. Голівне коло, яке можна уявити на поверхні землі на однаковому віддаленні від обох бігунів, звуть *екватором*; ним земна поверхня поділяється на дві півсфери або *півкулі* — *північну* з північним бігуном та *південну* з південним бігуном. Ціла Європа, а значить і ціла наша Україна, лежить в північній півкулі землі. Кожне з малих кол, які можна уявити на поверхні землі рівнобіжними з екватором, зветься *рівнобіжним* або *паралельним колом* або просто *параллеллю*. Кожне з великих або голівних кол, які можна собі уявити ніби накресленими на земній поверхні так, що вони проходять через обидва бігуни, зветься *меридіаном*.

Земна вісь є трохи коротша від усякого иншого поперечника землі, та різниця та дуже невелика, порівнюючи до її розмірів, — тому саме форму її і вважають за кулю з радіусом приблизно в 6000 кілометрів.

Объем та поверхня кулі. Коли б ми взяли вдавлену півкулю (наприклад одну з двох рівних частин м'яча, перерізаного пополам) і поруч з нею зроблену з картону модель* круглого циліндра, котрого радіус основи та вишина були б рівні радіусу півкулі, то, обмірявши їх об'єми за допомогою води або піску,

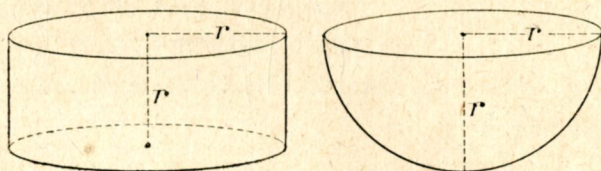


Рис. 86. (Перспективний.)

знайшли б, що об'єм півкулі чинить точно дві третини ($\frac{2}{3}$) об'єму такого циліндра. На рисункові 86-^{му} показано такі півкулі та циліндр.

Позаяк поле основи циліндра є: $\pi \times r^2$ ($\pi = 3\frac{1}{7}$ приблизно), а його вишина є: r , то об'єм циліндра буде: $\pi \times r^2 \times r = \pi \times r^3$.

А значить об'єм півкулі буде: $\frac{2}{3} (\pi \times r^3)$; коли ж намножимо це на 2, то дістанемо об'єм цілої кулі, який значить буде: $\frac{2}{3} (\pi \times r^3) \times 2 = \frac{4}{3} (\pi \times r^3)$ (або: $\frac{4}{3} \pi r^3$, де $\pi = 3\frac{1}{7}$, приблизно). Наприклад, коли радіус кулі є 10 сантиметрів, то її об'єм буде: $\frac{4}{3} (\frac{22}{7} \times 10^3) = \frac{4}{3} (\frac{22}{7} \times 10 \times 10 \times 10) = \frac{4}{3} (\frac{22}{7} \times 1000) = \frac{4}{3} (\frac{22000}{7}) = \frac{22000}{7} \times \frac{4}{3} = \frac{22000 \times 4}{7 \times 3} = \frac{88000}{21}$ куб. сант. $= 419\frac{10}{21}$ куб. сант.; або позаяк $\frac{10}{21}$ є дроб дуже близький до $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2} = \frac{10}{20}$), то можна взяти той об'єм рівним $419\frac{1}{2}$ кубних сантиметрів.

Поверхня кулі. На поверхні кулі або на сферичній поверхні не можна назначити простої лінії, бо як уже було сказано, ця поверхня є такого роду крива поверхня, до якої проста лінія

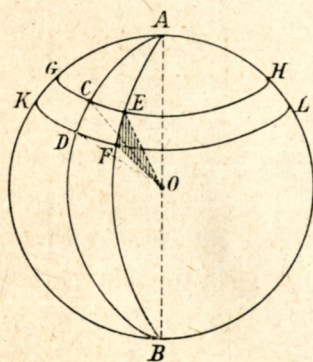


Рис. 87. (Перспективний.)

не може бути притулена усіма своїми точками ні в якому напрямку. Та на сферичній поверхні можна назначати різні криві лінії, між иншим кола. Всяке коло, назначене на сферичній поверхні, буде великим або голівним колом тоді, коли воно проходить через дві крайні точки якогось поперечника тієї сфери, наприклад через точку А та В (Рис. 87.), бо тоді те коло має такий самий поперечник — а значить

і радіус, — як і сама сфера. Всяке коло назначене инакше буде малим колом.

Отже нехай на поверхні кулі з центром в точці О (Рис. 87.) назначено два великих півкола $ACDB$ та $AEFB$ і два малих $GCEH$ та $KDFL$. Перетинаючись поміж собою ті півкола утворюють замкнену з чотирьох боків фігуру $CEFD$, поле якої уявляє з себе частину поля поверхні кулі. Уявімо тепер, що чотири вершки цієї фігури сполучено простими лініями: CO , EO , FO та DO з центром кулі O , а через ці прості проведено

чотири площі: COE , EOF , FOD та DOC (одну з них замальовано на рисункові скісними лініями). Тоді тіло, обмежене цими чотирьма стінами, що сходяться в точці O , та поверхнею фігури $CEFD$, яку можна взяти приблизно за площу, можна вважати за чотиристоронню піраміду. В такому разі об'єм її буде рівний добуткові від множення поля фігури $CEFD$ на третину її вишини, то-б то радіуса кулі. (Дивись част. I., вид. 1-е, стор. 95.)

Коли назвемо об'єм цього тіла v , поле фігури $CEFD$ — S , а радіус кулі R , то матимемо $v = (S \times R) : 3 = \frac{S \times R}{3} = S \times \frac{R}{3}$.

Назначаючи на поверхні кулі великі та малі кола, ми можемо цілу ту поверхню розбити на частини подібні до частини $CEFD$, а цілий об'єм кулі на частини подібні до тіла $OCEFD$ (Рис. 87.). В такому разі цілий об'єм кулі складатиметься з об'ємів усіх таких тіл, то-б то буде рівний суммі об'ємів усіх тих тіл. Значить, коли назвемо об'єм кулі V , а об'єми тих тіл: v , v_1 , v_2 , v_3 і так далі, то матимемо: $V = v + v_1 + v_2 + v_3 +$ і так далі.

Коли назвемо поля основ тих тіл через S , S_1 , S_2 , S_3 і так далі, а радіус кулі через R , то матимемо

$$V = \left(S \times \frac{R}{3} \right) + \left(S_1 \times \frac{R}{3} \right) + \left(S_2 \times \frac{R}{3} \right) + \text{і так далі.}$$

Замість того, щоб множити кожне S на $\frac{R}{3}$ і потім ті добутки сполучати в одну сумму, можна спочатку сполучити в одну сумму усі S і потім помножити ту сумму на $\frac{R}{3}$; в такому разі матимемо:

$$V = (S + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \text{і так далі}) \times \frac{R}{3}.$$

Те, що стоїть в скобках, є сума піль усіх тих частин, на які ми поділили великими та малими колами цілу поверхню кулі, значить є ніщо інше, як саме поле тієї поверхні. Коли назвати його літерою P , то маємо: $V = P \times \frac{R}{3}$, або: $V = (P \times R) : 3$.

То-б то: щоб знайти число якихсь кубних мір об'єму кулі,

треба число відповідних квадраткових мір її поверхні на-
множити на число відповідних лінійних мір її радіуса
і добуток поділити на 3.

Навпаки, щоб знайти число якихсь квадраткових мір по-
верхні кулі, треба число відповідних кубних мір її об'єму по-
ділити на число відповідних лінійних мір її радіуса і те число,
яке дістанемо, намножити на 3; або число кубних мір об'єму поді-
лити на третину числа лінійних мір радіуса, то-б то: $P = V : \frac{R}{3}$

Раніш ми знайшли (див. стор. 82.), що $V = \frac{4}{3} (\pi \times R^3)$, значить

$$P = \left[\frac{4}{3} (\pi \times R^3) \right] : \frac{R}{3} = \frac{4 \times \pi \times R \times R \times R \times 3}{3 \times R} =$$

$$= 4 \times \pi \times R \times R = 4 \times \pi \times R^2.$$

Отже з цього бачимо, що для того, щоб знайти число
якихсь квадраткових мір поверхні кулі, треба число відповідних
лінійних мір її радіуса намножити на само себе, потім
добуток намножити ще на π (то-б то на $3\frac{1}{2}$), а число,
що таким чином дістанемо, взяти 4 рази.

Звертаючись ще до формули: $P = 4 \times \pi \times R^2$, згадаймо,
що $\pi \times R^2$ (або πR^2) є ніщо інше, як поле великого круга
кулі. Значить, можемо ще сказати так: *поле поверхні кулі є*
чотири рази взате поле великого її круга; або: поле поверхні
кулі є рівне полю великого її круга намноженому на 4.

Обрахуймо для прикладу поле поверхні кулі з радіусом
в 10 сантиметрів. Поле великого круга такої кулі буде:
 $\pi \times 10^2 = \frac{22}{7} \times 10 \times 10 = \frac{22}{7} \times 100 = \frac{2200}{7}$ квад. сант.,
а значить поверхня кулі буде:

$$\frac{2200}{7} \times 4 = \frac{2200 \times 4}{7} = \frac{8800}{7} = 1257\frac{1}{7} \text{ квадратних сантиметрів.}$$

Задачі на обрахунок.

67. Скільки потрібно сухої фарби (краски), щоб пофарбувати
(покрасити) 70 залізних цегер, з котрих кожне має форму стятого
круглого конуса з радіусами основ в 15 сант. та в 10 сант.

і з косою вишиною в 30 сантиметрів, коли рахувати, що на 1 квадратний метр заліза потрібно 50 грамів фарби та що кожне цебро має бути пофарбоване з окола і з середини? (При обрахунку не брати на увагу різниці між полями зоколишньої та внутрішньої поверхні цебра.) (Відповідь: 1 кілограм 870 грамів.)

68. Радіус земної кулі має в собі (приближно) 6000 кілометрів. Вирахувати її об'єм та поверхню. (Відповідь: об'єм: 905142857143 кубних кілометри; поверхня: 452571428 квадрат. кіломет.)

69. В посуд, що має форму круглого циліндра з радіусом основи в 6 сантиметрів, в який наливо до якоїсь вишини води, кинуто залізну кулю; від того вода в посуді підняла ся на 1 сантиметр. Вирахувати радіус кулі. (Відповідь: 3 сантиметри.)

26. Поверхня та об'єм де-яких тіл оборотових.

В тих випадках, коли якесь тіло оборотове ніби складається з кількох тіл оборотових і притому таких, для яких ми уміємо обраховувати поверхні та об'єми, ми можемо обрахувати також поверхню та об'єм цілого такого тіла. Візьмемо приклад. Нехай нам треба обрахувати об'єм бляшаної сулії (бальзанки), яка виглядає так, як її показано на малюнку 88-му. Як бачимо, її об'єм складається з об'ємів трьох тіл: перша частина (I) уявляє з себе круглий циліндр, друга (II) — стятий конус, а третя (III) — знов круглий циліндр. Об'єм кожного з цих тіл зокрема ми можемо обрахувати, а коли сполучимо три числа, що визначать ці три об'єми в одно, то воно й покаже об'єм цілого сосуда в тих самих кубних мірах, в яких ми обраховували об'єми окремих частин. Та щоб обрахувати об'єм другої (II) частини сосуда, що уявляє з себе стятий конус, нам треба знайти вершок того повного конуса, якого частиною він є (дивись стор. 77.). Зробити це на самій сулії трудно, бо шийка її перешкоджатиме

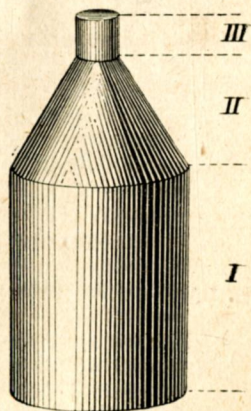


Рис. 88.

тому. Коли якісь обміри незручно робити на самій речі, то в такому разі роблять на папері рисунок її, звичайно в зменшеному вигляді, а коли та річ невелика, то й в натуральній її

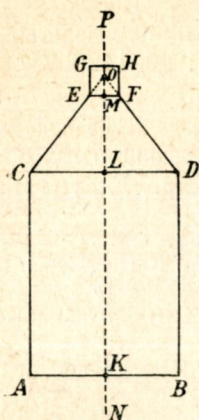


Рис. 89.
(Масштаб: $\frac{1}{10}$.)

великості. Так ми мусимо зробити і з нашою сулією, то-б то ми зробимо рисунок, який уявлятиме з себе, в зменшеному вигляді, ту сулію (Рис. 89.), або власне ту фігуру, яка обертаючись круг осі PN , утворить слідом кожної своєї половини таке саме тіло, як наша сулія. Коли ми хочемо, щоб усі лінійні проміри сулії були зменшені на рисункові наприклад в 10 раз, то ми мусимо замість 1 сантиметра кожного лінійного проміра самої сулії відмірювати на рисункові 1 міліметр (бо 1 міліметр = $\frac{1}{10}$ сантиметра). Тоді, як кажуть, *масштаб* нашого рисунка

буде: $\frac{1}{10}$ (або 1 : 10). Отже нехай розміри сулії будуть такі (Рис. 88.): Поперечник дна (нижньої основи циліндра): 30 сантиметрів; вишина циліндричної частини: 40 сантиметрів; вишина стятого конуса: 16 сантиметрів; поперечник циліндричної шийки: 6 сантиметрів; вишина шийки: 6 сантиметрів. В такому разі наш рисунок (Рис. 89.) матиме такі проміри:

лінія AB (поперечник дна)	30 міліметрів
„ LK (вишина циліндричної частини)	40 „
„ ML (вишина стятого конуса)	16 „
„ EF (поперечник шийки)	6 „
„ GE (вишина шийки)	6 „

Коли тепер на нашому рисункові (Рис. 89.) продовжимо лінії CE та DF до точки, в якій вони перетнуться, то-б то до точки O , то ця точка і буде вершком повного конуса, а лінія OL вишиною його. Помірявши лінію OL , ми побачимо, що вона має в собі 20 міліметрів, а позаяк масштаб нашого рисунка є $\frac{1}{10}$, то, значить, в натурі вишина того конуса має

20 сантиметрів; вишина ж того конуса, який треба відтяти від нього, щоб остався стятий конус сулії (на рисункові лінія OM), буде 20 сант. — 16 сант. = 4 сантиметрів. Отже тепер ми маємо усі проміри для того, аби обрахувати об'єм сулії. Об'єм циліндричної частини буде (в кубних сантиметрах):

$$\pi \times KB^2 \times LK = \frac{22}{7} \times \frac{30}{2} : \frac{30}{2} \times 40 = \frac{22 \times 15 \times 15 \times 40}{7} = \frac{198000}{7} \text{ куб.}$$

санти. = $28285\frac{5}{7}$ куб. санти. Об'єм частини, що уявляє з себе стятий конус дістанемо, коли від об'єма повного конуса (OCD на рис. 90.) віднімемо об'єм стятої його частини, яка є теж повний конус (OEF на рис. 90.). То б то цей об'єм буде:

$$\left(\pi \times LD^2 \times \frac{OL}{3} \right) - \left(\pi \times MF^2 \times \frac{OM}{3} \right) = \frac{22 \times 15 \times 15 \times 20}{7.3} - \frac{22 \times 3 \times 3 \times 4}{7.3} = \frac{33000}{7} - \frac{264}{7} = \frac{33000 - 264}{7} = \frac{32736}{7} = 4676\frac{4}{7} \text{ куб.}$$

санти. Об'єм шийки буде:

$$\pi \times MF^2 \times GE = \frac{22}{7} \times 3 \times 3 \times 6 = \frac{22 \times 3 \times 3 \times 6}{7} = \frac{1188}{7} = 169\frac{5}{7} \text{ куб.}$$

санти. Значить цілий об'єм сулії буде:

$$28285\frac{5}{7} \text{ куб. санти.} + 4676\frac{4}{7} \text{ куб. санти.} + 169\frac{5}{7} \text{ куб. санти.} = 33132 \text{ кубних сантиметра.}$$

Ми навмисне так докладно розібрали цей приклад, аби показати читачеві, як можна обраховувати об'єми (і поверхні) таких тіл, які складаються з частин, що по своїй формі уявляють з себе знайомі нам тіла.

Задачі.

Для розв'язання кожної з цих задач треба зробити собі на папері, по можливості точно, такий самий рисунок, як той, що його подано тут до кожної з задач, в такому самім масштабі, як і тут; на такому рисунку можна буде робити мірочкою ті обміри, які потрібні для обрахунку об'єма та поверхні, дорисовуючи ті лінії, яких нема на наших рисунках, а які для того потрібні. Рисунки, на яких уже показано всі потрібні нам розміри, можна і не перерисовувати. Під кожним з рисунків зазначено його масштаб (то б то: в скільки раз зменшено всі лінійні розміри на рисункові проти їх справжньої великості), а на

самих рисунках поставлено числа, які показують в сантиметрах або в метрах справжні розміри.

70. Скільки літрів можна влити в посуд, що має форму тіла, яке походить від обертання показаної на рисунку 90-му фігури круг осі MN , коли налити його вщерть? *)

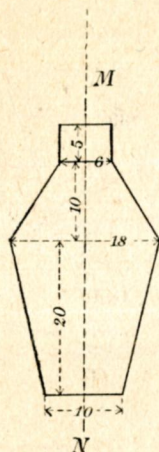


Рис. 90.
(Масштаб: $\frac{1}{10}$.)

Увага. Літр є міра, метричної таки (французької) системи, для плинних (текучих) тіл, як от наприклад вода, олія, нафта та інші, а також для синучих, як от всяке зерно та насіння. Літр по об'єму є рівний 1000 кубних сантиметрів, значить $\frac{1}{1000}$ кубного метра. Тому 1 літр чистої води важить 1 кілограмм (1000 грамів).

71. Скільки цегли потрібно для того, щоб вимуровати басейн, який мав би форму тіла, що походить від обертання фігури, показаної на рисунку 91-му, круг осі MN , коли рахувати, що на 1 кубний метр муру потрібно 300 цеглин? (Відповідь: 8963 цеглини, коли прийняти $\pi = \frac{22}{7}$ і доповнити число до цілого, відкинувши дріб.)

72. Обрахуйте, скільки літрів води вміщає басейн, про який була мова в попередній задачі (Рис. 91.), коли в ньому вода не доходить до краю на 40 сантиметрів (на 0,4 метра), а також скільки та вода важить?

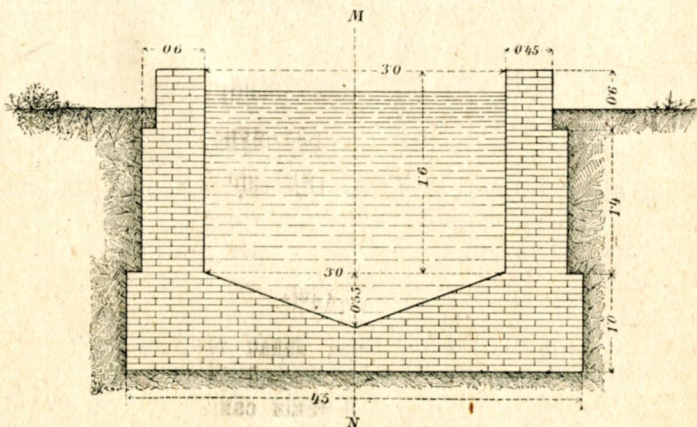


Рис. 91. (Масштаб: $\frac{1}{30}$.)

*) Ми не даємо відповіді на цю задачу, бо точність її залежить від того, як точно будуть зроблені ті поміри, які не зазначено на рисунку (Рис. 91.), а значить і від того, як точно зробить собі такий рисунок той, хто розв'язуватиме цю задачу: Що ретельніше буде зроблено той рисунок, то точніше буде відповідь. І далі ми не даємо відповіді на подібні задачі.

(Відповідь: 12611 літрів; вага води: 12611 кілограммів або 12 тонн 611 кілограммів.)

73. Скільки важить (в кілограммах) залізний вал, що має форму тіла, яке походить від обороту фігури, показаної на рисунку 92-му,

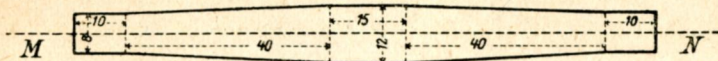


Рис. 92. (Масштаб: $\frac{1}{10}$.)

круг осі MN , коли відомо, що 1 кубний сантиметр заліза важить 7,8 грамма?

74. Обрахуйте, з якою силою (в кілограммах) тисне своєю вагою на кожний квадратний метр ґрунту, на якому він стоїть, басейн, про який говориться в задачі 71-ї, налитий щідь водою. При обрахунку треба брати, що 1 кубний метр води важить 1000 кілограммів (1 тону), а 1 кубний метр муру — 1600 кілограммів. (Відповідь: 1277,5 кілограмма.)

75. Обрахуйте об'єм та поверхню тіл, що походять від обороту круг осі MN кожної з фігур, показаних на рисунку 93-му. (В натуральному розмірі. Цифри визначають число сантиметрів.)

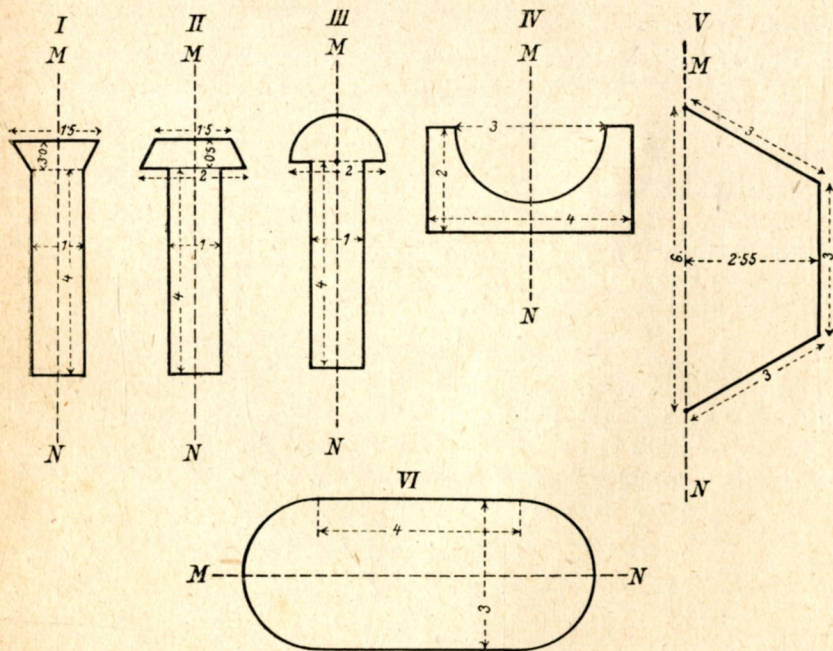


Рис. 93.

Оглав.

Вступ.

	Стор.
Плоскі та неплоскі геометричні фігури	1
Два розділи геометрії	2

I. Точки та лінії на площі.

1. Точки на простій	3
2. Точки на обводі замкненої фігури	4
3. Лучі	5
4. Кути суміжні	8
5. Кути вершкові	9
6. Кути біля точок перетину двох рівнобіжних прямих, перетятих третьою	10
7. Кути з взаємно рівнобіжними або взаємно перпендикулярними раменами	11

II. Замкнені простолінійні фігури.

8. Кути трикутника	13
9. Кути чотирикутника	16
10. Кути многокутника	18
11. Зміна форми многокутника	22

III. Коло.

12. Дуги кола	28
13. Проста лінія і коло на площі	33
14. Тангенти	35
15. Дотична кола	38
16. Спряження простої з кривою	43
17. Кола на площі	45

IV. Сімметрія.

18. Фігури на площі, симметричні відносно точки	48
19. Сімметрія відносно простої лінії	56
20. Геометричні фігури самі в собі симметричні відносно осей	63
21. Сімметрія в просторі відносно площі	65
22. Геометричні фігури самі в собі симметричні відносно площі	67

V. Тіла оборотові.

23. Циліндр та конус, як тіла оборотові	69
24. Стягний конус	73
25. Кулі	77
26. Поверхня та об'єм тіл оборотових	85

Видавництво
„ДЗВІН“ і „УКРАЇНСЬКА ШКОЛА“
видало такі підручники:

- Я. Чепіга.** Задачник для початкових шкіл. Рік I. Видання 3-^є.
Його-ж. Задачник для початкових шкіл. Рік II. Видання 3-^є.
Його-ж. Задачник для початкових шкіл. Рік. III.
Його-ж. Арифметичні правила, для початкових шкіл. Вид. 2-^є.
Його-ж. Букварь для дорослих.
Його-ж. Читанка для дорослих.
С. Черкасенко. Початок. Граматика. Видання 3-^є.
Його-ж. Рідна школа. Читанка, ч. I. Видання 3-^є.
Його-ж. Рідна школа. Читанка, ч. II. Видання 2-^є.
Його-ж. Рідна школа. Читанка, ч. III. і IV.
Його-ж. Найпотрібніші правила правопису. Частина I. і II.
О. Коваленко. Геометрія для вищих шкіл початкових і перших
клас шкіл середніх, ч. I.
Його-ж. Практична геометрія, ч. II., для вищих шкіл початкових
і середніх.
Юр. Сірий. Про світ Божий. (Бесіди по природознавству.) Вид. 3-^є.
Його-ж. Життя рослин. (Анатомія і фізіологія рослин.) Вид. 2-^є.

Головний склад міститься в Київі, Бесарабська площа, ч. 2.
Видавництво „Дзвін“, і Українська Школа“.

Видавництво „ДЗВІН“ і „УКРАЇНСЬКА ШКОЛА“

має контору і головний склад видань у **Київі, Бесарабська площа, ч. 2.**

Хто хоче замовляти більшу кількість книг і підручників для продажу, для шкіл та бібліотек, має звертатись з замовленнями по такій адресі: **Київ, Бесарабська площа, ч. 2.**

(Площа Богдана Хмельницького), **Т-во „Дзвін“.**

Приймаються замовлення на складання бібліотек для урядових інституцій, земств, товариств, початкових і середніх шкіл. Бібліотеки складаються під доглядом педагогів і знавців сього діла. Замовлення виконуються по можливості скоро і совістно.

Книгарням і земствам звичайний опуст (знижка). Пересилка на рахунок покушця.

Книгарня Т-ва „ДЗВІН“

у Харкові, Петровський пров., 18.,

має на складі всі видання „Дзвону“ і „Української Школи“ і є головним складом для Слобідської України.

Книгарня „Дзвін“ у Харкові має в продажу всі книжки, які виходять на Україні і за кордоном.

Всі підручники для шкіл нижчих і середніх можна одержувати з Харківської книгарні „Дзвін“. Замовлення виконуються негайно.

Адреса: **Харків, Петровський пров., 18., Українська книгарня „ДЗВІН“.**

Увага.

Незалежно од видавництва в сій книжці трапились похибки:

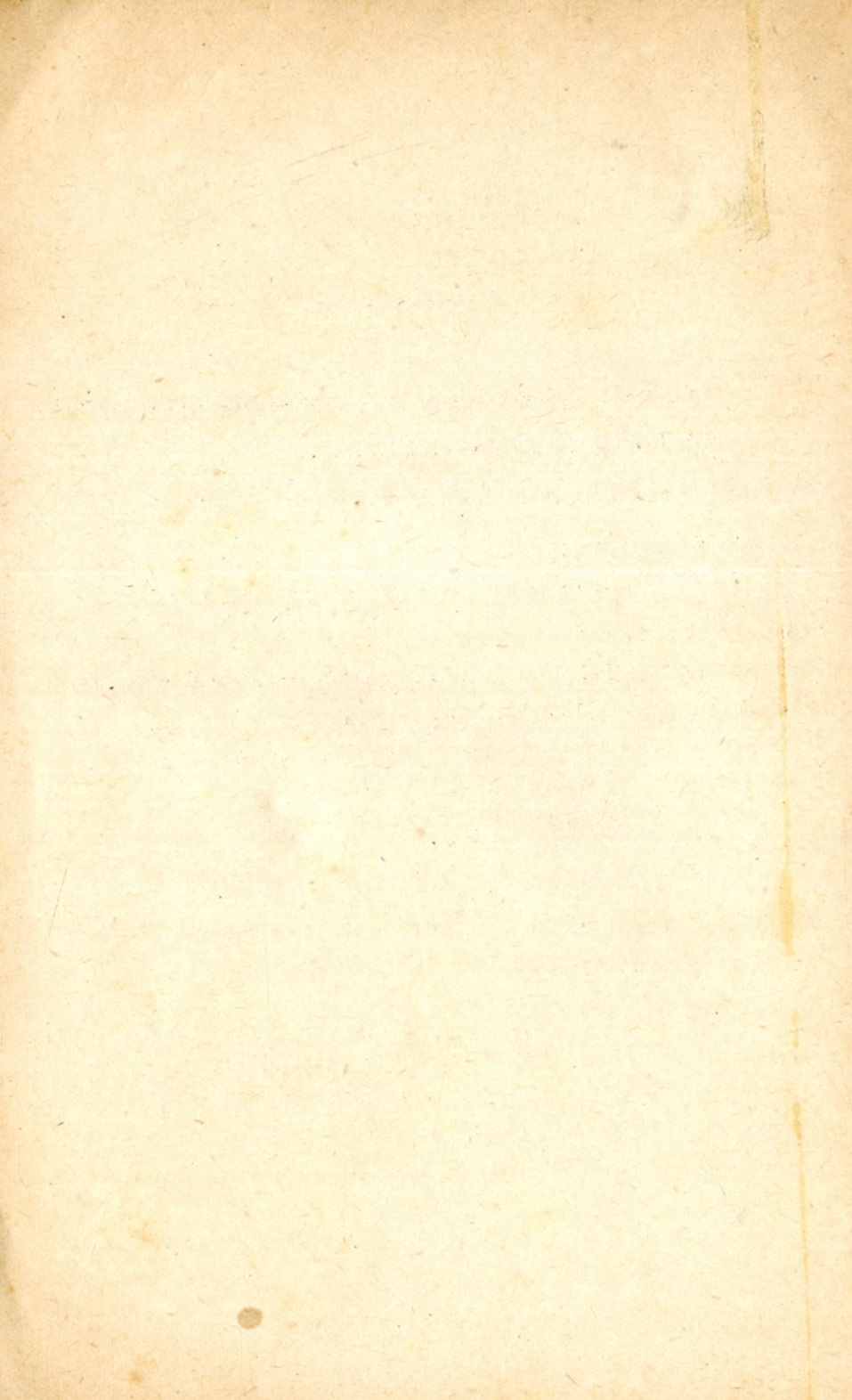
Ст. 65, 1. рядок зверху надруковано:

Маємо правильний шостистінник

треба виправити:

маємо правильну шостистінну призму.

Ст. 80. уміщено на малюнку 85. не Педагогічний Музей у Києві, а инший подібний до його по структурі будинок.



Видавництво
„ДЗВІН“ і „УКРАЇНСЬКА ШКОЛА“
видало такі підручники:

- Я. Чепіга.** Задачник для початкових шкіл. Рік І. Видання 3-є.
- Його-ж.** Задачник для початкових шкіл. Рік II. Видання 3-є.
- Його-ж.** Задачник для початкових шкіл. Рік. III.
- Його-ж.** Арифметичні правила, для початкових шкіл. Вид. 2-є.
- Його-ж.** Букварь для дорослих.
- Його-ж.** Читанка для дорослих.
- С. Черкасенко.** Початок. Граматика. Видання 3-є.
- Його-ж.** Рідна школа. Читанка, ч. I. Видання 3-є.
- Його-ж.** Рідна школа. Читанка, ч. II. Видання 2-є.
- Його-ж.** Рідна школа. Читанка, ч. III. і IV.
- Його-ж.** Найпотрібніші правила правопису. Частина I. і II.
- О. Коваленко.** Геометрія для вищих шкіл початкових і перших
клас шкіл середніх, ч. I.
- Його-ж.** Практична геометрія, ч. II., для вищих шкіл початкових
і середніх.
- Юр. Сірий.** Про світ Божий. (Бесіди по природознавству.) Вид. 3-є.
- Його-ж.** Життя рослин. (Анатомія і фізіологія рослин.) Вид. 2-є.

Головний склад міститься в Києві, Бессарабська площа, ч. 2.

Видавництво „Дзвін“ і Українська Школа“.

2 грн
2022001

II

882.032/2

Видавництво „ДЗВІН“ і „УКРАЇНЬСЬКА ШКОЛА“

має контору і головний склад видань у Києві, Бесарабська площа, ч. 2.

Хто хоче замовляти більшу кількість книг і підручників для продажу, для шкіл та бібліотек, має звертатись з замовленнями по такій адресі: **Київ, Бесарабська площа, ч. 2.**
(Площа Богдана Хмельницького), Т-во „Дзвін“.

Приймаються замовлення на складання бібліотек для урядових інституцій, земств, товариств, початкових і середніх шкіл. Бібліотеки складаються під доглядом педагогів і знавців справи. Замовлення виконуються по можливості скоро і совісно. Книгарням і земствам звичайний опуст (знижка). Пересилка за рахунок покупця.

Книгарня Т-ва „ДЗВІН“

у Харкові, Петровський пров., 18.,

має на складі всі видання „Дзвону“ і „Української Школи“ і є головним складом для Слобідської України.

Книгарня „Дзвін“ у Харкові має в продажу всі книжки, які виходять на Україні і за кордоном.

Всі підручники для шкіл нижчих і середніх можна одержувати з Харківської книгарні „Дзвін“. Замовлення виконуються негайно.

Адреса: **Харків, Петровський пров., 18., Українська книгарня „ДЗВІН“.**

832

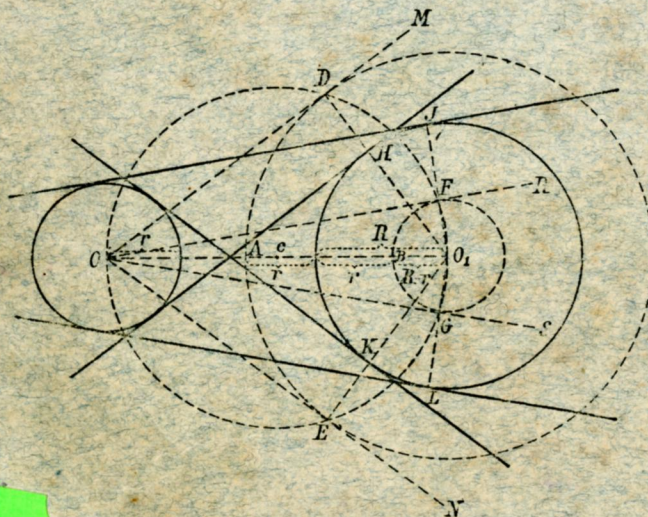
Т-во „ДЗВІН“

Видавництво „УКРАЇНЬСЬКА ШКОЛА“

з редакцією С. Русової, Ю. Сірого, Я. Чепіги і С. Черкасенка

ОЛЕКСАНДЕР КОВАЛЕНКО

ПРАКТИЧНА
ГЕОМЕТРІЯ
ЧАСТИНА II.



ВІДЕНЬ 1919

Видавництво книжок шкільних.